

# **VOLUMEN IV**

**Análisis de Empresa**

**Métodos Estadísticos y Econométricos**

**IX REUNION ASEPELT - ESPAÑA  
Santiago 22 y 23 de junio de 1995**

**CATEDRA DE ECONOMETRIA  
FAC. ECONOMICAS Y EMPRESARIALES  
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO**

**Edita:** ASEPELT-ESPAÑA. Santiago de Compostela

**Diseño Portada:** Mila Vázquez

**ISBN:** 84-605-3304-2  
84-605-3308-5

**Dep. Legal:** C.847/95

**Imprime:** Grafinova, S.A.

## **COMITE ORGANIZADOR**

### **Presidenta:**

Dña. M<sup>a</sup> Carmen Guisán Seijas  
Catedrática de Econometría  
Universidad de Santiago de Compostela

### **Miembros:**

Dña. M<sup>a</sup> Teresa Cancelo Márquez  
Dña. M<sup>a</sup> Emilia Vázquez Rozas  
D. Isidro Frías Pinedo  
Dña. Ana Iglesias Casal  
D. Agustín Ramos Calvo

### **Secretaria**

Isabel Neira Gómez

## **MIEMBROS DEL COMITE CIENTIFICO:**

Dña. M<sup>a</sup> Carmen Guisán Seijas  
D. José Carlos de Miguel Domínguez  
D. José María Riobóo Almanzor  
D. Rafael Herrerías Pleguezuelo  
D. José Bernardo Pena Trapero  
D. Miguel Roig Alonso  
D. Antonio García Lizana

## **Presidentes de las mesas de ANALISIS DE EMPRESA:**

**Arasa Medina, Carmen**

Catedrática de Economía Aplicada.  
Universidad Nacional de Educación a Distancia.

**Callealta Barroso, Francisco Javier**

Catedrático de Economía Aplicada.  
Universidad de Alcalá.

**Rincón Vega, José Miguel**

Catedrático de Economía Aplicada.  
Universidad del País Vasco.

## **Presidentes de las mesas de METODOS ESTADISTICOS Y ECONOMETRICOS:**

**Herrerías Pleguezuelo, Rafael**

Presidente de Asepelt - España  
Catedrático de Economía Aplicada (Estadística Económica).  
Universidad de Granada.

**Murguá Izquierdo, Santiago**

Catedrático de Economía Aplicada (Estadística Económica).  
Universidad de Valencia.

**Olave Rubio, Pilar**

Catedrática de Economía Aplicada.  
Universidad de Zaragoza.

**Rojo García, José Luís**

Catedrático de Economía Aplicada.  
Universidad de Valladolid.



# VOLUMEN IV

## INDICE

### ANALISIS DE EMPRESA

#### 1. INVERSION Y MERCADOS FINANCIEROS. BANCA.

|  |    |
|--|----|
| Arévalo Quijada, M <sup>a</sup> Teresa y Zapata Reina, Asunción:<br><i>Determinación de soluciones en programación fraccionada lineal multiobjetivo con distintos denominadores</i>                          | 1  |
| Arques Pérez, Antonio , Calvo-Flores Segura, Antonio y García Pérez de Lema, Domingo:<br><i>Comportamiento Estadístico de los Ratios Económico-Financieros en el Marco de la Predicción de la Solvencia.</i> | 15 |
| Fernández Geniz, Patrocinio, Gómez Domínguez, M <sup>a</sup> Dolores y Vazquez Cueto, María José:<br><i>Banesto: "Una Intervención Anunciada".</i>   | 27 |
| García Blandón, Josep :<br><i>Banca Extranjera: un Análisis Empírico de su Expansión Reciente en España</i>  | 39 |
| García Lopera, Francisca M <sup>a</sup> y Rodríguez Aviles, Rafael::<br><i>Operaciones Financieras de Préstamo bajo la Óptica del Análisis Dinámico.</i>   | 51 |
| González Cuervo, Gregoria Margarita:<br><i>Las Cajas de Ahorros: Futuro y Competitividad .</i>   | 59 |
| Lastres Segret, José Antonio:<br><i>Consideraciones Acerca del Coeficiente de Garantía.</i>  | 69 |
| Maudos Villarroya, Joaquín y Pastor Monsalvez, José Manuel::<br><i>Economías de Gama en la Prestación de Servicios Bancarios: Cajeros Automáticos Versus Oficinas.</i>                                       | 81 |
| Palacios González, Federico y Ramos, Antonio :<br><i>Análisis del Mecanismo de Compensación de Errores en el Pert Clásico: una Solucion Alternativa.</i>   | 91 |

|  |     |
|--|-----|
| Palma Martos, Luis y Palma Martos, María Luisa:<br><i>Especulación y Asignación de Recursos: una Aproximación desde la Óptica de Mercados de Futuros.</i>  | 101 |
| Rodero Franganillo, Adolfo:<br><i>Las Fusiones de Cajas de Ahorros: el Caso de las Cajas Cordobesas.</i>   | 111 |
| Andujar Rodríguez, Antonio Serafín, Cruz Rambaud, Salvador y García Pérez, José:<br><i>Bases para una Propuesta Metodologica de Evaluación Cuantitativa de la Fiabilidad del Control Interno en Auditoría.</i> | 123 |

## 2. ESTRATEGIAS EMPRESARIALES Y ACTUACION DE MERCADO.

|   |     |
|---|-----|
| Albaladejo Pina, Isabel Pilar y Díaz Delfa, M <sup>a</sup> Teresa:<br><i>Una Valoración Espacial de los Almacenes Desagregada por Tipologías de Consumidores.</i> | 133 |
| Areitio Bertolin, Ana María<br><i>El Groupware y el Marketing Colaborando en un Modelo de Calidad.</i>  | 145 |
| García Clavel, José :<br><i>Aplicación del Análisis de Correspondencias a la Diferenciación de Clientes.</i>  | 157 |
| García Güemes, Alfredo:<br><i>Planteamiento de un Modelo Dinámico de Mantenimiento, Publicidad y Producción.</i>  | 169 |
| González de la Fe, Pedro:<br><i>La Influencia de la Privatización en la Gestión de las Empresas: Estudio del Caso Seat S.a.</i>                                   | 177 |
| Jiménez Zarco, Ana Isabel:<br><i>Internalización e Imagen de Marca.</i>   | 189 |
| López de Vicuña Arcauz, Fernando :<br><i>El Enfoque Analítico de las Listas de Espera Hospitalarias. El Caso del Hospital Aranzazu de San Sebastián.</i>          | 199 |
| Gamero Rojas, Javier y Sánchez Montero, Jesús M:<br><i>Una Optimización de Precios: Caso Monoproducto y Monoetápico con Demanda Potencial-Normal.</i>             | 211 |
| Quesada González, José Luis y Suárez Moreno, Carmen:<br><i>Estrategias Comerciales sobre Exclusividad de Marca. Una Aplicación al Sector</i>                      | 219 |

Textil.

### 3. ORGANIZACION DE EMPRESA E INDUSTRIAL

|  |     |
|--|-----|
| Alaez Aller, Ricardo, Bilbao Ubillos, Javier y Longas García, Juan Carlos:<br><i>Tendencias en la Evolución Cualitativa de las Relaciones entre Fabricantes y Proveedores del Sector de Automoción: caso del País Vasco y Navarra.</i> | 231 |
| González Moreno, Ángela y Ruiz Amaya, Carmen:<br><i>La actividad Innovadora: un Imperativo en el Nuevo Entorno Competitivo.</i>  | 239 |
| González Simón, Miguel:<br><i>El Liderazgo en las Empresas de Éxito. Diseño Estratégico del Comportamiento del Empresario para conseguir una Organización Exitosa.</i>   | 249 |
| López Ares, Susana y Sánchez Álvarez, Isidro:<br><i>Planificación de Personal en un Centro de Marketing Telefónico.</i>  | 261 |
| Lozano Mosterin, Jesús:<br><i>Introducción al Análisis de Eficiencia DEA.</i>  | 273 |
| Delgado Serna, Cristina R. y Pacheco Bonrostro, Joaquín A.:<br><i>Problemas de Rutas con Carga y Descarga en Sistemas Lifo: Algoritmos Heurísticos</i>   | 283 |
| Rincón Vega, José Miguel:<br><i>Evaluación del Rendimiento de los Sistemas de Información.</i>   | 297 |

### METODOS ESTADISTICOS Y ECONOMETRICOS

#### 1. METODOS DE ESTADISTICA ECONOMICA

|   |     |
|---|-----|
| Buendía Moya, Fulgencio y Gómez García, Juan:<br><i>Estudio del Proceso estocástico logarítmico-normal unidimensional con factores exógenos como solución de una ecuación de Ito.</i> | 311 |
| Aranda Gallego, Joaquín y Parra Frutos, Isabel:<br><i>Modelos de redes de colas. Un análisis introductorio.</i>   | 319 |

|  |     |
|--|-----|
| Beamonte Córdoba, Eduardo:<br><i>Un modelo jerárquico para el análisis bayesiano de datos de supervivencia gamma con covariables.</i>  | 331 |
| Callejón Céspedes, José:<br><i>Función generadora de una Curva de Lorenz.</i>  | 343 |
| Camúñez Ruiz, José Antonio, Pérez Hidalgo, María Dolores y Silva Pérez, M. C.:<br><i>Depuración e imputación de datos: aplicación practica al censo de población y vivienda de 1991 en la provincia de Huelva.</i> | 350 |
| Cuenca Tadeo, José Luis y Reyes Molero, María Carmen:<br><i>Nuevos métodos de análisis financiero.</i>   | 361 |
| Del Sur Mora, Ana, Del Barrio Castro, Tomás y Pons Fanals, Ernest:<br><i>Desagregación temporal de la renta bruta disponible real de las familias.</i>   | 379 |
| Gómez Deniz, Emilio, Vázquez Polo, Francisco José y Guerra Quintana, Nicanor:<br><i>Un modelo de clases de contaminaciones en teoría de la credibilidad.</i>   | 391 |
| Hernández López, Montserrat y López Martín, Luis Javier:<br><i>Nueva técnica no jerárquica de clasificación de datos.</i>  | 399 |
| Herrerías Pleguezuelo, Rafael:<br><i>Un nuevo uso de las tres estimaciones subjetivas del Pert.</i>  | 411 |
| Lafuente Lechuga, Matilde y Sánchez Martínez, Antonio:<br><i>Estimación de la Curva de Lorenz a través de una nueva forma funcional.</i>   | 417 |
| Murgui Izquierdo, Santiago y Aybar Arias, Cristina:<br><i>Estimadores de Regresión y Razón para Proporciones.</i>  | 425 |
| Murillo Viu, Joaquín:<br><i>Estimaciones del patrimonio. Aproximación metodológica y aplicación al caso de las infraestructuras en carreteras.</i>   | 433 |
| Pérez Rodríguez, Eduardo:<br><i>Ajuste de un modelo beta con información adicional sobre su apuntamiento.</i>  | 445 |
| Vargas Vargas, Manuel y Gámez Martínez, Matías:<br><i>Modelización dinámico-bayesiana de series temporales univariantes.</i>   | 453 |

## 2. PROBLEMAS METODOLOGICOS DE LA ECONOMETRIA.

|  |     |
|--|-----|
| Martín Álvarez, Francisco Javier y Cano Fernández, Víctor:<br><i>Una nota sobre los contrastes de raíces unitarias estacionales.</i>                                   | 465 |
| Miguel Álvarez, Jesús Ángel:<br><i>Predicción en modelos arch-M.</i>   | 477 |
| Pérez Gracia, Julián:<br><i>Contrastes de cambio estructural basados en el método de estimación paramétrica ponderada.</i>   | 487 |
| Ramírez Sobrino, Jesús N y Pérez Hernández, Pedro P.:<br><i>Modelos lineales generalizados (glms) en el análisis de la economía regional y urbana.</i>                 | 499 |
| Sierra Martínez, Francisco Javier:<br><i>Mensualización e integración de datos bimensuales y opinión empresarial. Una propuesta metodológica.</i>                      | 509 |
| Suárez Riestra, M. Cristina y Mayo Rodríguez, J.L.:<br><i>Predicciones a largo plazo de una serie temporal modelizada en espacio de estado balanceado.</i>             | 521 |
| De la Fuente García, David y Pino Diez, Raúl:<br><i>Previsión de series no estacionarias mediante algoritmos adaptativos y redes neuronales artificiales.</i>          | 533 |
| Fernández, Mario Francisco y Vilar Fernández, Juan María:<br><i>Regresión local ponderada bajo condiciones generales. Estudio de un caso económico.</i>                | 545 |
| Sansó Rosselló, Andreu, Artis Ortuño, Manuel, y Suriñach Caralt, Jordi:<br><i>Una nota sobre el contraste de relaciones de cointegración entre índices de precios.</i> | 559 |



# **DETERMINACION DE SOLUCIONES EN PROGRAMACION FRACCIONADA LINEAL MULTIOBJETIVO CON DISTINTOS DENOMINADORES**

**AREVALO QUIJADA, M<sup>a</sup> TERESA y ZAPATA REINA, ASUNCION**  
Facultad de CEYE. Universidad de Sevilla

## **1. INTRODUCCION**

Desde la publicación de un artículo de Isbell y Marlow (1956) en el que tratan un problema de programación restringida con objetivos fraccionados, han aparecido en este campo un número considerable de artículos. Estos problemas de optimización, caracterizados por uno o varios cocientes de funciones, reciben el nombre de problemas de programación fraccionada o, como sugirieron Charnes y Cooper en un clásico artículo de 1962, programas de funcionales fraccionados. Ocasionalmente se usa el término de programación hiperbólica.

En 1978 se publica la primera monografía dedicada exclusivamente al tema, que proporciona un detallado examen de las potenciales aplicaciones de la programación fraccionada. Schailable, en 1981 presentó una monografía extensiva y exhaustiva de problemas de decisión que dan origen a un problema de este tipo. Posteriormente, han aparecido resúmenes de éstas y otras aplicaciones.

Los problemas de programación fraccionada aparecen en múltiples circunstancias de la vida empresarial al igual que en otras áreas, ya que muchos indicadores trascendentes para evaluar actividades económicas vienen expresados matemáticamente mediante un cociente, por ejemplo, la producción por empleado, inventario por ventas, beneficios por costes, liquidez, productividad, etc.

Todas las aplicaciones mencionadas anteriormente se han planteado por medio de la forma tradicional, es decir, se consideran problemas de decisión abordados mediante la programación matemática. En ellos, se establece la solución óptima como aquella solución factible para la que la función objetivo alcanza un valor óptimo. Sin embargo, la realidad económica rara vez presenta un único objetivo como objeto de optimización. La toma de decisiones se presenta tanto de forma individual como en grandes grupos de personas y sociedades y, en general, el decisor requiere evaluar actividades económicas conjuntamente tales como producción por empleado, beneficio por empleado, etc, con respecto a ciertas restricciones. Estas actividades representan frecuentemente objetivos en conflicto, lo cual implica la imposibilidad de optimizar simultáneamente.

Friedman, en su texto "Teoría de los precios", editado en 1972, enfatiza el carácter multicriterio de problemas económicos. Este enorme interés por la decisión multicriterio comenzó con

los trabajos de Koopmans (1951), Kuhn y Tucker (1951) y Charnes, Cooper y Ferguson (1955). Se han publicado artículos sobre la programación multiobjetivo fraccionada desde finales de los setenta y principios de los ochenta, época en la que destacan como importantes autores Kornbluth y Steuer (1981a,1981b). El análisis de problemas decisionales con criterios múltiples constituye el área de investigación más activo en los últimos años en el campo de las ciencias de la decisión (investigación operativa, gestión de recursos, etc.).

En particular, encontramos muchos autores que estudian problemas en los que aparecen varios criterios cocientes. La programación multiobjetivo fraccionada, dentro de la teoría decisional, se puede aplicar a un amplio campo de problemas en empresas públicas y privadas: en dirección de empresas, planificación de producción, inventario, administración educacional y análisis de empresas financieras.

Como aplicación de los problemas de programación fraccionada lineal multiobjetivo con distintos denominadores, Choo y Atkins (1982) presentan un estudio de inversiones que plantean como un problema fraccionado biobjetivo.

Una empresa tiene activos de caja existentes de 0.1 u.m. y una base patrimonial de 0.1 u.m. Durante el primer año es posible realizar una inversión  $X \leq 1$  que da un beneficio del 10% en el año 2, momento en el que está disponible un segundo proyecto de inversión  $Y \leq 2$  que da el 20% de beneficio pasado un año. El efectivo se puede reinvertir en el segundo año o pagar como dividendos (D1) a los accionistas existentes. Todo el efectivo restante al final del segundo año se distribuye como dividendos (D2). Se pueden invertir nuevos fondos (S1 y S2) con un límite de 2. Deseamos maximizar el dividendo por participación para ambos períodos. Así tenemos el siguiente problema:

$$\max [D1/(0.1+S1), D2/(0.1+S1+S2)]$$

$$\text{s.a. } X \leq 0.1+S1$$

$$Y+D1 \leq 1.1X+S2$$

$$D2 = 1.2Y$$

$$0 \leq X \leq 1, 0 \leq Y, S1, S2 \leq 2$$

Como es deseable tener  $X=0.1+S1$  y  $D1=1.1X+S2-Y$  (es decir, su límite superior), entonces el problema se simplifica, quedando en función de tres variables, como sigue:

$$\max [(0.1+1.1S1+S2-Y)/(0.1+S1), 1.2Y/(0.1+S1+S2)]$$

$$\text{s.a. } -1.1S1-S2+Y \leq 0.11$$

$$0 \leq S1 \leq 0.9, 0 \leq Y, S2 \leq 2$$

Intentaremos dar solución a este problema a través de los procedimientos que se describen a continuación.



## 2. DESCRIPCION DEL PROBLEMA

Un problema de programación fraccionada multiobjetivo (PFMO) se define de la siguiente forma:

$$\max \left( \frac{f_1(x)}{g_1(x)}, \frac{f_2(x)}{g_2(x)}, \dots, \frac{f_p(x)}{g_p(x)} \right) \text{ s.a. } x \in X$$

donde  $p \geq 2$ ,  $f_k$  y  $g_k$  son funciones reales y continuas,  $g_k(x)$  es no nula en todos los puntos de  $X$  para todo  $k=1, \dots, p$  y  $X = \{x \in \mathbb{R}^n / h_i(x) \leq b_i, i=1, \dots, m\}$ .

El caso que nos ocupa es el de la programación fraccionada lineal multiobjetivo (PFLMO):

$$\begin{aligned} \max \left[ q_1(x) = \frac{c^1 x + \alpha_1}{d^1 x + \beta_1}, \dots, q_p(x) = \frac{c^p x + \alpha_p}{d^p x + \beta_p} \right] \\ \text{s. a. } x \in X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b, x \geq 0, A \in M_{m,n}, b \in \mathbb{R}^m \right\} \end{aligned}$$

donde  $X$  es un conjunto no vacío, acotado y tal que no hay en él ningún punto que anule los denominadores.

El economista italiano Vilfredo Pareto en 1896 introdujo dentro del marco de la economía del bienestar un concepto que ha recibido su nombre y que se considera crucial en teoría económica: la eficiencia paretiana, que es condición necesaria para poder garantizar la racionalidad de las soluciones generadas por los diferentes enfoques multicriterios. Dado que en  $\mathbb{R}^n$  no existe orden, no puede existir solución óptima en el sentido de la programación uniobjetivo ya que no todos los puntos de  $\mathbb{R}^n$  son comparables. Y dado que los objetivos suelen estar en conflicto, en general, no es posible encontrar una solución que maximice todos los atributos simultáneamente, ésta sería la solución ideal. Por ello se define la solución eficiente de la siguiente forma. Un conjunto de soluciones es eficiente o no dominado, si está formado por soluciones factibles tales que no existe otra solución factible que proporcione una mejora en un atributo sin producir un empeoramiento en al menos otro atributo. Podemos expresar esta definición analíticamente como aparece a continuación:

**Definición 1.-** Se dice que  $x \in X$  es solución eficiente o no dominada del problema descrito antes si no existe  $y \in X$  tal que  $q_j(x) \leq q_j(y)$  para todo  $j=1, \dots, p$  y  $q_i(x) < q_i(y)$  para al menos un  $i \in \{1, \dots, p\}$ . El conjunto de puntos eficientes se denota  $E$ .

## 3.- PROCEDIMIENTOS DE SOLUCION

Los procedimientos que vamos a utilizar pueden encuadrarse en los que se denominan métodos interactivos. En un proceso interactivo existen tres entidades participantes: el decisor, el analista y el modelo. A partir del modelo, el analista obtiene una solución inicial que se presenta al decisor para su evaluación al que no se le pide que exprese sus preferencias absolutas, sino alguna

información sobre sus preferencias relativas con respecto a la solución presentada por el analista. Este proceso interactivo e iterativo continúa hasta que el decisor considera que una solución es suficientemente buena, a la cual se denomina solución satisfactoria. Todos los métodos interactivos actúan de manera iterativa moviéndose de una solución eficiente a otra, de acuerdo con las respuestas que se obtienen del decisor mediante un diálogo computarizado en vez de explicitar a priori la información sobre sus preferencias.

Los métodos interactivos multicriterio se clasifican conforme al sistema de comunicación que se establece entre el decisor y el modelo a través del analista, es decir, según la información que se demanda del decisor. Consideramos los métodos interactivos multicriterio en los que sólo se pide al decisor cierta opinión sobre la aceptación o rechazo de una solución eficiente. Si la solución presentada no es aceptada, entonces el decisor debe indicar qué objetivos deben relajar su efectividad, para que otros mejoren.

### Método basado en las restricciones

Marglin (1967) demostró que si en un problema multiobjetivo se optimiza uno de los objetivos mientras que los demás se incorporan al conjunto de restricciones como restricciones paramétricas, se genera un punto eficiente. Así, dados los problemas

$$\begin{aligned}(P_k(\in)) \quad & \max q_k(x) \\ & \text{s.a. } h_i(x) \leq b_i, i=1, \dots, m, \\ & q_j(x) \geq \in_j, j=1, \dots, k-1, k+1, \dots, p\end{aligned}$$

se puede establecer el siguiente resultado.

**Teorema 1.-** Si  $x^*$  es solución óptima única de  $(P_k(\in))$  para algún  $k=1, \dots, p$ , entonces  $x^*$  es solución eficiente del problema de programación multiobjetivo.

Demostración.-

Sea  $x^*$  solución única del problema  $(P_k(\in))$ ,

entonces  $q_k(x) < q_k(x^*)$  para algún  $k=1, \dots, p$ , para todo  $x \in X$ ,  $q_j(x) \geq \in_j$ ,  $j=1, \dots, k-1, k+1, \dots, m$ , y además

$$x^* \in X, q_j(x^*) \geq \in_j, j=1, \dots, k-1, k+1, \dots, m.$$

Supongamos, por reducción al absurdo, que  $x^*$  es solución dominada del problema multiobjetivo. Eso significa que  $x^* \in X$  y existe  $x \in X$  tal que  $q_j(x^*) \leq q_j(x)$  para todo  $j=1, \dots, p$  y  $q_i(x^*) < q_i(x)$  para al menos un  $i \in \{1, \dots, p\}$ , entonces  $x$  es solución óptima del problema  $(P'_k(\in))$ , lo cual está en contradicción con el hecho de que  $x^*$  es solución única.

Este resultado nos permite hacer uso de un algoritmo interactivo, que resuelve problemas del tipo  $(P_k(\in))$  y, por tanto, proporciona soluciones eficientes.

### Algoritmo I

Paso 0.- Calcular los óptimos de cada criterio individual, resolviendo los siguientes problemas, mediante el algoritmo de Gilmore y Gomory (1963), o por medio de la transformación de Charnes y Cooper (1962), que lo convierte en un problema lineal.

$$\max q_i(x) \text{ s.a. } x \in X \text{ y } \min q_i(x) \text{ s.a. } x \in X, i=1, \dots, p,$$

obteniendo  $x_i^*$ ,  $q_i^*$  y  $x_i^*$ ,  $q_i^*$ , respectivamente. Calcular el intervalo  $[q_i^*, q_i^*]$  de amplitud  $q_i^* - q_i^*$ .

Paso 1.- Preguntar al decisor acerca del valor  $k_i$  que representa el nivel de cumplimiento de cada objetivo con respecto a su máximo, es decir  $q_i(x) \geq q_i^* + k_i(q_i^* - q_i^*)$ . Solicitar al decisor información acerca de la ordenación de los objetivos por prioridades, de modo que suponemos  $q_i$  en la prioridad  $i$ .

Paso 2.- Resolver el siguiente problema fraccionado lineal:

$$(P_1) \max q_1(x) \text{ s.a. } x \in X, q_i(x) \geq q_i^* + k_i(q_i^* - q_i^*), i=1, \dots, p$$

Si no hay solución, volver al paso 1. Si la solución es única ( $x^1$  y  $q_1(x^1) = u_1^*$ ), es solución eficiente, ir al paso 4. Si hay solución múltiple, hacer  $l=1$  e ir al paso 3.

Paso 3.- Hacer  $l=l+1$  y resolver el problema:

$$(P_l) \max q_l(x) \text{ s.a. } x \in X, q_j(x) = u_j^*, j=1, \dots, l-1, q_i(x) \geq q_i^* + k_i(q_i^* - q_i^*), i=l, \dots, p$$

Si la solución es única ( $x^l$  y  $q_l(x^l) = u_l^*$ ), es solución eficiente, ir al paso 4. Si hay solución múltiple, volver al paso 3.

Paso 4.- Presentar al decisor la solución obtenida en el paso anterior. Si el decisor está satisfecho con ella, dar por concluido el algoritmo. Si no, preguntar al decisor qué objetivo u objetivos quiere mejorar y cuáles y en qué magnitud se pueden relajar para conseguirlo. Volver al paso 2.

Aplicamos este algoritmo al problema considerado en el apartado anterior.

Paso 0.- Resolver  $\max q_i(x)$  s.a.  $x \in X$  y  $\min q_i(x)$  s.a.  $x \in X$ ,  $i=1,2$ . Las soluciones son:

$$x_1^* = (0, 0, 2) \quad q_1^* = 21.1$$

$$x_{1^*} = \alpha(0, 0.11, 0) + (1-\alpha)(0, 2, 1.89), 0 \leq \alpha \leq 1 \quad q_{1^*} = -0.1$$

$$x_2^* = \alpha(0.9, 1.1, 0) + (1-\alpha)(0, 0.11, 0), 0 \leq \alpha \leq 1 \quad q_2^* = 1.32$$

$$x_{2*} = \alpha_1(0,0,2) + \alpha_2(0.9,0,2) + \alpha_3(0.9,0,0) + \alpha_4(0,0,2) \quad q_{2*} = 0$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \geq 0$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1$ , y las amplitudes de los intervalos son:

$$q_1^* - q_{2*} = 21.2, \quad q_2^* - q_{2*} = 1.32.$$

Paso 1.- Preguntar al decisor acerca de sus preferencias sobre la cercanía de la solución al solución ideal. Supongamos que sus preferencias son una cercanía a la solución ideal de al menos 50% para el primer objetivo y del 75% para el segundo, es decir,  $k_1=0.5$  y  $k_2=0.25$ , de modo que maximizar el primer objetivo es prioritario a maximizar el segundo.

Paso 2.- Resolver el siguiente problema fraccionado lineal, con las nuevas restricciones  $q_1(x) \geq q_1^* + k_1(q_1^* - q_{1*})$ ,  $q_2(x) \geq q_{2*} + k_2(q_2^* - q_{2*})$ :

$$\begin{aligned} (P_1) \quad & \max (0.1 + 1.1S1 + S2 - Y) / (0.1 + S1) \\ & \text{s.a. } -1.1S1 - S2 + Y \leq 0.11 \\ & 0 \leq S1 \leq 0.9, \quad 0 \leq Y, S2 \leq 2 \\ & -9.4S1 + S2 - Y \geq 1.05 \\ & -0.33S1 - 0.33S2 + 1.2Y \geq 0.033 \end{aligned}$$

La solución de este problema es única,  $x^{1*} = (0, 0.5775, 2)$ , con los valores:  $q_1(x^{1*}) = u_1^* = 15.2248$ ,  $q_2(x^{1*}) = u_2^* = 0.33$ . En esta solución se realiza una inversión de 0.1 u.m. en el primer año y de 2.5775 en el segundo año, de los cuales 2 u.m corresponden a inversión nuevos fondos. Con todo esto se obtiene un dividendo por participación de 15.2248 el primer año y de 0.33 el segundo año.

Paso 4.- Presentar al decisor la solución obtenida en el paso 2,  $x^{1*} = (0, 0.5775, 2)$ . Supongamos que el decisor no está satisfecho con ella, sino que prefiere mejorar el segundo objetivo, aunque el primero empeore, considerando los mismos valores de  $k_1=0.5$  y  $k_2=0.25$ .

Paso 2.- Resolver el siguiente problema fraccionado lineal:

$$\begin{aligned} (P_1) \quad & \max 1.2Y / (0.1 + S1 + S2) \\ & \text{s.a. } -1.1S1 - S2 + Y \leq 0.11 \\ & 0 \leq S1 \leq 0.9, \quad 0 \leq Y, S2 \leq 2 \\ & -9.4S1 + S2 - Y \geq 1.05 \\ & -0.33S1 - 0.33S2 + 1.2Y \geq 0.033 \end{aligned}$$

La solución de este problema es única,  $x^*=(0,0.95,2)$ , con los valores:

$q_1(x^*)=11.5$ ,  $q_2(x^*)=0.5428571$ . Es solución eficiente también. En esta nueva solución se recomienda realizar una inversión de 0.1 u.m. en el primer año y de 2.95 u.m. en el segundo año, de los cuales 2 u.m. son de inversión de nuevos fondos. Con todo esto se obtiene un dividendo por participación de 11.5 el primer año y de 0.5428571 el segundo año.

Paso 4.- Presentar al decisor la solución obtenida en el paso 2,  $x^*=(0,0.95,2)$ . Supongamos que el decisor está satisfecho con ella. Fin del algoritmo. Si no fuese así, continuar preguntando al decisor acerca de sus preferencias.

## Método basado en Goal Programming

El economista premio Nobel de 1978 Herbert Simon (1955,1957) afirma que en las complejas organizaciones actuales (grandes empresas, sindicatos, agencias gubernamentales, etc) el contexto decisional está definido por información incompleta, recursos limitados, multiplicidad de objetivos, conflictividad de intereses, etc. En este contexto, el decisor no puede optimizar nada, sino que el decisor intenta que una serie de objetivos se aproximen a unos niveles prefijados. Aquí puede encuadrarse la programación por objetivos o goal programming.

La programación por objetivos surge a partir de un artículo de Charnes, Cooper y Ferguson (1955). Posteriormente, Charnes y Cooper (1961) desarrollan el concepto de programación por objetivos. Este es uno de los métodos de investigación operativa más popular y más aplicado de los últimos años. La programación por objetivos se caracteriza por: la conceptualización de criterios como metas, la asignación de prioridades y/o pesos a la realización de las metas y la presencia de variables desviacionales para definir la realización de una meta.

El primer paso en la formulación de un modelo de programación por objetivos consiste en fijar los atributos relevantes y el nivel de aspiración correspondiente a cada atributo, es decir, el nivel de logro que el decisor desea. Conectamos el atributo con el nivel de aspiración, introduciendo variables de desviación negativa y positiva. De esta forma, tendremos la siguiente meta:

$$q_i(x) + d_i^- - d_i^+ = t_i$$

donde  $q_i(x)$  es la expresión matemática del atributo  $i$ -ésimo,  $d_i^-$  y  $d_i^+$  las variables de desviación negativa y positiva, respectivamente y  $t_i$  el nivel de aspiración de dicho atributo. La variable negativa cuantifica la falta de logro de una meta con respecto a su nivel de aspiración, mientras que la positiva cuantifica el exceso de logro de una meta con respecto a su nivel de aspiración.

Una variable de desviación se dice que es no deseada cuando al decisor le conviene que la variable alcance su valor menor, es decir, cero (que mide la cuantificación de la falta de logro).

Normalmente, un punto que satisface todas las metas (se dice que es un punto utópico) es infactible. Así, habrá que encontrar un punto factible que se acerque a las metas tanto como sea posible. Una vez determinadas las variables de decisión, el siguiente paso en la formulación de un modelo de programación por objetivos es minimizar dichas variables, proceso que puede acometerse de diversas formas.

La forma más intuitiva de acometer la minimización de las variables de desviación no deseadas consiste en minimizar la suma de estas variables. De este modo se da la misma importancia al logro de todas las metas, lo cual no tiene que ser lo que se desea. Por ello, se considera esa suma ponderada por medio de unos coeficientes que representan la importancia que el decisor asigna a la realización de cada meta. Este método se denomina programación por objetivos ponderados. Sea el conjunto de pesos

$$W = \left\{ W \in \mathbb{R}^p / \sum_{j=1}^p w_j = 1, w_j \geq 0, j = 1, \dots, p \right\}$$

Proponemos un algoritmo basado en la programación por objetivos.

Algoritmo II:

Paso 0.- Calcular los óptimos de cada criterio individual, resolviendo los problemas:  $\max q_i(x)$  s.a.  $x \in X$  y  $\min q_i(x)$  s.a.  $x \in X$ ,  $i=1,\dots,p$ , obteniendo  $x_i^*$ ,  $q_i^*$  y  $x_{i*}$ ,  $q_{i*}$ , respectivamente mediante el algoritmo de Gilmore y Gomory (1963) o de Charnes y Cooper (1962).

Paso 1.- Preguntar al decisor acerca del valor  $k_i$  que representa el nivel de cumplimiento de cada objetivo con respecto a su máximo, es decir,  $q_i(x) \geq q_{i*} + k_i(q_i^* - q_{i*})$  y acerca de los pesos que se pueden asociar a cada variable de desviación de cada objetivo, es decir, expresar la importancia de que el valor de cada objetivo se acerque a su máximo siendo mayor el peso cuando mayor sea la importancia. A estos pesos se les denomina pesos de penalización.

Paso 2.- Resolver el problema

$$\min w_1 d_1^- + \dots + w_p d_p^- \text{ s.a. } x \in X, f_i(x) + d_i^- \geq [q_{i*} + k_i(q_i^* - q_{i*})] g_i(x), i=1,\dots,p$$

siendo  $f_i$  el numerador y  $g_i$  el denominador de la función  $q_i$ . Observación: Este problema es lineal, lo cual facilita los cálculos dado el amplio software disponible para los problemas de programación lineal uniobjetivo.

Paso 3.- Presentar al decisor la solución obtenida en el paso 2. Si el decisor considera esta solución satisfactoria, el algoritmo ha terminado. Si no, solicitar al decisor otros pesos de importancia y volver al paso 2.

Aplicamos, de nuevo al ejemplo de la sección 1 este algoritmo de goal programming:

Paso 0.- Resolver  $\max q_1(x)$  s.a.  $x \in X$  y  $\min q_2(x)$  s.a.  $x \in X$ ,  $i=1,2$ . Las soluciones son:

$$x_1^*=(0,0,2)$$

$$q_1^*=21.1$$

$$x_{1*}=\alpha(0,0.11,0)+(1-\alpha)(0,2,1.89), 0\leq\alpha\leq 1$$

$$q_{1*}=-0.1$$

$$x_2^*=\alpha(0.9,1.1,0)+(1-\alpha)(0,0.11,0), 0\leq\alpha\leq 1$$

$$q_2^*=1.32$$

$$x_{2*}=\alpha_1(0,0,2)+\alpha_2(0.9,0,2)+\alpha_3(0.9,0,0)+\alpha_4(0,0,2)$$

$$q_{2*}=0$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1.$$

Paso 1.- Preguntar al decisor acerca de los valores  $k_i$ ,  $i=1,2$  y de los pesos de importancia de las desviaciones de cada objetivo. Sean los pesos de penalización proporcionados por el decisor:  $w_1=0.5$ ,  $w_2=0.5$ , y los valores:  $k_1=0.5$ ,  $k_2=0.5$ .

Paso 2.- Resolver el problema siguiente en el que aparecen estas restricciones  $f_i(x)+d_i^- \geq [q_{i*}+k_i(q_{i*}-q_{i*})]g_i(x)$ ,  $i=1,2$ :

$$\min 0.5d_1^-+0.5d_2^-$$

$$\text{s.a. } -1.1S_1-S_2+Y \leq 0.11$$

$$0 \leq S_1 \leq 0.9, 0 \leq Y, S_2 \leq 2$$

$$-9.4S_1+S_2-Y+d_1^- \geq 1.05$$

$$-0.66S_1-0.66S_2+1.2y+d_2^- \geq 0.066$$

La solución es  $x^*=(0,1.155,2)$ ,  $d_1^-=1.905$ ,  $d_2^-=0$ , con  $q_1(x)=5.55$  y  $q_2(x)=0.66$ . De este modo se realiza una inversión de 0.1 u.m. en el primer año y de 3.155 u.m. en el segundo año, de los cuales 2 u.m corresponden a nuevos fondos. Con todas estas inversiones se obtiene un dividendo por participación de 5.55 durante el primer año y de 0.66 el segundo año. Para comprobar que esta solución es eficiente, lo cual se cumple, someterla a un test de eficiencia.

Paso 3.- Presentar al decisor la solución obtenida  $x^*=(0,1.155,2)$ . Puede que el decisor no considere esta solución satisfactoria, puesto que en el primer año el dividendo por participación no es muy alto. Le pedimos al decisor unos nuevos pesos de importancia  $w_1=0.7$ ,  $w_2=0.3$ , o unos nuevos valores  $k_1$  y  $k_2$ .

Paso 2.- Resolver el siguiente problema:

$$\min 0.7d_1^-+0.3d_2^-$$

$$\text{s.a. } -1.1S_1-S_2+Y \leq 0.11$$

$$0 \leq S_1 \leq 0.9, 0 \leq Y, S_2 \leq 2$$

$$-9.4S_1+S_2-Y+d_1^- \geq 1.05$$

$$-0.66S_1-0.66S_2+1.2y+d_2^- \geq 0.066$$

La solución es  $x^*=(0,0.95,2)$ ,  $d_1=0$ ,  $d_2=0.24643$  con  $q_1^*=10.5$  y  $q_2^*=0.542857$ . Esto significa que el primer año se realiza una inversión de 0.1 u.m. y de 2.52 u.m. en el segundo año, de éstos 2 u.m son de nuevos fondos en el segundo año. Con ello, se obtiene un dividendo por participación de 10.5 en el primer año y de 0.542857 en el segundo año. Para comprobar que esta solución es eficiente, lo cual es cierto, someterla a un test de eficiencia.

Paso 3.- Presentar al decisor la nueva solución  $x^*=(0,0.52,2)$ . Supongamos que el decisor considera satisfactoria esta solución, por lo que el algoritmo termina. Si no es así, pedir al decisor nuevos valores para  $k_1$  y  $k_2$ .

Se puede hacer un análisis de sensibilidad de los pesos en este algoritmo, por tratarse de un algoritmo ponderado. Para ello, y usando los mismos argumentos que presenta Gal (1977) para programación lineal multiobjetivo, debemos hallar la región de pesos asociada a cada una de las soluciones obtenidas,

$$R_s = \left\{ w \in \mathbb{R}^p / - \sum_{k=1}^p \Delta^s c_j^k w_k \geq 0, w_k > 0, k = 1, \dots, p, j \notin I_s \right\}$$

$$\Delta^s c_j^k = c_j^k - (c_B^k)^t B_s^{-1} c^j$$

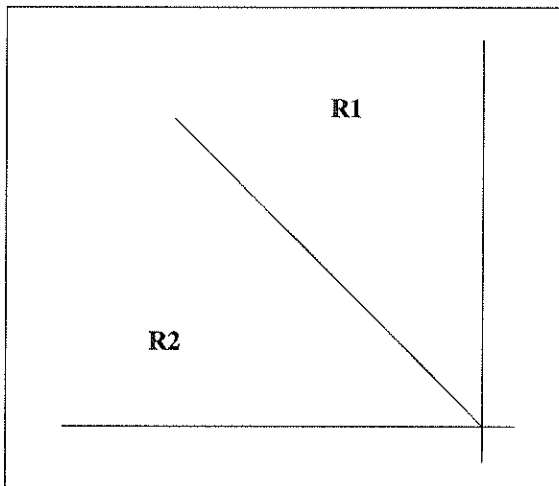
que define el conjunto de pesos tales que para todo elemento de  $R_s$  la solución  $x_s$  es una solución óptima para el problema uniobjetivo asociado a estos pesos, con  $B_s$  la base óptima e  $I_s$  el conjunto de índices básicos.

Según esto, la solución  $(0,1.155,2)$  es óptima si los pesos pertenecen a la región:

$$R_1 = \{ w \in \mathbb{R}^2 / -w_1 + 1.2w_2 \geq 0, w_1, w_2 > 0 \}$$

$(0,0.95,2)$  es solución óptima del problema del paso 2 si los pesos están en la región:

$$R_2 = \{ w \in \mathbb{R}^2 / w_1 - 1.2w_2 \geq 0, w_1, w_2 > 0 \},$$



Las regiones de pesos asociadas a ambas soluciones cubren toda la región de pesos, por lo que para los valores  $k_1=k_2=0.5$  las dos soluciones anteriores son las únicas que existen. Además podemos observar que ambas soluciones son bastante robustas puesto que las dos regiones de pesos son muy grandes, aunque la del primer punto solución es mayor por lo que su robustez a cambios en los pesos es más grande.



## 4. OBSERVACIONES

Como observación, podemos añadir que el enfoque multicriterio representa una forma atractiva y realista de resolver problemas de decisión, aunque los métodos existentes necesiten perfeccionamiento teórico y operativo y, además que existe una estrecha relación entre el método interactivo más adecuado y ciertas características del decisor como base cultural, habilidades matemáticas, educación económica, etc.

El enfoque interactivo presenta aspectos positivos y negativos. Así, representa un proceso de aprendizaje para el decisor porque permite un mejor entendimiento del sistema analizado y porque cada entidad implicada juega el papel que tiene que jugar, es decir, el analista analiza, el decisor decide y la computadora calcula. Además, la información demandada exige conocer sólo las preferencias locales del decisor, i.e., con respecto a cierta solución, aunque se exige al decisor un esfuerzo superior al requerido con un método convencional, ya que se precisa de él bastante información de la que a veces no dispone. En algunas ocasiones, el número de iteraciones necesarias para converger a una solución satisfactoria es muy grande por lo que se requiere un gran trabajo computacional.

La programación por metas es un potente instrumento teórico de gran aplicabilidad en el campo del análisis decisional. A pesar de ello, en los últimos años, diferentes autores han apuntado posibles anomalías aparentemente causadas por debilidades lógicas de la programación por metas, debidas en realidad a un uso insatisfactorio del enfoque. Estos problemas pueden superarse. Es más, muchos de los problemas que aparecen en la literatura se deben al uso mecanicista del método.

Pueden presentarse, entre otros, las siguientes anomalías: la posible equivalencia de soluciones entre los modelos de programación por metas y los modelos tradicionales unicriterios, la falta de significado y las conclusiones equivocadas obtenidas cuando la función de logro se formula erróneamente como un escalar y no como un vector, los problemas causados por la omisión de una variable de desviación al formular una meta, los problemas surgidos al formular innecesariamente una meta con dos variables de desviación: la positiva y la negativa a la vez. Quizás, lo que más resalte en programación por objetivos sea la posible ineficiencia paretiana de una solución generada por este modelo: las soluciones obtenidas no son siempre eficientes; de hecho, hay algunas que solamente son goal-eficiente. Para garantizar la eficiencia habría que añadir al algoritmo un test de eficiencia. Pero generalmente el decisor no precisa la eficiencia, sino que le basta con que los objetivos alcancen unos niveles.

Los dos algoritmos interactivos presentados permiten la resolución de problemas de programación fraccionada con distintos denominadores, lo cual es una ventaja debido a que muchos de los algoritmos que aparecen en la literatura no se pueden aplicar fácilmente a problemas de programación fraccionada con distintos denominadores. Es más, puede comprobarse repasando la literatura relativa al tema que la mayor parte de los autores trata problemas fraccionados con idénticos denominadores debido a la dificultad que representan los denominadores distintos.

Puede observarse que en ambos algoritmos se requiere que el decisor sea muy activo, proporcionando al analista la información que necesita para realizar su trabajo. Esto puede que no sea

así, por lo que el analista tendrá que utilizar otros métodos para obtener la información que precisen los algoritmos. Por ejemplo, para obtener los pesos en el segundo algoritmo presentado puede utilizar un método similar al usado en el trabajo de Arévalo y Zapata (1994).

En este trabajo, además de la presentación de dos algoritmos de resolución de problemas fraccionados con distintos denominadores (aunque también se pueden usar para problemas fraccionados con idénticos denominadores), se realiza un análisis de sensibilidad de los pesos en el segundo algoritmo. En este punto, se nos plantea realizar un análisis de sensibilidad de otros parámetros presentes en el problema como es el caso de los valores  $k_i$  que aparecen en ambos algoritmos. Para ello, tendremos que considerar un método más sofisticado de estudio cual es el análisis de la tolerancia.

Otra cuestión en la que se puede profundizar es en la implementación de estos dos algoritmos en el ordenador para la resolución de problemas de programación fraccionada lineal con distintos denominadores y en ello estamos trabajando.

## BIBLIOGRAFIA

- [1]AREVALO,M.T. y ZAPATA,A. (1994). "Un estudio de la sensibilidad de los pesos en la programación fraccionada múltiple". VIII Reunión Anual ASEPELT- España, 2-3 junio 1994, Palma de Mallorca, volumen II, pp. 87-94.
- [2]BHATIA,D. y PANDEY,S. (1991). "A note on multiobjective fractional programming". *Cahiers du CERO* 33 nº1, pp. 3-11.
- [3]CHARNES,A. y COOPER,W.W. (1961), "Management models and industrial applications of linear programming", John Wiley and Sons. New York.
- [4]CHARNES,A. y COOPER,W.W. (1962). "Programming with linear fractional functionals". *Naval Research Logistics Quarterly* 9, pp. 181-185.
- [5]CHARNES,A., COOPER,W.W. y FERGUSON,R. (1955), "Optimal estimation of executive compensation by linear programming". *Management Science* 1, pp. 138-151.
- [6]CHOO,E.U. y ATKINS,D.R. (1982). "Bicriteria linear fractional programming", *Journal of Optimization Theory and Applications* 36, nº 2, pp. 203-220.
- [7]DUTTA,D., RAO,J.R. y TIWARI,R.N. (1993). " A restricted class of multiobjective fractional programming problems". *European Journal of Operational Research* 68, pp. 352-355.
- [8]FRIEDMAN, M. (1972). "Teoría de los precios", Alianza Editorial, Madrid.
- [9]GAL,T. (1977), "A general method for determining the set of all efficient solutions to a Linear Vector Maximum Problem", *European Journal of Operational Research* 1, pp. 307-322.

[10]ISBELL, J.R. y MARLOW, W.H. (1956). "Attrition Games". *Naval Research Logistics Quarterly* 3, pp. 71-93.

[11]KOOPMANS, T.C. (1951). "Analysis of production as an efficient combination of activities", en: *Activity of Production and Allocation* (Koopmans, T.C., editor). Wiley & Sons, New York, pp. 33-92.

[12]KORNBLUTH, J.S.H. y STEUER, R.E. (1981). "Goal programming with linear fractional criteria". *European Journal of Operational Research* 8, pp. 58-65.

[13]KORNBLUTH, J.S.H. y STEUER, R.E. (1981). "Multiple objective linear fractional programming". *Management Science* 27, nº 9, pp. 1024-1039.

[14]KUHN, H.W. y TUCKER, A.W. (1951). "Nonlinear programming", en: *Proceeding of the Second Berkeley Symposium in Mathematical Statistical and Probability* (Neyman, J., editor), University of California Press, Berkeley, pp. 481-491.

[15]MARGLIN, J.A. (1967). "Public investment criteria". MIT Press, Cambridge, Massachussets.

[16]PARETO, V. (1896). "Course d'economie politique". Rouge, Lausannes.

[17]ROMERO, C. (1993). "Teoría de la decisión multicriterio: conceptos, técnicas y aplicaciones". Alianza Editorial. Madrid.

[18]SCHAILABLE, S. (1981). "Fractional Programming: Applications and algorithms". *European Journal of Operational Research* 7, pp. 111-120.

[19]SIMON, H.A. (1955). "A behavioral model of rational choice". *Quarterly Journal of Economics* 69, pp. 99-118.

[20]SIMON, H.A. (1957). "Models of man". John Wiley and Sons. New York.

[21]STEUER, R.E. (1986). "Multiple criteria optimization: Theory, Computation and Application", John Wiley & Sons, New York.



# COMPORTAMIENTO ESTADISTICO DE LOS RATIOS ECONOMICO-FINANCIEROS EN EL MARCO DE LA PREDICCION DE LA SOLVENCIA

ANTONIO ARQUES PÉREZ.

Dpto. de Métodos Cuantitativos para la Economía

ANTONIO CALVO-FLORES SEGURA

Dpto. de Métodos Cuantitativos para la Economía

DOMINGO GARCIA PÉREZ DE LEMA

Dpto. de Economía Financiera y Contabilidad.

Universidad de Murcia

## 1. INTRODUCCION

La importancia de la buena o mala marcha de la actividad empresarial, tanto para la propia empresa como para todas aquellas otras entidades o personas que emprenden relaciones económicas con ella, hace necesario el establecimiento de métodos de prevención del fracaso empresarial.

Concretando el marco de aplicación, y situándonos dentro del negocio bancario, se hace imprescindible el establecimiento de un sistema analítico capaz de evaluar el riesgo crediticio, de tal forma que se ejerza un control sobre las operaciones activas realizadas, tanto por el interés propio de gestión interna de cada entidad financiera, como por las exigencias dictadas por el Banco de España.

En unos trabajos anteriores a éste<sup>1</sup> analizamos el tema de la morosidad crediticia bancaria, llegando a la elaboración de un modelo de predicción de la morosidad, al que ahora complementaremos con un estudio sobre el comportamiento estadístico de las variables que componen el mismo, así como la inclusión de métodos para mejorar dicho comportamiento y los resultados del modelo.

---

<sup>1</sup> Arques Pérez, A.; García Pérez de Lema, D.; Calvo-Flores Segura, A. (1994)  
García Pérez de Lema, D.; Arques Pérez, A.; Calvo-Flores Segura, A. (1994)

2. MODELO DE PREDICCIÓN DE LA MOROSIDAD

2.1. El modelo discriminante

En el estudio de las relaciones entre los ratios económico-financieros y la situación de morosidad ante los créditos bancarios en un entorno multivariado, utilizando el método del análisis discriminante, obtenemos una función lineal de los ratios, cuyo objetivo es clasificar a cada observación (una empresa, caracterizada por sus ratios) como perteneciente a uno de los dos grupos: moroso o normal, de acuerdo a la puntuación otorgada a la empresa por la función discriminante.

Tras un laborioso proceso de selección de variables, con la realización de análisis de perfiles estadísticos, test de clasificación dicotómica, análisis factoriales y análisis de correlaciones, y aplicando el análisis discriminante al conjunto resultante, llegamos a la función discriminante recogida en el Cuadro 1.

Cuadro 1: Modelo de función discriminante

| Ratios   | ACT1    | ACT7    | END6    | END8   | EST6   | REN19  |
|--|---------|---------|---------|--------|--------|--------|
| Coefficientes normalizados   | -0'7137 | -0'3379 | -0'4528 | 0'2659 | 0'7284 | 0'6665 |
| Porcentaje de aciertos = 76 %<br>Error Tipo I = 23 %<br>Error Tipo II = 25 % |         |         |         |        |        |        |

Se trata de una función de seis ratios económico-financieros:

ACT1: Ingresos por ventas entre Consumos de explotación

ACT7: Gastos de personal entre Activo fijo

END6: Gastos financieros entre Ingresos por ventas

END8: Neto sin el Resultado entre Pasivo circulante

EST6: Dotaciones a las amortizaciones entre Inmovilizados amortizables

REN19: Resultado menos Derechos de cobro y menos Existencias, entre Activo total

con los que se consigue un nivel de aciertos en las clasificaciones del 76 %, con similares errores de tipo I (clasificar una empresa normal como morosa) y de tipo II (clasificar una empresa morosa como normal). Este resultado no es malo si se tiene en cuenta que la muestra es muy limitada (cincuenta parejas de empresas normales y morosas) y heterogénea (incluye empresas de todos los sec-

tores de actividad), y que ya ha pasado el filtro del analista bancario, que las clasificó a todas ellas como empresas solventes.

## 2.2. La capacidad predictiva del modelo

Los porcentajes de aciertos en las clasificaciones nos ofrecen una primera aproximación a la capacidad predictiva del modelo, si bien es conveniente evaluar dicha capacidad sobre observaciones ajenas a la muestra, es decir, sobre una segunda muestra de empresas.

Para evitar que los resultados de la predicción dependan exclusivamente de las empresas contenidas en esa segunda muestra, hemos utilizado una técnica de tipo jackknife, que son métodos de estimación del error muestral basadas en el remuestreo de los datos originales. En concreto, nuestro procedimiento consistió en extraer tres parejas al azar de la muestra original de cincuenta parejas, obteniendo una muestra reducida de cuarenta y siete parejas sobre la que estimamos el modelo discriminante. Posteriormente clasificamos a las seis empresas que habíamos dejado fuera de la muestra, calculando los porcentajes de errores de tipo I, tipo II y total. Esta operación la repetimos cincuenta veces y calculamos las medias de los errores. este proceso lo repetimos también cincuenta veces, con el fin de poder estimar la desviación típica de dicha media. Los resultados obtenidos se recogen en el Cuadro 2.

**Cuadro 2: Capacidad predictiva del modelo**

|                              |                        |                          |
|------------------------------|------------------------|--------------------------|
| Modelo con ratios originales | Error de Tipo I: 33 %  | Desviación típica: 0'021 |
|                              | Error de Tipo II: 30 % | Desviación típica: 0'014 |
|                              | Error Total: 31'5 %    | Desviación típica: 0'014 |

Podemos decir que los datos confirman la estabilidad del modelo y refuerzan la validez de los resultados, con desviaciones pequeñas y errores de tipo I y tipo II compensados.

## 3. COMPORTAMIENTO ESTADISTICO DE LAS VARIABLES

En este apartado trataremos especialmente dos de los aspectos más relevantes sobre el comportamiento estadístico de las variables en los modelos de predicción: por un lado el problema de la correlación entre las variables, y por otro el de la no normalidad de las distribuciones probabilísticas de los ratios económico-financieros.

### 3.1. La correlación de la variables

Un alto grado de correlación entre las variables independientes conlleva que sea difícil distinguir la aportación individual de cada una de ellas sobre la variable dependiente. Según Lev<sup>2</sup> una gran correlación “producirá errores estándar muy altos en los coeficientes que se estimen, y por consiguiente afectará negativamente a la precisión de las estimaciones”. Si bien, señala Lev que este aspecto no debe sobreestimarse, “ya que la cuestión más importante para el analista deberá ser el determinar si un ratio contribuye o no a la explicación de la variable dependiente”.

Las variables que componen nuestra función discriminante están exentas de fuertes correlaciones, por lo que los coeficientes estandarizados deben mostrar el peso y sentido de dichas variables sobre la situación de morosidad. Efectivamente, los coeficientes de las variables se corresponden con el significado económico; de tal manera que aquellos que deben crecer ante el deterioro económico de la empresa tienen signo negativo, mientras que aquellos que lo hacen ante situaciones de solvencia tienen signo positivo (dado que en nuestro modelo hemos puntuado con un uno la situación de solvencia y con un cero la de morosidad). Este comportamiento refuerza la credibilidad del modelo discriminante.

### 3.2. La distribución estadística

Cuando las variables se desvían de la normalidad, el análisis de las mismas se ve dificultado por el hecho de que la mayoría de las herramientas estadísticas se basan en la hipótesis de normalidad.

Desde el primer estudio de Beaver<sup>3</sup>, precursor de las investigaciones sobre predicción del fracaso empresarial, la no normalidad de los ratios económico-financieros ha venido siendo la regla contrastada en la mayoría de los trabajos publicados hasta nuestros días.

Sobre este tema, Deakin<sup>4</sup> realiza un estudio sobre diversos ratios utilizados por Beaver, concluyendo que si bien se confirma la no normalidad de los ratios, la modificación de los mismos a través de transformaciones por raíces cuadradas y por logaritmos, así como la distinción de los tipos de actividad, acercan más los ratios a la normalidad.

Lev<sup>5</sup> señala que la razón principal de que las distribuciones de la mayoría de los ratios sean asimétricos, sesgados hacia la derecha, es el hecho de que en muchos ratios el valor cero es un límite inferior, mientras que no tienen límite superior. A esto debemos añadir la presencia altamente perturbadora de algunas observaciones en la muestra que presentan valores extremos, lo que eleva el valor de las varianzas y disminuye la capacidad predictiva de las variables.

---

<sup>2</sup> Lev, B. (1978), pág. 80.

<sup>3</sup> Beaver, W.H. (1966)

<sup>4</sup> Deakin, E.B. (1976)

<sup>5</sup> Op. cit. pág. 78



En nuestro estudio podemos comprobar gráficamente estas últimas afirmaciones en los Gráficos 1 y 2, que muestran por grupos los histogramas de los ratios utilizados en la función discriminante. Asimismo, hemos observado cómo la utilización de raíces cuadradas y logaritmos atenúa la presencia de valores extremos, reduciendo las varianzas, y acerca las distribuciones a la normalidad. Esto puede verse para algunos ratios en los Gráficos 3 y 4.

Como comprobación analítica de las mejoras conseguidas en cuanto a la normalidad de las variables, presentamos en los Cuadros 3 y 4 los resultados de dos test no paramétricos utilizados para contrastar la hipótesis de normalidad de las variables: el test de la  $\chi^2$  de Pearson y el test de Kolmogorov-Smirnov (Lilliefors). Dichos cuadros recogen los niveles máximos de significatividad a los que no se rechazaría la hipótesis nula de normalidad, es decir, la probabilidad de equivocarnos si afirmamos la no normalidad de la variable.

**Cuadro 3: Test sobre la normalidad de las variables para las empresas normales**

| Ratios originales | END6  | END8  | ACT1  | ACT7  | EST6  | REN19 |
|-------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Test $\chi^2$     | 0'001 | 0'000 | 0'000 | 0'000 | 0'931 | 0'248 |
| Test K-S          | 0'115 | 0'002 | 0'001 | 0'000 | 0'547 | 0'342 |
| Raíces cuadradas  |       |       |       |       |       |       |
| Test $\chi^2$     | 0'758 | 0'073 | 0'000 | 0'000 | 0'000 |       |
| Test K-S          | 0'981 | 0'113 | 0'005 | 0'018 | 0'198 |       |
| Logaritmos        |       |       |       |       |       |       |
| Test $\chi^2$     | 0'521 | 0'446 | 0'000 | 0'085 | 0'077 |       |
| Test K-S          | 0'704 | 0'524 | 0'039 | 0'689 | 0'003 |       |

En general se confirma que las transformaciones acercan a las variables a la normalidad (con las excepciones del ratio EST6, especialmente para las empresas normales, que ya en su forma original presenta un buen resultado, y el ratio REN19, para el que no se efectuaron modificaciones). Y por otro lado, podemos señalar que, considerando un nivel de significatividad del 5%, en todos los ratios es posible encontrar una transformación adecuada a nuestro fin, con la salvedad del ratio ACT1, tal vez demasiado vinculado a la heterogeneidad sectorial de la muestra.

Del mismo modo, realizando el análisis discriminante con las variables transformadas por raíces cuadradas (excepto para el ratio REN19, dado que toma valores negativos para muchas de las observaciones), podemos observar en el Cuadro 6 cómo se han mejorado sensiblemente los resultados y la capacidad predictiva del modelo, a pesar de que la utilización de raíces cuadradas ha disminuido ligeramente el número de observaciones válidas, ya que algunas de ellas toman valores negativos para los ratios originales.

Cuadro 4: Test sobre la normalidad de las variables para las empresas morosas

| Ratios originales | END6  | END8  | ACT1  | ACT7  | EST6  | REN19 |
|-------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Test $\chi^2$     | 0'000 | 0'000 | 0'000 | 0'000 | 0'150 | 0'525 |
| Test K-S          | 0'000 | 0'002 | 0'000 | 0'001 | 0'015 | 0'215 |
| Raíces cuadradas  |       |       |       |       |       |       |
| Test $\chi^2$     | 0'121 | 0'001 | 0'000 | 0'193 | 0'235 |       |
| Test K-S          | 0'064 | 0'081 | 0'000 | 0'442 | 0'120 |       |
| Logaritmos        |       |       |       |       |       |       |
| Test $\chi^2$     | 0'007 | 0'345 | 0'000 | 0'151 | 0'002 |       |
| Test K-S          | 0'165 | 0'600 | 0'005 | 0'660 | 0'018 |       |

Cuadro 5: Modelo de función discriminante con raíces cuadradas

| Ratios                        | RCACT1  | RCACT7  | RCEND6  | RCEND8 | RCEST6 | REN19  |
|-------------------------------|---------|---------|---------|--------|--------|--------|
| Coefficientes normalizados    | -0'5438 | -0'3618 | -0'4780 | 0'2771 | 0'8085 | 0'5327 |
| Porcentaje de aciertos = 80 % |         |         |         |        |        |        |
| Error Tipo I = 14'3 %         |         |         |         |        |        |        |
| Error Tipo II = 25'9 %        |         |         |         |        |        |        |

Cuadro 6: Capacidad predictiva del modelo con raíces cuadradas

|                             |                        |                          |
|-----------------------------|------------------------|--------------------------|
| Modelo con raíces cuadradas | Error de Tipo I: 31 %  | Desviación típica: 0'022 |
|                             | Error de Tipo II: 26 % | Desviación típica: 0'018 |
|                             | Error Total: 29 %      | Desviación típica: 0'015 |

4. CONCLUSIONES

A la vista de los resultados podemos pensar que es posible construir un modelo de predicción de la morosidad crediticia bancaria que usado adecuadamente puede ser una utilísima herramienta en el análisis de riesgos de las entidades de crédito. Además, en el proceso de selección hemos filtrado adecuadamente las variables con el objeto de asegurar su significado económico, de cara a conseguir el máximo de credibilidad del modelo.

Las transformaciones en los datos originales permiten reducir la dispersión de las variables, fundamentalmente actuando sobre los casos extremos, con un mayor acercamiento hacia la normalidad de los ratios, consiguiendo con ello mejorar los resultados y la capacidad predictiva del modelo.

El siguiente objetivo, que sería la mejora en el porcentaje de aciertos del modelo, pasa por una sectorización de la muestra, con la distinción de distintas funciones discriminantes para los diversos sectores de actividad, ya que las marcadas diferencias en sus comportamientos dan una excesiva heterogeneidad a la muestra, con una gran variabilidad en los valores de los ratios y superposiciones entre las distribuciones de empresas normales y empresas morosas.

## 5. BIBLIOGRAFIA

ARQUES PEREZ, A.; GARCIA PEREZ DE LEMA, D.; CALVO-FLORES SEGURA, A.; "Predicción de la morosidad en los créditos a empresas: una aproximación empírica con datos de la Región de Murcia". *VIII Reunión Anual ASEPELT ESPAÑA*, Palma de Mallorca, 1994, vol. III, pp.497-504.

BEAVER, W.H.; "Financial ratios as predictors of failure". *Empirical Research in Accounting: Selected Studies*, 1966, pp.71-111.

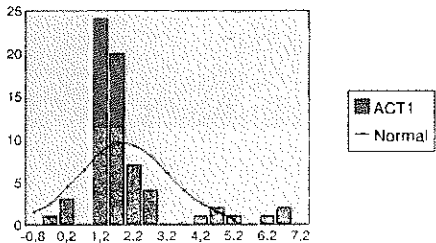
DEAKIN, E.B.; "Distribution of Financial Accounting Ratios: Some Empirical Evidence". *The Accounting Review*, Enero 1976, pp.90-96.

GARCIA PEREZ DE LEMA, D.; ARQUES PEREZ, A.; CALVO-FLORES SEGURA, A.; "Predicción del riesgo crediticio bancario: una aproximación empírica". *Documento de Trabajo, Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, Universidad de Murcia*, nº 2, 1994.

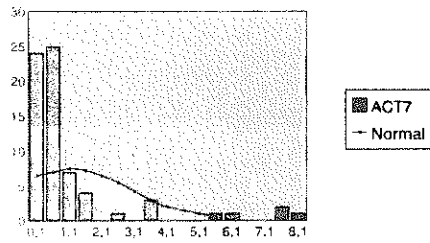
LEV, B.; *Análisis de estados financieros: un nuevo enfoque*. Ed. ESIC, 1978.

Gráfico 1: Histogramas de los ratios originales en las empresas normales

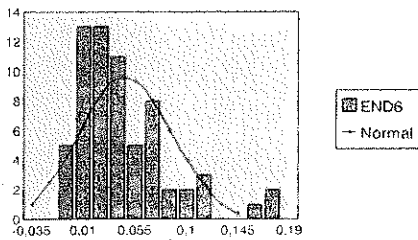
Ratio ACT1



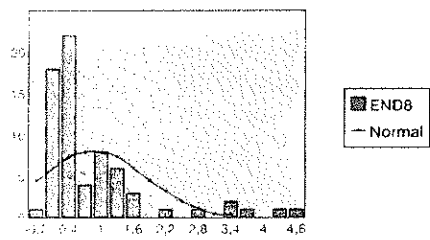
Ratio ACT7



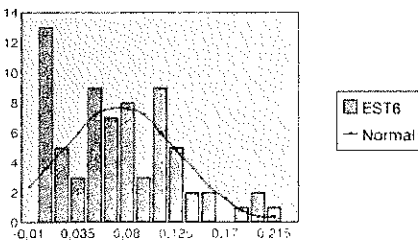
Ratio END6



Ratio END8



Ratio EST6



Ratio REN19

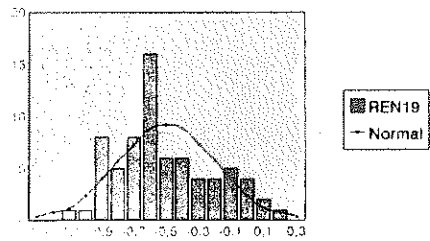
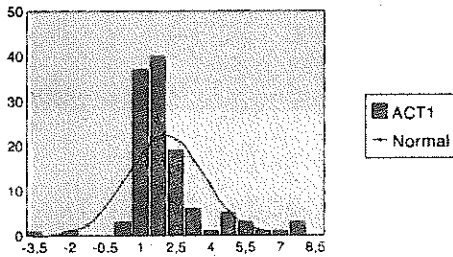
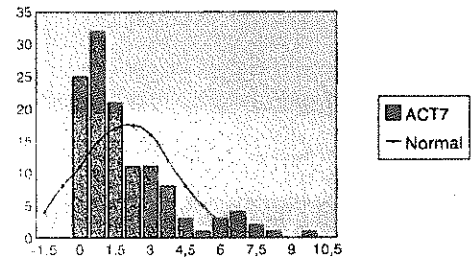


Gráfico 2: Histogramas de los ratios originales en las empresas morosas

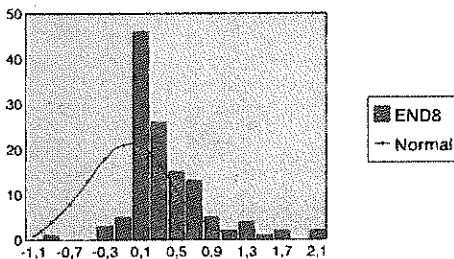
Ratio ACT1



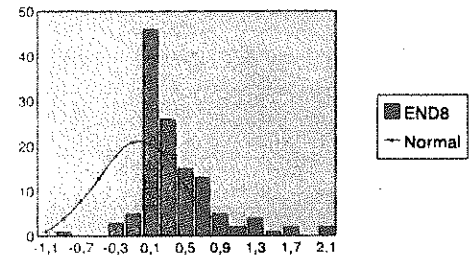
Ratio ACT7



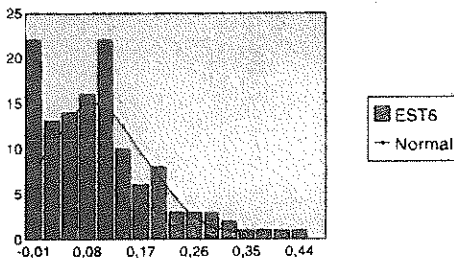
Ratio END8



Ratio END8



Ratio EST6



Ratio REN19

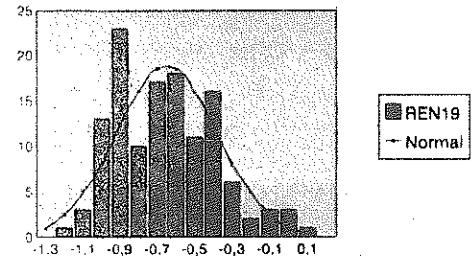


Gráfico 3: Histogramas de algunos ratios transformados en las empresas normales

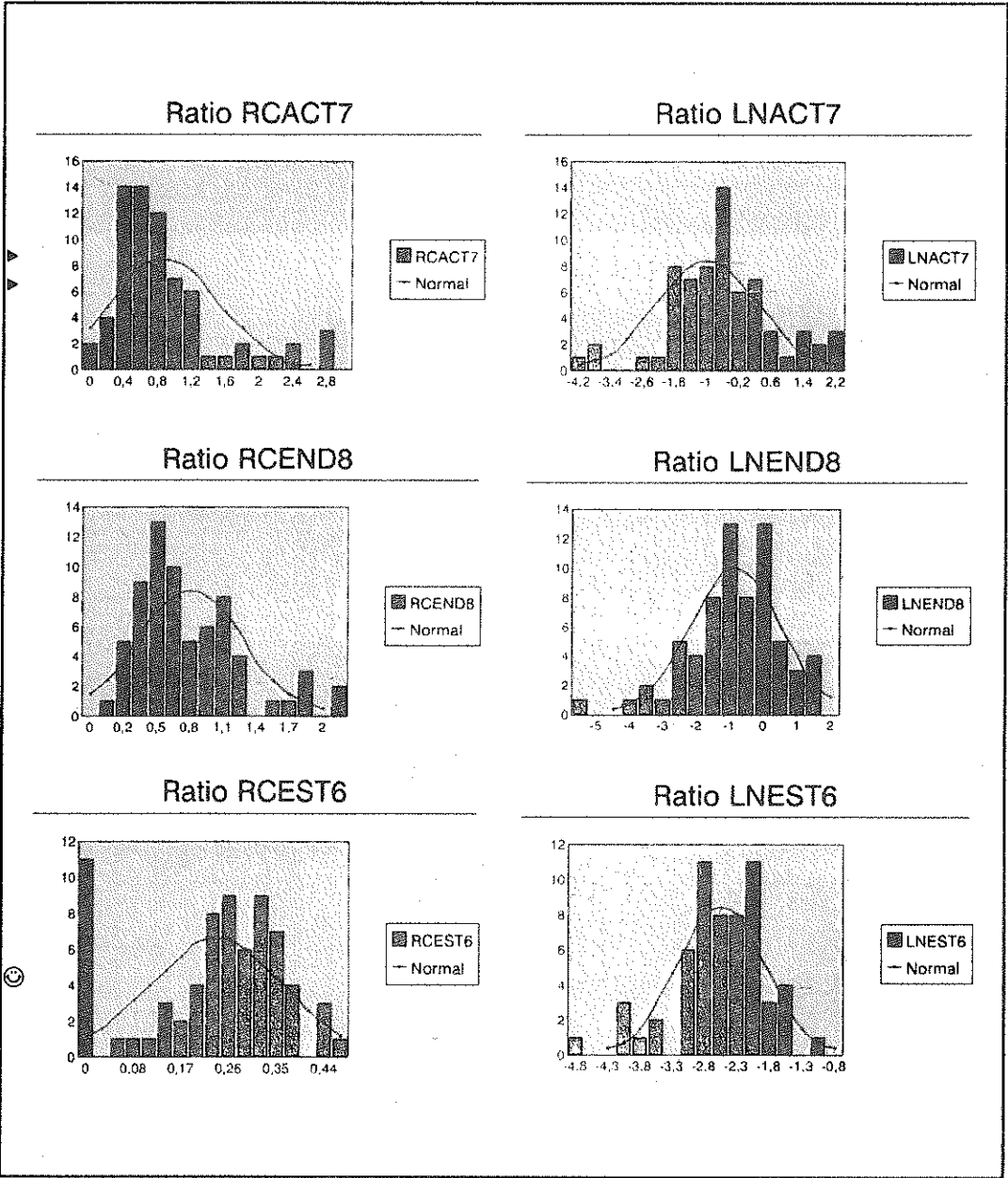
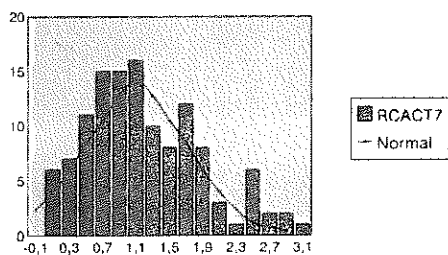
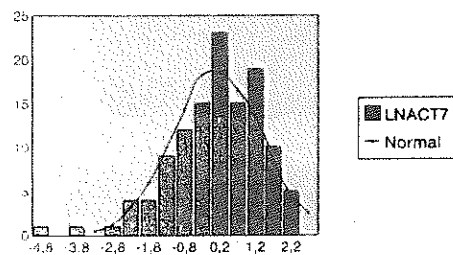


Gráfico 4: Histogramas de algunos ratios transformados en las empresas morosas

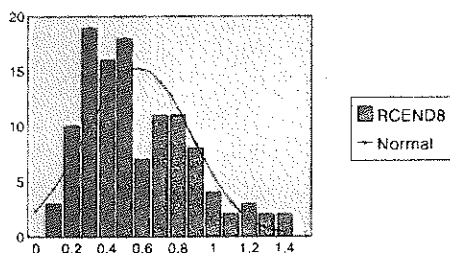
Ratio RCACT7



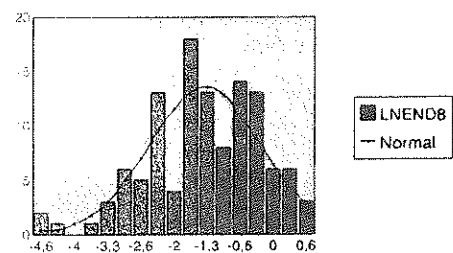
Ratio LNACT7



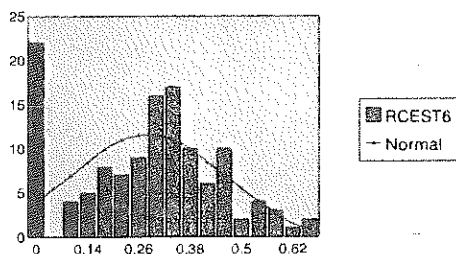
Ratio RCEND8



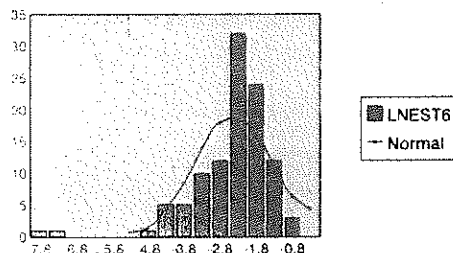
Ratio LNCEND8



Ratio RCEST6



Ratio LNEST6







## BANESTO: ¿UNA INTERVENCION ANUNCIADA?

FERNANDEZ GENIZ, PATROCINIO  
GOMEZ DOMINGUEZ, DOLORES y  
VAZQUEZ CUETO, M<sup>a</sup> JOSE

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales.  
Dpto. Economía Aplicada I. Universidad de Sevilla

### INTRODUCCION

El 28 de Diciembre de 1993 el Banco Español de Crédito fue intervenido por el Banco de España y suspendida su cotización en bolsa. Con esta intervención, se cerraba una etapa que había comenzado en 1988 cuando esta entidad se lanzó a una batalla por la captación de créditos.

Como sabemos, la actuación del Banco de España para solventar una situación de desequilibrio patrimonial, deriva de la potestad otorgada por la ley de Disciplina e Intervención de las Entidades de Crédito (Ley 26/1988, de 29 de julio).

Los problemas financieros que surgieron a raíz de esta intervención fueron:

\*Problemas de rentabilidad, que tenían su origen en la lucha entablada por la captación de recursos a cualquier precio.

\*Problemas de liquidez, que llevaron a que este banco tuviera que financiarse en el mercado interbancario a tipos de interés elevados.

A estos problemas hay que añadir los causados por la corporación industrial de Banesto, a la que el banco le había concedido créditos, y que dada la delicada situación originada por la crisis se convirtieron en fallidos, morosos o créditos de dudoso cobro.

Todo ello originó una situación de desequilibrio patrimonial que fue establecida por los nuevos gestores en una cantidad de 605.000 millones de pesetas.

La situación fue parecida a la que se produjo en el período 1977-85, en la que un conjunto de bancos fueron intervenidos en medio de una fuerte crisis económica. No obstante, es preciso establecer una clara diferenciación. Aquella fue una crisis bancaria, ya que según señala Alvaro Cuervo<sup>1</sup>, de los 110 bancos existentes a finales de 1977 se vieron afectados por la crisis 56 bancos

---

<sup>1</sup> Alvaro Cuervo: "La crisis bancaria en España 1977-1985". Ed: Ariel, 1988, pp. 23-29.

y 23 empresas bancarias, es decir, el 27,19 % de los recursos propios de la banca, el 27,14 % de los ajenos y el 27,67 % del total de trabajadores del sector bancario; sin embargo, en este caso estamos refiriéndonos a la crisis de un sólo banco.

Aquella crisis dio lugar a una serie de trabajos empíricos sobre la quiebra bancaria<sup>2</sup>. Básicamente, trataban de elaborar un procedimiento de predicción, mediante la comparación de características un tiempo antes de que se produjera la crisis y el establecimiento de las principales diferencias sistemáticas, reuniendo para ello información muestral de instituciones que tienen un normal funcionamiento y de otras que han entrado en crisis en un determinado período.

Las técnicas utilizadas para elaborar los modelos de predicción fueron: el análisis univariante, el análisis multivariante y la regresión logística.

Las características estudiadas suelen ser indicadores económicos y financieros derivados de los estados contables u observados en los mercados de títulos, y considerados más relevantes. Conviene señalar, que la mayoría de las veces las quiebras se deben a desfalcos, conductas fraudulentas,..., difíciles de ser recogidas en un indicador; no obstante, las medidas financieras (ratios) pueden, en buena medida, evaluar la solidez financiera de una firma.

La consideración de los ratios contables u otros predictores seleccionados individualmente constituyó una primera etapa en los estudios empíricos para la quiebra bancaria en el caso español<sup>3</sup>. La consideración de conjuntos de ratios en forma de funciones lineales originó los trabajos basados en el análisis discriminante lineal. Es en este conjunto de investigaciones en el que nos basaremos para el desarrollo de este trabajo.

Nuestro objetivo es comparar los resultados obtenidos en los trabajos antes mencionados, con los indicadores financieros que hemos calculado para tres entidades bancarias nacionales (Banco Español de Crédito, Banco de Santander y Banco Bilbao Vizcaya) en el período 1988-92. Estos tres bancos han sido seleccionados por las siguientes razones: el Banco Español de Crédito, debido a la intervención de que fue objeto por parte del Fondo de Garantía de Depósitos en Establecimientos Bancarios y que puso de manifiesto ante la opinión pública las dificultades financieras por las que atravesaba la entidad; las otras dos entidades fueron seleccionadas de entre las que aparecen recogidas en el Anuario Estadístico de la Banca Privada como bancos nacionales (volumen correspondiente al año 1992), por ser las que presentaban un volumen medio de depósitos en el período considerado más próximo al calculado para Banesto. Lo que pretendemos con este trabajo es comprobar si los modelos elaborados hubieran servido a los supervisores para detectar con antelación la dificultad financiera por la que atravesaba el Banco Español de Crédito.

Estructuraremos el trabajo en tres apartados. En el primer apartado, *Análisis gráfico de los ratios financieros más significativos*, seleccionamos aquellos ratios que, en la literatura sobre crisis

---

<sup>2</sup> Entre los que resaltamos los elaborados por Laffarga Briones, Martín Marín y Vázquez Cueto; Martínez Mongay; Pina Martínez; Rodríguez Fernández, los cuales vienen recogidos en la bibliografía.

<sup>3</sup> Siguiendo el trabajo publicado por Beaver, W.H.: "Financial Ratios as Predictors of Failure" publicado en *Empirical Research in Accounting* en 1966.

bancaria, aparecen como mejores predictores considerados individualmente; presentamos los valores que toman estos ratios para las tres entidades seleccionadas durante el período 1988-92, comparándolos con los resultados obtenidos en estudios previos.

En el segundo apartado, *Comparación con los modelos de predicción de quiebras que utilizan análisis discriminante*, seleccionamos una función y calculamos la puntuación discriminante para cada una de las tres entidades.

En el tercer apartado, y para finalizar, presentaremos algunas conclusiones.

## ANÁLISIS GRÁFICO DE LOS RATIOS MÁS SIGNIFICATIVOS

Los ratios financieros representan la relación matemática por cociente entre dos magnitudes de las recogidas en los estados contables. Su análisis pone al descubierto relaciones y bases de comparación que revelan situaciones y tendencias que no pueden descubrirse mediante el examen de los componentes individuales del ratio. No son magnitudes significativas en sí mismas, y deben interpretarse únicamente comparándolos con los ratios pasados de la misma empresa, con determinados estándares previamente establecidos o bien con los ratios de otras empresas del mismo sector.

Nosotros nos centraremos en aquellos ratios que resultaron más significativos según la clasificación correcta total obtenida y según su nivel de significación para un año antes de que se produjera el fracaso bancario (según la definición dada de éste) en los trabajos a los que hemos hecho referencia<sup>4</sup>. Los ratios a los que nos referimos se catalogan en la literatura financiera como ratios de rentabilidad y son, junto con los de liquidez, los de mayor poder discriminatorio a la hora de estudiar la quiebra o el fracaso.

No obstante, aunque en estos trabajos aparecen también como significativos, en un contexto univariado, los ratios de liquidez, como son  $R_1 = \text{Activo Circulante} / \text{Activo Total}$ ,  $R_2 = (\text{Créditos} + \text{Cartera de Valores}) / \text{Activo Total}$ ,  $R_3 = \text{Créditos} / \text{Activo Total}$ ,  $R_6 = \text{Activo Circulante} / \text{Pasivo Exigible}$  y  $R_7 = \text{Capital circulante} / \text{Pasivo Exigible}$ , hemos omitido el estudio de los mismos por las siguientes razones:

-La primera razón es que aquellos ratios que no plantean dificultad a la hora de identificar las partidas, como  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$ , son los que menor nivel de significación tienen para un año antes de la quiebra, así como también los que proporcionan un menor porcentaje de clasificación correcta.

-La segunda razón es que aquellos ratios con un mayor nivel de significación y un mayor porcentaje de clasificación correcta como son  $R_6$  y  $R_7$  presentan gran dificultad a la hora de identi-

<sup>4</sup> Laffarga Briones, J.; Martín Marín, J.L.; Vázquez Cueto, M.J.: "El pronóstico a largo plazo del fracaso en las instituciones bancarias: metodología y aplicaciones al caso español". ESIC-MARKET. Octubre-Diciembre de 1986. p: 137.

ficar las partidas que han de incluirse en cada una de las magnitudes de los ratios. Ello se debe a que los balances de situación publicados en el “Anuario Estadístico de la Banca Privada en España” presentan las partidas muy agregadas. Así pues, resulta prácticamente imposible identificar, por ejemplo, dentro de la partida de Inversiones Crediticias, la parte que corresponde a créditos a c/p y la que corresponde a créditos a l/p.

-Y la tercera razón es que, los ratios de liquidez, aun siendo ratios de gran tradición en el análisis de los estados financieros, tienen que ser utilizados e interpretados en su justa medida y dentro de sus limitaciones. El ratio de liquidez es un concepto “estático” relativo a los recursos disponibles en un determinado momento para hacer frente a las obligaciones inmediatas. Además según señala Stiglitz<sup>5</sup>, si la única dificultad que tiene un banco es la de liquidez a corto plazo, podría solucionarse pidiendo un préstamo al Banco Central correspondiente, sin que ello desencadenara una crisis en la entidad o un pánico bancario (un tratamiento distinto requeriría el problema de liquidez a largo plazo o liquidez futura).

Es por ello, por lo que centraremos nuestro estudio, exclusivamente, en el ratio de rentabilidad.

Hablamos de rentabilidad cuando relacionamos el resultado obtenido con la magnitud que, directa o indirectamente, lo ha provocado. Así podemos hablar de rentabilidad de activos, y de rentabilidad de pasivos o fuente de financiación.

- *Rentabilidad de activos ( $R_A$ ).*

$$R_A = \frac{\text{Bº Neto}}{\text{Activo total}}$$

Con este ratio intentamos medir la eficiencia en la gestión de la entidad, de forma que cuanto mayor sea el ratio, más eficiente será ésta. No obstante, debemos de tener en cuenta que uno de los problemas que se plantean a la hora de calcularlo es qué componentes del activo han de computarse en el mismo. En este sentido, entendemos que habrá de computarse la totalidad de los activos menos el activo ficticio, ya que de esta forma mediremos correctamente la rentabilidad de los capitales invertidos.

- *Rentabilidad de pasivos o fuente de financiación ( $R_p$ ).*

$$R_p = \frac{\text{Bº Neto}}{\text{Pasivo a L/P} = \text{Fondos Propios}}$$

---

<sup>5</sup> STIGLITZ, J.E.: Economía (1993). Ariel, Barcelona, p.968.

Este ratio representa la rentabilidad de los fondos aportados por los acreedores a largo plazo y los accionistas de la entidad. Sin embargo, en este trabajo, nos vemos obligados a omitirlo en nuestro análisis, sustituyéndolo por el ratio  $R_B$  que representa la rentabilidad de los fondos ajenos, debido a que es éste el ratio utilizado en los trabajos antes referidos.

$$R_B = \frac{B^{\circ} \text{ Neto}}{\text{Pasivo exigible}}$$

Definimos a continuación las magnitudes que componen estos ratios<sup>6</sup>:

- Beneficio Neto : Beneficio del ejercicio corriente.
- Activo Total : Total Activo - Activo Ficticio.
- Pasivo Exigible : Total Pasivo - (Fondos Propios + Cuentas Diversas).

En el cuadro 1 recogemos los valores que toman los ratios de rentabilidad  $R_A$  y  $R_B$  para los tres bancos seleccionados (Banesto, Santander y BBV) en cada uno de los años del período considerado, 1988-92.

**Cuadro 1**

|           |    | 1988  | 1989  | 1990  | 1991  | 1992   | R       | S <sup>2</sup>         |
|-----------|----|-------|-------|-------|-------|--------|---------|------------------------|
| BANESTO   | RA | 0.013 | 0.013 | 0.012 | 0.009 | 0.0041 | 0.010   | 11.56 10 <sup>-6</sup> |
|           | RB | 0.015 | 0.015 | 0.014 | 0.010 | 0.0046 | 0.011   | 10.19 10 <sup>-6</sup> |
| SANTANDER | RA | 0.019 | 0.016 | 0.015 | 0.011 | 0.010  | 0.014   | 11.00 10 <sup>-6</sup> |
|           | RB | 0.027 | 0.020 | 0.019 | 0.014 | 0.012  | 0.0184  | 27.49 10 <sup>-6</sup> |
| BBV       | RA | 0.015 | 0.016 | 0.016 | 0.011 | 0.008  | 0.0132  | 10.16 10 <sup>-6</sup> |
|           | RB | 0.017 | 0.019 | 0.018 | 0.013 | 0.0086 | 0.01512 | 14.77 10 <sup>-6</sup> |

Se observa en el cuadro una caída general de los ratios de rentabilidad. Esta caída queda justificada por el aumento de la competencia interior del sector, desatada con la “guerra” por la captación del pasivo y posteriormente por el abaratamiento del activo, que ha estrechado los márgenes.

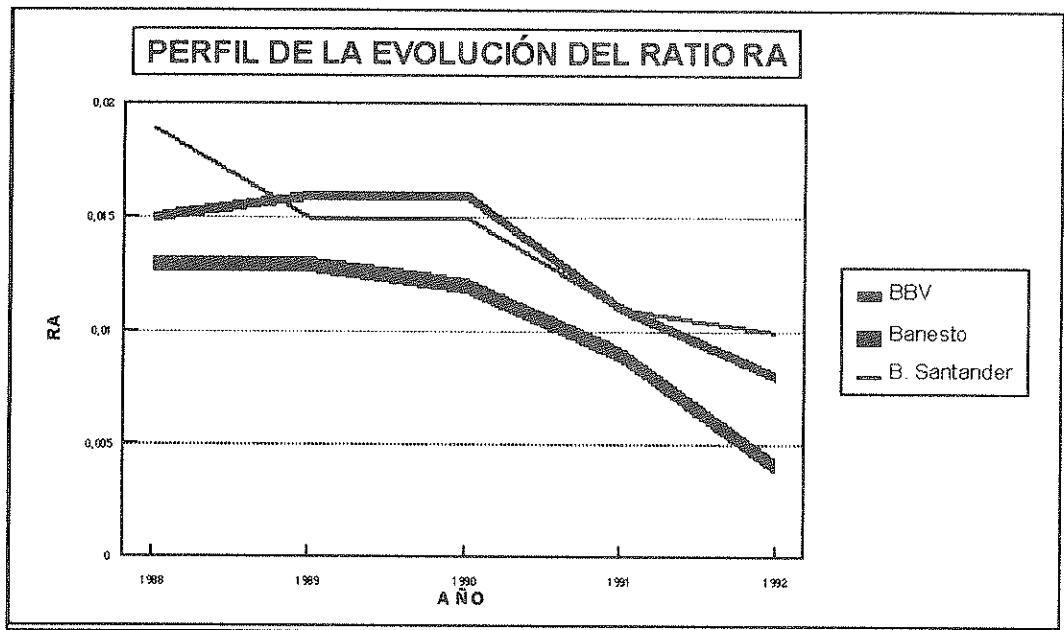
<sup>6</sup> Las magnitudes han sido tomadas de los balances de situación al 31 de Diciembre recogidos en el “Anuario Estadístico de la Banca Privada”, publicados por el Consejo Superior Bancario. Debemos señalar que las partidas del balance aparecen a nivel muy agregado, por lo que es imposible construir ratios que conlleven un grado de desagregación mayor.

genes de intermediación. No obstante, en el caso de Banesto la caída se agudiza más en términos porcentuales y además es muy brusca en el último año. Esta disminución progresiva de la rentabilidad se ilustra claramente, en los gráficos 1 y 2, donde se representan los perfiles de la evolución de los ratios  $R_A$  y  $R_B$  en el periodo considerado.

Si comparamos los valores que hemos obtenido en el cálculo de estos ratios, con los valores críticos<sup>7</sup> que aparecen para los mismos en los trabajos empíricos a los que venimos haciendo referencia<sup>8</sup>, (que en dichos estudios son denominados  $R_{11}$  y  $R_{13}$ , refiriéndose respectivamente a  $R_A$  y  $R_B$  tal y como nosotros los hemos construido), clasificaríamos al Banco Español de Crédito como “banco fracasado” y a las otras dos entidades como “bancos saneados”.

El valor crítico ( $V_c$ ) obtenido para el ratio “Rentabilidad de Activos”, se sitúa para “un año antes de la quiebra”<sup>9</sup> en 0.005. La media del valor del ratio para los “bancos fracasados” en el “año uno antes de la quiebra” es de -0.003, y para los “bancos saneados” 0.011. El  $V_c$  para este ratio tiene, en un contexto univariado, la siguiente interpretación: si el valor del ratio calculado para cada una de las entidades es inferior a  $V_c$ , el banco será clasificado como fracasado; si por el contrario es superior, será clasificado como saneado.

Gráfico 1

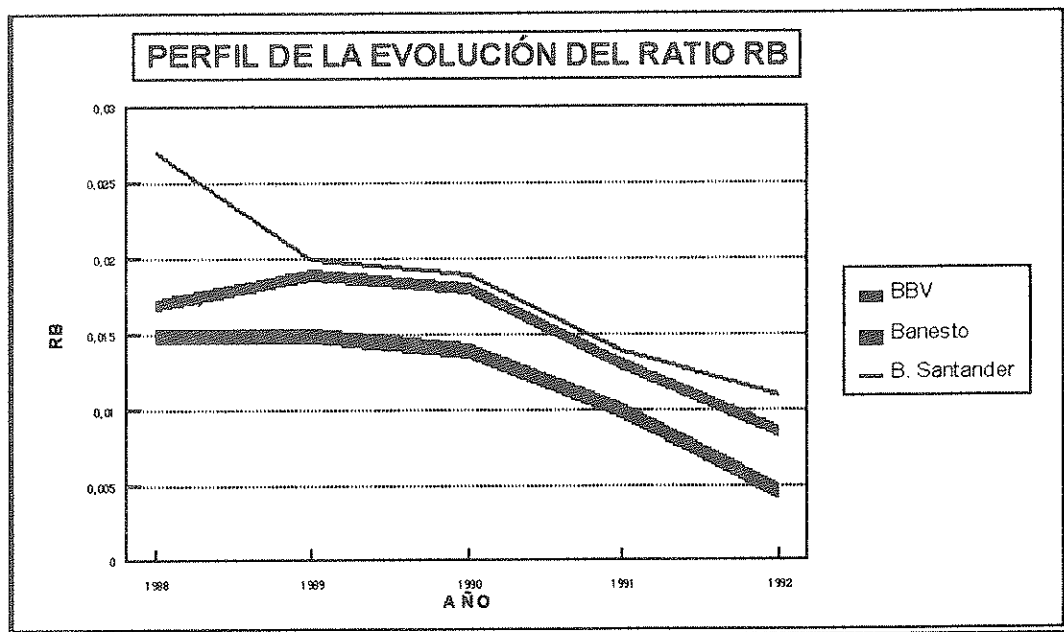


<sup>7</sup> Con este término (preconizado por Beaver) designamos al valor que se le asigna a cada predictor para distinguir a las empresas sanas de las fracasadas. Su cálculo puede efectuarse heurísticamente, buscando aquel que minimice los costes de mala clasificación, o bien utilizando un programa de ordenador para análisis discriminante.

<sup>8</sup> Laffarga Briones, J.; Martín Marín, J.L.; Vázquez Cueto, M.J. Op.cit. p.136.

<sup>9</sup> Por “un año antes de la quiebra” debemos entender, el ejercicio anterior al año de intervención, y que por lo tanto, puede ser inferior al año natural.

Gráfico 2



Trasladando esta interpretación a los resultados que nosotros hemos obtenido en el análisis del ratio  $R_A$ , observamos que con los datos contables del ejercicio 1992<sup>10</sup>, el valor de  $R_A$  para Banesto es de 0.0041, claramente inferior al Valor crítico. Sin embargo, los valores de este ratio para el Banco de Santander y el Banco Bilbao Vizcaya son respectivamente de 0.010 y 0.008, superior por tanto al  $V_c=0.005$ .

Si siguiendo el mismo razonamiento para el ratio "Rentabilidad de los Fondos Ajenos", los valores de  $R_B$  para el Banco Español de Crédito, Banco de Santander y Banco Bilbao Vizcaya son respectivamente 0.0046, 0.012 y 0.0086, y su valor crítico, que al corresponder a un ratio de rentabilidad tiene la misma interpretación que el anterior, es 0.006. De nuevo, es el valor de  $R_B$  para Banesto, el único que se sitúa por debajo.

Por tanto, los resultados obtenidos en los trabajos empíricos previos para la quiebra bancaria en el caso español, basados en el análisis univariante, hubieran servido para avisar a los supervisores que el Banco Español de Crédito estaba atravesando por serias dificultades.

Sin embargo, el análisis univariante con ser importante, no completa el estudio. La mayoría de los trabajos sobre predicción de quiebra acuden al análisis multivariante, a funciones que relacionan varios ratios.

<sup>10</sup> El correspondiente a "un año antes de la quiebra" para el Banco Español de Crédito.

## COMPARACION CON LOS MODELOS DE PREDICCIÓN DE QUIEBRA QUE UTILIZAN ANÁLISIS DISCRIMINANTE <sup>11</sup>

El problema básico del análisis discriminante (como uno de los métodos del Análisis Multivariante), es asignar una observación de origen desconocido a una de dos o más poblaciones basándose en el valor de la observación.

En el caso de la economía de la empresa, una de las aplicaciones que más amplio desarrollo ha tenido, es la de clasificar a un grupo de empresas, en candidatas potenciales al fracaso o al éxito en los negocios. Esta aplicación surge en 1968 con la publicación del trabajo de Altman<sup>12</sup>, tras el cual ha aparecido una amplia literatura dedicada al desarrollo de este tema.

Este método construye funciones lineales del tipo:

$$Z = A_0 + A_1 X_1 + A_2 X_2 \dots + A_n X_n$$

donde:

Z denota la puntuación o "score"; el método asigna una puntuación Z a cada Banco, de forma que si  $Z > 0$  se le considera saneado y si  $Z < 0$  fracasado.

$X_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) son las variables predictoras, en nuestro caso, los ratios financieros.

$A_i$  ( $i=0,1,2,\dots,n$ ) son los parámetros a estimar.

En el estudio en el que nos basamos para el desarrollo de este epígrafe, se obtuvieron un total de 6 funciones (que contenían de dos a cinco variables) basándose en una muestra compuesta por 47 bancos, 22 de los cuales eran fracasados y 25 restantes saneados. El método que usaron para la estimación de los parámetros fue el de Máxima Verosimilitud.

Conviene señalar que ratios, que son buenos predictores en un contexto univariado, pueden comportarse peor en un contexto multivariado, y que por el contrario, variables que resultan poco significativas en un contexto univariado, pueden ser muy significativas en un contexto multivariado<sup>13</sup>.

¿Detectaron estas funciones algún problema en Banesto?.

El problema que se presenta es la elección de la función a utilizar, aunque a posteriori es muy fácil su determinación, ya que se tiene la certeza de cuál es el año antes de la quiebra.

---

<sup>11</sup> Para la realización de este apartado nos centraremos fundamentalmente en el artículo de Laffarga Briones, J.; Martín Marín, J.L. y Vázquez Cueto, M.J.: "El pronóstico a corto plazo del fracaso en las instituciones bancarias: metodología y aplicaciones a la Banca española". Publicado en ESIC-MARKET, julio-septiembre de 1986.

<sup>12</sup> Altman, E.I.: "Financial Ratios, Discriminant Analysis and the prediction of Corporate Bankruptcy". The Journal of Finance, vol. XXIII, num. 4, septiembre de 1968.

<sup>13</sup> Martín Marín, J.L.: El pronóstico del fracaso empresarial. Publicaciones de la Universidad de Sevilla. 1986. p.128.



Nosotros hemos elegido, de entre las seis funciones discriminantes, la que contiene sólo dos variables, ya que a juicio de los autores ésta resulta ser la función óptima para “un año antes ...” por obtener el mejor porcentaje de clasificación total con el menor número de predictores posibles. Dicha función viene dada por la siguiente expresión:

$$Z = -0.70 + 0.67 R_7 + 59.73 R_{11}$$

siendo:

$$R_7 = \text{Capital Circulante/Pasivo Exigible.}$$

$$R_{11} = B^2 \text{ Neto/Activo Total}$$

El ratio  $R_7$  es un indicador de liquidez, al que ya hemos aludido antes, señalando sus principales inconvenientes, sin embargo, dado que aparecía en esta función, lo hemos calculado realizando las agrupaciones de las partidas del balance indicadas por los autores.  $R_{11}$  es la variable que nosotros hemos denominado  $R_A$  y que se ha descrito antes.

A continuación calculamos la puntuación  $Z$  para cada una de las tres entidades:

$$Z (\text{Banesto}) = -0.038 < 0$$

$$Z (\text{Santander}) = 0.612 > 0$$

$$Z (\text{BBV}) = 0.389 > 0$$

A la vista de estos resultados, podemos concluir, al igual que en el apartado anterior, que el Banco Español de Crédito presentaba problemas.

## CONCLUSIONES

\* A la vista de los resultados obtenidos, parece ser que los sistemas de alarma preventiva hubieran servido para alertar de la situación por la que atravesaba el Banco Español de Crédito. Por lo tanto podría justificarse su implantación como un mecanismo de apoyo a los supervisores de entidades bancarias. Tanto para los que hacen la supervisión a nivel interno, al objeto de tomar las medidas oportunas de saneamiento y evitar así una futura intervención, como para los que tienen la potestad de intervenir, evitando situaciones que pueden afectar gravemente al sistema financiero. Sin embargo, queremos resaltar que estos serían un instrumento de análisis complementario a tener en cuenta en la supervisión bancaria, sin olvidar que hay elementos difíciles de reflejar en estos modelos, como son, la evaluación de la capacidad profesional o ciertas conductas fraudulentas.

\* No debemos olvidar un aspecto muy importante. El trabajo que aquí se presenta se basa en un análisis “a posteriori”, por tanto, en lo que a la elección de la función discriminante se refiere, la determinación de la función  $Z$  estaba clara, pues se conocía con exactitud cuál era el año antes de la quiebra. Esto es un inconveniente que se presenta en el análisis “a priori” pues al no

conocer con certeza cuál es el año en que quebrará la entidad, no se puede determinar con precisión, cuál es la función discriminante que se debe utilizar en el análisis.

\* El trabajo podría completarse con el estudio de las funciones para “dos años antes de la quiebra”, “tres años antes...”,...; así como con los modelos que se basan en técnicas de regresión logística. Esto será tratado en trabajos posteriores.

## BIBLIOGRAFIA

ALTMAN, E.I.(1968): “Financial Ratios, Discriminant Analysis and the Prediction of Corporate Bankruptcy”. The Journal of Finance, Vol XXIII, num. 4. Septiembre.

ALTMAN, E.I.; AVERY, R.; EISENBEIS, R. y SINKEY, J.(1981): *Application of classification Techniques in Business, Banking and Finance*. J.A.I. Press, Greenwich (Conn.).

BALDWIN, J.; GLEZEN, W.(1992): “Bankruptcy Prediction Using Quaterly Financial Statement Data”. Journal of Accounting, Auditing & Finance, pp. 269-289.

BEAVER, W.H.(1966): “Financial Ratios as Predictors of Failure”. Suplemento, Journal of Accounting Research, pp: 71-127.

(1968) “Market Prices, Financial Ratios and the Prediction of Failure”. Journal of Accounting Research. Vol VI, pp. 179-192.

BERNSTEIN, L.A.(1986): *Análisis de Estados Financieros*. Ediciones Deusto, S.A. Bilbao (versión traducida al castellano).

CONSEJO SUPERIOR BANCARIO: Anuario Estadístico de la Banca Privada, años 1988 a 1992.

CUERVO, A. (1988): *La crisis bancaria en España 1977-1985*. Ariel. Barcelona.

GOMEZ BEZARES, F.(1988): “El Análisis Financiero por medio de Ratios (un modelo integrado)”. Actualidad Financiera, pp. 577-586.

LAFFARGA BRIONES, J.; MARTIN MARIN, J.L. Y VAZQUEZ CUETO, M.J.(1985): “El análisis de la solvencia en las instituciones bancarias: Propuestas de una Metodología y aplicaciones a la Banca Española”. ESIC MARKET. Abril-Junio, pp. 51-73.

(1986) “El pronóstico a corto plazo del fracaso en las instituciones bancarias: metodología y aplicaciones a la banca española”. ESIC MARKET, Julio-Septiembre, pp. 59-116.

(1986) “*El pronóstico a largo plazo del fracaso en las instituciones bancarias: metodología y aplicaciones al caso español*”. ESIC MARKET, Octubre-Diciembre, pp. 113-167.

(1987) “Predicción de la crisis bancaria en España. Comparación entre el análisis Logit y el Análisis Discriminante”. Cuadernos de Ciencias Económicas y Empresariales, nº 18, Enero, pp. 49-57.

(1991) “La predicción de la Quiebra Bancaria: el caso español”. Revista Española de Financiación y Contabilidad. Vol XX, nº 66, Enero-Marzo, pp.151-163.

MARTIN MARIN, J.L.(1986): El pronóstico del fracaso empresarial. Servicio de publicaciones de la Universidad de Sevilla. Sevilla.

MARTINEZ MONGAY, C.; NAVARRO, M.C.; SANZ, F.(1989): “Selección y explotación de los sistemas de alarma y prevención de quiebras”. Investigaciones Económicas (segunda época), suplemento, pp. 135-141.

PINA MARTINEZ, V.(1989): “La Información Contable en la Predicción de la crisis bancaria 1977-1985”. Revista Española de Financiación y Contabilidad, pp.309-338.

PLATT, H.D.; PLATT, M.B.; PEDERSEN, J.G.(1994): “Bankruptcy Discrimination with real variables”. Journal of Business Finance & Accounting, 21(4), Junio, pp.491-509.

RODRIGUEZ FERNANDEZ, J.M.(1989): “Análisis de las insolvencias bancarias en España: un modelo empírico”. Moneda y Credito. Nº 189, pp.187-227.

STIGLITZ, J.E.(1993): *Economía*. Ariel. Barcelona.

URIAS VALIENTE, J.(1991): *Análisis de Estados Financieros*. McGraw-Hill / Interamericana de España, S.A. Madrid.



# BANCA EXTRANJERA: UN ANÁLISIS EMPÍRICO DE SU EXPANSIÓN RECIENTE EN ESPAÑA

JOSÉ GARCIA BLANDON

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales.  
Universidad Pompeu Fabra

## INTRODUCCION

La expansión de las actividades internacionales de las entidades financieras ha recibido una atención creciente en los últimos años. La especial naturaleza de la actividad bancaria, justificaría al menos en parte esta atención. Aliber (1976), destaca la existencia de dos conjuntos de cuestiones relativas a la internacionalización bancaria: cuestiones que estarían dentro del ámbito de la organización industrial, y que se centrarían en los patrones de expansión internacional de la banca mediante sucursales y filiales, y en la naturaleza de las ventajas que tienen estas sucursales y filiales en relación con los bancos domésticos, y cuestiones que estarían dentro del campo de las finanzas internacionales, que contemplarían el *role* de los bancos en los flujos financieros internacionales. Giddy (1981), en esta misma línea distingue entre tres segmentos del mercado bancario internacional en los que puede participar una entidad: *Arm's length international banking*, que sería la mínima forma de internacionalización bancaria, *offshore banking*, y *host country international banking*, que supondría la entrada de un banco extranjero en un mercado doméstico con el propósito de hacer negocios locales. Las motivaciones que explican cada una de estas tres actividades son diferentes. La primera se basa en la teoría del comercio internacional, en ausencia de regulaciones diferenciales, ventajas monopolísticas, barreras a las transacciones internacionales de capitales, y otras imperfecciones de mercado, toda la actividad bancaria internacional sería del primer tipo. La existencia de regulaciones diferenciales entre países, y de ventajas monopolísticas explicarían el *offshore banking*, mientras que la teoría de la inversión directa en el exterior explicaría el *host country international banking*. Este trabajo se centrará en las cuestiones relativas a este último tipo de internacionalización bancaria. Las investigaciones realizadas en esta área han ido dirigidas a determinar la naturaleza de las ventajas que permiten a unas entidades determinadas competir con éxito en países extranjeros. Estas ventajas deberían compensar las desventajas asociadas a un menor conocimiento del entorno por parte de estas entidades, (Grubel 1977). Los trabajos empíricos existentes han adoptado mayoritariamente una aproximación que podríamos denominar *macro*, en el sentido de intentar explicar la expansión de las entidades bancarias en el exterior a partir fundamentalmente de variables macroeconómicas como comercio exterior, y tipos de cambio. Se trata de variables que resultan externas a la entidad que adopta la decisión de expandir sus actividades en el exterior. La adopción de una aproximación de este tipo dificulta conocer la importancia que los factores internos a la propia entidad, es decir las *ventajas derivadas de la propiedad* (Dunning 1977) tienen en la internacionalización bancaria. Para superar esta limitación Ball and Tschoegl (1982) adoptaron un enfoque diferente al investigar la expansión bancaria extranjera en Japón y California. Estos autores investigaron la importancia que las ventajas compe-

tivas de la propia entidad como la dimensión o la experiencia operando en entornos multinacionales tenían al explicar su expansión en las localizaciones mencionadas. Posteriormente Ursacki and Vertinsky (1992) adoptaron un enfoque similar al estudiar la expansión de la banca extranjera en Japón y Corea.

Mi intención es investigar la expansión de la banca extranjera ocurrida en España en los últimos años, y contrastar empíricamente para el caso español la importancia de los factores más ampliamente citados en la literatura como favorecedores de la expansión de un banco en el exterior. Se tendrá en cuenta además la forma organizativa elegida por el banco extranjero para llevar a cabo sus actividades en España. Esta es una cuestión que ha sido poco abordada en los trabajos empíricos existentes y que puede ser importante para explicar la expansión bancaria en el exterior.

## BASE TEORICA E HIPOTESIS

La mayoría de trabajos que investigan los factores que impulsan la inversión directa en el exterior, adoptan el marco de la teoría ecléctica de Dunning (1977). Según este autor, existen tres tipos de factores que posibilitan la inversión directa por parte de una empresa en el exterior: las *ventajas asociadas a la propiedad*, algunas de las cuales son de especificidad nacional, las *ventajas derivadas de la internalización*, y las *ventajas derivadas de la localización*. La existencia de estos tres tipos de ventajas son condiciones necesarias para que una empresa realice actividades productivas en el exterior. Las primeras permitirán a la empresa superar las barreras de entrada existentes en los mercados exteriores, las ventajas derivadas de la internalización harán que sea más interesante para la empresa utilizar estas ventajas antes que ceder su utilización a otras empresas. Por último, las ventajas derivadas de la localización harán que resulte interesante para la empresa producir en el exterior, antes que servir ese mercado mediante exportaciones. Gray and Gray (1981) aplican la teoría ecléctica de Dunning a la banca internacional, si bien parten de la existencia previa de las ventajas derivadas de la propiedad, y se centran en el análisis de las ventajas derivadas de la internalización, y de la localización. La mayoría de trabajos empíricos han investigado la inversión directa en el exterior de las empresas industriales. En el caso de las empresas de servicios la importancia de este tipo de ventajas podría ser diferente debido entre otros factores a la diferente importancia que la proximidad con el cliente tiene en ambos casos. Li and Guisinger (1992) investigan empíricamente los determinantes de la inversión directa en el exterior de las empresas multinacionales de servicios, no incluyendo sin embargo en su trabajo el sector bancario.

Las ventajas más comúnmente citadas en la literatura, y sobre las que existe un cierto consenso, como favorecedoras de la expansión de la empresa en el exterior serían:

## - Dimensión de la empresa

Se ha sugerido ampliamente desde Horst 1974 que la propensión de las empresas a participar en la producción en el exterior estaría positivamente relacionada con su tamaño. En el caso de los bancos, el tamaño ha resultado un factor importante al explicar la expansión multinacional en California y Japón (Tschoegl 1982), y en Japón y Corea (Ursacki and Vertinsky 1992). Si bien el tamaño de los bancos involucrados en la escena internacional, sugeriría la existencia de economías de escala, ni Tschoegl 1983, ni Benston, Haweck and Humphrey 1982 encuentran evidencia de la existencia de tales economías entre los bancos internacionales. Se acepta en general que el tamaño en sí pueda recoger el efecto de otras variables que pueden afectar la propensión de la empresa a producir en el exterior. La primera hipótesis planteada en este trabajo examina el impacto del tamaño de la entidad en su propensión a ampliar su presencia en España. Esta hipótesis se contrastará tanto en términos estáticos como dinámicos.

**H1:** La inversión directa en el exterior por parte de las entidades financieras está directamente ligada al tamaño de la entidad.

**H2:** La expansión bancaria en el exterior está positivamente relacionada con el crecimiento del tamaño de la entidad.

## - Presencia de multinacionales del país de origen:

La presencia de multinacionales del país de origen del banco en una localización determinada puede favorecer la expansión del banco en esa localización. Si la empresa multinacional mantiene relaciones con el banco en el país de origen de ambos, se produciría un ahorro en términos de costes de información si este mismo banco negociara con las filiales de la empresa en el extranjero. Esto supondría una ventaja monopolística para el banco difícil de imitar por sus competidores. La importancia de este factor es de esperar que varíe en función del *host country* considerado, en relación con factores tales como la regulación del país huésped hacia la inversión extranjera, o el atractivo de su mercado interno. En países donde no se permite a las entidades foráneas participar en el *retail market*, será de esperar que la presencia de multinacionales del país de origen del banco sea un factor más importante para explicar su multinacionalización, que en países con una regulación menos restrictiva. De igual forma, en países que resultan atractivos para el banco por su mercado interno, es de esperar que la presencia de empresas del país de origen del banco en esta localización no sea un factor tan importante. Sabi (1988) obtiene que la inversión directa de los US en los países menos desarrollados es un factor importante para explicar la expansión de los bancos norteamericanos en esos países. La tercera hipótesis planteada, considerará la importancia de este factor para explicar la expansión del banco en España.

**H3:** La propensión a invertir en una localización exterior determinada por parte de la entidad financiera depende positivamente de la inversión directa realizada desde el país de origen del banco en esta localización.

## - Experiencia en operaciones en el extranjero

La experiencia operando en un entorno multinacional es de esperar que constituya una ventaja importante para el banco. El aprovechamiento de esta ventaja debería impulsar a la entidad a expandir sus actividades en el exterior. Se podría distinguir como posibles fuentes de ventaja para el banco, por un lado la experiencia de este al operar en un número relativamente elevado de mercados exteriores, lo que le conferiría una capacidad de adaptación para operar en diferentes entornos a un coste relativamente bajo, y por otro el conocimiento que el banco tenga de un mercado determinado, cuanto mayor tiempo lleve un banco operando en un mercado mayor será el conocimiento que el banco tendrá de este mercado y por lo tanto más dispuesto estará a ampliar sus actividades en esa localización. La internalización de la primera ventaja llevaría al banco a aumentar su presencia en mercados exteriores, sin que a priori nos indique en qué localizaciones, mientras que la segunda llevaría a la entidad a aumentar su presencia en aquellas localizaciones sobre las que tenga un mayor conocimiento. En este trabajo se tendrá en cuenta tanto la experiencia genérica de la entidad operando internacionalmente, como su experiencia específica en el mercado español.

**H4:** la expansión de la entidad en el exterior está positivamente ligada a la experiencia multinacional de la entidad.

**H5:** la expansión en el exterior de la entidad en una localización determinada depende positivamente del conocimiento que tenga la entidad sobre dicha localización.

## - Distancia:

Se asume de manera general que los costes de gestionar una inversión en el exterior aumentan con la distancia entre el *host country* y el país de origen de la inversión. La distancia al *host country* sería una ventaja de tipo locacional, que tendería a favorecer la inversión directa exterior en determinados países. Algunos autores como Terpstra and Yu (1988) apuntan sin embargo que en el caso de las empresas de servicios su comportamiento en relación con la distancia al país huesped sería diferente a lo que sucede para las empresas industriales, dado que las primeras necesitan una presencia local para poder proporcionar la mayoría de los servicios, la mayor distancia del *host country* al país de origen haría más necesaria la presencia física de estas empresas para servir a los clientes. En este trabajo se planteará la hipótesis que la proximidad al país de origen del banco constituye una ventaja locacional que favorece la expansión del banco en unas localizaciones determinadas.

**H6:** La expansión internacional de la entidad se ve negativamente afectada por la distancia del país de origen del banco al *host country*.



## LA BANCA EXTRANJERA EN ESPAÑA

La condición necesaria para que un banco expanda sus actividades en una localización determinada, es que la autoridad nacional del país huésped le permita la entrada. El sector financiero dadas sus especiales peculiaridades e importancia económica se encuentra especialmente regulado en los diferentes países, sin embargo existen importantes diferencias en cuanto al grado de permisividad existente entre países. La expansión bancaria multinacional se verá muy influida por cuál sea la actitud de la autoridad nacional hacia la entrada de entidades foráneas en el mercado nacional. En el caso español se produce una primera liberalización de la entrada de bancos extranjeros con el Real Decreto 1388/78, donde se contemplaba tanto la creación de filiales como la apertura de sucursales por parte de estas entidades. Esta legislación imponía limitaciones a la actuación en España de los bancos extranjeros establecidos a su amparo, a los que limitaba su actuación a la *banca al por mayor*, dado que no podían abrir más de tres oficinas. El Real Decreto Legislativo 1298/86 de adaptación a la legislación comunitaria, elimina las restricciones operativas impuestas a las entidades extranjeras. En esta línea liberalizadora, el Real Decreto 1144/1988 unifica las exigencias de capital, en bancos nacionales y extranjeros, aunque introduce una discriminación entre estos últimos dado que cuando la matriz no se localice en un país comunitario se podrá exigir la presentación de una garantía que alcance la totalidad de su actividad en España.

La expansión de la banca extranjera en España se ha producido fundamentalmente a partir de la legislación anterior, si bien con anterioridad a la Ley de Ordenación Bancaria de 1946 operaban en España cuatro entidades extranjeras con un régimen legal idéntico al de la banca española, y al amparo del Real Decreto de 9 de agosto de 1974 se habían creado dos bancos de estatuto especial, y nueve entidades se habían establecido de acuerdo con la normativa sobre inversiones extranjeras de 1977 (Ley de inversiones extranjeras de 1977) mediante la adquisición de bancos españoles, fundamentalmente bancos en crisis (Cuervo 1992).

Las entidades bancarias extranjeras que operan en España lo hacen a través de al menos una de las tres formas organizativas posibles:

- Oficina de representación.
- Sucursales.
- Filiales.

La elección de una u otra forma organizativa dependerá entre otros factores del interés que tenga el *host country* para el banco.

## MODELO Y VARIABLES

En este trabajo se contrastarán las hipótesis planteadas en relación con la decisión de un banco extranjero operando en España de ampliar su presencia en este mercado. Para ello se planteará un modelo de regresión con variable dependiente cualitativa. Esta variable tomará el valor 1 si

la entidad ha aumentado su presencia en España en el período considerado, y 0 en caso contrario. La muestra considerada está formada por los bancos extranjeros presentes en España a 31 de diciembre de 1988 a través de cualquiera de las tres formas organizativas posibles: sucursal, filial y oficina de representación, y que figuraran entre los primeros 500 bancos del ranking de The Banker de ese mismo año. Se plantearán dos modelos de regresión logística:

$$(1) P[FI=1] = 1/\{1 + \exp[-(B0 + B1Asset + B2Gr + B3FDI + B4FOE + B5Time + B6D)]\}$$

$$(2) P[FI=1] = 1/\{1 + \exp[-(B0 + B1Asset + B2Gr + B3FDI + B3FOE + B4Time + B5D + B7RO + B8Roasset)]\}.$$

donde  $P[FI = 1]$  es la probabilidad que la entidad aumente su presencia en España a lo largo del período considerado. Se considerará que un banco ha aumentado su presencia en España, cuando haya incrementado su número de oficinas, o bien cuando haya pasado de tener una simple oficina de representación, a instalar una sucursal o un banco filial.

Las variables explicativas son las siguientes:

*Asset*: son los activos totales del banco a 31 de diciembre de 1988, en millones de US \$, obtenidos de “The Banker”, como medida del tamaño de la entidad.

*Gr*: Crecimiento de la entidad, en el período 1988-1992, medido como el crecimiento medio anual en términos reales de los activos del banco. Esta información ha sido obtenida de The Banker.

*FDI*: es la inversión directa realizada en España desde el país de origen del banco durante el año 1988 en millones de pts. Estos datos se han obtenido del boletín económico de Información Comercial Española.

*FOE*: el número de países en los que el banco tiene instaladas sucursales o filiales en 1988. La información ha sido obtenida de The Banker’s Almanac.

*Time*: el número de años que el banco ha estado operando en España mediante sucursal o filial. Esta información se ha obtenido del Boletín Estadístico de la Banca.

*D*: distancia en línea recta de la ciudad donde figura registrado el banco a Madrid.

*RO*: es una variable cualitativa que toma el valor uno cuando el banco opera en España únicamente mediante una oficina de representación, y el valor cero en otro caso.

*Roasset*: resultado de multiplicar RO por la variable Asset.

El modelo (2) incorpora el efecto de la forma organizativa elegida por el banco para llevar a cabo su actividad en España.

La elección del período objeto de estudio, 1988/1992 responde a que 1992 es el último año para el que se dispone de información sobre los bancos de la muestra, correspondiéndose además con el período en que a partir de del Real Decreto Legislativo 1298/86 se eliminan las restricciones operativas existentes para la banca extranjera, entre la que destaca por el especial interés que tiene para este trabajo la eliminación progresiva de las restricciones para la apertura de sucursales, lo que provoca que sea en este período cuando las entidades tienen más posibilidades de aumentar su presencia en España. El año 1988 es además el año en que la incorporación de de bancos extranjeros al mercado español ha estado en buena parte concluída, y nos permite contar por tanto con un número relativamente elevado de entidades. El período mínimo de cuatro años contemplado para ampliar la presencia en España se entiende que es suficiente para que una entidad interesada en aumentar su presencia en España pueda hacerlo.

## RESULTADOS Y CONCLUSIONES

La tabla I recoge los resultados de las estimaciones realizadas. Se confirman las principales hipótesis apuntadas desde la teoría de la inversión directa en el exterior para la expansión de la banca extranjera en España. A partir de la interpretación de estos resultados, se pueden apuntar algunas cuestiones de interés:

La mejora que se produce al considerar el tipo de forma organizativa bajo la que la entidad opera en España: los coeficientes de las variables *RO* y *Roasset*, son estadísticamente significativos a un nivel de 0,05, la capacidad explicativa del modelo medida a partir del *likelihood ratio index*, pasa de un 25% en el modelo 1 a un 54% en el modelo 2. En cuanto a la capacidad predictiva, el primer modelo predice correctamente un 70% de los casos, mientras que el segundo predice correctamente un 87%. Adicionalmente, la inclusión de estas variables en el modelo 2 permite obtener el coeficiente asociado a la variable crecimiento como significativo, cuando en el modelo 1 no lo es.

El coeficiente asociado a la variable dimensión de la entidad resulta estadísticamente significativo en el modelo 1, aunque en el modelo 2 sólo es significativo para las entidades que operan en España únicamente mediante oficina de representación. En ambos casos tienen el signo anticipado. Estos resultados confirmarían la primera hipótesis planteada aunque de una manera parcial, ya que el tamaño de la entidad sólo es un factor explicativo importante en la decisión de esta de ampliar su presencia en España, para los bancos que estaban presentes en el mercado español únicamente mediante oficina de representación, mientras que para el resto de entidades no es un factor importante que explique la decisión de ampliar la presencia en este mercado.

El crecimiento del banco resulta un factor importante para explicar la ampliación de su presencia en España en el modelo 2 tal y como planteaba la segunda hipótesis. Su coeficiente asociado presenta signo positivo como se esperaba. La variable crecimiento del banco no se ha introducido como explicativa de la multinacionalización bancaria en los trabajos empíricos considerados. Li and Guisinger obtienen que es un factor que afecta positivamente y de manera significativa la multinacionalización de las empresas de servicios.

La presencia de empresas del país de origen del banco en España, se ha mostrado como un factor explicativo importante de las actividades del banco en este país. Se confirma así la *following the client hypothesis* para el caso español. En los dos modelos estimados, el coeficiente asociado a la variable inversión directa del país origen del banco en España es significativo, con signo positivo como se había anticipado. Factores como las limitaciones impuestas a las entidades bancarias extranjeras para operar en España hasta 1992, y el sobredimensionamiento de la red de oficinas de los bancos nacionales, es de esperar que hayan influido en la dedicación de la banca extranjera fundamentalmente hacia la *banca de empresas*, donde pueden existir como se apuntó anteriormente ventajas en costes de información respecto a las relaciones con las empresas del país de origen del banco.

La distancia del país de origen del banco a España tiene un efecto negativo tal como se había pronosticado sobre la decisión de ampliar su presencia en este país, reflejando los superiores costes de supervisión existentes. El coeficiente asociado a esta variable sólo resulta estadísticamente significativo, a un nivel de 0,05 en el modelo 2. Estos resultados coinciden con los obtenidos en la mayoría de trabajos, si bien no existe unanimidad, ya que Grosse and Goldberg (1991) apuntan que para el caso de los bancos, el efecto podría ser positivo dada la importancia de la proximidad al cliente para las empresas de servicios en general, y para los bancos en particular.

Los resultados más sorprendentes se producen al contrastar el efecto de la experiencia del banco operando en un entorno multinacional. Ninguna de las dos variables introducidas para contrastar el efecto de la experiencia de la entidad operando en el exterior muestra un coeficiente asociado significativo. El número de países en que el banco tiene instalada una sucursal o filial no afecta el que esta entidad aumente su presencia en España. Hasta cierto punto no es un resultado demasiado imprevisible, ya que resulta más plausible entender que esta experiencia sea un factor importante en el momento que la entidad toma la decisión de instalarse en un país determinado, más que cuando la decisión es sobre la ampliación de su presencia en una localización determinada. Resulta más sorprendente que la variable *time*, que refleja el tiempo que el banco lleva operando en España, y por lo tanto su conocimiento del mercado español, no afecte la probabilidad de que aumente su presencia en este mercado. El coeficiente asociado a esta variable no resulta estadísticamente significativo en ninguno de los dos modelos estimados. El coeficiente asociado a *RO* es estadísticamente significativo y presenta signo negativo, lo que implicaría que la probabilidad de ampliar la presencia en España es superior entre los bancos que operan mediante sucursales o filiales que entre los que lo hacen únicamente a través de oficina de representación. Esto en parte podría explicarse por la diferente naturaleza de las actividades desarrolladas por las oficinas de representación, en relación con las que llevan a cabo sucursales y filiales.

## FUTURAS INVESTIGACIONES

Los resultados obtenidos, sugieren investigaciones interesantes en esta misma línea. Una primera posibilidad sería contrastar si las motivaciones que influyen en la decisión de una entidad de instalarse en una localización determinada son las mismas que impulsan la ampliación de su presencia en dicha localización. Algunos factores, como la experiencia del banco en operaciones internacionales sería de esperar que influyeran más en la decisión de la entidad de establecerse en

el exterior que en la de ampliar su presencia en una localización determinada. Los trabajos empíricos existentes no han examinado conjuntamente estas dos cuestiones.

En relación con las ventajas derivadas de la propiedad, se ha prestado escasa atención a las que tienen carácter nacional, es decir derivan del hecho que una empresa tiene un origen nacional determinado. Esto proporcionaría a las empresas de una industria en las que el país de origen es competitivo, una ventaja que favorecería la expansión de estas en el exterior. Aliber (1984) introduce las diferencias en el coste de capital entre países como un factor que favorecería la capacidad competitiva de los bancos establecidos en países con costes de capital reducidos, y por tanto su expansión en el exterior. Ursacki and Vertinsky (1992) introducen el porcentaje del total de empleo del país que tiene lugar en el sector bancario como indicador de competitividad del país en este sector, y obtienen que es un factor importante para explicar la expansión bancaria multinacional ocurrida en Japón y Corea. Adicionalmente se podría introducir otras variables que quizá pudieran reflejar más adecuadamente la ventaja competitiva del país en el sector bancario, como el margen de intermediación existente en el país, que reflejaría el grado de competencia existente entre las entidades financieras. Sería de esperar que las entidades procedentes de países donde existen márgenes de intermediación reducidos, estuvieran en mejores condiciones de competir en la escena internacional, y por lo tanto que fueran estas entidades las que realizaran un proceso de expansión multinacional más claro.

Por último, y como ya se ha apuntado anteriormente, sería interesante seguir profundizando en las cuestiones relativas al tipo de organización elegida por el banco para instalarse y ampliar su presencia en un mercado particular. Mientras que existen algunos trabajos que diferencian entre oficina de representación y sucursal o filial, muy poco se ha hecho para considerar por separado la utilización de estas dos últimas formas organizativas.

Tabla I

|                                     | Modelo I           | Modelo 2            |
|-------------------------------------|--------------------|---------------------|
| Constante                           | -3,61*<br>(-3,16)  | -3,64<br>(-1,91)    |
| Assets                              | 0,013*<br>(2,36)   | 0,002<br>(0,29)     |
| Gr                                  | 12,29<br>(1,57)    | 23,87*<br>(2,07)    |
| D                                   | -0,0002<br>(-1,47) | -0,0005*<br>(-2,08) |
| FDI                                 | 0,00002*<br>(2,25) | 0,00004*<br>(2,48)  |
| FOE                                 | -0,012<br>(-0,32)  | -0,0016<br>(-0,03)  |
| Time                                | 0,044<br>(0,39)    | -0,078<br>(-0,37)   |
| RO                                  |                    | -7,75*<br>(-2,37)   |
| Roasset                             |                    | 0,06*<br>(2,46)     |
| N                                   | 52                 | 52                  |
| Likelihood. rat. test               | 20,04 (< 0.01)     | 36,8 (< 0,01)       |
| Predicc. Correctas                  | 70%                | 87%                 |
| *significativos a un nivel de 0,05. |                    |                     |

Tabla II Ajuste de clasificación (modelo 2).

| Predicciones |          |             |
|--------------|----------|-------------|
| Real         | Aumentan | No Aumentan |
|              | Aumentan | No Aumentan |
|              | 18       | 3           |
|              | 4        | 27          |

**BIBLIOGRAFIA:**

Aliber, R. Z. "Towards a theory of international banking". Federal Reserve Bank of San Francisco Economic Review (Spring, 1976).

Aliber, R. Z. "International banking, A survey". Journal of Money, Credit and Banking, 16, 4, (Nov. 1984).

Altman, E. I., R. B. Avery, R. A. Eisenbeis and J.F. Sinkey, Jr. "Application of classification techniques in business, banking and finance". JAI Press, Greenwich, CT, (1981).

Ball, C. A. and A. T. Tschoegl, "The decision to establish a foreign bank branch or subsidiary: An application of binary classification procedures". Journal of Financial and Quantitative analysis, 17, (3), (1982).

Benston, G. J. , G. A. Hanweeck, and D. B. Humphrey. "Scale economies in banking: A restructuring and reassessment". Journal of Money, Credit and Banking, 14, (Nov. 1982).

Cuervo, A., L. Rodríguez, and J. A. Parejo, "Manual de sistema financiero español". Ariel, (1992).

Darby, M. K. "The internationalization of american banking and finance: Structure, risk and world interest rates". Journal of International Money and Finance, (Dec. 1986).

Dunning, J. "Trade, location of economic activity and the MNE: a search for an eclectic approach", in Bertil Ohlin et al. eds., The international allocation of economic activity . (London, Holmes and Meier, 1977).

Fieleke, N. S. "The growth of US banking abroad: An analytical survey", in: Key issues in International Banking, Conference Series, 18 (Federal Reserve Bank of Boston), (1979).

Giddy, I. H. "The theory an industrial organization of international banking". Research in International Business and Finance, 3 (1981).

Goldberg, L. G. and A. Saunders, "The determinants of foreign bank activity in the United States", American Banker, 23 (1979).

Goldberg, L. G. and A. Saunders, "The causes of US bank expansion overseas". Journal of Money, Credit and Banking, 12 (Nov. 1980, Part.2).

Goldberg, L. G. and D. Johnson, "The determinants of US banking activity abroad". Journal of International Money and Finance, 9, (1990).

Gray, J. M. and H. P. Gray, "The multinational bank: A financial MNC?". Journal of Banking and Finance, 5, (1981).

Grosse, R. and L. G. Goldberg, "Foreign bank activity in the United States: An analysis by country of origin", *Journal of Banking and Finance*, 15, (1991).

Grubel, H. G. "A theory of multinational banking". *Banca Nazionale del Lavoro Quarterly Review*, (Dec. 1977).

Heinkel, R. L. and M. D. Levi, "The structure of international banking". *Journal of International Money and Finance*, 11, (1992).

Horst, T. "Firm and industry determinants of the decision to invest abroad: an empirical study". *Review of Economics and Statistics*, 54, (Aug. 1974)

Hultman, C. W. and L. R. McGee, "Factors affecting the foreign banking presence in the US". *Journal of Banking and Finance*, 13, (1989).

Li, J. and S. Guisinger, "Globalization of service multinationals". *Journal of International Business Studies*, (Fourth Quarter 1992).

Ontiveros, E. "Internacionalización bancaria y mercados financieros externos". *Boletín de Estudios Económicos*, vol. XLII, 130, (Abril 1987).

Sabi, M. "An application of the theory of foreign direct investment to multinational banking in LDCs". *Journal of International Business Studies*, (Fall 1988).

Swoboda, A. K. "International banking: Current issues in perspective". *Journal of Banking and Finance*, 6, (1982).

Terpstra, V. and C. Yu, "Determinants of foreign investment of US advertising agencies". *Journal of International Business Studies*, 19, (1988).

Terrell, H. S. "US banks in Japan and Japanese banks in the United States: An empirical comparison", *Federal Reserve Bank of San Francisco Economic Review*, (Sum. 1979).

Tschoegl, A. E. "Size, growth and transnationality among world's largest banks". *Journal of Business*, 56, (2), (1983).

Ursacki, T. and I. Vertinsky, "Choice of entry timing and scale by foreign banks in Japan and Korea". *Journal of Banking and Finance*, 16, (1992).

Yannopoulos, G. N. "The growth of transnational banking", in: M. Casson, ed., *The Growth of International Business* (George Allen and Unwin, London), ( 1983).



# OPERACIONES FINANCIERAS DE PRESTAMO BAJO LA OPTICA DEL ANALISIS DINAMICO

FRANCISCA GARCIA LOPERA y  
RAFAEL RODRIGUEZ AVILÉS

Departamento de Economía Aplicada (Matemáticas).  
Universidad de Málaga

## INTRODUCCION

El objetivo perseguido con esta comunicación es enmarcar una operación financiera, concretamente los préstamos con amortización progresiva dentro del marco general del análisis dinámico, utilizando para su modelización las Ecuaciones en Diferencias.

Al tratar de conjugar el tema financiero y el análisis dinámico, hemos adoptado una postura intermedia, en cuanto a exhaustividad en cada una de las materias. En este sentido hemos considerado oportuno hacer una breve introducción de los préstamos progresivos, a fin de unificar conceptos sobre los mismos y situar el punto de partida.

En el presente trabajo se realiza un primer lugar, un análisis sistemático de la estructura amortizativa de algunos de los tipos de préstamos mas convencionales (préstamo francés, préstamo con cuota de amortización constante y préstamo en progresión geométrica), a partir de la ecuación dinámica general, pasando, seguidamente, a obtener las relaciones existentes entre las fórmulas clásicas para las distintas variables de dichos préstamos y las expresiones a las que llegamos para las mismas variables utilizando para su obtención las ecuaciones en diferencias.

La amortización de estos préstamos progresivos se realiza periódicamente, destinando en cada periodo una cantidad monetaria que deberá cubrir el interés devengado en el periodo y, además, devolver una parte del capital prestado.

Las magnitudes de estos préstamos en un periodo  $t$  son las siguientes:

$a_t$  : término amortizativo del préstamo

$i_t$  : tanto efectivo periodico de interés

$I_t$  : cuota de interés que representa los intereses devengados por el préstamo

$A_t$  : cuota de amortización de capital

$C_t$  : capital pendiente de amortizar despues de vencido el periodo  $t$

$C_0 = C$  y  $C_n = 0$

$n$  : número de periodos en que ha de amortizarse el préstamo

$M_t$  : total amortizado después de vencido el periodo  $t$ , siendo

$M_0 = 0$  y  $M_n = C$

Ademas, debe verificarse que ,  $M_t = \sum_{s=1}^t A_s$  y que para todo  $t$ ,  $C = M_t + C_t$ .

La característica mas relevante de este grupo de préstamos es que los intereses de cada periodo se calculan sobre el capital pendiente de amortizar en ese momento. Así, tenemos las siguientes relaciones fundamentales:

$$a_t = A_t + I_t$$

$$I_t = C_{t-1} i_t, \quad t = 1, 2, \dots, n$$

$$A_t = a_t - I_t$$

Dado que nuestro interés se centra en las aplicaciones de las ecuaciones en diferencias finitas a la matemática financiera, las ecuaciones que nos aparecieran serán lineales de primer orden, pudiéndose expresar de la siguiente forma:

$$y_{t+1} - a(t)y_t = b(t); \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad [1]$$

La solución general de la ecuación anterior según el método de variación de parámetros o variación de constantes es la siguiente:

$$y_t = \left[ \prod_{i=0}^{t-1} a(i) \right] \left[ \sum_{j=0}^{t-1} \frac{b(j)}{\prod_{i=0}^j a(i)} \right] \quad [2]$$

Cuando en una ecuación en diferencias lineal los coeficientes son constantes, la solución general será la siguiente:

$$y_t = \begin{cases} a^t y_0 + b \frac{1-a^t}{1-a} & \text{si } a \neq 1 \\ y_0 + bt & \text{si } a = 1 \end{cases} \quad [3]$$

## I. PRÉSTAMO FRANCÉS

En este tipo de préstamo el término amortizativo es constante, al igual que el tipo de interés en todos los periodos de la operación:

$$a = A_t + I_t$$

La ecuación que nos refleja la dinámica de la operación en dos periodos consecutivos es:

$$C_{t+1} = C_t (1 + i) - a$$

lo que nos permite afirmar que el capital pendiente  $C_t$  verifica la ecuación en diferencias lineal de primer orden de coeficientes constantes no homogénea:

$$C_{t+1} - C_t (1 + i) = -a$$

Si utilizamos la fórmula [3] para resolver esta ecuación en diferencias, el resultado será el siguiente:

$$C_t = (1 + i)^t C_0 - a \frac{1 - (1 + i)^t}{1 - (1 + i)} = \left( C_0 - \frac{a}{i} \right) (1 + i)^t + \frac{a}{i} \quad [4]$$

que nos indica el capital pendiente en un punto  $t$  intermedio de la operación, expresión que podemos comprobar coincide con el resultado clásico que para esta variable obtiene Gil Pelaez<sup>1</sup> por el método retrospectivo, muy utilizado en Matemáticas Financieras:

$$C_t = C_0 (1 + i)^t - a s_{\overline{t}|i} = C_0 (1 + i)^t - a \frac{(1 + i)^t - 1}{i}$$

En cuanto a la obtención de la cuota de amortización, calculamos primero la cuota de interés y después despejamos del término amortizativo,  $a = A_t + I_t$ ,

$$I_t = C_{t-1} i = \left[ \left( C_0 - \frac{a}{i} \right) (1 + i)^{t-1} + \frac{a}{i} \right] i$$

$$I_t = a - (a - iC_0)(1 + i)^{t-1}, t = 1, 2, \dots$$

$$A_t = (a - iC_0)(1 + i)^{t-1}, t = 1, 2, \dots$$

De acuerdo con Lora Espinosa<sup>2</sup>, la cuota de amortización en el momento  $t$  es:

<sup>1</sup> Gil Pelaez, "Matemáticas de las operaciones financieras", 1982, Madrid, pág. 402.

<sup>2</sup> Lora Espinosa, "Curso de Matemática Empresarial", Pirámide, Madrid, 1991, pág. 57.

$$A_t = A_1 (1+i)^{t-1}$$

y puesto que  $A_t = a - C_0 i$ , entonces

$$A_t = (a - iC_0)(1+i)^{t-1}$$

que coincide con nuestra expresión.

## II. PRÉSTAMO CON CUOTA DE AMORTIZACION CONSTANTE

En este tipo de préstamo la parte del término amortizativo que corresponde a la amortización del préstamo es constante, de forma que<sup>3</sup>

$$A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$$

De la ecuación:

$$C_0 = \sum_{t=1}^n A_t = nA$$

resulta

$$A = \frac{C_0}{n}$$

El término amortizativo y la cuota de interés serán

$$a_t = I_t + A, \quad I_t = C_{t-1}i \Rightarrow a_t = C_{t-1}i + A$$

La ecuación dinámica de este préstamo será ahora

$$C_{t+1} = C_t(1+i) - a_{t+1}$$

de la cual obtenemos la siguiente ecuación en diferencias lineal de coeficientes constantes

$$C_{t+1} - C_t = -A$$

Si aplicamos la formula [3] para obtener la solución general, donde en este caso,  $a=1$ , y  $b=-A$ , obtendremos

$$C_t = C_0 + (-At) = C_0 - tA \quad [5]$$

---

<sup>3</sup> Gil Pelaez, L. y Gil Lueza, María A., "Matemática de las Operaciones Financieras", UNED, Madrid,

Puesto que  $C_0 = nA$

$$C_t = (n-t) A$$

expresión que coincide con la clásica, mostrada por García Güemes<sup>4</sup>

Para obtener la expresión correspondiente a la cuota de interés en este método,  $I_t$ , sustituiremos [5] en la expresión general de esta magnitud

$$I_t = C_{t-1}i = iC_0 - iA(t-1)$$

Si operamos en la última expresión sabiendo que  $C_0 = nA$

$$I_t = Ai(n-t+1)$$

expresión que coincide con la de García Güemes<sup>5</sup>

Respecto al término amortizativo

$$a_t = I_t + A = iC_0 + A[1+i(1-t)]$$

Si desarrollamos la expresión de García Güemes<sup>6</sup>

$$a_h = C_0 \left( 1 - \frac{h-1}{n} \right) i + \frac{C_0}{n}$$

sabiendo que  $A = \frac{C_0}{n}$ , entonces

$$a_h = C_0 i + A[1+i(1-h)]$$

expresión que coincide con la nuestra, donde  $t=h$ .

<sup>4</sup> García Güemes, A., "Matemáticas aplicadas a la empresa", AC, Madrid, 1992, pág. 389.

<sup>5</sup> Pág. 390.

<sup>6</sup> Pág. 390.

### III. PRÉSTAMO EN PROGRESION GEOMÉTRICA

Estos préstamos, también llamados "con término variable acumulativamente", tienen la particularidad de que los términos amortizativos periódicos varían según la secuencia siguiente:

$$a, aq, aq^2, \dots, aq^{t-1}, \quad t=1, 2, \dots, n$$

El valor  $q$  deberá ser mayor que cero para asegurar que el término amortizativo en cualquier momento sea positivo. El capital pendiente de amortizar en el momento  $t$  vendrá dado por:

$$C_t = C_{t-1} + iC_{t-1} - aq^{t-1}$$

O sea,  $C_t$  verifica la siguiente ecuación en diferencias lineal de orden uno no homogénea

$$C_{t+1} - (1+i)C_t = -aq^t$$

En este caso el término independiente no es constante, sino que depende del tiempo. Si aplicamos la fórmula general de la solución general [2]

$$C_t = \left[ \prod_{r=0}^{t-1} (1+i) \right] \left[ \sum_{j=0}^{t-1} \frac{-aq^j}{\prod_{s=0}^j (1+i)} + C_0 \right]$$

Si desarrollamos esta expresión, el resultado será el siguiente:

$$C_t = C_0(1+i)^t - a \frac{(1+i)^t - q^t}{1+i-q}$$

Para comprobar este resultado seguiremos el método retrospectivo en Gil Pelaez<sup>7</sup>

$$C_t = C_0(1+i)^t - S(a, q)_{\overline{t}|i} = C_0(1+i)^t - a \frac{(1+i)^t - q^t}{1+i-q}$$

que coincide con nuestra expresión [6]

---

<sup>7</sup> Pág. 258.

Para calcular la cuota de amortización en el momento  $t$ , utilizaremos también las ecuaciones en diferencias, razonando de la siguiente forma:

Sabemos que

$$C_t = C_{t-1}(1+i) - a_t = C_{t-1}(1+i) - aq^{t-1}$$

y que

$$A_t = C_{t-1} - C_t + (C_{t-2} - C_{t-1})(1+i) + aq^{t-2}(q-1) = A_{t-1}(1+i) + aq^{t-2}(q-1)$$

O sea, la cuota de amortización verifica la ecuación en diferencias de primer orden lineal no homogénea

$$A_{t+1} - (1+i)A_t = aq^{t-1}(q-1)$$

cuya solución general será

$$A_t = \left[ \prod_{\tau=1}^{t-1} (1+i) \right] \left[ \sum_{j=1}^{t-1} \frac{-aq^{j-1}(q-1)}{\prod_{s=0}^{j-1} (1+i)} + A_1 \right]$$

cuyo desarrollo una vez simplificado es, sabiendo que  $A_1 = a - C_0i$ :

$$A_t = \frac{ai(1+i)^{t-1}}{1+i-q} - iC_0(1+i)^{t-1} + \frac{aq^{t-1}(1-q)}{1+i-q}$$

Para comprobar este resultado con las fórmulas clásicas, realizaremos las siguientes operaciones:

$$A_t = a_t - I_t = aq^{t-1} - iC_{t-1} = aq^{t-1} \left[ 1 - \frac{i}{1+i-q} \right] - C_0i(1+i)^{t-1} + \frac{ai(1+i)^{t-1}}{1+i-q}$$

que coincide con nuestra expresión obtenida de una ecuación en diferencias

## CONCLUSIONES

La Teoría de Diferencias Finitas se ha mostrado como un magnífico instrumento para las Matemáticas de las Operaciones Financieras, toda vez que en éstas el componente dinámico está presente siempre. Podemos añadir que el desarrollo bajo este punto de vista de los métodos de amortización elegidos, nos conduce a los mismos resultados a los que se hizo referencia en el comienzo, desde la perspectiva clásica de las Matemáticas Financieras. Con todo esto hemos de dejar constancia del papel que pueden jugar los instrumentos del análisis dinámico dentro de las Operaciones Financieras. Para una posterior ampliación de este trabajo dejamos la aplicación de esta técnica para el cálculo del tipo de interés modificado en los contratos de arrendamiento financiero, la obtención de las magnitudes en un préstamo en progresión geométrica con pagos fraccionados y por supuesto en los empréstitos.

## BIBLIOGRAFIA

Gil Pelaez, Lorenzo, *Matemáticas de las operaciones financieras*, 1982. Madrid.

Lora Espinosa, Esteban y Pérez Garzón, José I., *Curso de Matemática Empresarial, Operaciones Financieras y Optimización*, Pirámide, 1991, Madrid.

Gil Lueza, María A., y Gil Pelaez, Lorenzo, *Matemáticas de las operaciones financieras*, UNED, 1983, Madrid.

García Güemes, Alfredo, *Matemáticas aplicadas a la Empresa*, AC, 1992, Madrid.

Balbas, Gil y Gutiérrez, *Análisis Matemático para la Economía*, AC, Madrid.

Muñoz Murgui, Francisco y Sala Garrido, Ramón, *Ecuaciones en Diferencias Finitas*, Estudios Financieros y de Matemática Aplicada, nº 2, 1984, Valencia.

Ruiz Amestoy, Jesús María, *Primer curso de preparación a distancia para inspectores*, E.C.A., 1985-1986.

Alegre Escolano, Pedro, *Ejercicios resueltos de Matemática de las operaciones financieras*, AC, 1989, Madrid.



# LAS CAJAS DE AHORROS: FUTURO Y COMPETITIVIDAD

G. MARGARITA GONZALEZ CUERVO

Facultad de C.C.E.E. y Empresariales.  
Universidad de León

## INTRODUCCION

En el contexto de los nuevos cambios experimentados surge la modelización genérica (no unívoca) de Caja de Ahorros, entendida como institución dinámica, abierta y competitiva.

**Dinámica**, en cuanto a la capacidad de adaptación al *medio* y al *mercado* en el marco del desarrollo financiero.

**Abierta** a los cambios y *fenómenos endógenos* y *exógenos* que afianzan la realidad de la institución bajo las directrices de la *Unión Europea*.

**Competitiva**, en tanto que desarrolla su actividad *hábilmente* en cualquier tipo de mercado financiero, ya sea nacional o internacional, primando su *rentabilidad* por encima de la *expansión productiva*.

Como en cualquier modelo, la divergencia entre éste y su construcción real crece exponencialmente en la medida en que el grado de perfeccionamiento se incrementa, llegando en caso extremo a convertirse en una idea de de imposible realización (modelo utópico).

Bajo la denominación de *Las Cajas de Ahorro: Futuro y Competitividad*, se presenta una comunicación, a modo de introducción de un trabajo más amplio orientado al análisis de la competitividad en una doble vertiente:

La *teórica*: evaluación-descripción de la competitividad

La *práctica*: consecución de la misma

Pretendemos así, simplificar uno de los problemas más complejos: enlazar las inquietudes de los investigadores y las preocupaciones de los directivos interesados por el análisis y la evolución, que por actual parece vertiginosa, de las Cajas de Ahorros.

## **LAS CAJAS DE AHORROS**

La elección de las Cajas de Ahorros como instituciones sujetas a estudio, no ha sido casual. Las características propias de estas entidades con unas necesidades concretas de dimensionamiento en el entorno de la Unión Europea y con una incertidumbre de continuidad en función del objeto social para el que fueran creadas , les confiere un especial interés.

Como ya apuntara José García Roa: “El impacto del mercado único en el sector de las Cajas de Ahorro es particularmente importante por la existencia de varias peculiaridades que condicionan la rápida adaptación a los cambios exigidos”.

Estas peculiaridades se resumen en 6 apartados:

1. Creciente exigencia de recursos propios (atendiendo a los niveles mínimos según las directivas comunitarias).
2. Ampliación de productos y servicios frente a competidores.
3. Análisis evolutivo y comparativo del Balance y la Cuenta de Resultados, obteniendo conclusiones orientadas a la gestión eficiente.
4. Innovación financiera según la configuración de mercado y la competencia.
5. Toma de decisiones estratégicas a nivel de segmentación de mercados (servicio altamente especializado y competitivo).
6. Adopción de una estrategia dimensional adecuada para la consecución de los fines propuestos.

## **ANÁLISIS TEORICO**

### **Antecedentes**

La competitividad de las entidades financieras, se ha convertido en uno de los temas de mayor actualidad para académicos y profesionales del entorno financiero. Una breve ojeada a la bibliografía adjunta para verificar el elevado número de publicaciones recientes.

### **Evaluación-descripción de la competitividad**

Parece existir uniformidad a la hora de determinar las fuerzas competitivas que operan en el Sector Bancario y más concretamente en el entorno financiero de las Cajas de Ahorros.

C. Egea en su “Aproximación Estratégica al Sector de las Cajas de Ahorros en España”, presenta un enfoque de las fuerzas que condicionan el nivel competitivo del sector de las Cajas de Ahorros, basado en la estructura introducida en la década de los 80 por M. Porter, posteriormente adaptada al Sector Bancario (E. Ballarín, entre otros).

El análisis de los tres grandes bloques de fuerzas que condicionan el nivel competitivo de un sector -*nivel de competencia actual, competencia potencial y poder negociador de los agentes de frontera*-, así como el estudio de los aspectos económicos que configuran la Historia reciente de nuestro país (últimos treinta años), se convierten en los elementos básicos a utilizar para comprender los vertiginosos cambios experimentados y a experimentar por las Cajas de Ahorros en España.

El *nuevo perfil* de la Caja de Ahorros difiere significativamente del modelo de institución tradicional que aparecía en los años 70, más próximo a sus orígenes (s. XIX) que a la década de los 90, debido fundamentalmente a las restricciones imperantes por las que se veía afectada y mermada de libertades.

Así, la *desregulación* aparece como motor desencadenante del cambio, incidiendo directamente en el incremento del nivel de rivalidad y competencia entre entidades financieras.

Hasta las *ventajas competitivas* de las Cajas, descritas por C. Egea como:

Liderazgo en el segmento de la banca al por menor

Sistema de distribución

Dinamismo, flexibilidad y capacidad de adaptación

Buena imagen

pierden efectividad en un sistema financiero como el actual, agresivo a la hora de incrementar cuotas de mercado y volúmenes de intermediación, en el que los entornos rural y urbano se diluyen como un único mercado a explotar, con independencia de la orientación inicial de las diferentes entidades financieras.

## ANALISIS PRACTICO

### Enfoque

Ante esta situación carece de sentido extrapolar los resultados económicos de los últimos años. Las predicciones se manifiestan incompletas y escasamente fiables, salvo que se hallen sujetas a restricciones establecidas a priori, siendo un tanto discutibles desde la objetividad del investigador.

Aspectos claves como el dimensionamiento, la innovación tecnológica, la gestión eficiente de los recursos humanos, etc., difieren significativamente de unas cajas a otras, encontrándose en ocasiones similitudes mayores con otras entidades financieras que con las pertenecientes al sector.

El futuro de las Cajas de Ahorros -como conjunto-, dada su capacidad de adaptación, parece estar asegurado, si bien es pronto para determinar la forma estructural que adquirirán llegado el siglo XXI.

A menudo, el objeto social para el que fueron creadas queda relegado a un segundo plano, el ánimo de lucro se ha adoptado sin recelo. Las fusiones de otras entidades muestran en parte el fortalecimiento de unas cajas a costa de otras -de unas entidades a costa de otras-.

En esencia, el *modelo* de Caja de Ahorros, se gesta como engendro de la “selección natural”. Las mutaciones financieras confieren estructuras híbridas que afectan a los activos, a los *mercados* y a las *instituciones*.

Poco tienen que ver los productos y servicios ofrecidos por las entidades financieras hace diez años con los actuales. Así, el *enfoque* de nuestro trabajo se orienta a analizar la situación en un momento concreto, aquel para el que disponemos de información contrastada reciente: 1993.

## Las Cajas de Ahorro: Análisis multivariante

La vertiente práctica de nuestro estudio se desarrolla mediante el tratamiento empírico de algunos ratios económicos, obtenidos a partir de los balances y cuentas de resultados incluidos en el Anuario Estadístico de la CECA.

El objetivo fundamental previamente definido era encontrar *relaciones* (o interrelaciones) entre las Cajas de Ahorros Confederadas, de cara a una clasificación que permitiera determinar factores relativos a la eficiencia y al dimensionamiento adecuado de estas instituciones.

Para ello, recurrimos al uso de técnicas de análisis multivariante. El SPSS/PC + 4.0. ha constituido una herramienta muy útil en el tratamiento informático de los datos referidos.

En un primer momento, se barajó la posibilidad de realizar un *Análisis de Regresión Multivariante*, orientado a analizar la dependencia lineal existente entre los ratios económicos mencionados, discriminando previamente el conjunto total de individuos en una serie de grupos con características afines.

Dado que las variables sujetas a estudio no verificaban los supuestos paramétricos requeridos en el desarrollo del análisis de regresión (normalidad, homocedasticidad,...), recurrimos al *Análisis Cluster*<sup>1</sup>, obteniendo una clasificación por grupos en virtud de la similitud de las características observadas.

---

<sup>1</sup> Véase programa de instrucciones en el ANEXO, pág. 7

## ANÁLISIS CLUSTER

Bajo la denominación de “Análisis Cluster” se recogen una serie de técnicas, cuyo objeto es determinar la similitud entre individuos o variables, generando grupos homogéneos de conglomerados.

Así, el análisis cluster se convierte en un instrumento de gran utilidad en la clasificación de datos, sin requerir un conocimiento de los grupos de pertenencia apriori.

### Descripción del trabajo

La orientación de nuestro trabajo se ha dirigido a la obtención de conglomerados -subconjuntos- de Cajas de Ahorros, partiendo de la población de entidades que se incluyen en la Tabla 1<sup>2</sup>- Cajas de Ahorros Confederadas a 31/12/1993- atendiendo a los ratios económicos siguientes:

|                       |                   |
|-----------------------|-------------------|
| % R.PROPIOS/R.AJENOS  | R.AJENOS/EMPLEADO |
| % INVERSION/R.TOTALES | R.AJENOS/OFICINA  |
| ·% Bº NETO/R.PROPIOS  | EMPLEADOS/OFICINA |
| % Bº NETO/R.AJENOS    | Bº NETO/EMPLEADO  |
| % Bº NETO/R.TOTALES   |                   |

El Análisis Cluster nos permite determinar aquellas entidades financieras que presentan características similares.

Para la consecución de nuestro objetivo, hemos utilizado un método *jerárquico aglomerativo*, el método de las *distancias mínimas*, caracterizado por la formación de grupos de forma ascendente. Así, se inicia el proceso con tantos grupos como individuos haya y a partir de ellos, se van formando grupos sucesivos que cada vez comprenden más individuos.

El criterio de agrupación es seleccionar aquellos individuos que tienen menor distancia, es decir, mayor similitud. Al final del proceso todos los casos están englobados en un mismo conglomerado. La representación que permite visualizar el árbol de clasificación generado, recibe el nombre de *dendograma*<sup>3</sup>.

<sup>2</sup> Véase Tabla 1 en pág. 8

<sup>3</sup> Véase Dendograma en pág. 9

## INTERPRETACION DE RESULTADOS: CONCLUSIONES

Según se aprecia en el dendograma, las Cajas de Ahorros presentan en su mayoría características similares, para las variables consideradas (ratios económicos), i.e., las distancias que las separan, representadas a escala son poco significativas (omitimos los resultados de la matriz, dada su extensión).

Inicialmente se forman cinco conglomerados propiamente dichos (integrados por más de un individuo). El primero comprende treinta entidades, desde *C.A.de Cataluña* hasta *C.A. y M.P. Municipal de Pamplona*. El segundo lo integran cuatro entidades (40,45,11 y 26), el tercero siete (17,43,14,27,47,1 y 38), el cuarto tres (31,39 y 10) y el quinto cinco (7,18,9,28 y 3).

Los conglomerados iniciales se unen en dos fases. En la primera fase se unen separadamente los tres primeros conglomerados y los dos últimos a una distancia aproximada del origen de dos unidades, según la escala que aparece en la representación gráfica (Véase dendograma).

La distancia entre los dos conglomerados, obtenida como promedio de las distancias entre todos los pares de individuos generados con elementos de conglomerados distintos es aproximadamente de 3 unidades en la escala de medida, por lo que se interpreta que están bastante próximos.

El conglomerado formado por la unión de ambos reúne a 49 de las 51 cajas sujetas a estudio. La C.A. y M.P. de Avila se une a una distancia de 5 unidades, mientras que la C.A. y M.P. de Zaragoza, Aragón y Rioja lo hace en último extremo (a 25 unidades, como consecuencia del comportamiento heterogéneo del ratio  $\% \text{Inversión/R.Totales}$ ), finalizando así el proceso, tras la formación de un conglomerado o cluster en el que se agrupan todos los individuos.

A la vista de estos resultados es difícil soportar teorías sobre la eficiencia, el dimensionamiento,... en esencia sobre la competitividad, mediante la contraposición del comportamiento y evolución de diferentes estratos segregados de la población descrita.

## BIBLIOGRAFIA

BALLARIN, E., *Estrategias Competitivas para la Banca*, Ariel, Barcelona, 1989.

BANCO DE ESPAÑA, *Informe Anual 1993*, Banco de España, Madrid, 1994.

BUENO, E., *Dirección Estratégica de la Empresa*, Pirámide, Madrid, 1987.

CECA, *Anuario Estadístico de las Cajas de Ahorros Confederadas*, 1993, Confederación Española de Cajas de Ahorros, Madrid, 1994.

CANALS, J., *Estrategias del Sector Bancario en Europa. El Reto de 1993*, Ariel, Barcelona, 1990.

CUERVO-ARANGO, C., "Alternativas Estratégicas de la Banca Española el Mercado Financiero Europeo", *Tendencias y Cambios en el Sistema Financiero Español*, Universidad de Málaga y Cajasur, Málaga, 1990.

EGEA, C., "Aproximación Estratégica al sector de las Cajas de Ahorros", *La Banca del Futuro. Un desafío para el 2.000*, Pirámide, Madrid, 1995, pags. 167-197.

GARCIA, J., *Las Cajas de Ahorros Españolas: Cambios recientes, Fusiones y otras Estrategias de Dimensionamiento*, Civitas, Madrid, 1994.

GARCIA, V., FERNANDEZ, M.A., *Solvencia y Rentabilidad de la Empresa Española*, Instituto de Estudios Económicos, Madrid, 1992.

GUAL, J., VIVES, X., *Concentración Empresarial y Competitividad: España en la C.E.E.*, Ariel, Barcelona, 1990.

MAROTO, J.A., "El Proceso de Concentración de Bancos y Cajas de Ahorros en España", *Papeles de Economía Española*, nº 58, 1994, pags. 88-104.

MAROTO, J.A., "Estrategias Competitivas de las Entidades Financieras ante el Mercado Unico y la Unión Europea", *Perspectivas del Sistema Financiero*, nº 45, 1994, pags. 94-106.

MONTERO, A., "Estrategias Competitivas de la Banca ante el Mercado Unico", *Perspectivas del Sistema Financiero*, nº 45, 1994, pags. 87-93.

MATO, G., SALAS, V., *Valoración Económica del Beneficio y el Capital*, FEDEA, Madrid, 1992.

PEREZ, F., QUESADA, J., *Dinero y Sistema Bancario. Teoría y Análisis del Caso Español*, Espasa Calpe, Madrid, 1991.

PORTER, M., *Competitive Strategy*, Free Press, Nueva York, 1980.

PORTER, M., *Competitive Advantage*, Free Press, Nueva York, 1985.

PRIOR, D., SALAS, V., "La Eficiencia Técnica de Las Cajas de Ahorros Españolas y sus Factores Determinantes", *Papeles de Economía Española*, nº 58, 1994, pags. 141-160.

RGUEZ. J.M., "Las Cajas de Ahorros en Europa. La Respuesta de las Cajas al nuevo escenario del Mercado Unico", *Cuadernos de Información Económica*, nº 73, 1993, pags. 116-121.

## ANEXO

### PROGRAMA DE INSTRUCCIONES

El siguiente programa recoge las instrucciones necesarias para el desarrollo del Análisis Cluster anteriormente descrito.

```
SET /LISTING 'CLUSTERR.SAL' /ECHO OFF /MORE® OFF.
```

```
DATA LIST FILE='CLUSTERR.DAT' FREE/IDD(A) VAR1 TO VAR4.
```

```
CLUSTER VAR1 TO VAR4 /METHOD=BAVERAGE /ID=IDD /PRINT=DISTANCE  
/PLOT=DENDOGRAM.
```



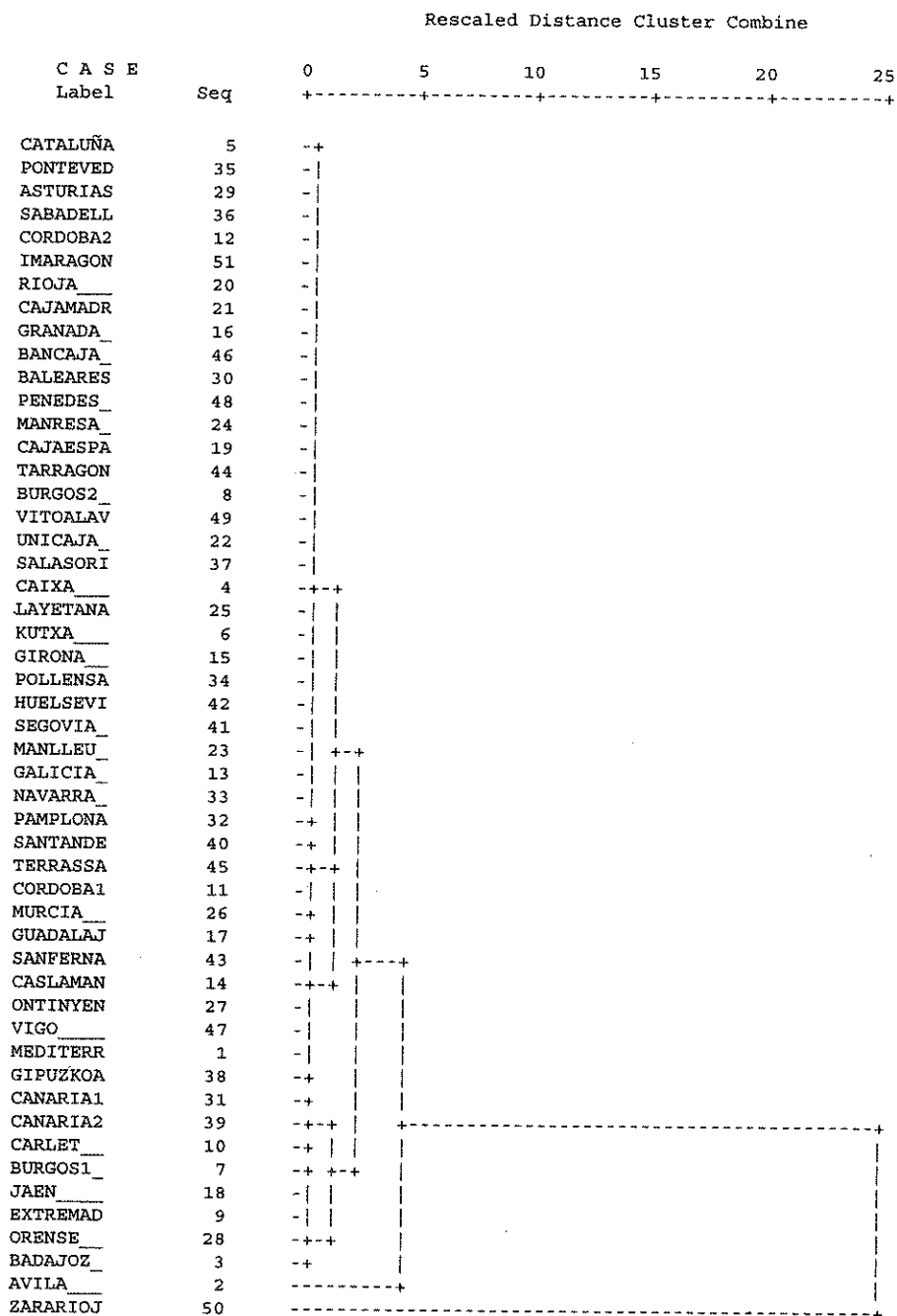
## RATIOS DE LAS CAJAS DE AHORROS CONFEDEADAS A 31-12-1993

|    |  | % R.P./R.A. | % br./R.T. | % B'Net./R.P. | % B'Net./R.A. | % B'Net./R.T. | R.A./Empl. | (Mill. plas.) | Empl./Ofic. | B'Net./Empl. | (Mill. plas.) |
|----|--|-------------|------------|---------------|---------------|---------------|------------|---------------|-------------|--------------|---------------|
| 1  | CAJAS DE AHORROS                                 |             |            |               |               |               |            |               |             |              |               |
| 2  | C. A. del MEDITERRANEO                           | 7.19        | 93.58      | 7.00          | 0.50          | 0.47          | 212        | 1,544         | 7.30        | 1.07         | 5.80          |
| 3  | C. A. y M. P. de AVILA                           | 8.20        | 106.02     | 14.80         | 1.21          | 1.12          | 269        | 1,573         | 5.80        | 3.26         | 4.40          |
| 4  | M. P. y C. A. BADAJOZ                            | 7.75        | 63.76      | 27.80         | 2.16          | 2.00          | 231        | 1,019         | 4.40        | 4.98         | 5.10          |
| 5  | C. A. y PENSIONES de BARCELONA                   | 4.90        | 74.43      | 14.48         | 0.71          | 0.68          | 460        | 2,352         | 5.00        | 3.26         | 5.00          |
| 6  | C. A. de CATALUNA                                | 4.55        | 80.14      | 19.05         | 0.87          | 0.83          | 349        | 1,757         | 5.00        | 3.03         | 5.00          |
| 7  | BILBAO BIZKAIA KUTXA                             | 7.84        | 74.23      | 12.92         | 1.01          | 0.94          | 515        | 4,166         | 8.10        | 5.22         | 3.40          |
| 8  | C.A. y M.P. del C.C.O. de BURGOS                 | 8.51        | 61.84      | 14.70         | 1.25          | 1.15          | 428        | 1,468         | 5.10        | 4.89         | 5.10          |
| 9  | C. A. Municipal de BURGOS                        | 10.04       | 77.88      | 12.24         | 1.23          | 1.12          | 398        | 2,030         | 5.10        | 3.24         | 5.10          |
| 10 | C. A. y M. P. de EXTREMADURA                     | 6.99        | 59.05      | 19.89         | 1.39          | 1.30          | 233        | 1,181         | 5.10        | 3.24         | 5.10          |
| 11 | C. A. y Prestamos de CAJET                       | 7.58        | 65.74      | 4.84          | 0.37          | 0.34          | 112        | 954           | 8.50        | 0.41         | 5.00          |
| 12 | M.P. y C.A. de CORDOBA - Caja Sur                | 5.32        | 88.25      | 24.42         | 1.30          | 1.23          | 232        | 1,296         | 5.60        | 3.02         | 4.90          |
| 13 | C. Provincial de A. de CORDOBA                   | 4.78        | 81.03      | 23.22         | 1.11          | 1.06          | 259        | 1,269         | 5.90        | 2.88         | 5.90          |
| 14 | C. A. de GALICIA                                 | 5.86        | 70.46      | 20.34         | 1.19          | 1.13          | 322        | 1,885         | 5.90        | 3.84         | 5.90          |
| 15 | C. A. de CASTILLA LA MANCHA                      | 5.99        | 88.00      | 7.65          | 0.46          | 0.43          | 245        | 1,279         | 5.20        | 1.12         | 5.00          |
| 16 | C. A. Provincial de GIRONA                       | 5.87        | 72.82      | 11.72         | 0.69          | 0.65          | 274        | 1,363         | 5.00        | 1.88         | 5.00          |
| 17 | C. G. de A. de GRANADA                           | 5.21        | 83.26      | 15.74         | 0.82          | 0.78          | 230        | 1,251         | 5.40        | 1.80         | 5.40          |
| 18 | C. A. Provincial de GUADALAJARA                  | 4.72        | 83.21      | 3.91          | 0.18          | 0.18          | 199        | 851           | 4.30        | 0.37         | 5.50          |
| 19 | C. Provincial de A. de JAEN                      | 9.60        | 57.41      | 15.98         | 1.53          | 1.40          | 224        | 1,229         | 5.50        | 3.44         | 5.50          |
| 20 | Cajá ESPAÑA de Inversiones, C.A.M.P.             | 8.63        | 74.69      | 7.62          | 0.66          | 0.61          | 351        | 1,866         | 5.20        | 2.31         | 5.20          |
| 21 | C. A. de la RIOJA                                | 8.58        | 86.36      | 12.08         | 1.04          | 0.95          | 231        | 892           | 3.90        | 2.39         | 7.40          |
| 22 | C.A. y M. P. de MADRID                           | 7.90        | 86.18      | 12.24         | 0.97          | 0.90          | 380        | 2,816         | 7.40        | 3.68         | 6.10          |
| 23 | UNICAJA  | 7.03        | 81.18      | 10.47         | 0.74          | 0.69          | 192        | 1,182         | 6.10        | 1.41         | 5.10          |
| 24 | C. A. Comarcal de MANLEU                         | 4.20        | 76.57      | 17.56         | 0.74          | 0.71          | 226        | 1,155         | 5.10        | 1.66         | 5.10          |
| 25 | C. A. de MANRESA                                 | 5.04        | 81.33      | 12.59         | 0.63          | 0.60          | 276        | 1,366         | 4.90        | 1.75         | 5.00          |
| 26 | C. A. LAYETANA                                   | 6.13        | 73.36      | 14.88         | 0.91          | 0.86          | 273        | 1,376         | 5.00        | 2.49         | 5.50          |
| 27 | C. A. de MURCIA                                  | 5.97        | 92.28      | 22.45         | 1.34          | 1.26          | 249        | 1,364         | 5.50        | 3.34         | 6.30          |
| 28 | C. A. y M. P. de ONTINYENT                       | 8.65        | 90.05      | 9.24          | 0.80          | 0.74          | 143        | 899           | 6.30        | 1.14         | 5.30          |
| 29 | C. A. Provincial de ORENSE                       | 3.29        | 64.83      | 18.76         | 0.62          | 0.60          | 268        | 1,428         | 5.30        | 1.65         | 7.90          |
| 30 | C. A. de ASTURIAS                                | 5.99        | 81.75      | 18.66         | 1.12          | 1.05          | 345        | 2,725         | 7.90        | 3.85         | 7.50          |
| 31 | C. A. y M. P. de BALEARES                        | 5.91        | 84.36      | 12.49         | 0.74          | 0.70          | 253        | 1,910         | 7.50        | 1.87         | 8.30          |
| 32 | C. INSULAR A. de CANARIAS                        | 3.46        | 68.20      | 13.32         | 0.46          | 0.45          | 224        | 1,857         | 8.30        | 1.03         | 4.30          |
| 33 | C. A. y M. P. Municipal de PAMPLONA              | 4.92        | 75.78      | 22.44         | 1.10          | 1.05          | 288        | 1,245         | 4.30        | 3.18         | 5.60          |
| 34 | C. A. de NAVARRA                                 | 8.72        | 73.56      | 19.54         | 1.70          | 1.57          | 431        | 2,404         | 5.60        | 7.35         | 4.10          |
| 35 | C. A. de POLLENSA                                | 5.44        | 79.45      | 15.99         | 0.87          | 0.82          | 210        | 863           | 5.10        | 1.91         | 5.10          |
| 36 | C. A. Provincial de PONTEVEDRA                   | 4.22        | 79.80      | 18.93         | 0.80          | 0.77          | 239        | 1,208         | 5.40        | 2.27         | 4.20          |
| 37 | C. A. de SABADELL                                | 4.07        | 82.44      | 19.81         | 0.81          | 0.77          | 281        | 1,516         | 4.20        | 1.95         | 9.00          |
| 38 | C. A. de SALAMANCA y SORIA                       | 8.20        | 78.94      | 9.27          | 0.76          | 0.70          | 256        | 1,070         | 4.20        | 5.83         | 6.40          |
| 39 | C. A. y M. P. de GIPUZKOA y SAN SEBASTIAN        | 11.40       | 92.69      | 12.30         | 1.40          | 1.26          | 416        | 3,731         | 9.00        | 0.92         | 8.30          |
| 40 | C. GENERAL A. de CANARIAS                        | 4.60        | 68.89      | 8.24          | 0.38          | 0.36          | 244        | 1,552         | 6.40        | 3.30         | 6.40          |
| 41 | C. A. de SANTANDER y CANTABRIA                   | 7.91        | 91.19      | 16.92         | 1.34          | 1.24          | 246        | 2,044         | 8.50        | 2.17         | 6.10          |
| 42 | C. A. y M. P. de SEGOVIA                         | 6.11        | 77.05      | 13.16         | 0.80          | 0.76          | 269        | 2,288         | 8.50        | 2.17         | 6.10          |
| 43 | M.P. y C.A. de HUELVA y SEVILLA                  | 5.72        | 78.90      | 14.43         | 0.83          | 0.78          | 207        | 1,358         | 6.60        | 1.70         | 5.20          |
| 44 | Cajá SAN FERNANDO de Sevilla y Jerez             | 5.53        | 82.31      | 3.41          | 0.39          | 0.34          | 194        | 1,019         | 4.90        | 1.00         | 5.70          |
| 45 | C. A. Provincial de TARRAGONA                    | 5.25        | 75.15      | 6.84          | 0.36          | 0.34          | 280        | 1,368         | 4.90        | 2.16         | 6.40          |
| 46 | C. A. de TERRASSA                                | 5.14        | 93.25      | 17.19         | 0.88          | 0.84          | 245        | 1,605         | 5.70        | 2.10         | 6.10          |
| 47 | C. A. de VALENCIA, CASTELLON y ALICANTE, BANCAJA | 5.77        | 83.91      | 14.50         | 0.84          | 0.79          | 251        | 1,409         | 6.40        | 2.13         | 3.80          |
| 48 | C. A. Municipal de VIGO                          | 6.46        | 91.79      | 11.79         | 0.76          | 0.72          | 280        | 1,713         | 6.10        | 1.96         | 5.80          |
| 49 | C. A. del PENEDES                                | 5.83        | 83.08      | 10.65         | 0.62          | 0.59          | 316        | 1,204         | 3.80        | 3.82         | 5.20          |
| 50 | C. A. de VITORIA y ALAVA                         | 8.57        | 76.42      | 12.73         | 1.09          | 1.00          | 350        | 2,034         | 5.80        | 2.29         | 6.30          |
| 51 | C. A. y M. P. de ZARAGOZA, ARAGON y RIOJA        | 5.80        | 8.60       | 16.59         | 0.96          | 0.91          | 238        | 1,241         | 5.20        | 4.42         | 6.30          |
|    | C. A. de la INMACULADA DE ARAGON                 | 9.30        | 81.38      | 17.81         | 1.66          | 1.52          | 267        | 1,676         | 6.30        |              |               |

Fuente: Anuario CECA 1993

## DENDOGRAMA

Dendrogram using Average Linkage (Between Groups)



## CONSIDERACIONES ACERCA DEL COEFICIENTE DE GARANTIA

JOSÉ A. LASTRES SEGRET

Departamento de Economía Aplicada.  
Universidad de La Laguna

### CUESTIONES PREVIAS

La regulación del nivel de capital adecuado opera a modo de un impuesto progresivo que al actuar sobre las operaciones bancarias que suponen contingencia, va imponiendo superiores requisitos a medida que el riesgo crece, de forma que la entidad irá necesitando niveles más elevados de recursos propios, penalizándose así los riesgos mayores.

Sin embargo las conclusiones aportadas por la teoría financiera parecen ser contrarias y así el modelo de Modigliani et alia (1958) incide en la cuestión de los fallos del mercado o deficiencias en la información, que afectan a la banca, para justificar el mantenimiento de elevados niveles de endeudamiento. En esta línea coincide Wall (1985), mientras que Schaefer (1990) señala que el nivel de los recursos propios mantenidos por la industria bancaria aparece influido por una suerte de consenso inusual en la consideración de que dichos recursos propios son caros.

La justificación de esta preferencia generalizada por la banca hacia el endeudamiento en lugar de aumentar el nivel de sus recursos propios, puede encontrarse en que la mayoría de los países desarrollados, han adoptado sistemas de aseguramiento para los depósitos bancarios, que han originado efectos perversos en forma de incentivos ficticios para que la banca adquiera activos de riesgo para impulsar su volumen de negocio, basando su expansión en el incremento desmesurado de pasivos asegurados, en vez de conseguirla por la vía de los fondos propios, que al no estar asegurados, presentan menos alicientes. Tal conducta originó discriminaciones en términos de azar moral, perjudicando a las instituciones que mantengan un adecuado equilibrio entre la calidad y la gestión de sus riesgos y beneficiando a las que sustentan niveles de contingencia más elevados y ejercen una gestión peor.

De aquí que el establecimiento de coeficientes bancarios y concretamente los que atañen a la solvencia, constituye una pieza fundamental de la actividad reguladora de la industria de la banca. De acuerdo con Lastres et alia (1990), la traducción del término "capital adequacy" a nuestro idioma vendría a referirse al "capital adecuado" que las instituciones crediticias necesitan mantener en forma de recursos propios, adoptando una expresión más correcta en nuestra cultura bancaria, mediante la expresión "coeficiente de garantía" o "coeficiente de solvencia".

Abundando en lo anterior puede añadirse que cualquier clase de disposiciones establecidas para el reforzamiento de la solvencia bancaria revisten gran interés puesto que garantizan el

correcto funcionamiento del sistema financiero. En este sentido se manifiestan Trujillo et alia (1988), reconociendo que dichas disposiciones en pro de la solvencia reducen las posibilidades de transmisión de los problemas surgidos en una empresa, en un compartimento del mercado y en un sector económico, hacia el conjunto del sistema.

La determinación del nivel adecuado de recursos propios parte del hecho de que aunque la gerencia efectúe un seguimiento y control muy estricto de los riesgos bancarios asumidos, nunca se encontrará completamente a cubierto de un conjunto de quebrantos de variada naturaleza.

Aunque nadie duda de las ventajas de la protección que brindan dichos recursos propios desde el punto de vista de la empresa bancaria, puesto que favorece a sus accionistas y sobre todo a sus acreedores, sin embargo la banca suele ser reacia a incrementar -por encima de determinados niveles- su coeficiente debido básicamente a dos razones:

- porque la base de capital escasea.
- porque el coste de los recursos es diferente según cual sea la vía de captación utilizada.

En términos generales puede afirmarse que cada institución financiera conoce su nivel óptimo de recursos propios sobre los activos de riesgo, de modo que si ésta es sobrepasada, la ventaja que incorpora el incremento marginal del capital, resulta anulada por la desventaja surgida en forma de aumento del coste marginal de explotación.

Si bien es cierto que el crecimiento de los recursos propios produce un aumento de la solvencia y confianza el público, también es verdad que la inmovilización del capital producirá -cæteris paribus-, una disminución en los dividendos brutos por acción y aún podría suceder que este incremento de recursos propios sea utilizado en operaciones de mayor riesgo, tratando de recuperar la rentabilidad promedio para sus accionistas.

Si partimos de la hipótesis de que no existiesen reglas de regulación sobre el nivel de recursos propios y desde un punto de vista coherente, puede asumirse que la banca fijará aquél que mejor se adapte a sus fines. Y así, una institución bancaria que desarrolle una política de crecimiento a base de adquisiciones, absorciones y fusiones de empresas, deberá de disponer de unos niveles de recursos propios superiores al de aquéllas que elijan la vía de la expansión interna mediante la realización de operaciones que generen una escasa contingencia, por ejemplo mediante el ejercicio de la desintermediación y/o la titulización, en un contexto de innovación financiera.

De otra parte y bajo la ausencia de regulación, es probable que el coeficiente de solvencia se sitúe en niveles bajos, si el ajuste de capital realizado por la banca se adaptase a las señales que le lleguen por la vía del mercado, de su clientela de pasivo, de sus accionistas, de los suscriptores de deuda subordinada o del valor real de sus recursos propios.

Si a dicha ausencia de regulación unimos la inexistencia de sistemas de aseguramiento de depósitos, tales como fondos de garantía o cualesquier otra medida que trate de afianzar la solvencia de las instituciones bancarias, probablemente éstas mantendrían niveles de recursos propios

ligeramente superiores a los mínimamente necesarios -en el caso de que dicho aseguramiento fuese de exclusiva competencia de la banca- y si los importes de las primas de seguro a pagar estuviesen en consonancia con el riesgo realmente asumido.

Por lo tanto, el nivel que la banca entiende como el de “capital óptimo” se verá modificado como consecuencia del mayor o menor riesgo soportado. En todo caso, una saneada y eficaz gestión de la contingencia de las operaciones activas que estuviese sometida al control de los organismos gubernamentales, permitiría el reajuste de la cifra de los recursos propios “socialmente necesarios”, posibilitando la disminución de los mismos.

A este respecto añadiremos que un adecuado nivel de dichos recursos propios mejora la solvencia bancaria al permitir la reducción del riesgo de quiebra del sistema bancario en su conjunto y en este sentido se manifiestan Shart et alia (1985), quienes demuestran que puede existir una relación causal entre las posibilidades de quiebras bancarias y la disminución de las cotas de recursos propios.

En todo caso, la determinación de un coeficiente de garantía puede abordarse a partir de una triple perspectiva:

- Mediante la implantación de un coeficiente de tipo “genérico”, que obliga a que los recursos propios de una empresa bancaria alcancen como mínimo un determinado porcentaje de sus activos de riesgo totales, obteniéndose así una tasa no discriminante y única para cualquier modalidad de operación o de inversión. Dicho coeficiente oscilaría entre la relación Recursos Propios divididos por la cifra total de Depósitos o bien entre la de Recursos Propios divididos por los Activos de Riesgo, o lo que es lo mismo: el ratio inverso del apalancamiento financiero.

A su vez dicho coeficiente podría subdividirse en uno que resultase independiente de la dimensión o tamaño de las entidades y en otro que no discriminase por activos de riesgo, pero que sí lo hiciese según el tamaño de las mismas.

- Mediante la adopción de un coeficiente “selectivo”, dado que no todos los activos de riesgo en los que se materializa la inversión bancaria poseen los mismos niveles de contingencia. Por ello resulta provechoso relacionar los recursos propios de cada empresa con dichos activos convenientemente ordenados, de modo que se tenga en cuenta el riesgo de cada clase de los mismos, lo que exigirá la asignación de ponderaciones de contingencia. Aunque su instrumentación suele ser bastante difícil y a menudo complicada -sobre todo en lo que se refiere al cálculo de dichas ponderaciones-, su puesta en práctica obligará al mantenimiento de unos determinados niveles de recursos propios.

- Mediante la utilización simultánea de ambos tipos de coeficientes, uno selectivo y otro genérico. Tal fue el caso de la reforma legal española de 1985 que estableció un modelo mixto, aunque al principio el coeficiente no selectivo se aplicó preferentemente a aquellas instituciones que sobresalían por su elevada inversión en fondos públicos o por la gran repercusión de operaciones efectuadas en el mercado interbancario (caso de las cajas de ahorro y la banca extranjera).

Tal modelo mixto perseguía imponer un mejor control para la determinación del nivel de recursos propios adecuado, ya que el coeficiente genérico establecía una limitación a la posibilidad de transformación de los activos de riesgo para poder cumplir las exigencias del coeficiente selectivo, de forma que si las inversiones de una entidad bancaria se desplazan hacia otras de menor contingencia supondrá menor necesidad de recursos propios (según dicho coeficiente selectivo), lo que a su vez implicará una disminución del mencionado coeficiente genérico, que bajo estos supuestos, se convertiría en el nivel mínimo a cumplir por la entidad, a partir de entonces.

Las autoridades supervisoras de los principales países industrializados en la década de los ochenta se preocuparon seriamente, debido a la incidencia de una serie de hechos acaecidos, entre los que merecen reseñarse:

- El sustantivo incremento de las partidas “fuera del balance” -que no se computaban como recursos propios en la mayoría de los sistemas de regulación de dichos países-.

- La importancia alcanzada por los nuevos instrumentos financieros, consecuencia del proceso de innovación y que se encontraban afectados por la volatilidad de los tipos de interés: futuros financieros, swaps, mercados de opciones, acuerdos sobre tipos futuros de interés a plazo, contratos de opción sobre tipos de interés a plazo, etcétera.

- El paulatino deterioro de la calidad de los activos de riesgo de los bancos afectados por el riesgo-país de la deuda externa iberoamericana, cuya endeblez y deterioro ocasionó el empeoramiento del grado de confianza del público en el sistema bancario y financiero.

Dicha preocupación produjo una reacción consistente en la puesta en vigor de una triple estrategia mediante la cual se elevaba el coeficiente de recursos propios, se modificaba su configuración (pasando de un coeficiente de carácter neutral a otro de carácter discriminado o selectivo) y se incluían en las ponderaciones de riesgo a un conjunto de nuevas operaciones de inversión financiera que antes no se computaban -aunque ocasionaban riesgos evidentes-, caso de los riesgos de firma, por ejemplo.

Sin embargo, un aumento sin más del coeficiente de garantía podría producir una serie de efectos perversos. Tal y como postula Mingo (1985), uno de los principales sería la valoración que por parte de la banca se hiciese de tal subida, de forma que su reacción -al provocar incumplimientos aunque esporádicos, de la legislación vigente-, podría afectar al riesgo de iliquidez (elevándolo), con lo que al final llegaría a independizarse del nivel alcanzado por la tasa de recursos propios.

Otra consecuencia surgida de la específica regulación de los fondos propios, sería la aparición de efectos externos en forma de deseconomías, que impondrían efectos sociales no deseados, en forma de incremento de la ineficiencia global de los intermediarios bancarios.

Entonces, una elevación del coeficiente de solvencia provocaría distorsiones en el grado de competitividad de la industria bancaria si, al originar un incremento de los costes de los fondos tomados, disminuyese la cuota de mercado abastecida por dicha industria, en relación a las empresas que aunque no pertenecen al sector bancario, compiten con él.

Un ejemplo de tal circunstancia estaría constituido por la puesta en vigor por parte de dichas empresas no bancarias de instrumentos financieros específicos, caso de las tarjetas de crédito emitidas por Marks and Spencer, Sears, AT & AT (que en Estados Unidos es el mayor expedidor de tarjetas de crédito) y otros grandes almacenes en otros países; o la intervención en el mercado de créditos a corporaciones, como ocurrió con la General Electric Company.

A finales de la década de los 80, las instituciones no bancarias norteamericanas habían concedido créditos a consumidores y empresas que representaban más del 45 por cien del total.

El significado de la naturaleza distorsionadora de esta competencia puede provocar varios efectos, ya que de una parte, estas instituciones no bancarias no estarían sujetas a las medidas reguladoras de la solvencia antes mencionadas, de manera que la elevación del coeficiente solamente afectaría a la banca. De otra, incentivaría la adquisición por parte de ésta de aquéllas, que operarían como intermediarios financieros sin tener que cumplir dichas medidas reguladoras, lo que permitiría a sus propietarios una diversificación competitiva a un coste mucho menor que si actuaran directamente. Y también podría ocurrir que para mitigar el efecto de una elevación del ratio de solvencia, un conjunto de grandes compañías se situasen liderando a un Grupo Financiero o Bank Holding Company -en el caso norteamericano-, formado a su vez, por un conjunto de bancos. Esta particular alineación les permitiría cumplir con la obligación impuesta por dicha elevación simplemente, mediante el mayor endeudamiento del cabeza de fila del citado Grupo.

**ANTECEDENTES.-** El proceso de convergencia existente entre la Unión Europea y los países que forman el Comité de Basilea, respecto del coeficiente bancario de garantía es un hecho plenamente reconocido, aunque Gardener [1989:(a)/(b)] aduce la existencia de ciertas diferencias de interpretación centradas en el nivel de consolidación de los recursos propios dentro de lo que es el Grupo Bancario.

La génesis del movimiento internacional de convergencia y coordinación puede encontrarse en la inquietud de las autoridades supervisoras norteamericanas, a fin de evitar imponer a su banca doméstica lesivas y costosas medidas de exigencia de mínimos niveles de recursos propios, al objeto de instaurar un sistema de salvaguardia, capaz de hacer frente a la escalada de quebrantos experimentada por su industria bancaria.

Tal preocupación se sustentaba en el argumento de que si no se producía una reacción similar de los otros bloques competitivos -Japón y Europa- en el sentido de que pusiesen en vigor medidas semejantes, se reduciría el margen de concurrencia internacional de la banca de Estados Unidos, con el subsiguiente estrechamiento de sus mercados de capitales en el conjunto mundial.

Para el bloque europeo la necesidad de tal armonización se remonta al contexto de la doctrina conocida como "orígenes de la fortaleza de la industria bancaria", inspirada a su vez en criterios donde prima la solvencia que Key et alia (1991), indican que son aplicados para regular la admisión de la banca extranjera, sirviendo de base para el establecimiento de los requisitos de autorización que funcionaban como verdaderas barreras de entrada. Otro de los motivos, de acuerdo con Fingleton (1991), podría encontrarse en la restricción del excesivo ascenso de la banca japonesa, lo que exigiría el previo consenso de las autoridades supervisoras europeas.

La aprobación de medidas uniformes a nivel internacional beneficiaría en primera instancia a los países que albergasen centros financieros de gran importancia, en los que actuase la banca extranjera, cuyos altibajos o dificultades podría poner en peligro el correcto funcionamiento de dichos centros financieros afectando a su estabilidad, por ejemplo. De acuerdo con esta argumentación, las medidas asumidas en el seno del denominado G-10 más Luxemburgo, tendrían como principal finalidad la disminución de la probabilidad de que acontecimientos que afectasen a la correcta gestión de determinadas instituciones bancarias foráneas, repercutiesen posteriormente sobre la buena marcha de las de los países miembros.

Bajo este aspecto podría considerarse como un proceso de consolidación de dicho proceso de armonización, el conjunto de medidas adoptado por la Unión Europea, en forma de coeficientes para los activos de riesgo bancario.

La puesta en vigor del sistema del balance ajustado y la incorporación del modelo de coeficientes ajustados de riesgo (Risk Adjusted Ratios -R.A.R.-) se debió a la influencia de las autoridades bancarias del Reino Unido y Estados Unidos, mediante acuerdo bilateral suscrito en 1987 y posteriormente en los trabajos realizados en el seno del Committee on Banking Regulation and Supervisory Practices del Bank for International Settlements en su sede de Basilea. [B.I.S. 1987(a)/(b)] y (1988)].

Dicha influencia procede de la tradición anglosajona relativa a la regulación de tipo prudencial, que se inspira en la adopción de medidas que no restrinjan el grado de competencia que se considera plenamente compatible con la economía de libre mercado.

**CARACTERÍSTICAS.-** El coeficiente de solvencia generalmente adoptado por los países de más desarrollados, corresponde a un modelo R.A.R., basado en el análisis del coeficiente de activos de riesgo ajustado a las necesidades de recursos propios, propuesto por el antes mencionado Comité de Basilea y denominado coloquialmente “ratio Cooke”, en honor al que fue su presidente.

Con él se trata de estimar la contingencia asumida por una determinada institución financiera, para calcular la dotación mínima de recursos propios adecuados a dicha contingencia. Dados unos determinados niveles de riesgo, si la institución desea aumentar su actividad, necesitará incrementar el volumen de recursos propios computables en el coeficiente, o desviar su dedicación hacia operaciones que entrañen menores riesgos. Puede considerarse como un modelo de tipo M.R.A.C.R. (acrónimo de Minimum Risk Adjusted Capital Ratios).

Resulta evidente que no se pueden aplicar las mismas exigencias de solvencia a la distinta gama de activos de riesgo existente, ya que existen deudores que técnicamente jamás podrán quebrar, al ejercer el privilegio del monopolio de emisión -caso de los bancos centrales-, aunque debemos matizar que la valoración efectuada de dicho privilegio puede diferir, según corresponda a divisas con plena, limitada o nula convertibilidad. Hay deudores, caso de los entes públicos y de las instituciones crediticias directamente controladas por las autoridades supervisoras, que suelen incurrir en niveles menores de riesgo que las de carácter privado, mientras que las deudas asumidas por otros presentan la circunstancia de que se encuentran afianzadas (por avales o por hipotecas).



El coeficiente de garantía mencionado se adapta a una estructura evaluadora del mínimo grado de recursos propios necesario para asegurar la solvencia en función del riesgo realmente asumido, para ello se parte de la construcción del “balance ajustado”, que incorpora el conjunto de los activos y pasivos contingentes calculados en forma de coeficientes ponderados. De este modo se trata de reflejar el riesgo de insolvencia clasificado por partidas. Así una ponderación unitaria evidencia que dicha partida se considera como normal; una ponderación cero identifica un riesgo nulo y así sucesivamente, según su contingencia. Una vez realizado todo el procedimiento, se le aplica el coeficiente de solvencia para calcular el nivel de los mínimos requerimientos de recursos propios.

Incluye los fondos accionariales y distingue entre el capital desembolsado -libre de cargas-, capital no amortizable, capital sujeto a determinadas limitaciones, caso de las acciones sin derecho a voto, los fondos fundacionales de las entidades de crédito, las primas de emisión de acciones y las reservas -tanto ocultas como expresas-. En algunos países se admite la inclusión de las legales. Sin embargo en lo referente a las reservas surgidas de las regularizaciones se suelen tratar con bastante cautela, ya que las plusvalías registradas se consideran como derivadas de actividades atípicas de la respectiva institución financiera.

También se consideran los costes de transacción así como las cargas impositivas que gravan tales realizaciones. Las provisiones generales solamente poseerán la condición de recursos propios, si su finalidad es la de ser aplicados al riesgo global del negocio y se encuentran libres de cargas fiscales. Por el contrario, las provisiones de carácter específico, se restarán de los activos de riesgo. A todos estos elementos pueden añadirse también las plusvalías no realizadas (siempre que el criterio de valoración sea el del coste de adquisición y que las correcciones sigan un camino asimétrico, a la baja); la deuda subordinada (cuya devolución se circunscribe a la ausencia de pérdidas) y cualquier otra suerte de garantías que la institución financiera podrá utilizar cuando sea necesario, caso de la propia garantía del Estado puesta a disposición de la banca pública, o los compromisos asumidos por los socios de las entidades (cooperativas de crédito, principalmente).

Los recursos propios se dividen en dos partes o escalones (tiers) y a cada uno de ellos se le asignan diferentes componentes de dichos recursos propios. El criterio de discriminación utilizado se basa en la capacidad de cada componente para la absorción de pérdidas imprevistas sin que afecte al curso normal de su actividad bancaria. El bloque 1 o capital básico se limite a las acciones plenamente desembolsadas, a las reservas expresas procedentes de beneficios acumulados y al fondo para riesgos bancarios generales. El escalón 2 o capital suplementario comprende otros fondos propios tales como créditos generales netos o deuda subordinada a la que se le exige el cumplimiento de determinados requisitos. Finalmente se establecen unos “techos” o proporciones máximas para dicho bloque 2, en relación al capital básico.

La medición de la solvencia se realiza en base consolidada, por lo que cualquier problema surgido en la entidad matriz o en alguno de los bancos filiales que formen el grupo, afectará a su solvencia global, reflejándose en la valoración con que dichas participaciones sociales figuren en la contabilidad.

El método de consolidación adoptado se encuentra perfectamente delimitado, pro ello no significa que no puedan producirse diferencias contables, como sería el caso de que el importe registrado en los libros de la filial fuese superior al que figure en los libros de la empresa matriz, o que sucediese el hecho contrario. De acuerdo con la doctrina y las prácticas contables generalmente aceptadas, en el primero de los casos no existe problema alguno en cuanto a su admisión como recursos propios al considerarse como una reserva "pasiva" de revalorización; sin embargo en el segundo, las reservas "activas" de consolidación (surgidas de las diferencias existentes entre el valor contable registrado en libros y el que asigna el mercado), se tratan de forma distinta a las susodichas reservas pasivas, puesto que se las considera como un Fondo de Comercio, procediendo a su amortización a medio plazo.

La valoración debe de estar justificada documentalmente, basada en cotizaciones registradas en mercados secundarios que posean rango oficial o por tasaciones periciales efectuadas por entidades debidamente registradas. Tal tratamiento presenta la ventaja de la seguridad en cuanto a la identificación de criterios internacionalmente aceptados desde el punto de vista de la supervisión y de las definiciones contables, y ahí radica el porqué de su aplicación generalizada.

Sin embargo y de acuerdo con Gilibert (1991:10), puede plantear diferentes inconvenientes relativos a una incorporación inmediata de determinados sucesos (como cambios adversos en el marco financiero), que pueden afectar a la solvencia bancaria a través de una intensificación del riesgo de mercado. Ello reduce la utilidad del modelo M.R.A.C.R. para la previsión de fragilidades financieras, para la determinación de primas de riesgo adecuadas a la contingencia real en un sistema de seguro de depósitos y como un provechoso instrumento de medición del riesgo existente en las nuevas actividades surgidas del proceso de innovación financiera.

Otra cuestión que surge en este modelo es la que hace mención a los problemas relativos a la definición común de los fondos propios. De acuerdo con Poveda (1990) resulta necesario el establecimiento de convenios para determinar que conceptos se admiten y cuales se excluyen, sobre todo para aquéllos de índole poco clara -como es el caso de las financiaciones subordinadas-, que permitan la adopción de criterios unívocos que eviten interpretaciones dudosas.

Otra corriente de críticas insiste en destacar el hecho de que sólo de manera aparente, la metodología incorporada en dicho modelo M.R.C.A.R. resulta ajustada a la medición del riesgo real y así Llewellyn (1988:34/35) aporta varias razones entre las que destacamos las siguientes:

- El modelo no recoge en sus ponderaciones valoraciones de carácter actuarial o consecuencia de análisis relativos a cada partida de manera individualizada, puesto que la principal hipótesis adoptada respecto del riesgo de crédito es que duplica al riesgo de inversión en valores públicos.

- Las ponderaciones establecidas para determinados riesgos se aplican basándose en las características del acreedor, sin atender a la naturaleza del prestatario, caso de los requisitos de fondos propios exigidos a las "buildings societies" británicas, por lo que el riesgo crediticio no se refleja de forma apropiada en las mencionadas ponderaciones propuestas.

- Otro conjunto de críticas alude a la aditividad con que se tratan las diferentes posiciones de riesgo adoptadas y así Hall (1989) y Collins (1991) coinciden al poner en duda que en el conjunto de la estimación del riesgo, todas las partidas que componen el mismo puedan agregarse linealmente, a que estiman que determinadas clases de consistencia se caracterizan por encontrarse negativamente correlacionadas respecto de otras.

- A lo anterior añadiremos que a nuestro entender, en el modelo comentado no figura ninguna referencia respecto al grado de diversificación de los activos de riesgo que presenten las instituciones financieras, cuando es bien sabido que una correcta diversificación de la inversión contingente, permite calificar a su cartera de inversiones como menos arriesgada, comparativamente hablando respecto de otra en la que se dé una concentración de riesgo, aunque la primera contenga una proporción de activos calificados como de alta contingencia, caso de los bonos “basura”.

Todo lo cual supone que el mencionado modelo deberá ser ampliado a fin de que pueda cubrir otras áreas de riesgo, aunque ello pueda originar grandes dificultades a la hora de establecer su ponderación. Aunque en la actualidad no constituya un instrumento excesivamente útil para la gerencia bancaria, al menos supone según Steinherr (1990:21) una base internacional para la homogeneidad de criterios, que puede impulsar al conjunto de la banca a reducir su apalancamiento financiero.

## CONCLUSIONES

La incorporación del modelo M.R.A.C.R. ha supuesto la incorporación de una serie de importantes ventajas derivadas de la naturaleza del coeficiente selectivo, que permite un tratamiento diferenciado para una serie de activos de riesgo, a base de ponderaciones de contingencia.

El proceso de innovación financiera, la globalización, el auge de las operaciones fuera de balance, la operativa con la amplia gama de derivados e híbridos financieros, han introducido importantes cambios en los mercados, que hizo necesaria una regulación de carácter prudencial sobre los niveles mínimos de solvencia a mantener por las instituciones financieras.

El modelo establecido por la recomendación de Basilea y la Unión Europea utiliza la base consolidada para la determinación de las necesidades de recursos propios, incorporando el conjunto de activos pasivos de riesgo en forma de valores ajustados al mismo, lo que supone que una ponderación nula significa riesgo cero; una ponderación unitaria supondría un riesgo normal y así sucesivamente.

Aunque dicho modelo parece ser uno de los que manejan técnicas más depuradas para la medición de las diferentes clases de contingencia, no se encuentra a salvo de ciertas críticas que inciden en la metodología utilizada para calcular las ponderaciones correspondientes a las partidas que conforman el balance consolidado. Y así no puede afirmarse de modo categórico, que dichas ponderaciones incorporen cálculos de naturaleza actuarial o en análisis individualizados de cada una de las partidas de riesgo, e incluso que no aparece ninguna referencia respecto del grado de diversificación de los activos contingentes, aunque sí se penaliza su concentración.

Otra insuficiencia detectada se relaciona con el tratamiento que dicho modelo propugna para el riesgo bancario al que considera como lineal y aditivo, dejando fuera de consideración la interacción ocasionada por otro tipo de riesgos sobre las partidas que componen la cartera de inversión y que otro modelo de carácter dinámico y autoajustable si podría incorporar.

La utilidad aportada por este modelo M.R.A.C.R. todavía dista de ser la mejor posible, dado que el mismo se encuentra excesivamente centrado en el riesgo de crédito, cuya relevancia nadie pone en duda, aunque también debe de admitirse que una situación de insolvencia bancaria puede surgir de otros tipos de riesgo, caso del Banco Español de Crédito o el más reciente del Barings Bank, a los que de momento en este modelo no se les concede tanta importancia, o bien no aparecen incluidos en el cálculo de sus ponderaciones.

Ello nos lleva a plantear la posibilidad de corregir esta insuficiencia, mediante la incorporación de otros riesgos tales como los de posición, iliquidez, volatilidad de tipos de interés y de tipos de cambio, dado que la determinación de esquemas analíticos no estáticos asociados al mentado modelo, adecuarían la determinación de los niveles mínimos de solvencia del sector bancario y financiero, a la mayoría de la contingencia realmente asumida por estas instituciones.

## BIBLIOGRAFIA

Bank for International Settlements [1987(a)]. "Changes in the organization and regulation of capital markets". *Monetary and Economic Department*, B.I.S.; Marzo, Basilea.

Bank for International Settlements [1987(b)]. "Proposals for international convergence of capital measurement and capital standards". *Committee on Banking Regulation and Supervisor Practices; Consultative Paper*. B.I.S.; diciembre, Basilea.

Bank for International Settlements (1988). "International convergence of capital measurement and capital standards". *Committee on Banking Regulation and Supervisor Practices; B.I.S.*; julio, Basilea.

Collins, P.J. (1991). "Prescription for a financial ailment". *The Financial Times* del 24 de abril.

Fingleton, E. (1991). "The failed ambush of Japan's banks". *The Wall Street Journal (Europe)* del 7 de noviembre.

Gardener, E.P.M. [1989(a)]. "Regulation and convergence of capital adequacy". *Institute of European Finance. Research Paper in Banking and Finance. Nº 1*. University College of North Wales, Bangor.

Gardener, E.P.M. [1989(b)]. "The capital adequacy problem in modern banking". *Institute of European Finance. Research Paper in Banking and Finance. Nº 2*. University College of North Wales, Bangor.

Hall, M. (1989). "The B.I.S. Capital Adequacy Rules: a critique". *Quarterly Review. Banca Nazionale del Lavoro*, junio.

Key, S.J.; Scott, H.S. (1991). "International trade in banking services: a conceptual framework". *Group of Thirty*, Washington, D.C.

Lastres Segret, J.A.; Oreja Rodríguez, J.R. (1990). "El coeficiente de garantía bancario: bases para la formulación de estrategias de reestructuración". *Anales del Instituto Universitario de la Empresa. Nº 1*, Universidad de La Laguna, abril.

Mingo, F. (1985). "Capital ratios: the regulation fiasco of the future". *Bank Expansion Reporter*, enero.

Modigliani, F.; Miller, M. (1958). "The cost of capital, corporation finance and the theory of investment". *American Economic Research*, junio.

Poveda Anadón, R. (1990). "La reforma de los coeficientes de solvencia". *Papeles de Economía Española. Nº 44*.

Schaefer, S.M. (1990). "The Regulation of Banks and Securities Firms". *The European Economic Review*, Nº 34.

Shart, E.; O' Driscoll, P.; Berger, F. (1985). "Recent bank failures: determinants and consequences". Proceedings of a Conference on Bank Structure and Competition". *Federal Reserve Bank of Chicago*.

Steinherr, A. (1990). "Financial innovation, internationalization, deregulation and market integration in Europe: why does it all happen?". En *Financial Institutions in Europe under New Competitive Conditions. D.E. Fair & C de Boissieu (Eds.)*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Holanda.

Trujillo del Valle, J.A.; Cuervo-Arango, C.; Vargas Bahamonde, F. (1988). "El sistema financiero español". *Ariel Economía. Editorial Ariel, S.A.*, Tercera Edición. Octubre, Barcelona.

Wall, L.D. (1985). "Regulation of bank's equity capital". *Economic Review, Federal Reserve Bank of Atlanta*, abril.



# ECONOMIAS DE GAMA EN LA PRESTACION DE SERVICIOS BANCARIOS: CAJEROS AUTOMATICOS VERSUS OFICINAS

JOAQUIN MAUDOS y JOSÉ MANUEL PASTOR

Facultad de CC.EE.  
Universidad de Valencia

## 1. INTRODUCCION

El sector bancario español (SBE) ha experimentado cambios sustanciales en las dos últimas décadas como consecuencia de los procesos de liberalización-desregulación, universalización, internacionalización y aceleración del progreso tecnológico al que ha estado sometido. Las características específicas del negocio bancario y la propia evolución histórica del sector han conducido a que el sector bancario español sea en la actualidad el principal usuario de las nuevas tecnologías de la información (informática y telecomunicaciones).

En el caso del SBE, ha destacado la rápida difusión de una importante innovación: el cajero automático (*automated teller machine*, ATM). Este constituye una de las principales innovaciones de producto-proceso encaminada al autoservicio bancario que modifica de manera sustancial las relaciones de la clientela con el banco.

El objetivo de este trabajo es determinar el impacto del ATM en los costes de las cajas de ahorros. Tras una breve descripción de la difusión del ATM en el caso español (apartado 2), el apartado 3 describe la metodología utilizada para analizar el posible *trade-off* existente entre ATMs y oficinas en la prestación de servicios asociados a los depósitos. El apartado 4 se destina a analizar, a través de la estimación de una función translogarítmica, el efecto del ATM en los costes de las cajas de ahorros confederadas. Por último, el apartado 5 presenta las principales conclusiones del trabajo.

## 2. LA DIFUSION DEL ATM EN EL SISTEMA BANCARIO ESPAÑOL

La introducción generalizada de las nuevas tecnologías de la información en la economía española se ha traducido en la aparición de nuevos medios de pago y de agentes oferentes de los mismos.

Tomando con referencia el denominado Libro Azul sobre los sistema de pagos en los Estados miembros de la Comunidad Económica Europea<sup>1</sup>, el cuadro 1 presenta un conjunto de indicadores de la oferta de servicios de pago en los países de la CE.

**CUADRO 1**  
**Indicadores de oferta de servicios de pago. 1990**

|                                     | Núm. Ctas.<br>bancarias por hab.<br>hab. | Núm. Of.<br>por hab. | Núm. ATMs<br>por millón<br>de hab. | Núm. TPV<br>por millón<br>de hab. |
|-------------------------------------|--|----------------------|------------------------------------|-----------------------------------|
| <b>España</b>                       | <b>1.80</b>                              | <b>907</b>           | <b>357</b>                         | <b>8330</b>                       |
| <b>Resto de los países de la CE</b> |  |                      |                                    |                                   |
| <b>Bélgica</b>                      | 1.00                                     | 1351                 | 91                                 | 2857                              |
| <b>Dinamarca</b>                    | 1.95                                     | 870                  | 196                                | 3125                              |
| <b>Alemania</b>                     | 0.94                                     | 971                  | 141                                | 294                               |
| <b>Grecia</b>                       | ND                                       | 159                  | ND                                 | ND                                |
| <b>Francia</b>                      | 1.06                                     | 834                  | 256                                | 3704                              |
| <b>Irlanda</b>                      | 0.64                                     | 721                  | 152                                | ND                                |
| <b>Italia</b>                       | 0.39                                     | 560                  | 169                                | 385                               |
| <b>Luxemburgo</b>                   | 3.20                                     | 1074                 | 213                                | 7692                              |
| <b>Holanda</b>                      | 1.08                                     | 549                  | 182                                | 149                               |
| <b>Portugal</b>                     | 1.60                                     | 334                  | 80                                 | 256                               |
| <b>R. Unido</b>                     | 2.43                                     | 725                  | 294                                | 1923                              |

Fuente: Libro Azul, sobre sistemas de pago en los países de la CE.

A la vista de este cuadro, destaca la elevada oferta de servicios de pago en España en comparación con el resto de la países de la CE en todos los indicadores considerados. Concretamente, destaca el elevado número tanto de oficinas como de ATMs y terminales punto de venta (TPV). De hecho, España ocupa la primera posición dentro de los países de la CE en número de ATMs y de TPV por habitante. Asimismo, el número de cuentas bancarias por habitante en España es relativamente elevado, tan sólo superado por Dinamarca, Luxemburgo y el Reino Unido.

<sup>1</sup> Véase Comité Of Governors of the Central Banks of the Member of the European Economic Community (1992).



Como pone de manifiesto Sánchez (1992), de los diversos factores explicativos de esta situación, quizás la más importante sea el desarrollo relativamente reciente del sistema bancario español, que ha dado lugar en los últimos años a un importante crecimiento en los niveles de servicios ofrecidos a los depositantes.

Centrándonos en el objetivo central del trabajo, el cuadro 2 muestra la evolución del número de ATMs en el SBE en el periodo 1985-1992 distinguiendo entre cajas de ahorros y banca privada. El número de ATMs se ha multiplicado por 5,5 en tan sólo 7 años pasando de 3.358 en 1985 a 18.646 en 1992, representando las cajas de ahorro las dos terceras partes del total de ATMs del sector bancario.

**CUADRO 2**  
**Evolución del número de ATMs y de oficinas en España**

|                 |               | 1985  | 1986  | 1987  | 1988  | 1989  | 1990  | 1991  | 1992  |
|-----------------|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| <b>Cajeros</b>  | <b>Cajas</b>  | 2206  | 3050  | 3954  | 5605  | 7807  | 9432  | 11087 | 12271 |
|                 | <b>Bancos</b> | 1152  | 1525  | 2142  | 2866  | 3459  | 4668  | 5291  | 6375  |
|                 | <b>Total</b>  | 3358  | 4575  | 6096  | 8471  | 11266 | 14100 | 16378 | 18646 |
| <b>Oficinas</b> | <b>Cajas</b>  | 10848 | 11346 | 11711 | 12308 | 13232 | 13678 | 13939 | 14116 |
|                 | <b>Bancos</b> | 16568 | 16471 | 16449 | 16651 | 16623 | 16835 | 17243 | 17408 |
|                 | <b>Total</b>  | 27416 | 27815 | 28160 | 28959 | 29855 | 30513 | 31182 | 31524 |

Fuente: Anuarios estadísticos de la CECA y de la Banca privada.

Desde la introducción del ATM en el SBE, la red de ATMs ha ido aumentando a tasas crecientes hasta el año 1988 (véase cuadro 3) para a partir de entonces crecer a tasas decrecientes. Este patrón de crecimiento, creciendo a tasas crecientes desde su introducción, alcanzando un punto de inflexión a partir del cual crecer a tasas decrecientes, es estándar en la difusión de tecnologías<sup>2</sup>.

<sup>2</sup> Véase Polo, Y. (1988).

**CUADRO 3**  
**Evolución del número de ATMs y de oficinas en España: tasas de crecimiento (%)**

|                 |               | 1985-86      | 1986-87      | 1987-88      | 1988-89      | 1989-90      | 1990-91      | 1991-92      |
|-----------------|---------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| <b>Cajeros</b>  | <b>Cajas</b>  | 38.26        | 29.64        | 41.75        | 39.28        | 20.81        | 17.34        | 10.67        |
|                 | <b>Bancos</b> | 32.38        | 40.46        | 33.80        | 20.69        | 34.95        | 13.35        | 20.48        |
|                 | <b>Total</b>  | <b>36.24</b> | <b>33.25</b> | <b>38.96</b> | <b>32.99</b> | <b>25.15</b> | <b>16.15</b> | <b>13.85</b> |
| <b>Oficinas</b> | <b>Cajas</b>  | 4.59         | 3.21         | 5.09         | 7.50         | 3.37         | 1.90         | 1.27         |
|                 | <b>Bancos</b> | -0.58        | -0.13        | 1.22         | -0.16        | 1.27         | 2.42         | 0.95         |
|                 | <b>Total</b>  | <b>1.45</b>  | <b>1.23</b>  | <b>2.83</b>  | <b>3.09</b>  | <b>2.20</b>  | <b>2.19</b>  | <b>1.09</b>  |

Fuente: Anuarios estadísticos de la CECA y de la Banca privada.

Dado que el ATM constituye una alternativa a la oficina bancaria para la prestación de los servicios asociados a los depósitos (retirada de efectivo, consulta de saldos y últimos movimientos, ingresos, petición de talonarios, etc.) su rápido crecimiento sugiere que puede haber sustituido a la oficina bancaria en la provisión de dichos servicios. A este respecto, en la parte inferior de los cuadros 2 y 3 se presenta el número de oficinas (cuadro 2) así como sus tasas de crecimiento en España (cuadro 3) de 1985 a 1992. Asimismo, el cuadro 4 presenta la evolución del número de cajeros por oficina en las cajas de ahorros y en la banca privada.

**CUADRO 4**  
**Número de ATMs por oficina en España**

|               | 1985  | 1986  | 1987  | 1988  | 1989  | 1990  | 1991  | 1992  |
|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| <b>Cajas</b>  | 0.203 | 0.269 | 0.338 | 0.455 | 0.590 | 0.689 | 0.795 | 0.869 |
| <b>Bancos</b> | 0.069 | 0.092 | 0.130 | 0.172 | 0.208 | 0.277 | 0.309 | 0.366 |
| <b>Total</b>  | 0.122 | 0.164 | 0.216 | 0.292 | 0.377 | 0.462 | 0.525 | 0.591 |

Fuente: Anuarios estadísticos de la CECA y de la Banca privada.

La principal evidencia que puede extraerse de estos cuadros es el mayor ritmo de crecimiento de la red de ATMs en relación a la red de oficinas bancarias. Mientras que en 1985 existían en el SBE 3.358 ATMs frente a 27.416 oficinas, en 1992 las cifras eran de 18.646 ATMs frente a 31.524 oficinas, pasando la relación (ATM/OF) de 0,122 a 0,591 en tan sólo 7 años. Distinguiendo entre cajas y bancos, la relación (ATM/OF) en 1992 en las cajas de ahorros es más del doble (0,869) a la correspondiente a la banca privada (0,366).

Sin embargo, si bien la red de ATMs se ha expandido mucho más rápidamente que la red de oficinas, el número de oficinas por habitante ha estado creciendo a lo largo del periodo 1985-1992 (véase cuadro 5). Por tanto, si los ATMs hubieran reemplazado a las oficinas en la prestación de servicios bancarios deberíamos esperar que la relación oficinas por habitante cayera en lugar del crecimiento experimentado. Por tanto, a simple vista no parece que los ATMs hayan sustituido a la oficinas.

**CUADRO 5**  
**Número de ATMs y de oficinas por cada millón de habitantes en España**

|                 | 1985 | 1986 | 1987 | 1988 | 1989 | 1990 | 1991 | 1992 |
|-----------------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| <b>Oficinas</b> | 715  | 723  | 732  | 751  | 773  | 788  | 804  | 812  |
| <b>ATMs</b>     | 87   | 119  | 158  | 219  | 291  | 364  | 422  | 480  |

Fuente: Anuarios estadísticos de la CECA y de la Banca privada e INE.

### 3.- OFICINAS *VERSUS* ATM.

Con objeto de realizar un análisis más riguroso del efecto del ATM en las cajas de ahorros, se va a proceder a estimar una función de costes translogarítmica en la que el número de ATMs y oficinas entran como sustitutos en la prestación de los servicios asociados a los depósitos<sup>3</sup>. En dicho modelo, la variación en los costes asociados a la prestación de servicios con ATMs *versus* oficinas puede ser determinada a través de la estimación de economías de gama (también llamadas economías de alcance)<sup>4</sup>. Estas existen cuando es más barato producir conjuntamente una combinación de *outputs* dada que hacerlo de forma separada en empresas independientes. En el caso más sencillo de dos únicos *outputs* existen economías de gama cuando:

$$C(Q_1, Q_2, p) < C(Q_1, p) + C(Q_2, p)$$

En el caso que nos ocupa, las economías de gama hacen referencia al posible ahorro en costes como consecuencia de la producción de servicios asociados a los depósitos bancarios conjuntamente con oficinas y ATMs. Así, dichas economías comparan los costes de utilizar ATMs y oficinas conjuntamente en el proceso de producción frente a la alternativa de utilizar únicamente ATM o únicamente oficinas. Así, existirán economías de alcance siempre que los costes predichos de producir una cantidad dada de servicios asociados a los depósitos bancarios utilizando oficinas con una cantidad mínima (€) de ATMs, más el coste predicho de prestar dichos servicios utilizando ATMs con una cantidad mínima de oficinas sea mayor que el coste predicho de prestar los servicios utilizando ATMs y oficinas, esto es:

<sup>3</sup> Véase Humphrey (1994).

<sup>4</sup> Véase Panzar (1989).

$$C[X_i, OF(1-\Theta), \epsilon ATM, P_j] + C[X_i, \epsilon OF, ATM(1-\Theta), P_j] > C[X_i, OF, ATM, P_j] \quad [2]$$

en donde  $X_i$  son los distintos outputs del vector de producción y  $P_j$  los precios de los factores productivos.

El ahorro porcentual en los costes de producción vendrán determinados por la siguiente expresión:

$$\frac{C[X_i, OF(1-\Theta), \epsilon ATM, P_j] + C[X_i, \epsilon OF, ATM(1-\Theta), P_j] - C[X_i, OF, ATM, P_j]}{C[X_i, OF, ATM, P_j]} \quad [3]$$

## 4. RESULTADOS EMPIRICOS

### Especificación econométrica

La función de costes estimada tiene en cuenta el carácter multiproducto de la empresa bancaria<sup>5</sup>. En concreto, para una empresa con  $n$  *outputs* y  $m$  *inputs* dicha función adopta la expresión:

$$\begin{aligned} \text{Ln}(CT) = \eta_i = & \sum_{i=1}^n \alpha_i \text{Ln}X_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \text{Ln}X_i X_j \\ & + \sum_{i=1}^m \beta_i \text{Ln}P_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \beta_{ij} \text{Ln}P_i P_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} \text{Ln}X_i \text{Ln}P_j + \\ & \sigma_0 \text{Ln}OF + \frac{1}{2} \sigma_{00} \text{Ln}OF^2 + \sum_{i=1}^n \sigma_i \text{Ln}OF \text{Ln}X_i + \sum_{i=1}^m \Phi_i \text{Ln}OF \text{Ln}P_i + \\ & \rho_0 \text{Ln}ATM + \frac{1}{2} \rho_{00} \text{Ln}ATM^2 + \sum_{i=1}^n \rho_i \text{Ln}ATM \text{Ln}X_i + \sum_{i=1}^m \pi_i \text{Ln}ATM \text{Ln}P_i + \\ & \text{Ln}OF \text{Ln}ATM + \sum_{t=1}^T d_t DT_t + v_{it} \end{aligned} \quad (4)$$

<sup>5</sup> Véase Maudos (1994) la aproximación adoptada en esta trabajo al problema de la identificación y medición del output bancario.

imponiendo las correspondientes restricciones de simetría y homogeneidad de grado uno en los precios de los *inputs*:

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \alpha_{ji}, \quad ij = 1, \dots, n; \quad \beta_{ij} = \beta_{ji}, \quad ij = 1, \dots, m; \quad \sum_{i=1}^m \beta_{ij} = 1; \\ \sum_{i=1}^m \beta_{ij} &= 0, \quad j = 1, \dots, m; \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} = 0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (5)$$

donde:

*CT* son los costes totales de producción (costes financieros más gastos de explotación).

$X_i$  son los *outputs* del vector de producción. En concreto, los *outputs* utilizados son: inversiones crediticias, depósitos y operaciones de ATM<sup>6</sup>.

$P_i$  son los precios de los *inputs* variables: trabajo (*Pw* aproximado como cociente entre los gastos de personal y el número de trabajadores), depósitos (*Pd* aproximado como cociente entre costes financieros y depósitos) y capital físico (*Pk* aproximado a través del cociente entre gastos de explotación menos gastos de personal, y valor del inmovilizado)<sup>7</sup>.

*OF* es el número de oficinas.

*ATM* es el número de cajeros automáticos.

$DT_i$  son las correspondientes dummies temporales.

Por otra parte, se ha introducido en la estimación de la función de costes un efecto fijo específico de cada entidad ( $\eta_i$ ) con objeto de captar las posibles características inobservables e invariantes en el tiempo. Asimismo, en la estimación se han introducido efectos temporales, con el objetivo de captar el progreso técnico experimentado por la función de costes.

Bajo el supuesto de que las variables explicativas estén correlacionadas con  $\eta_i$ , el estimador apropiado es el estimador intragrupos, donde  $\eta_i$  es considerado fijo e invariante en el tiempo, siendo innecesaria la realización de supuestos distribucionales sobre el efecto individual.

Dado que para el caso de la banca privada sólo está disponible la información relativa al número de ATMs para el año 1992, el estudio se centra en el caso concreto de las cajas de ahorros

<sup>6</sup> Concretamente, y por problemas de información, la variable utilizada como proxy de los servicios asociados al ATM es el número de operaciones de reintegro. La introducción de esta variable en el vector de output se justifica por la introducción del input ATM en la función de costes especificada.

<sup>7</sup> Todas las variables monetarias están referidas a 31 de diciembre de cada año. Asimismo, las variables monetarias están expresadas en pesetas constantes de 1992 utilizando como deflactor implícito del PIB.

confederadas. En concreto, la muestra utilizada en las estimaciones realizadas está compuesta por 52 entidades. Con las 52 cajas se ha formado un panel de datos para el periodo 1988-1992, dado que el año 1988 es el primero para el que se dispone de información del número de operaciones de ATM.

### Economías de alcance ATM *versus* oficinas

La función de costes translogarítmica (ecuación 4) ha sido estimada conjuntamente con las restricciones de participación. Además, se han impuesto las restricciones de homogeneidad de grado uno en precios de los *inputs*, simetría e igualdad de los parámetros de la función de costes y de las ecuaciones de participación.

Utilizando los parámetros estimados de la función de costes y los valores medios de las variables que intervienen en el cálculo de las economías de alcance, en el cuadro 6 aparecen los resultados del ahorro en costes como consecuencia de la utilización conjunta de oficinas y ATMs en la prestación de servicios de depósito. Dicho cálculo ha sido realizado para distintos valores de E (requerimiento mínimo de ATMs y oficinas) para todos los años de la muestra (1988-1992), así como para la media del conjunto del periodo.

**CUADRO 6**  
**Economías de alcance entre ATMs y Oficinas: ahorro en costes**

| Mínimo porcentaje (€) 1988 | 1989               | 1990               | 1991               | 1992               | 1988-92            |                    |
|----------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| 10 %                       | 0.0377<br>(0.1690) | 0.0397<br>(0.1639) | 0.0397<br>(0.1441) | 0.0351<br>(0.1201) | 0.0406<br>(0.1545) | 0.0385<br>(0.1509) |
| 20 %                       | 0.0377<br>(0.2139) | 0.0747<br>(0.5993) | 0.0541<br>(0.3649) | 0.0408<br>(0.1700) | 0.0531<br>(0.2591) | 0.0417<br>(0.1824) |
| 30 %                       | 0.0377<br>(0.1690) | 0.0453<br>(0.2191) | 0.0420<br>(0.1759) | 0.0351<br>(0.1201) | 0.0465<br>(0.2067) | 0.0442<br>(0.2036) |
| 50 %                       | 0.0480<br>(0.2694) | 0.0488<br>(0.2512) | 0.0458<br>(0.2133) | 0.0426<br>(0.1797) | 0.0475<br>(0.1891) | 0.0467<br>(0.2248) |

Nota: Entre paréntesis el valor del test de la Chi-cuadrado.

Como se aprecia en el cuadro 6, para los distintos valores de E y para todos los años se obtiene un valor positivo de la expresión (3) pudiéndose afirmar, por tanto, que se produce un ahorro en costes como consecuencia de la utilización conjunta de ATMs y oficinas. Los valores obtenidos muestran como, en general, se produce en torno a un 4 % de ahorro en los costes totales de producción si bien, en ningún caso, dicha reducción es estadísticamente significativa.

Especial atención merecen los resultados asociados a un valor de E de 0,5. En este caso, la expresión (3) compara los costes predichos de producción de dos entidades que utilizan un 50%

del valor medio de ATMs y OF con los costes de producción predichos de una entidad que utiliza el 100% de ATM y OF en la entrega de depósitos. Así, cuando E es 0,5 la composición de los métodos de entrega de servicios de depósito, ATMs *versus* oficinas no varía, mientras que lo única que varía es la escala.

En otras palabras, lo que se contrasta son las economías de escala asociadas a la entrega de depósitos conjuntamente con ATMs y oficinas.

En este caso, el ahorro en costes como consecuencia de un crecimiento en el número de ATMs y de oficinas sin variar su composición alcanza un valor medio para todo el periodo 1988-92 del 4,67 % si bien tampoco en este caso la reducción es estadísticamente significativa.

En resumen, lo que el análisis realizado sugiere es que la utilización conjunta de ATMs y oficinas en la captación de depósitos contribuye a la disminución de los costes de producción si bien dicha contribución no es estadísticamente significativa.

## 5. CONCLUSIONES

La rápida difusión del ATM en el SBE durante la segunda mitad de la década de los ochenta y principios de los noventa plantea el interrogante de si a ello ha contribuido el posible ahorro en costes derivado de la prestación de servicios asociados a los depósitos bancarios vía ATM *versus* oficinas.

A través de la estimación de una función de costes translogarítmica se muestra que existe un ahorro en costes como consecuencia de la prestación de servicios de depósito mediante la utilización conjunta de ATMs y oficinas, si bien dicha reducción no es estadísticamente significativa.

Sin embargo, a pesar de estos resultados poco concluyentes, la difusión del ATM ha sido muy intensa. La explicación de este resultado se encuentra en el incremento de la competencia de las empresas. Esta competencia ha desatado una intensiva instalación de ATMs, junto con una elevación de la remuneración de los depósitos como forma de aumentar/mantener la clientela<sup>8</sup>.

Después de todo, en la decisión de elegir un banco u otro por parte de los consumidores, si bien las relaciones de clientela siguen jugando un papel importante, el incremento de la cultura financiera es de esperar que haya aumentado, y aumente en el futuro, el peso de razones objetivas tales como la cercanía de oficinas y de ATMs, así como las mayores remuneraciones<sup>9</sup>.

<sup>8</sup> Una reacción parecida de las empresas se produjo en el periodo de regulación de los tipos de interés. En este caso las empresas competían mediante la apertura de oficinas. En Maudos (1992), en donde se analizan los determinantes de la intensidad de la difusión del ATM en las cajas de ahorros españolas, se constata cómo un crecimiento en la red rival de ATMs afecta positivamente a la difusión existiendo, por tanto, competencia en ATMs.

<sup>9</sup> *Ceteris paribus*, el cliente elegirá aquella entidad que le ofrezca mayores remuneraciones y le reporte menores costes de transacción. Obviamente, la instalación de ATMs incide en la reducción de estos últimos, reduciendo tanto el tiempo de espera como el transporte.

No obstante, de lo que no cabe duda es de que si bien no parece claro que las empresas se hayan beneficiado del efecto de reducción de costes de la instalación de ATMs, los consumidores/clientes y la sociedad en su conjunto sí que han captado estos beneficios transvasando los costes de transacción que supone la cercanía del ATM a las entidades financieras.

## BIBLIOGRAFIA

**Committee of Governors of the Central Banks of the Member States of the European Economic Community (1992):** "Payment Systems in EC Member States". September.

**Humphrey, D.B. (1994):** "Delivering Deposit Services: ATMs versus Branches", Federal Reserve Bank of Richmond *Economic Quarterly*, Vol. 80, pp. 59-81.

**Maudos, J. (1992):** "El Impacto del Cambio Tecnológico en el Sistema Bancario: El Cajero Automático", *Papeles de Economía Española, Cuadernos de Información Económica*, No. 60, pp. 111-121.

**Maudos, J. (1994a):** "Cambio Tecnológico, Costes y Economías de Escala en las Cajas de Ahorros Españolas", *Papeles de Economía Española*, No. 84, pp. 126-140.

**Panzar, J.C. (1989):** "Technological Determinat of Firm and Industry Structure", eb R. Schmalense y R.D. Willing (ed.): *Handbook of Industrial Organization*, Vol. I, North-Holland.

**Polo, Y. (1988):** "Desarrollo de nuevos productos. Aplicaciones a la economía española. Ed. Universidad de Zaragoza.

**Sánchez, A. (1992):** "Análisis comparativo de los sistemas de pago de los países de la Comunidad Europea", *Boletín Económico del Banco de España*, pp. 49-56, noviembre.



# ANÁLISIS DEL MECANISMO DE COMPENSACIÓN DE ERRORES EN EL PERT CLÁSICO: UNA SOLUCIÓN ALTERNATIVA

FEDERICO PALACIOS GONZÁLEZ y

ANTONIO RAMOS

Facultad de CC. EE. y Empresariales  
Universidad de Granada

## 1. INTRODUCCION

Cuando se utiliza el PERT clásico para la valoración de inversiones se propone, para cada período, una distribución Beta construida sobre la información proporcionada por el experto, a modo de valor pesimista  $a_i$ , optimista  $b_i$  y más probable  $m_i$ . Con tal información es factible, para la correspondiente distribución Beta, determinar el rango de la variable (intervalo  $(a_i; b_i)$ ), y una relación lineal entre los parámetros  $p$  y  $q$  de la distribución, que es consecuencia de imponer que la moda se sitúe exactamente sobre el punto  $m_i$ . Es fácilmente comprobable que la distribución Beta  $B(a_i; b_i; p; q)$  tiene como valor modal el punto  $m_i$  si y sólo si se verifica la relación

$$q = \frac{b_i - m_i}{m_i - a_i} p + \frac{2(m_i - c_i)}{m_i - a_i} \quad (1)$$

donde  $c_i$  representa el punto medio del intervalo  $(a_i; b_i)$ . Por otra parte, si  $R_i$  representa el radio de dicho intervalo; es decir si

$$c_i = \frac{a_i + b_i}{2} \quad R_i = \frac{b_i - a_i}{2}$$

la moda  $m_i$  de la distribución  $B(a_i; b_i; p; q)$  se puede escribir como:

$$m_i = c_i = R_i \frac{p_i - q_i}{p_i + q_i - 2} \quad (2)$$

La metodología del PERT clásico pretende compaginar los valores pesimista optimista y mas probables de todos los expertos, ante cualquier problema con los valores constantes:

$$\begin{aligned} p_t &= 3 \pm \sqrt{2} & \forall t = 1, 2, \dots, n \\ q_t &= 3 \pm \sqrt{2} & \forall t = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3)$$

Esto significa que cualquier experto, ante cualquier problema y en cualquier etapa, ha de formular su valor mas probable, con respecto al pesimista y optimista de forma que siempre se cumpla la relación:

$$m_t = c_t \pm \frac{R_t}{\sqrt{2}} \quad (4)$$

Evidentemente una hipótesis tan determinista y universal como la precedente proporciona un modelo tan rígido que difícilmente será capaz de recoger la opinión del experto sin distorsionarla (Thomas (1967), Grubs (1962) ). Sin embargo la metodología del PERT ha sido ampliamente utilizada y con resultados satisfactorios. ¿Por qué a pesar de todo se acepta dicha metodología? (Sasieni (1986) ). Podríamos hacer consideraciones para eliminar el determinismo de la hipótesis anterior y de este modo flexibilizar algo el modelo, afirmando que en realidad el experto proporciona un valor modal que oscila en forma aleatoria alrededor de los valores propuestos en (4). Bajo dicha suposición se han formulado contrastes estadísticos (Herrerías-Palacios-Pérez (1993) y Herrerías-Palacios-Pérez (1994) ) para comprobar si esta hipótesis es plausible. Se han sometido a contraste algunos ejemplos de aplicación de la metodología PERT, propuestos en manuales y recogidos de casos reales. El resultado ha sido un claro rechazo de la hipótesis nula. ¿Porqué a pesar de todas las consideraciones anteriores el método PERT es una herramienta de uso generalmente aceptado?. El objeto del esta ponencia es mostrar cómo, bajo circunstancias amplias, el método PERT puede proporcionar estimaciones aceptables de la esperanza matemática del Valor Capital de una inversión. También se aprovecha este análisis para dar una solución alternativa cuya proximidad a la realidad de cada caso creemos puede superar a la propuesta por la metodología PERT.

## 2. EL VALOR ESPERADO DE LA DISTRIBUCION $B(A_T; B_T; P; Q)$

La esperanza de una variable aleatoria con distribución Beta es (Dumas de Rauily (1968) ):

$$\mu_t = b_t \frac{p_t}{p_t + q_t} + a_t \frac{q_t}{p_t + q_t}$$

La expresión anterior nos permite escribir dicha esperanza en función  $c_t$  y de  $R_t$ :

$$\mu_t = c_t + R_t \frac{p_t - q_t}{p_t + q_t} \quad (5)$$

Si comparamos las expresiones (2) y (5) resulta evidente que:

**a .-** Cuando  $p$  y  $q$  son distintos, el valor esperado siempre está más cerca del centro que la moda. Dicho de otra forma,  $\mu_i$  siempre se encuentra entre  $c_i$  y  $m_i$

**b .-**  $m_i$  y  $\mu_i$  están a la derecha del centro cuando  $p > q$  ( $c_i < \mu_i < m_i$ )

**c .-** Ambos están a la izquierda del centro cuando  $p < q$  ( $m_i < \mu_i < c_i$ )

**d .-** Ambos coinciden con el centro cuando  $p = q$  ( $c_i = \mu_i = m_i$ )

Obsérvese que si se adoptan los valores (3) de  $p$  y  $q$  propuestos por el PERT clásico, y el experto posiciona sus valores modales  $m_i$  próximos a los centros  $c_i$  de los intervalos, puede suceder que las medias asociada a dichos valores de  $p$  y  $q$ :

$$\mu_i = c_i \pm \frac{\sqrt{2}}{3} R_i$$

estén fuera del intervalo ( Min ( $c_i$ ;  $m_i$ ); Máx ( $c_i$ ;  $m_i$ ) ). Esta situación no es posible si se impone la condición (1) y las distribuciones beta tienen sus modas coincidentes con las del experto (gráfico 1)

### 3. ¿CUANDO FUNCIONA LA METODOLOGIA PERT?

El primer objetivo de la metodología PERT aplicada a un problema de inversión es determinar los valores esperados de los flujos de caja en los distintos períodos para posteriormente obtener el Valor Capital esperado de la inversión.

El problema que se plantea para determinar tales valores esperados  $\mu_i$ , a partir de los valores pesimista optimista y más probable, dados por el correspondiente experto, para cada período, radica en el hecho de que esta información no determina todos los parámetros de la distribución  $B(a_i; b_i; p; q)$  que corresponde a la variable aleatoria  $Q_i$  “flujo de caja” en cada período, y por tanto, tampoco determina el valor esperado de tal distribución. Tan solo se conocen los valores  $a_i$  (pesimista)  $b_i$  (optimista) y una relación lineal entre los parámetros  $p$  y  $q$  que es la expresada en (1). La metodología PERT clásica propone cantidades concretas para  $p$  y  $q$  utilizando los valores mas probables del experto en cada período solamente para decidir cual de estos parámetros deberá ser el mayor. Obsérvese que cualquier forma de fijar ambas cantidades es ajena a la opinión del experto. Incluso si la relación (1) no se respeta cuando se asignan valores a  $p$  y  $q$ , se adopta una decisión que modifica dicha opinión: Se cambia el valor más probable del experto por otro más o menos próximo según los valores propuestos para  $p$  y  $q$  tal y como determina la expresión (2).

Si tenemos en cuenta la expresión (5) es claro que proponer unas cantidades concretas para  $p$  y  $q$  en cada período de la inversión equivale, entre otras cosas, a fijar los valores esperados de los correspondientes flujos de caja y la esperanza del valor capital de la inversión. Recuérdese que las cantidades  $p$  y  $q$  se fijan (según (3)), para todos los períodos, todos los expertos y todos los problemas en los que se emplea la metodología del PERT clásico, dejando como única holgura si  $p > q$  o viceversa en función de la posición del valor más probable respecto del centro del intervalo en cada período. Sin embargo su utilidad tiene validez empírica, constatada en su empleo generalizado. ¿Cual es la explicación de esta validez en gran parte de los casos en los que se utiliza?

La respuesta puede ser la siguiente: Es conocida la tendencia del experto a situar su valor más probable alejado del optimista y del pesimista. Es decir, con bastante frecuencia dichos valores más probables están relativamente cercanos a los centros de sus respectivos intervalos (definidos por los valores pesimista y optimista en cada período). Según se ha visto anteriormente los valores esperados de los flujos de caja siempre son interiores a los intervalos definidos por  $m_i$  y  $c_i$ . Cualquiera que sea la cantidad  $p > 1$  que se proponga ( $q$  se obtiene en función de  $p$  mediante la relación (2)), el valor esperado variará desde un punto tan cercano como se quiera a  $c_i$ , hasta otro tan cercano como se quiera al valor más probable  $m_i$  propuesto por el experto. Si ambos extremos están cercanos las posibilidades de variación están muy restringidas. Por otra parte el experto tiende usualmente a colocar el valor mas probable, unas veces por encima del centro del intervalo y otras por debajo, siendo poco usual que todos ellos sean superiores o todos inferiores a los respectivos centros. Como puede verse en el gráfico 1, en estas circunstancias los valores esperados que propone el PERT clásico están sobredimensionados, cuando la moda es superior al centro del intervalo, y están infravalorados en caso contrario; con tal fortuna que los errores positivos y negativos tienden a compensarse dando lugar a una suma (esperanza del valor capital) bastante próxima a la realidad. Si el experto, por el contrario, sitúa su valor más probable por encima del centro en todos los períodos siempre se produce un error positivo, el fenómeno de compensación de errores positivos y negativos no existe, y el valor capital esperado que proporciona el método PERT puede ser bastante superior al real (gráfico 2). En este caso, el método PERT funciona sólo cuando el experto sitúa cada  $m_i$  de forma que casi se cumpla la relación (4).

Análogamente se puede razonar si todos los valores mas probables se sitúan por debajo de los centros de sus respectivos intervalos. En este caso el valor capital esperado dado por el PERT puede ser bastante más pequeño que el real.

El fenómeno de compensación de errores puede desequilibrarse en las aplicaciones del PERT a problemas de inversión ya que existe una tasa de descuento que puede provocar en las períodos últimos un aminoramiento de los respectivos errores. De este modo en problemas de inversión en los que el experto proporcione valores  $m_i$  superiores a  $c_i$  en los períodos primeros e inferiores a  $c_i$  en los últimos períodos, debido al superior descuento producido en los último períodos con respecto a los primeros, puede existir una compensación con la estricta suma de los flujos de caja que se descompensa al aplicar el descuento dando lugar a un efecto de sobrevaloración del valor capital esperado. Efecto que será más acusado cuanto mayor sea la tasa de descuento y sobre todo cuanto mayor sea el número de períodos. Esto explicaría porqué las fallos más notorios de la metodología PERT se han detectado en problemas de inversión más que en problemas de evaluación de la duración de proyectos.

### 3.1 Justificación analítica

Las ideas anteriormente expuestas quedan reflejadas en la expresión (12) que muestra un intervalo donde se encontrará forzosamente la diferencia entre el valor capital esperado de la inversión cualesquiera que sean los valores reales de los parámetros de las “Betas” y el valor capital esperado que propone la metodología PERT.

Para la obtención de dicha expresión (12), definiremos los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned} N &= \{t / t = 1, 2, 3, \dots, n\} \\ I &= \{t \in N / p_t > q_t\} = \{t \in N / m_t > c_t\} \\ J &= \{t \in N / p_t < q_t\} = \{t \in N / m_t < c_t\} \\ L &= \{t \in N / p_t = q_t\} = \{t \in N / m_t = c_t\} \end{aligned}$$

los valores esperados de los flujos de caja en los distintos períodos, en virtud de (5) son:

$$\mu_t = \begin{cases} c_t + \frac{p_t - q_t}{p_t + q_t} R_t & \text{sit} \in I \\ c_t - \frac{q_t - p_t}{p_t + q_t} R_t & \text{sit} \in J \\ c_t & \text{sit} \in L \end{cases}$$

Dada una tasa de descuento “r” el valor capital esperado de la inversión puede escribirse:

$$E[VC] = \sum_{t=1}^n \frac{c_t}{(1+r)^t} + \sum_{t \in I} \frac{p_t - q_t}{p_t + q_t} \frac{R_t}{(1+r)^t} - \sum_{t \in J} \frac{q_t - p_t}{p_t + q_t} \frac{R_t}{(1+r)^t} \quad (9)$$

si llamamos

$$CN = \sum_{t=1}^n \frac{c_t}{(1+r)^t}$$

y tenemos en cuenta que todos los miembros de la combinación lineal del término derecho en (9) son positivos (sin considerar si suman o restan), resulta evidente que

$$CN - \sum_{t \in J} \frac{q_t - p_t}{p_t + q_t} \frac{R_t}{(1+r)^t} < E[VC] < CN + \sum_{t \in I} \frac{p_t - q_t}{p_t + q_t} \frac{R_t}{(1+r)^t}$$

Si además tenemos en cuenta (2) es evidente que

$$\frac{|m_t - c_t|}{R_t} = \frac{|p_t - q_t|}{p_t + q_t - 2} > \frac{|p_t - q_t|}{p_t + q_t} \quad (10)$$

cumpléndose, (bajo la condición (1) ) que:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{|p_t - q_t|}{p_t + q_t} = \frac{|m_t - c_t|}{R_t}$$

De (10) se deduce trivialmente que

$$\begin{aligned} \frac{|m_t - c_t|}{R_t} &> \frac{p_t - q_t}{p_t + q_t} \quad \text{si } t \in I \\ \frac{|m_t - c_t|}{R_t} &> \frac{q_t - p_t}{p_t + q_t} \quad \text{si } t \in J \end{aligned}$$

y como consecuencia inmediata

$$CN - \sum_{t \in I} \frac{|m_t - c_t|}{(1+r)^t} < E[VC] < CN + \sum_{t \in J} \frac{|m_t - c_t|}{(1+r)^t} \quad (11)$$

Por otra parte, para los valores (3) del PERT clásico se verifica

$$\begin{aligned} \frac{p_t - q_t}{p_t + q_t} &= \frac{\sqrt{2}}{3} \quad \forall t \in I \\ \frac{q_t - p_t}{p_t + q_t} &= \frac{\sqrt{2}}{3} \quad \forall t \in J \end{aligned}$$

y si llamamos

$$PR = \frac{\sqrt{2}}{3} \left\{ \sum_{t \in I} \frac{R_t}{(1+r)^t} - \sum_{t \in J} \frac{R_t}{(1+r)^t} \right\}$$

La esperanza matemática del valor capital que proporciona la metodología PERT se puede expresar da la siguiente forma:

$$E[VC_{PERT}] = CN - PR$$

y si tenemos en cuenta (11) podemos escribir

$$PR - \sum_{i=1}^n \frac{|m_i - c_i|}{(1+r)^i} < E[VC] - E[VC_{PERT}] < PR = \sum_{i=1}^n \frac{|m_i - c_i|}{(1+r)^i} \quad (12)$$

Si este intervalo (12) tiene límites que son pequeños en comparación con CN el PERT proporciona un valor correcto. Y para que esto suceda basta que se produzca el fenómeno de compensación del que hablábamos anteriormente que se traduce en el hecho de que PR es una cantidad pequeña. Además deberán ser pequeñas las distancias de las modas a los centros del intervalo ( $|m_i - c_i|$ ), en relación a la altura de los mismos sobre el eje de abscisas. Si analizado el comportamiento más habitual de los expertos en su práctica diaria observásemos que los dos factores se producen casi de forma sistemática tendríamos una explicación del buen hacer de la Metodología PERT. Cuando menos, los límites del intervalo (12), (para cuyo cálculo se utiliza exclusivamente la información proporcionada por el experto) pueden anticipar, si el funcionamiento de la metodología PERT está garantizado. Estamos suponiendo que el experto proporciona una información correcta, que el PERT modeliza de forma incorrecta, pero que sin embargo suele proporcionar resultados aceptables.

#### 4. UNA SOLUCION ALTERNATIVA

La alternativa posible queda claramente definida en mediante la expresión (11). Sabemos el rango de variación que puede tener la esperanza del valor capital de la inversión cualesquiera que sean los valores  $p_i$  y  $q_i$ . El centro de dicho intervalo (11) podría ser el valor que más posibilidad tiene de estar próximo al la esperanza del valor capital “real y desconocida”. El radio de dicho intervalo es una cota del error cometido.

De este modo tendríamos:

$$[VC] = CN + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{|m_i - c_i|}{(1+r)^i} - \sum_{i=1}^n \frac{|m_i - c_i|}{(1+r)^i} \right\}$$

$$| [VC] - E[VC] | < \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{|m_i - c_i|}{(1+r)^i} + \sum_{i=1}^n \frac{|m_i - c_i|}{(1+r)^i} \right\} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{|m_i - c_i|}{(1+r)^i}$$

Si el experto sitúa sus modas relativamente cercanas de los centros de sus respectivos intervalos, la solución que planteamos será válida. Por el contrario, la aproximación del valor capital esperado que proporciona el PERT, en estas circunstancias, y en virtud de (12) fracasa estrepitosamente si  $|PR|$  tiene un valor elevado. Este efecto se produce cuando el conjunto  $J$  (o alternativamente el  $I$ ) es vacío o casi vacío. Es decir cuando el experto sitúa todos o casi todos sus valores modales  $m_i$  por encima de su respectivos centros  $c_i$  (a alternativamente por debajo)

## BIBLIOGRAFIA

DUMAS DE RAULY, D (1968) .- L'Estimation Statistique.- Ed. Gauthier-Villars.

GRUBS, F. E. (1962) .- Attempts to validate certain PERT statistics or "picking on PERT".- Opns. Res. 10, pp 912 - 915.

HERRERÍAS - PALACIOS - PÉREZ (1993).- una medida sobre la adecuación de las estimaciones subjetivas con el modelo PERT clásico.- Estudios de Economía Aplicada Vol I pp. 419 - 425.- Ed. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz.

HERRERÍAS - PALACIOS - PÉREZ (1994) .- Dos tests estadísticos para el valor más probable del PERT PERT clásico.- Estudios de Economía Aplicada Vol I pp. 153 - 159.- Ed. Departament d'Economia l'empresa Universitat de les illes Balears.

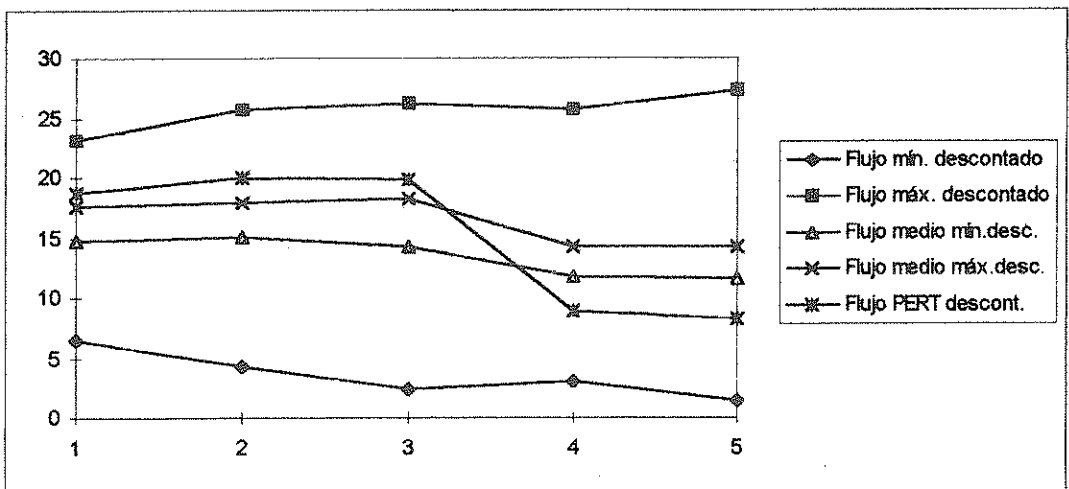
SASIENI, M.W. (1986).- A Note on PRT Times.- Management Sci. 32, pp. 1652-1653

THOMAS, G. (1967).- Introduction de l'aleatorire dans les problemes d'ordonnement. Méthode de simulation.- Les Méthodes de simulation. Monographies de Recherche Operationnelle, n° 7. Ed. Dunod pp 107 - 124.



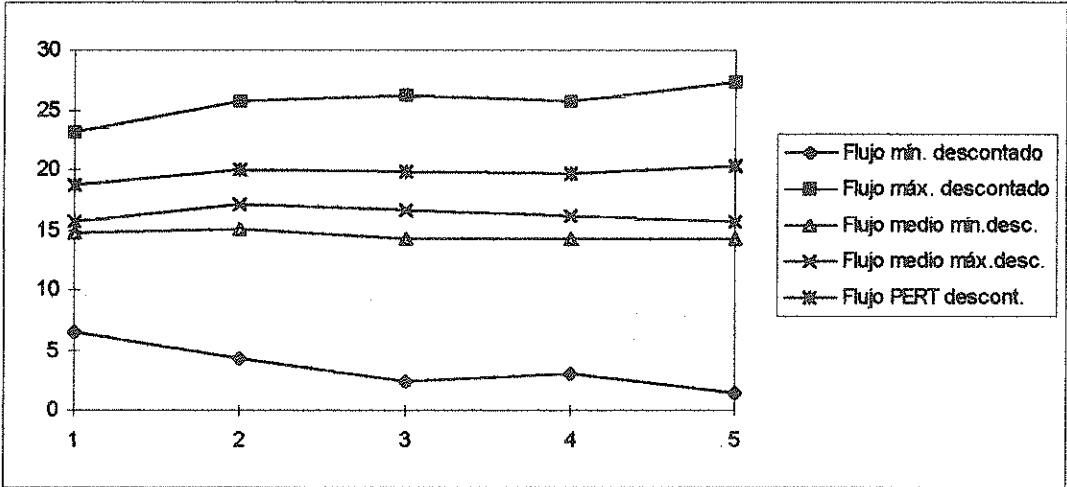
| Datos del proyecto de inversión: |             |       |             |       |       | p=    | 2                 |
|----------------------------------|-------------|-------|-------------|-------|-------|-------|-------------------|
|                                  |             |       |             |       |       | r=    | 0,08              |
| Período                          | 1           | 2     | 3           | 4     | 5     |       |                   |
| Est. pesimista                   | 7           | 5     | 3           | 4     | 2     |       |                   |
| Est. optimista                   | 25          | 30    | 33          | 35    | 40    |       |                   |
| Est. más probable                | 19          | 21    | 23          | 16    | 17    |       |                   |
| Centro                           | 16          | 17,5  | 18          | 19,5  | 21    |       |                   |
| Radio                            | 9           | 12,5  | 15          | 15,5  | 19    |       |                   |
| moda PERT                        | 22,36       | 26,34 | 28,61       | 8,54  | 7,565 |       |                   |
| Flujo mín. descontado            | 6,481       | 4,287 | 2,381       | 2,94  | 1,361 | 17,45 | VC. MIN.          |
| Flujo máx. descontado            | 23,15       | 25,72 | 26,2        | 25,73 | 27,22 | 128   | VC. MAX.          |
| Flujo medio mín. descontado      | 14,81       | 15    | 14,29       | 11,76 | 11,57 | 67,44 | E[VC]MIN.         |
| Flujo medio máx. desc.           | 17,59       | 18    | 18,26       | 14,33 | 14,29 | 82,48 | E[VC]MAX.         |
| Flujo PERT descont.              | 18,74       | 20,06 | 19,9        | 8,962 | 8,196 | 75,86 | E[VC]PERT.        |
| Flujo centro descont.            | 14,81       | 15    | 14,29       | 14,33 | 14,29 | 72,73 | CN                |
|                                  | Lim. infer. |       | Lim. super. |       |       | 74,96 | E[VC] Sol. altern |
| Error PERT                       |             | -8,42 |             | 6,621 |       |       |                   |
| Error soluc. alternativa         |             | -7,52 |             | 7,521 |       |       |                   |

Gráfico 1



| Datos del proyecto de inversión: |        |       |        |       |        | p=     | 2,00              |
|----------------------------------|--------|-------|--------|-------|--------|--------|-------------------|
|                                  |        |       |        |       |        | r=     | 0,08              |
| Período                          | 1      | 2     | 3      | 4     | 5      |        |                   |
| Est. pesimista                   | 7,00   | 5,00  | 3,00   | 4,00  | 2,00   |        |                   |
| Est. optimista                   | 25,00  | 30,00 | 33,00  | 35,00 | 40,00  |        |                   |
| Est. más probable                | 17,00  | 20,00 | 21,00  | 22,00 | 23,00  |        |                   |
| Centro                           | 16,00  | 17,50 | 18,00  | 19,50 | 21,00  |        |                   |
| Radio                            | 9,00   | 12,50 | 15,00  | 15,50 | 19,00  |        |                   |
| moda PERT                        | 22,36  | 26,34 | 28,61  | 30,46 | 34,44  |        |                   |
| Flujo min. descontado            | 6,48   | 4,29  | 2,38   | 2,94  | 1,36   | 17,45  | VC. MIN.          |
| Flujo máx. descontado            | 23,15  | 25,72 | 26,20  | 25,73 | 27,22  | 128,01 | VC. MAX.          |
| Flujo medio mín. descontado      | 14,81  | 15,00 | 14,29  | 14,33 | 14,29  | 72,73  | E[VC]MIN.         |
| Flujo medio máx. desc.           | 15,74  | 17,15 | 16,67  | 16,17 | 15,65  | 81,38  | E[VC]MAX.         |
| Flujo PERT descont.              | 18,74  | 20,06 | 19,90  | 19,70 | 20,396 | 98,79  | E[VC]PERT.        |
| Flujo centro descont.            | 14,81  | 15,00 | 14,29  | 14,33 | 14,29  | 72,73  | CN                |
|                                  | Infer. |       | super. |       |        | 77,06  | E[VC] Sol. altern |
| Error PERT                       | -26,06 |       | -17,41 |       |        |        |                   |
| Error soluc. alternativa         | -4,32  |       | 4,32   |       |        |        |                   |

Gráfico 2



# **ESPECULACION Y ASIGNACION DE RECURSOS : UNA PERSPECTIVA DESDE LA OPTICA DE LOS MERCADOS DE FUTUROS**

MARIA LUISA PALMA MARTOS y

LUIS PALMA MARTOS

Dpto. Teoría Económica y Economía Política.

Universidad de Sevilla

## **INTRODUCCION**

La especulación como actividad existente en la diversa tipología de mercados ha suscitado un amplio interés tanto en la literatura económica como también en aquellos agentes comprometidos en los mercados y que han podido vivir de cerca los efectos de la misma. Entre aquellos que han analizado los efectos de la especulación en los mercados existen dos enfoques contrapuestos. El primero de ellos, conocido como perspectiva clásica de la especulación, la consideran una actividad beneficiosa para el conjunto de la economía, en la medida que mejora la asignación de ofertas a lo largo del tiempo y reduce las fluctuaciones de precios. Este enfoque no es aceptado por los críticos de la especulación, que la contemplan como una actividad próxima a los juegos de casino y claramente desestabilizadora de precios, con las consecuencias negativas sobre la asignación de recursos.

Estas dos teorías sobre especulación son perfectamente trasladables al ámbito de los mercados de futuros, mercados que han sido frecuentemente calificados como altamente especulativos.

Antes de adentrarnos en las teorías existentes sobre la especulación en los mercados de futuros, sería conveniente definir que se entiende por especulación en un sentido amplio del término, cuáles son las razones fundamentales que hay detrás de un comportamiento especulativo y qué características de los mercados de futuros los hacen proclives a una alta actividad especulativa.

## **2. CONCEPTO DE ESPECULACION.**

La especulación ha sido definida de muy diversas maneras por numerosos autores sin haberse conseguido un consenso en torno al concepto. Podemos definirla como "La compra (o venta) de bienes con vistas a revenderlos (o recomprarlos) más tarde en lugar de hacer empleo de los mismos, y esto con la esperanza de una evolución favorable en los precios"(Newberry, 1986, pág.1). En definitiva , esta definición está en la línea de la perspectiva de autores clásicos como A. Smith que contemplan al especulador comprando cuando la mercancía es abundante (y por consiguiente barata) y vendiendo en épocas de escasez (cuando su precio es más alto).

En conclusión, siguiendo a Gregoir y Salanie (1991,p.210), podemos decir que todo acto económico que tome en consideración la posibilidad de ganancias o pérdidas de capital comporta un aspecto especulativo.

Otra definición de especulación es aportada por Keynes (1930) y Hicks (1838). Estos autores contemplan la especulación como un proceso de transferencia del riesgo de precio, desde traders con posiciones más arriesgadas hacia aquellos con posiciones menos arriesgadas, a cambio de una prima de riesgo. Contemplan la especulación como un sustituto de mercados de seguros ausentes. Esta definición será adoptada por diversos autores que estudian la especulación en futuros como actividad claramente beneficiosa para el conjunto de la economía.

En principio, cualquier mercancía duradera puede estar sometida a compras especulativas, pero las principales condiciones en circunstancias normales para que una mercancía sea objeto de especulación son: La existencia de un mercado perfecto y bajos costes de mantenimiento. Estas dos condiciones presuponen una serie de atributos que sólo un número limitado de mercancías posee simultáneamente: 1) La mercancía debe ser estandarizada, 2) Ser un artículo de demanda general,3) duradero, 4) de gran valor en proporción al volumen. Las dos primeras son indispensables para que el mercado sea perfecto, las dos siguientes aseguran bajos costes de mantenimiento. Si los costes de mantenimiento son altos o la mercancía es ilíquida, la especulación en ese bien será poco atractiva. La liquidez en ese contexto significa que exista un mercado perfecto o próximo a ser perfecto, mercado en el que la mercancía puede ser vendida inmediatamente a un precio bien definido y este requerimiento limita seriamente el rango de activos disponibles para la especulación a gran escala. Hay fundamentalmente dos tipos de activos - mercancías o productos financieros negociados en bolsas de futuros organizadas y activos financieros (bonos, acciones, etc) cuyas propiedades les permiten ser productos muy favorables para la especulación (Kaldor, pág.113).

Entre las razones para adoptar un comportamiento especulativo son destacables dos fundamentalmente: La oportunidad de obtener beneficios y en segundo término el disfrute asociado a la realización de la actividad. Muchas personas disfrutan asumiendo riesgos, y especular es arriesgarse, según las anteriores definiciones. La excitación de asumir un riesgo razonable con la esperanza de obtener grandes beneficios puede ser un gran atractivo. Esta combinación de motivos ha llevado a algunos autores a plantearse si la especulación puede asemejarse a un juego de casino. Es en este sentido donde existen profundas controversias entre los contrarios a la especulación, que la consideran un juego, y los que están a favor de la misma por las razones que expondremos más adelante.

Autores como Fink y Feduniak (1988, págs. 72-73) establecen una clara distinción entre el juego y la especulación. Para ellos, en el juego la creación del riesgo se hace por sí misma y generalmente se asume con el propósito de obtener placer. Mientras la especulación, como actividad beneficiosa, produce una reasignación de riesgos ya existentes. En la especulación, como hemos visto en la definición de Keynes y Hicks, los riesgos se reasignan desde aquellos que no los desean o no pueden soportarlos hacia aquellos que los desean porque esperan beneficiarse de los mismos. En definitiva, la especulación, y en concreto la especulación en el mercado de futuros, dirige la asunción de riesgos hacia un canal económicamente productivo.

Hemos expuesto anteriormente que los mercados de futuros son considerados como altamente especulativos. Cabría plantearse qué hace a estos mercados tan atractivos para la especulación. En primer lugar, podemos argumentar que es el alto nivel de apalancamiento financiero lo que le ofrece la oportunidad de obtener beneficios que serán inusuales en otra tipología de mercados; la facilidad para introducirse en la negociación, ya que sólo es necesario ponerse en contacto con una firma de intermediación, cuyas sucursales pueden repartirse por todo el país; el tipo de producto ofrecido, que al ser estandarizado, favorece la posible compensación o liquidación de posiciones y ofrece por tanto la oportunidad de participación a empresas o particulares sin compromisos claros en el mercado al contado; son mercados estimulantes, en la medida que existen pocas circunstancias que escapen a la realidad económica que no afecten al comportamiento de los precios futuros, etc.

Una vez expuesto el contenido de un comportamiento especulativo, podemos plantearnos varias preguntas acerca del papel que desempeñan los especuladores en el mercado de futuros, especialmente en su contribución a la función de descubrimiento de precios característica de estos mercados. ¿Tiende la presencia de especuladores en el mercado de futuros a desestabilizar tanto el mercado al contado como el mercado de futuros sobre una mercancía o producto financiero?; ¿Mejoran la eficiencia asignativa entendida en un sentido amplio?. Las respuestas a estos interrogantes han dado lugar al desarrollo de dos posturas enfrentadas acerca del comportamiento especulador que expondremos a continuación.

### **3. EL ENFOQUE TEORICO O LA PERSPECTIVA CLASICA: LA ESPECULACION COMO FACTOR ESTABILIZADOR DE PRECIOS**

La mayoría de los estudios que podemos englobar dentro de este enfoque, parten de las aportaciones que sobre especulación han efectuado autores como Smith, Stuart Mill, Marshall, Keynes, etc., que se han interesado fundamentalmente por el efecto de la especulación sobre la variabilidad de precios y por tanto, si su influencia es estabilizadora o desestabilizadora.

Stuart Mill considera (Goss y Yamey, 1978, p. 30) que los especuladores al comprar mercancías cuando son más baratas, y almacenarlas para introducir las en el mercado cuando los precios han llegado a ser inusualmente altos, tienden a igualar los precios o al menos a moderar sus desigualdades. Los precios no estarían tan deprimidos o tan elevados, como lo estarían sin la presencia de especuladores.

Marshall se apoya en dos elementos fundamentales para hablar de “especulación constructiva”(Goss y Yamey, p. 31): El primero es el interés de los especuladores en informar al mercado de las condiciones de oferta y demanda y de sus expectativas, ya que las decisiones erróneas le conducirán a pérdidas; por lo tanto es de suprapropio interés contribuir a que el público esté bien informado. El segundo elemento es que los especuladores ineficientes tienden a realizar previsiones erróneas, pierden dinero y son eliminados del mercado, mientras los especuladores eficientes son capaces de comprometerse en una negociación creciente. Estas teorías desarrolladas antes de

que los mercados de futuros ganaran en auge, son en las que se apoyan posteriormente algunos teóricos del mercado de futuros, que analizan la especulación y su papel estabilizador de precios.

Antes de adentrarnos en la incidencia de la especulación sobre la variabilidad de precios, convendría exponer los beneficios genéricos que la especulación proporciona en futuros.

En este enfoque se pondera el alto valor social que confieren los especuladores en el mercado de futuros al dotarlos de una alta eficiencia asignativa en dos sentidos:

a) Contribuyen a una eficiente asignación de riesgos, al actuar dando contrapartida a los hedgers y asumiendo los riesgos procedentes de los mismos; aseguran con su presencia el cumplimiento de la función de traslación de riesgos por parte de los mercados de futuros. Sin la presencia de especuladores que absorban el exceso de oferta de los contratos de futuros, que los productores deben vender para cubrirse de sus compromisos en el mercado al contado, algunos de los beneficios de la cobertura se desvanecerían, ya que esta posibilita una reducción de incertidumbre que permite a las empresas planear su producción de forma más eficiente, al mismo tiempo que operar a gran escala, acciones que benefician al conjunto de la economía.

b) Mejoran la eficiencia en la asignación de recursos. En la medida en que los especuladores buscan y explotan la información existente, ayudan a asegurar que los precios reflejen las realidades del mercado, función de descubrimiento de precios. La negociación competitiva establecida en el seno de una bolsa de futuros permite el establecimiento de muchos precios de futuros diferentes para la misma mercancía o producto financiero, en diferentes momentos del tiempo. Todos estos precios intentan reflejar las condiciones de oferta y demanda en el presente y en diversos momentos futuros. En definitiva, los precios futuros reflejan las expectativas actuales de las condiciones de oferta y demanda futuras. De este modo los precios “descubren” los precios al contado esperados en el futuro. En la medida que estos precios sean buenos predictores de la evolución de los precios al contado, pueden contribuir a adoptar decisiones acertadas sobre producción y consumo con incidencia favorable sobre la asignación de recursos.

Edwards (1992, pág. 409) considera dos efectos beneficiosos que la especulación puede proporcionar para el cumplimiento de la función de descubrimiento de precios:

1) reducir la aversión al riesgo agregada, ya que el incremento de la especulación puede propiciar una mayor respuesta de los hedgers a las señales de precios y por tanto mejorar el comportamiento de los mismos.

2) la respuesta especulativa puede traer nueva información adicional al mercado, al mejorar el contenido informativo de los precios. Los especuladores valoran cualquier nueva información que sea descubierta y reaccionan rápidamente tomando posiciones. De este modo la especulación puede ser vista como un proceso que reúne y canaliza la información hacia un punto central, el precio; y en la medida que estos precios son visibles tanto para participantes como para no participantes en este mercado, los precios futuros determinados especulativamente constituyen un “bien público”.

Sin embargo, Edwards apunta la posibilidad de que los especuladores puedan introducir “información errónea” dentro del mercado, causando distorsiones de precios, con lo cual enlazaríamos con el papel perjudicial que la presencia de especuladores puede desempeñar en estos mercados, defendido por los críticos de la especulación.

En 1953, Milton Friedman continua con el argumento clásico de que los especuladores racionales no pueden sino tener una influencia estabilizadora, puesto que compran antes de una subida de las cotizaciones, y venden antes de una bajada de las mismas. Este razonamiento es válido si se cumplen dos hipótesis: el supuesto de competencia perfecta y la ausencia de incertidumbre sobre las cotizaciones futuras. Numerosos artículos<sup>1</sup> han adoptado estas hipótesis y proporcionado un soporte teórico para la perspectiva de la especulación estabilizadora de precios. Puede destacarse el trabajo de Danthine (1978) que llega a la conclusión de que la especulación reduce la varianza de los precios (interpretando la varianza como medida de fluctuación de precios) y por tanto contribuye a una mayor estabilidad. Este modelo se apoya en la consideración de que los especuladores en estos mercados están estrictamente mejor informados que los productores de mercancías, ya que sólo los traders bien informados obtienen beneficios en los mercados de futuros. En el modelo de Danthine se considera que los especuladores obtendrán beneficios derivados de la asunción de riesgos, a través de una prima de riesgo. Este modelo muestra como los precios futuros al reunir la información y expectativas de los participantes en el mercado, actúan como transmisor de información a todos los agentes económicos y en particular a los productores no informados, quienes basan su decisión de oferta sobre el precio futuro. En este modelo no considera necesario que los productores operen en futuros, sino simplemente que usen los futuros en sus decisiones de producción. Los artículos que han intentado probar el papel estabilizador de la especulación excluyen dos importantes supuestos: un comportamiento irracional por parte de los especuladores y la posibilidad de manipulación del mercado. Otros trabajos como los de Turnosvsky (1978,1983) y Turnovsky y Campbell (1985) argumentan que en un modelo de expectativas racionales, los mercados de futuro siempre mejoran la estabilidad del mercado al contado.

Frente a este enfoque se encuentran los críticos de la especulación en futuros, que la contemplan como desestabilizadora de precios en la medida que provoca fluctuaciones que se consideran tanto innecesarias como indeseables.

<sup>1</sup> Existen diversos estudios teóricos que mantienen la hipótesis de estabilización :

Cox, J. C. (1976) “Futures Trading and Market Information”, *Journal of Political Economy*, 84, 1215-1237.

Kawai, M. (1983). “Price Volatility of Storable Commodities under Rational Expectations in Spot and Futures Markets” *International Economic Review*, 24, Págs. 435-459.

Turnovsky, S (1979) Futures Markets, Private storage and price stabilization” *Journal of Public Economy*, 12, Págs.301-327.

Turnovsky, S. (1983) “The Determination of Spot and Futures Prices With Storable Commodities”, *Econometría*, 51, págs. 1362-1387.

Peck, A. (1976) “Futures Markets, Supply Response, and Price Stability”, *Quarterly Journal of Economics*, 90. Págs.407-423.\*

Danthine, J. P. (1978) “ Information, Futures Prices and Stabilizing Speculation”, *Journal of Economic Theory*, 17, Págs. 79-98.

## 4. LA ESPECULACION COMO FACTOR DETERMINANTE DE LA DESESTABILIZACION DE PRECIOS

Durante años los economistas han debatido los méritos del comportamiento especulativo. En el apartado anterior hemos tenido ocasión de exponer un lado del debate. Fue fundamentalmente Milton Friedman (1953, pág.175) quien fijó el tono del debate al afirmar que los que defienden la creencia en la especulación como generalmente desestabilizadora no se dan cuenta que es equivalente a decir que los especuladores pierden dinero, ya que la especulación puede ser desestabilizadora en general si los especuladores venden sobre la media cuando los precios son bajos y compran cuando están altos, lo cual es lo mismo que argumentar que sólo cuando los especuladores son irracionales podrían desestabilizar precios, debido a que los especuladores racionales lo que hacen es asegurar una influencia estabilizadora.

Esta afirmación de Friedman ha dado lugar a una gran cantidad de trabajos que han intentado contradecirla. Los críticos del enfoque especulativo estabilizador argumentan que la especulación puede distorsionar los precios al introducir “información errónea” dentro del mercado. Si esto ocurre, los mercados de futuros en vez de cumplir la función de descubrimiento de precios, pueden resultar en falsas señales de precios y por tanto en una mala asignación de recursos. Una perspectiva de porqué la especulación puede distorsionar los precios se basa en el comportamiento irracional por parte de los especuladores al comprar y vender a futuros sin poseer información. Esta perspectiva corrobora la proposición de Friedman.

En tales casos los especuladores son denominados “traders ruidosos”, como opuestos a los traders informados. En el caso de que los traders irracionales tengan una mayor presencia en el mercado que los traders informados, la mayor influencia de los traders ruidosos causará las distorsiones de precios.

El trabajo de Hart y Kreps (1986) pretende demostrar que incluso con la existencia de mercados próximos a la competencia y con especuladores y no especuladores racionales puede la especulación desestabilizar precios. Este trabajo adolece de un defecto existente en la literatura sobre desestabilización al no identificar la estabilidad de precios con una medida del bienestar. En la misma línea está el trabajo realizado por Stein (1987) en el que pretende subsanar el defecto del modelo de Kreps relacionado estabilidad de precios con incremento de bienestar. Este artículo se centra en dos aspectos del comportamiento especulativo, traslación de riesgos y transmisión de información. Los beneficios de la especulación en la traslación de riesgos son ampliamente reconocidos. Si todo permanece igual, la introducción de nuevos agentes dentro de un sistema reduce la aversión al riesgo agregada y por lo tanto incide en las fuerzas del arbitraje que permite la estabilidad de precios. Pone como ejemplo, como la apertura de un mercado de futuros permite a los agentes aversos al riesgo y a los mantenedores de inventarios cubrir su producción y las decisiones de almacenamiento. Esta cobertura les capacita para responder más fuertemente a señales de precios y por tanto a reducir la variabilidad de los mismos. Intenta demostrar que la introducción de especuladores en un mercado para una mercancía determinada puede llegar a alterar el contenido informativo de los precios. Esto da lugar a una externalidad negativa para aquellos traders que están instalados en el mercado, en la medida que su capacidad para hacer inferencias sobre los precios futuros y al contado se verá afectada.



El modelo no descansa en un comportamiento irracional por parte de los especuladores, aunque considera la existencia de imperfecciones en la información y el aporte en ocasiones de información errónea al mercado con las consecuencias negativas que estas imperfecciones pueden propiciar en la formación de precios futuros.

La mayor parte de los estudios que han tratado de sostener la hipótesis desestabilizadora se han basado para llegar a sus conclusiones en el análisis de diferentes mercados de productos, contrastando el comportamiento del mercado al contado antes de la introducción del mercado de futuros y posteriormente. O en esta línea es también el estudio realizado por Newberry (1987) que ha demostrado como la apertura de un mercado de futuros (tomando como ejemplo una mercancía no almacenable) puede estimular a los productores de la misma a producir con técnicas más arriesgadas ante la posibilidad ofrecida por los especuladores, partícipes en ese mercado, de un seguro de precio que reduzca los riesgos asociados a sus actividades. Esto incrementará la variabilidad del producto ofrecido y como no hay almacenamiento, la variabilidad del producto creciente, aumentará la variabilidad del precio al contado. Frecuentemente estas actividades arriesgadas tienden a reducir la inestabilidad de precios- en el caso de existencia de almacenamiento -pero si esa actividad arriesgada aumenta el riesgo de precio, entonces los especuladores tienden a aumentar la inestabilidad de precios, medida por un aumento de la varianza de precios.

En cuanto a estudios más recientes que apoyan este enfoque desestabilizador podemos citar el trabajo de Gregoir y Salanie, en su artículo "Speculation, prix et bien-etre ", anteriormente citado, en el que toma como referencia los trabajos enunciados con anterioridad y estudia la evolución de los precios y sus consecuencias sobre el bienestar cuando se establece un mercado de futuros, llegando a la conclusión de la tendencia desestabilizadora de precios de la especulación y por tanto su reducción en el bienestar total.

En ambos enfoques sobre especulación se pretende analizar el papel que la especulación realiza en la función de descubrimiento de precios del mercado de futuros, es decir como los especuladores favorecen o dificultan el que los precios reflejen las condiciones del mercado, de manera que los precios futuros sean buenos predictores de los precios al contado esperados en el futuro y sirvan para la toma de decisiones de producción y consumo futuras. En definitiva, si su presencia viene a reforzar el contenido informativo de los precios o a distorsionarlo con los efectos sobre la eficiencia asignativa.

Otro tema que es objeto de estudio al analizar la influencia de la especulación sobre la estabilidad de los precios es la posibilidad que ofrece el mercado de futuros para realizar manipulaciones en el mismo y llegar a efectuar un control monopolístico a través de corners o squeezes, o bien por parte de traders informados a expensas de los menos informados, o bien de los grandes traders a expensas de los pequeños<sup>2</sup>. Una manipulación intencionada en un mercado puede resultar en una excesiva fluctuación de precios o bien en un comportamiento distorsionador de precios que al no reflejar las condiciones de oferta y demanda conducen a una mala asignación de recursos.

<sup>2</sup> Para una mayor información sobre los efectos de la manipulación en los mercados de futuros véase los estudios teóricos : Kyle, A. S. (1984) "A Theory of Futures Markets Manipulation", Cap. 5 en Anderson, R. W. (1984) *The Industrial Organization of Futures Markets*, Lexington: Mass.

Newberry, D. (1984) "The Manipulation Of Futures MARKets by a Dominant Producer" en Anderson, R.W.op. cit. Cap.2.

Las manipulaciones periódicas incrementarán la varianza de la distribución de los precios futuros, haciendo a los precios futuros comportarse como predictores menos fiables de los precios al contado futuros. Otras consecuencias negativas de la manipulación serán: una redistribución de riqueza hacia aquellos que ostentan el poder de mercado, desalentando la participación, y reduciendo el volumen de negociación; esto a su vez contribuye a una reducción de liquidez que desembocará en una mayor volatilidad de precios.

El miedo a una excesiva especulación desestabilizante y la posibilidad de manipulación en el seno de estos mercados por parte de los especuladores han servido de principales justificaciones económicas para llevar a cabo una fuerte regulación en los mercados de futuros.

## 5. CONSIDERACIONES FINALES

Una vez expuestas las diversas teorías acerca del papel desempeñado por la especulación en los mercados de futuros, podemos señalar que el debate sobre las consecuencias estabilizadoras o desestabilizadoras de la especulación en futuros es un debate que aún está por concluir. La teoría económica por sí sola no puede resolver si la especulación adicional mejora la eficiencia informativa de los precios futuros, con las consecuencias positivas sobre la eficiencia asignativa y la mejora en el bienestar económico. Los estudios realizados hasta el momento ofrecen resultados contradictorios, sin que sea posible llegar a una conclusión rotunda, ya que el efecto estabilizador o desestabilizador va a depender no sólo del tipo de mercado en el que nos encontremos sino de los supuestos teóricos subyacentes a cada modelo explicativo del comportamiento de los mercados, con la dificultad que lleva aparejado el evaluar la validez empírica de los supuestos de partida de cada modelo.

Como conclusión podemos añadir que a pesar de las críticas que la teoría clásica sobre especulación en futuros ha recibido, nadie pone en duda el papel fundamental que la especulación ha desempeñado en la asignación eficiente de riesgos y la necesidad de la especulación para garantizar no sólo la liquidez en estos mercados sino su propia supervivencia, al ser la función de traslación de riesgos una de las razones económicas fundamentales de que estos mercados existan.

## BIBLIOGRAFIA

Danthine, J. P. (1978) "Information, Futures Prices, and Stabilizing Speculation" *Journal of Economic Theory* 24, 17, Págs. 79-98.

Edwards, F. (1992) "Informational Role of Futures Markets" en *New Palgrave Dictionary of Money and Finance* ed. Newman, P. Milgate, M. y Eatwell, J. McMillan Press, Londres.

—————(1992) *Futures and Options*, McGraw- Hill, Nueva York.

Fink, R y Feduniak, R. (1988) *Futures Trading: Concepts and Strategies*. New York Institute of Finance, Prentice- Hall, Nueva York.

Friedman, M. (1953) *Essays in Positive Economics*, Chicago: University Chicago Press.

Goss, B. A. y Yamey, B. (1978) *The Economics of Futures Trading*, 2ªed. McMillan, Londres.

Gregoir, S. y Salanie, B. (1991) "Speculation, Prix et Bien-etre" *Annales d'Economie et de Statistique* O (24), pags. 209-46.

Hart, O. y Kreps, D. (1986) "Price Destabilizing Speculation" *Journal Of Political Economy*, 94, Págs. 927-952.

Hicks, J. R. (1938) *Valor y Capital*, Fondo de Cultura Económica, México, 1976.

Kaldor, N. (1939) " Speculation and Economic Stability, *Review of Economic Studies*, 7, Págs. 1-27, reimpresso en *Essays on Economic Stability and Growth*, Londres, DuckWorth 1961.

Keynes, J. M . (1930) *A Treatise on Money* en *The Collected Writings of John Maynard Keynes*, Vol. 5-6-Londres, McMillan, 1971.

Marshall, A. (1989) *Futures and Option Contracting*, South-Western Publishing, Cincinnati.

Newberry, D. (1986) " Speculation and Hedging", *Economic Theory Discussion Paper*, Nº. 86. University of Cambridge.

—————(1987) "When Do Futures Destabilize Spot Prices?", *International Economic Review*, 28, Págs. 291-297.

Stein, J. (1987) "Informational Externalities and Welfare Reducing Speculation", *Journal of Political Economy*, 95, Págs. 1123-1145.

Turnovsky, S.(1979) " Futures Markets, Private Storage and Price Stabilization", *Journal of Public Economy*, 12, Págs. 301-327.

————— (1983) "The determination of Spot and futures Prices with Storable Commodities," *Econometrika*, 51, Págs. 1362-1387.

—————and Campbell, R. B. (1985) "The Stabilizing and Welfare Properties of Futures Markets: A Simulation Approach", *International Economic Review*, Vol. 26, Págs. 277-303.



# **LAS FUSIONES DE CAJAS DE AHORRO: EL CASO DE LAS CAJAS CORDOBESAS**

**ADOLFO RODERO FRANGANILLO**

Profesor de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales-ETEA.  
Universidad de Córdoba

El 1 de Enero de 1995 ha nacido una nueva caja: la Caja de Ahorros y Monte de Piedad de Córdoba, como resultado de la fusión del Monte de Piedad de Córdoba y de la Caja Provincial de Córdoba. Creemos que puede ser de interés estudiar los antecedentes y las expectativas que crea el proceso que se acaba de iniciar. Por otra parte, el análisis de un caso puede proporcionar una información interesante para determinar las dificultades y las ventajas a que dan lugar las fusiones de entidades financieras.

## **1. OBJETIVOS DE LAS FUSIONES BANCARIAS**

Se ha discutido mucho acerca de las ventajas e inconvenientes de las fusiones bancarias, tanto desde un plano teórico como a partir de los resultados obtenidos en las que se han realizado en España.

Por ejemplo, J. Revell, el principal estudioso de este tema y autor de diversos informes sobre la materia, expone las siguientes razones para realizar una fusión de entidades bancarias<sup>1</sup>:

1. Realizar economías de escala
2. Racionalizar la red de sucursales
3. Responder a las demandas de los grandes clientes
4. Igualar el tamaño de otros bancos en el mercado internacional
5. Hacer frente a la competencia de bancos extranjeros en el propio país
6. Economizar las inversiones en automatización

---

<sup>1</sup>Revell, J. "Las fusiones y el papel de los grandes bancos". *Papeles de economía española*. Nº 36, pág. 93.

J. Revell se refiere aquí a los grandes bancos, pero en líneas generales este planteamiento es común a otras entidades.

De los puntos anteriores el 3 y el 4 parece que no son aplicables, en gran medida, a cajas de ahorros de pequeño tamaño.

En relación a los otros puntos, podemos hacer los siguientes comentarios:

- Las economías de escala no son, probablemente, demasiado importantes en las entidades bancarias una vez que se ha alcanzado una gran dimensión.

Dado el tamaño medio de las cajas de ahorro, este podría ser un motivo para plantear algunas fusiones.

- La coincidencia de la red de oficinas de muchas cajas, en concreto en Andalucía, podría aconsejar una fusión siempre que se siguiera una política de eliminación de las oficinas que fueran redundantes.

- Si bien la competencia exterior no es un elemento previsible con relación a las cajas de ahorro, es cierto que las cajas andaluzas tienen una fuerte competencia por parte de la banca, es decir, los grandes bancos, y por parte de las cajas de mayor tamaño. En este sentido las fusiones de cajas de la comunidad autónoma andaluza parecen muy convenientes.

- Todas las cajas están automatizadas en mayor o menor grado, por lo que una fusión exige la compatibilización de los sistemas informáticos y la racionalización de los equipos. En este sentido las fusiones pueden elevar inicialmente las inversiones en equipos y procesos, aunque a más largo plazo pueden permitir un ahorro de las cantidades destinadas a estos fines.

Pasando a la experiencia española sobre los efectos de las fusiones de grandes bancos y de algunas cajas, podemos hacer los siguientes comentarios:

- Las fusiones han permitido incrementar de forma notable la dimensión de las entidades bancarias.

- Los procesos de fusión han sido muy lentos, incluso en aspectos bastante elementales, tales como la sustitución de los nombres antiguos por la nueva denominación, la unificación de impresos y modelos, etc.

- La eliminación de oficinas innecesarias y del personal sobrante ha sido muy lenta, estando sin completar aún en la mayoría de los casos; se han evitado los procesos traumáticos en este sentido.

- Un efecto positivo sobre la cuenta de resultados no ha aparecido en todos los casos, incluso en bastante de ellos se ha observado un deterioro de los beneficios a raíz de la fusión.

En nuestra opinión, la mayor parte de las fusiones eran necesarias, aunque no estuvieran claras en los términos mantenidos por Revell; pensamos que la mayoría de ellas han tenido un carácter defensivo: se crece para evitar ser desplazados del mercado o ser absorbido por entidades de mayor tamaño.

Todo lo anterior es aplicable a las cajas de ahorros andaluzas. En la región existía un notable minifundismo del sector (hasta hace poco tiempo el número de cajas se elevaba nada menos

que a quince), por lo que un proceso de fusiones era indispensable para alcanzar un sistema más racional. La situación actual, 6 cajas tras la fusión de las dos cordobesas, permite opinar que todavía se pueden producir nuevas fusiones en el futuro. Los procesos de fusión han sido largos y en bastantes casos han provocado problemas de organización e incluso, en alguno de ellos, se ha producido un deterioro de la cuenta de resultados, que, quizás, ha sido provocado por la fusión, aunque, evidentemente, esto es una opinión que no está demostrada de manera indiscutible.

En resumen, las cajas andaluzas tenían claramente que ir hacia una reducción de entidades, pero este proceso ha tenido un carácter defensivo inicialmente, aunque en el futuro también se puedan producir mejoras de diversos aspectos económicos y financieros que justifiquen la realización de estos cambios.

## 2. BREVE ANALISIS DE LAS ENTIDADES FUSIONADAS

Para exponer algunas ideas sobre los posibles resultados de la fusión de las cajas cordobesas, es indispensable conocer el punto de partida, es decir, los principales aspectos financieros y económicos de las entidades que se han fusionado. En aras de la brevedad, con el fin de que la extensión de este escrito no supere una dimensión razonable, nos limitamos a los datos esenciales de los balances de situación, y de las cuentas de resultados de ambas instituciones.

### A) La Caja Provincial de Ahorros de Córdoba

**Cuadro 1. Resumen del balance de situación**

|                        | 1993 <sup>(1)</sup> | % sobre total<br>activo/pasivo | 1992(1)        | % sobre total<br>activo/pasivo |
|------------------------|---------------------|--------------------------------|----------------|--------------------------------|
| <b>Activo</b>          |                     |                                |                |                                |
| Sistema crediticio     | 46.106              | 27,4                           | 28.322         | 19,8                           |
| Admon. públicas        | 19.931              | 11,8                           | 21.365         | 14,9                           |
| Otros sect. residentes | 93.631              | 55,6                           | 84.218         | 58,7                           |
| Sector exterior        |                     |                                |                |                                |
| Op. no sectorizadas    | 8.666               | 5,2                            | 9.497          | 6,6                            |
| <b>Total activo</b>    | <b>168.334</b>      |                                | <b>143.402</b> |                                |
| <b>Pasivo</b>          |                     |                                |                |                                |
| Sistema crediticio     | 2.130               | 1,3                            | 1.925          | 1,3                            |
| Admon. públicas        | 6.043               | 3,6                            | 5.691          | 4,0                            |
| Otros sect. residentes | 142.445             | 84,6                           | 119.709        | 83,5                           |
| Sector exterior        | 1.237               | 0,7                            | 1.128          | 0,8                            |
| Op. no sectorizadas    | 16.479              | 9,8                            | 14.949         | 10,4                           |
| <b>Total pasivo</b>    | <b>168.334</b>      |                                | <b>143.402</b> |                                |

<sup>(1)</sup>En millones de ptas.

NOTA: Este balance corresponde al grupo Caja Provincial de Ahorros de Córdoba; las diferencias con los datos del balance de la caja, exclusivamente, son muy pequeños.

Fuente: *La Caja Provincial de Ahorros de Córdoba (1994), Informe anual 1993*, Córdoba, Ed. Caja Provincial.

Los datos anteriores nos muestran que la Caja provincial cordobesa era una entidad de pequeña dimensión -su balance representaba alrededor de un 0,5% del agregado de las cajas de ahorro-.

En cuanto a la composición del balance, observamos las siguientes características, siempre en comparación con el balance agregado de las cajas:

-Una proporción de inversiones en el sistema financiero muy parecido al conjunto de las cajas<sup>2</sup>, si bien en la de Córdoba se observa un aumento en el año 1993, que podría indicar un cambio de política, aunque ello no se podría afirmar de forma concluyente.

-Una menor proporción de activos dirigidos al sector público, lo cual puede estar relacionado con la difícil situación financiera del ayuntamiento cordobés.

-Un saldo mucho más elevado, en tanto por ciento, de inversiones en beneficio del sector empresas no financieras y familias, que constituía el principal cliente de esta caja.

-Nulas relaciones con el sector exterior en el activo y mínima captación de recursos de no residentes; todo ello muy inferior al pequeño volumen de operaciones exteriores de las cajas españolas.

-Concentración de los recursos captados en los procedentes de "otros sectores residentes", lo cual contrasta con la mayor diversificación del origen de los recursos en las cajas confederadas.

**Cuadro 2. Resumen de la cuenta escalar de resultados (% sobre activos totales medios)**

| Conceptos                       | 1993  | 1992  |
|---------------------------------|-------|-------|
| Productos financieros           | 12,00 | 11,76 |
| Costes financieros              | -6,65 | -5,99 |
| Margen de intermediación        | 5,36  | 5,76  |
| Otros productos ordinarios      | 0,48  | 0,54  |
| Margen ordinario                | 5,84  | 6,31  |
| Gastos de explotación           | -3,53 | -4,05 |
| Margen de explotación           | 2,30  | 2,26  |
| Otros conceptos                 | -0,83 | -0,62 |
| Resultados antes de impuestos   | 1,47  | 1,64  |
| Impuestos sobre beneficios      | -0,45 | -0,67 |
| Resultados después de impuestos | 1,02  | 0,96  |

Fuente: La Caja Provincial de Ahorros de Córdoba (1994), Informe anual 1993, Córdoba, Ed. Caja Provincial.

<sup>2</sup> Para la comparación con los datos agregados de las cajas de ahorros confederadas deben consultarse los cuadros del anexo.



La cuenta de resultados muestra una situación saneada, cuyos datos eran mejores que los del conjunto de cajas: el resultado neto de éstas fue de 0,73% en el año 1993.

Esta diferencia a favor de la Caja de Córdoba está motivada por unos productos financieros más elevados y unos costes financieros más bajos, ambos en términos relativos, lo cual determinaba un margen de intermediación bastante más alto en la Caja Provincial. Esta situación favorable del margen financiero, con relación al conjunto de las cajas, se vio anulada, aunque sólo en parte, por un comportamiento negativo de los “otros productos ordinarios”, cuyo porcentaje es más pequeño que el dato global, y de los gastos de explotación que superan al de las cajas confederadas. Ambos datos justifican unos resultados cuyo tanto por ciento sólo mejoraron muy ligeramente el porcentaje global.

Por otra parte, los mejores resultados de la Caja Provincial en el año 1993, en comparación con el 92, son especialmente significativos ya que corresponden a un año negativo para las instituciones de crédito en general y para las cajas en particular. Además el descenso del porcentaje de los gastos de explotación, en dicho año, fue también un dato positivo, puesto que corresponde a un punto débil de su política económica y financiera.

#### B) El Monte de Piedad y Caja de Ahorros de Córdoba (CAJASUR)

**Cuadro 3. Resumen del balance de situación**

|                        | 1993 <sup>(1)</sup> | % sobre total<br>activo/pasivo | 1992(1)        | % sobre total<br>activo/pasivo |
|------------------------|---------------------|--------------------------------|----------------|--------------------------------|
| <b>Activo</b>          |                     |                                |                |                                |
| Sistema crediticio     | 64.750              | 21,1                           | 51.956         | 18,8                           |
| Admon. públicas        | 29.866              | 9,7                            | 33.751         | 12,2                           |
| Otros sect. residentes | 198.355             | 64,6                           | 177.714        | 64,3                           |
| Sector exterior        | 254                 | 0,1                            | 352            | 0,1                            |
| Op. no sectorizadas    | 13.949              | 4,5                            | 12.798         | 4,6                            |
| <b>Total activo</b>    | <b>307.174</b>      |                                | <b>276.571</b> |                                |
| <b>Pasivo</b>          |                     |                                |                |                                |
| Sistema crediticio     | 1.990               | 0,6                            | 7.819          | 2,8                            |
| Admon. públicas        | 8.646               | 2,8                            | 10.958         | 4,0                            |
| Otros sect. residentes | 250.015             | 84,0                           | 220.514        | 79,7                           |
| Sector exterior        | 3.020               | 1,0                            | 2.621          | 1,0                            |
| Op. no sectorizadas    | 35.503              | 11,6                           | 34.659         | 12,5                           |
| <b>Total pasivo</b>    | <b>307.174</b>      |                                | <b>276.571</b> |                                |

<sup>(1)</sup>En millones de ptas.

Fuente: CAJASUR (1994), Informe anual 1993, Córdoba, Ed. CAJASUR.

Los datos del activo del balance nos indican que CAJASUR tenía una elevada proporción de inversiones en el sector “empresas no financieras y familias”, en detrimento del sistema finan-

ciero y de las administraciones públicas; se trata de una estructura de balance bastante parecida a la Caja Provincial cordobesa, si bien en esta última parece que se intensificaron en 1993 las inversiones en el propio sistema.

En cuanto al pasivo, se observa una clara hegemonía del sector “otros sectores residentes” como aportante de recursos. Su elevado tanto por ciento era mayor que el del balance agregado de las cajas confederadas, mientras que la aportación de las entidades crediticias era menor en términos relativos que en el conjunto de cajas. Las proporciones del pasivo no presentan diferencias apreciables con la Caja Provincial de Córdoba.

El balance de CAJASUR representó algo más de 1% del total de cajas, cifra que duplicó el volumen de la otra caja cordobesa, si bien esta última aumentó ligeramente su dimensión relativa en 1993.

**Cuadro 4. Resumen de la cuenta escalar de resultados (% sobre activos totales medios)**

| Conceptos                       | 1993  | 1992  |
|---------------------------------|-------|-------|
| Productos financieros           | 11,81 | 11,72 |
| Costes financieros              | -6,20 | -5,80 |
| Margen de intermediación        | 5,62  | 5,91  |
| Otros productos ordinarios      | 0,34  | 0,34  |
| Margen ordinario                | 5,96  | 6,24  |
| Gastos de explotación           | -3,32 | -3,47 |
| Margen de explotación           | 2,64  | 2,77  |
| Otros conceptos                 | -0,89 | -0,75 |
| Resultados antes de impuestos   | 1,75  | 2,02  |
| Impuestos sobre beneficios      | -0,58 | -0,69 |
| Resultados después de impuestos | 1,17  | 1,34  |

Fuente: CAJASUR (1994), *Informe anual 1993*, Córdoba, Ed. CAJASUR.

La cuenta de resultados permite observar una entidad más rentable que la media de las cajas españolas. Dos causas dieron lugar a esta situación: un nivel de productos financieros más elevado que el conjunto de cajas y unos costes financieros más reducidos. Por el contrario los gastos de explotación, más altos que en el conjunto agregado, y los otros productos financieros, algo más reducidos, influyeron negativamente sobre los beneficios de CAJASUR, anulando, parcialmente, el buen nivel del margen financiero.

En comparación con la Caja Provincial, vemos que esta última tenía un margen de intermediación algo más bajo, ya que los productos financieros eran un poco más elevados en esta últi-

ma entidad, sin alcanzar el porcentaje a nivel estatal, mientras que los costes financieros eran más elevados que en CAJASUR pero más bajos que el conjunto de cajas. Todo esto unido a otras pequeñas diferencias llevaron a unos resultados netos más altos en el Monte y Caja de Córdoba que en la Provincial.

También es importante comentar que los resultados de CAJASUR en 1993 empeoraron con relación al año anterior, fundamentalmente por la dotación a fondos de insolvencia. Ello unido a que los gastos de explotación, punto negativo de sus resultados, solo mejoró ligeramente en el año 93, podría indicar una tendencia preocupante de su cuenta de explotación.

### **3. ALGUNAS CARACTERISTICAS DE LA FUSION REALIZADA**

Los objetivos de la fusión de las dos cajas cordobesas, de acuerdo con el proyecto de fusión, son los siguientes:

- Garantizar la permanencia de una caja cordobesa.
- Ampliar los campos de actuación a operaciones de mayor dimensión.
- Mejorar la competitividad y capacidad de gestión.
- Proporcionar mayores oportunidades a los empleados.
- Ampliar la cooperación con las administraciones públicas.

El procedimiento de la fusión ha sido el de absorción por parte del Monte de Córdoba de la Caja Provincial de Córdoba; esta última se disolvió sin liquidación, integrándose su patrimonio en el Monte de Piedad y Caja de Ahorros de Córdoba.

La fusión ha determinado unos cambios en los órganos de gobierno de CAJASUR, de forma que, por ejemplo, en la asamblea la entidad fundadora del Monte, el cabildo catedralicio, detenta un 35% de los consejeros generales y la Diputación Provincial, que fundó la Caja Provincial, mantiene un 5% de los citados consejeros; los impositores y las corporaciones municipales tienen una representación del 27,5% cada grupo y los empleados un 5% de los consejeros. Modificaciones equivalentes se producen en los restantes órganos de gobierno. Todo esto representa una composición de los órganos muy diferente al que está prevista en la normativa general, en la cual se admite un régimen distinto para las cajas fundadas por la Iglesia Católica.

Aunque no se alude a ello en el documento de fusión, en declaraciones públicas se ha insistido en que no se reducirán las plantillas de las dos cajas fusionadas y que la racionalización de la red de oficinas no tendrá un carácter “traumático”.

Ambas instituciones mantienen un volumen de recursos propios que supera ampliamente las obligaciones impuestas por el coeficiente de solvencia; ello, unido a las actualizaciones de acti-

vos que se autoricen permite alcanzar una situación bastante saneada de la nueva entidad en lo que se refiere a la solvencia.

En relación al tamaño de la nueva entidad, recordamos los datos analizados en el apartado 2, esta nueva caja será la segunda de Andalucía en volumen de recursos<sup>3</sup>.

El escaso tiempo transcurrido desde la firma de la escritura, permite, sin embargo, adelantar que el proceso de unión de las dos entidades se va realizando de forma muy rápida, al menos en los aspectos externos, lo que hace esperar que la consolidación de la nueva caja se consiga en un plazo bastante breve.

#### 4. EL FUTURO DE LA CAJA Y MONTE DE CORDOBA - CAJASUR

El número elevado de elementos de todo tipo que intervienen en un proceso de fusión, unido a los resultados, no siempre positivos, de algunos de los casos que se han producido en nuestro país, aconsejan ser muy cautelosos al valorar el futuro de un caso concreto. Esto nos obliga a no establecer unas conclusiones muy terminantes sobre el futuro de la nueva caja.

El primer punto que vamos a tratar se refiere al papel que cada una de las anteriores cajas, en cuanto organización y estilo de gestión, jugarán en la nueva entidad. Los elementos a tener en cuenta son: la mayor dimensión del Monte de Córdoba y el hecho de que esta entidad ha absorbido a la Caja Provincial, manteniendo sus estatutos y patrimonio, si bien con las modificaciones exigidas por la nueva situación. Estos datos unidos a otras cuestiones de carácter más anecdótico, pero no por ello menos importantes (mantenimiento, con un pequeño cambio, de su denominación social, de su nombre comercial, del logotipo, etc.), nos llevan a pensar que será la “cultura” del antiguo Monte de Córdoba la que prevalecerá en la nueva caja. No obstante, el reparto de competencias entre el presidente de la Caja y Monte de Córdoba, antiguo presidente del Monte, y el vicepresidente ejecutivo, antiguo presidente de la Caja Provincial, puede ser un elemento determinante en este sentido.

El ámbito de actuación de la Caja Provincial se limitaba a la provincia de Córdoba, mientras que el Monte tenía oficinas en toda Andalucía, especialmente en Córdoba, Jaén y en menor medida en Málaga. Existían, por tanto, dos políticas distintas en relación a la expansión de estas entidades. Como es obvio, la nueva caja mantendrá una zona de actuación regional; sin embargo, no hay que olvidar que la expansión regional de CAJASUR no ha proporcionado resultados muy favorables para la entidad, lo que unido a la insistencia, en las declaraciones públicas de sus directivos, en el servicio a Córdoba como objetivo prioritario, nos hacen pensar en un leve giro de esta política, hacia una menor presencia en las restantes provincias andaluzas, al menos en términos relativos.

---

<sup>3</sup> Los recursos de acreedores de *Unicaja*, la primera caja andaluza, eran a final del año 1993 839 miles de millones de ptas.; los recursos agregados de las dos cajas cordobesas se elevaban en diciembre del 93 a 418 miles de millones, aproximadamente.

Como hemos observado, la estructura de los balances de ambas entidades es equivalente; asimismo los tipos de operaciones y líneas de inversión son parecidas, quizás con una mayor presencia del Monte en el campo de las innovaciones financieras. La política financiera de la Caja y Monte de Córdoba seguirá, por consiguiente, las líneas establecidas por las dos cajas preexistentes, sin grandes problemas en este sentido. El objetivo de tener acceso a operaciones más sofisticadas y de mayor dimensión parece demasiado ambicioso a la vista de su tamaño probable, aunque, quizás, sí queda abierta la posibilidad de participar en algunas operaciones sindicadas. Además, el incremento de su dimensión, puede ayudar a diversificar la clientela, reduciendo el peligro, bien de la concentración del riesgo o bien de un exceso de operaciones interbancarias por falta de demanda solvente.

Por otra parte, la necesidad de dotar fuertemente el fondo de insolvencias en 1993 por parte del Monte de Córdoba, es un aspecto que puede pesar negativamente sobre la nueva caja, suponiendo que esta circunstancia no tenga un carácter solamente puntual.

Las cuentas de resultados de las cajas fusionadas coincidían en un punto negativo: el excesivo nivel de los gastos de explotación. La unión de ambas no va a resolver, sino al contrario, esta debilidad de las cajas cordobesas. Más aún, la promesa verbal de mantener plantillas y de tratar muy cuidadosamente el tema de oficinas sobrantes, hace ver que la solución de este problema exigirá un largo período de tiempo; la alternativa de una política más agresiva en este terreno provocaría, sin duda, unos problemas sociales que no parecen nada aconsejables en el momento del inicio del proceso de fusión. Recordemos, sin embargo, que la Caja Provincial había iniciado una política de reducción de los gastos de explotación en el año 93; si, en este sentido, la política de la Provincial llega a imponerse en la nueva entidad, se podría avanzar más rápidamente en la mejora de los resultados; pero esto es, probablemente, una simple especulación.

Un mejor servicio a la economía y sociedad cordobesa ha sido el principal objetivo en defensa de la fusión. Es evidente, que aun en el caso de una disolución de alguna o de ambas cajas cordobesas, las entidades financieras que atendieran al mercado cordobés tendrían muy en cuenta las necesidades de la economía provincial; no es imaginable que en los años noventa se tratase a Córdoba como una zona de pasivo, o como un mercado al servicio de otras provincias o regiones. Pero, en cualquier caso, es previsible que una caja cordobesa de moderada dimensión asegurará en mayor medida la atención financiera a la economía cordobesa.

Recordemos, sin embargo, que el Monte de Piedad ha mantenido unos órganos de gobierno dominados por el cabildo catedralicio, mientras que en la Caja Provincial han estado altamente representados los partidos políticos, a través de las corporaciones locales. Sin poner en duda que en ambas cajas se hayan dado preferencia a los intereses cordobeses frente a los partidistas o de grupo, creemos que una representación más plural en los órganos de gobierno de la nueva caja iría en beneficio de la sociedad y economía cordobesa.

En resumen la fusión de las dos cajas nos parece positiva para Córdoba; yendo al fondo del tema la razón principal de la fusión es mantener una caja de fundación cordobesa; en términos del viejo dicho, se ha tratado de evitar que "el pez grande se coma al pez chico", es decir que alguna de las grandes entidades financieras llegara a provocar la desaparición de las cajas cordobesas. Se trata esencialmente, por tanto, de una fusión defensiva. Todo lo demás es retórica.

## Anexo

**Cuadro 5. Resumen del balance de situación de las cajas de ahorros confederadas**

|                        | 1993 <sup>(1)</sup> | % sobre total<br>activo/pasivo | 1992(1)  | % sobre total<br>activo/pasivo |
|------------------------|---------------------|--------------------------------|----------|--------------------------------|
| <b>Activo</b>          |                     |                                |          |                                |
| Sistema crediticio     | 8.315,0             | 24,7                           | 7.628,2  | 24,8                           |
| Admon. públicas        | 5.552,3             | 16,5                           | 5.917,3  | 19,2                           |
| Otros sect. residentes | 15.278,2            | 45,4                           | 14.026,6 | 45,6                           |
| Sector exterior        | 2.228,0             | 6,6                            | 1.065,3  | 3,5                            |
| Op. no sectorizadas    | 2.220,1             | 6,6                            | 2.147,6  | 7,1                            |
| Total activo           | 33.654,0            |                                | 30.785,0 |                                |
| <b>Pasivo</b>          |                     |                                |          |                                |
| Sistema crediticio     | 3.038,1             | 9,0                            | 3.255,7  | 10,6                           |
| Admon. públicas        | 840,5               | 2,5                            | 928,8    | 3,2                            |
| Otros sect. residentes | 24.532,9            | 72,9                           | 21.806,6 | 70,8                           |
| Sector exterior        | 960,5               | 2,9                            | 804,0    | 2,6                            |
| Op. no sectorizadas    | 4.281,9             | 12,7                           | 3.989,9  | 13,0                           |
| Total pasivo           | 33.654,0            |                                | 30.785,0 |                                |

<sup>(1)</sup>En miles de millones de ptas.

Fuente: Banco de España (1994), Boletín estadístico, Junio.

**Cuadro 6. Resumen de la cuenta escalar de resultados de las cajas de ahorros confederadas  
(% sobre activos totales medios)**

| Conceptos                       | 1993  | 1992  |
|---------------------------------|-------|-------|
| Productos financieros           | 11,06 | 11,01 |
| Costes financieros              | -7,18 | -6,97 |
| Margen de intermediación        | 3,88  | 4,04  |
| Otros productos ordinarios      | 0,59  | 0,48  |
| Margen ordinario                | 4,46  | 4,52  |
| Gastos de explotación           | -2,78 | -2,91 |
| Margen de explotación           | 1,68  | 1,61  |
| Otros conceptos                 | -0,71 | -0,56 |
| Resultados antes de impuestos   | 0,97  | 1,05  |
| Impuestos sobre beneficios      | -0,24 | -0,25 |
| Resultados después de impuestos | 0,73  | 0,80  |

Fuente: Banco de España (1994), Boletín económico, Abril.

**BIBLIOGRAFIA<sup>4</sup>**

ESECA. "Proceso de fusiones de las cajas de ahorro andaluzas". *Informe económico financiero de Andalucía 1990*, Granada, Ed. Caja General de Ahorros de Granada.

GARCIA MENDEZ, L. "Las cajas de ahorro y las fusiones". *Revista de ECONOMIA*, nº 4.

GUZMAN CUEVAS, J. "La innovación financiera y las fusiones de cajas de ahorro" *Información Comercial Española*, nº 686.

RAYMOND BARA, J.L. "Economías de escala y fusiones en el sector de Cajas de Ahorros". *Papeles de economía española*, nº 58.

REVELL, J. *El futuro de las cajas de ahorro. Estudio de España y del resto de Europa*. Policopiado.

REVELL, J. "Las fusiones y el papel de los grandes bancos". *Papeles de economía española*, nº 36.

TERRON MUÑOZ, F. "En torno a las fusiones de las cajas de ahorro andaluzas". *Revista de estudios andaluces*, nº 12.

"Concentración en el sector bancario español en el período 1980-1991". *Boletín económico del Banco de España*, nº Mayo 1992.

---

<sup>4</sup>Diversos números monográficos de *Papeles de economía española* son interesantes en relación con el tema de esta comunicación; en especial los nº 36, 44, 46, 47, 54 y 58.





# **BASES PARA UNA PROPUESTA METODOLOGICA DE EVALUACION CUANTITATIVA DE LA FIABILIDAD DEL CONTROL INTERNO EN AUDITORIA**

**ANDÚJAR RODRÍGUEZ, ANTONIO SERAFÍN**

Facultad de Ciencias Experimentales. Universidad de Almería

**GARCÍA PÉREZ, JOSÉ**

Facultad de Ciencias Sociales y Jurídicas. Universidad de Almería

**CRUZ RAMBAUD, SALVADOR**

Facultad de Ciencias Sociales y Jurídicas. Universidad de Almería

## **1. INTRODUCCION**

Las normas técnicas de auditoría (BOIAC num. 4) recogen, en su apartado 2.4, el estudio y evaluación del sistema de Control Interno. Dentro de estos apartados se habla del **RIESGO FINAL** en auditoría. La N.T.A. 2.4.24 establece que éste es una combinación de tres riesgos diferentes:

El primero está constituido por la posibilidad, inherente a la actividad de la entidad, de que existan errores de importancia en el proceso contable del cual se obtienen las cuentas anuales.

El segundo es la posibilidad de que, existiendo estos errores de importancia, no fueran detectados por los Sistemas de Control Interno de la Entidad.

Finalmente, existe un tercer riesgo consistente en la posibilidad de que cualquier error de importancia que exista y no hubiese sido puesto de manifiesto por el sistema de control interno no fuera, a su vez, detectado por las pruebas adecuadas de auditoría.

En versión REA (Registro de Economistas Auditores):

$$(1-CC) = (1-CCI)(1-CPS)$$

siendo CC la confianza combinada, CCI la confianza en el control interno y CPS la confianza en las pruebas sustantivas.

Por tanto, fijados CC y CCI, podemos saber el número de pruebas sustantivas que tenemos que realizar, a tenor de (1) y de las N.T.A. 2.4.25 y 2.4.26 que afirman que cuanto mayor sea la confianza en el Control Interno, menor será el número de pruebas sustantivas que deberemos realizar.

Según la N.T.A. 2.4.5, el control interno incluye controles que pueden ser caracterizados, bien como contables, bien como administrativos.

a) Los controles contables comprenden el plan de organización y todos los métodos y procedimientos cuya misión es la salvaguarda de los bienes activos y la fiabilidad de los registros contables . . .

b) Los controles administrativos se relacionan con la normativa y los procedimientos . . .

Ya sabemos que la implantación del sistema de Control Interno compete a la Dirección de la empresa pero, el auditor está obligado a examinar el sistema y evaluar su fiabilidad (Ernst & Young [1]).

A tal efecto, la N.T.A. 2.4.20 establece: "El planteamiento, conceptualmente lógico, de la evaluación que hace el auditor del C.I. consiste en aplicar a cada tipo significativo de transacción y a los respectivos activos involucrados en la auditoría, los siguientes criterios:

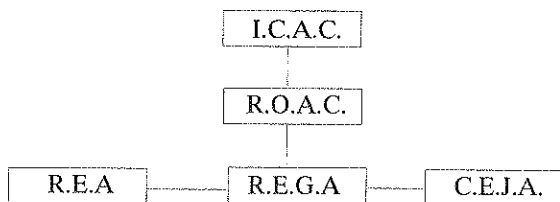
a) Considerar los tipos de error o irregularidades que puedan ocurrir.

b) Determinar los procedimientos de control interno contable que puedan prevenir o detectar errores o irregularidades".

Según la N.T.A. 2.4.9, las etapas más importantes relativas a una transacción comprenden su autorización, ejecución, registro y, finalmente, la responsabilidad respecto a la custodia y salvaguarda de los activos.

Por otra parte, la N.T.A. 2.4.8 trata de aquellos procedimientos cuya eficacia se basa en la segregación de funciones, es decir, la función de control sobre una determinada transacción debe ser realizada por una persona distinta a las que tienen la responsabilidad de su ejecución.

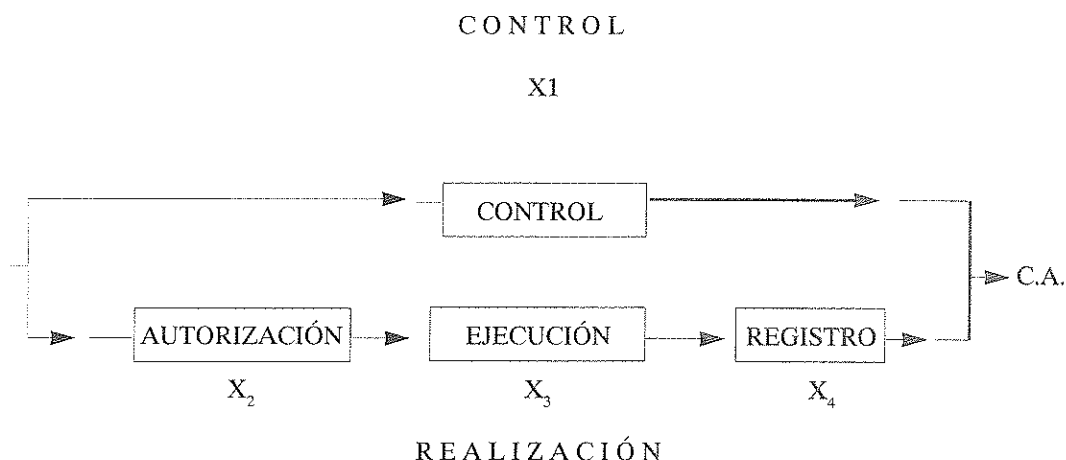
Las leyes, el reglamento y las N.T.A., en su desarrollo posterior y anterior de R.E.A., R.E.G.A. y C.E.J.A., no son especialmente concretas en cuanto a evaluación de fiabilidad del Control Interno; no existe una metodología específica para establecer la confianza en el Control Interno. Así, la N.T.A. 2.4.21 indica que la aplicación práctica se realiza principalmente por medio de cuestionarios, resúmenes, flujogramas, instrucciones, o cualquier otro tipo de material de trabajo utilizado por el auditor, sin embargo, se requiere el juicio profesional del auditor.



## 2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Tratamos en este trabajo de sentar las bases de una metodología que nos permita evaluar de un modo preciso la fiabilidad en el control interno evitando, en la medida de lo posible, el juicio subjetivo del auditor.

El siguiente esquema sobre una transacción,



recoge los elementos principales mencionados en las normas técnicas. Para que una determinada transacción pueda producir un fallo en las cuentas anuales, se deberá producir una de las siguientes situaciones:

$$\{X_1'X_2'X_3'X_4'\}, \quad \{X_1'X_2'X_3'X_4'\}, \quad \{X_1'X_2'X_3'X_4'\}$$

Podemos aplicar la teoría de fiabilidad a cada uno de los procesos  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ ,  $X_4$  para determinar su tasa de fallos, estimando los parámetros.

Así mismo, podemos aplicar la teoría de Árboles de fallos para determinar la fiabilidad de un sistema, integrado por numerosos elementos, cada uno de los cuales, al fallar, puede ser el origen de un fallo en las cuentas anuales.

Este artículo no pretende profundizar en cada uno de los aspectos que se ponen de manifiesto. Para simplificar el tratamiento del problema podemos establecer las siguientes suposiciones:

A) Cada una de las misiones que componen la transacción tiene una tasa de fallos constante. En este caso, la función de densidad asociada sería una exponencial y podríamos recurrir a los procedimientos de muestreo más apropiados para determinar el parámetro.

B) Cada una de las misiones que componen la transacción en su fase de Realización tiene una tasa de fallos constante, lo que significa desidad exponencial. La misión Control tiene una tasa de fallos creciente por lo que podríamos ajustarle una Weibull con parámetro de forma mayor que 1. (El ajuste de los parámetros de la Weibull se haría recurriendo a las técnicas de muestreo más apropiadas).

Según la N.T.A. 2.5.20, para obtener evidencia sobre el sistema de control interno, el auditor deberá realizar pruebas de cumplimiento del sistema para asegurarse de su:

Existencia: El control existe.

Efectividad: El control está funcionando con eficacia.

Continuidad: El control ha estado funcionando durante todo el proceso.

Esta última condición es la que llama nuestra atención pues, en lugar de determinar la fiabilidad del sistema una vez estudiadas las leyes de probabilidad que rigen el funcionamiento de cada elemento del sistema, lo que haremos es: fijar cuál es la confianza que queremos obtener en el sistema de Control Interno: ( $P_{\Sigma^0}$ ) y, a partir de ella, obtener el plazo de servicio sin fallo correspondiente a los valores de  $P_{\Sigma} > P_{\Sigma^0}$ . De este modo, si el tiempo de funcionamiento sin fallo es igual o superior al periodo al cual se refieren las cuentas anuales, aceptaremos que, con la fiabilidad fijada de antemano para el control interno, se han cumplido las condiciones de la N.T.A. 2.5.20. En otro caso, deberemos analizar cuáles son los fallos en el C.I. y, siguiendo la resolución de 16 de marzo de 1993, del ICAC, BOICAC num. 12, marzo 1993, apartados 7, 8 y 9, comunicar las debilidades del control interno y realizar sugerencias sobre sus posibilidades de mejora.

Consideramos que cada transacción que puede tener incidencia en las cuentas anuales, es un sistema con una determinada función de estructura, compuesto por elementos (Control, Autorización, Ejecución y Registro), cada uno de los cuales ha de cumplir una misión.

Sabemos que en un sistema compuesto por elementos en serie, si los valores de la fiabilidad, esto es la probabilidad de trabajo sin fallo, de los mismos se denota por  $p_i$ , siendo los posibles fallos independientes unos de otros, entonces:

$$P_{\Sigma} = \prod_{i=1}^n p_i$$

La determinación de la fiabilidad del sistema ( $p_{\Sigma}$ ) es sencilla, conocidas las leyes de probabilidad que rigen el funcionamiento de cada elemento del mismo y, estimados previamente sus parámetros.

No obstante, en nuestro caso, lo más apropiado es, fijar una cierta fiabilidad objetivo ( $p_{\Sigma^0}$ ), deducir el plazo de servicio,  $t_0$ , correspondiente a los valores de  $p_{\Sigma} > p_{\Sigma^0}$ .

Si todos los elementos responden a exponenciales con tasa de fallo constante

$$p_i(t) = e^{-\lambda_i t}$$

es fácil deducir que

$$t_0 = \frac{-\ln(p_\Sigma)}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}$$

Si algunos elementos responden a distribuciones exponenciales de probabilidad y otros siguen una ley Weibull biparamétrica, para resolver el mismo problema tendríamos que resolver la ecuación en t:

$$p_\Sigma = e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} \dots e^{-\lambda_k t} e^{-\frac{1}{\alpha_1} t^{\beta_1}} \dots e^{-\frac{1}{\alpha_r} t^{\beta_r}}$$

o bien, tomando logaritmos, hallar el cero de la función

$$f(t) = \sum_{i=1}^k \lambda_i t + \sum_{j=1}^r \frac{t^{\beta_j}}{\alpha_j} + \ln(p_\Sigma)$$

Como f es estrictamente creciente,  $f(0)=\ln(p_\Sigma)<0$ , y, para  $t=T$  suficientemente grande se tiene que  $f(T)>0$ . Algunos autores plantean métodos, en nuestra opinión poco prácticos, para resolver el problema planteado. Por ejemplo, Sotskov [5] busca gráficamente la intersección de una recta y una función en t del tipo

$$\sum_{i=1}^r \frac{1}{\alpha_i} t^{\beta_i}$$

que habría de ser representada.

Planteamos que es mucho más rápido, eficaz y preciso aproximar la solución por métodos numéricos.

En el caso de elementos de un sistema que estén en paralelo, o, aún más, en paralelo-serie o serie-paralelo, suele ser poco tratado el hecho de encontrar el plazo de servicio. Nuestro sistema económico puede considerarse como un sistema en paralelo-serie (Véase el gráfico 1). Nótese que los sistemas en serie mencionados son un caso particular de éste (cuando el elemento 1 está en fallo permanente).

### 3. RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA. TÉCNICAS NUMÉRICAS

Supongamos, primeramente, que todas las fiabilidades de los elementos son exponenciales:

En este caso, se tiene que

$$p_{\Sigma} = 1 - (1 - p_1) \quad (1 - p_2 p_3 p_4) = p_1 + p_2 p_3 p_4 - p_1 p_2 p_3 p_4$$

y, por tanto, fijada una fiabilidad  $p_{\Sigma}$  para hallar el plazo de servicio sin fallo relativo a la misma, hemos de resolver la ecuación en  $t$ :

$$p_{\Sigma} + e^{(-\lambda + \kappa)t} - e^{-\lambda t} - e^{-\kappa t} = 0,$$

siendo

$$p_1 = e^{-\lambda_1 t}; p_i = e^{-\lambda_i t}, i = 2, 3, 4; \kappa = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4$$

Tratamos de resolver esta cuestión recurriendo a métodos que no requieran de programación, intentando evitar al máximo procesos de decisión. Por ello, recurriremos a técnicas funcionales iterativas basadas en el Teorema del Punto Fijo (Kincaid, [7]), accesibles a programas de amplia difusión. Se ha deducido un método particular de Whittaker que transcribimos como teorema.

TEOREMA:

"Si  $f$  es una función de clase uno en  $[a, b]$ , verificándose:

1.  $f(a)f(b) < 0$
2.  $f'(t) > 0, \quad \forall t \in [a, b]$
3.  $M$  es cota superior de  $f'$

Entonces, partiendo de cualquier punto inicial  $t_0$  del intervalo  $[a, b]$ , la sucesión definida de forma recursiva por:

$$t_{n+1} = t_n - \frac{1}{M} f(t_n)$$

es convergente, siendo su límite la única solución de la ecuación  $f(t) = 0$ ."

En nuestro caso, encontrado el intervalo  $[a, b]$ , se verifican las condiciones para cierto  $M$ .

$$\begin{aligned} f'(t) &= -(\lambda + \kappa)e^{-(\lambda + \kappa)t} + \lambda e^{-\lambda t} + \kappa e^{-\kappa t} = \\ &= \frac{\lambda e^{\lambda t} + \kappa e^{\lambda t} - (\lambda + \kappa)}{e^{(\lambda + \kappa)t}} > 0 \end{aligned}$$

si se toma como extremo inferior del intervalo cualquier positivo (suficientemente pequeño para asegurar que  $f(a) < 0$ ).

Además se tiene que

$$f'(t) < (\lambda + \kappa)[1 - e^{-(\lambda + \kappa)t}] < \lambda + \kappa$$

Por tanto, siempre se puede aplicar el método:

$$t_{n+1} = t_n - \frac{1}{\lambda + \kappa} \frac{1 + p \frac{e^{(\lambda + \kappa)t_n} - e^{\lambda t_n} - e^{\kappa t_n}}{e^{(\lambda + \kappa)t_n}}}{1 + p \frac{e^{(\lambda + \kappa)t_n} - e^{\lambda t_n} - e^{\kappa t_n}}{e^{(\lambda + \kappa)t_n}}}$$

partiendo de cualquier punto  $t_0$  positivo. No obstante, la convergencia es lenta, si partimos de un punto muy lejano a la solución.

```

1:  l :=
2:  k :=
3:  pr :=
4:  F(t) := pr + e-(l+k)·t - e-l·t - e-k·t
5:  G(t) := t -  $\frac{1}{1+k} \left[ pr + \frac{1 - e^{l \cdot t} - e^{k \cdot t}}{e^{(l+k) \cdot t}} \right]$ 
6:  l := 0.1
7:  k := 0.2
8:  pr := 0.9
9:  t0 := 12
10: ITERATE(G(t), t, t0, 60)

```

Grafico 1: Implementación en derive

En este gráfico se presenta un posible tratamiento informático del problema haciendo uso del programa DERIVE (Versión 3.0), en el cual se observa la forma de definir el método general (líneas 1 a 5). La cuarta línea no es estrictamente necesaria, sólo se ha incluido a efectos de comprobación de que el valor que se encuentre es una aproximación del cero de  $f$  buscado.

Las tres líneas siguientes son un ejemplo particular, mientras la última es el proceso de iteración.

En el siguiente gráfico observamos que el valor numérico obtenido con 60 iteraciones y con 61 es el mismo (para el número de cifras decimales establecido), así como un gráfico que nos indica cómo, en realidad, lo que hemos buscado es un punto fijo de la función  $G$ , que es la intersección de la recta  $y=x$  con la gráfica de dicha función.

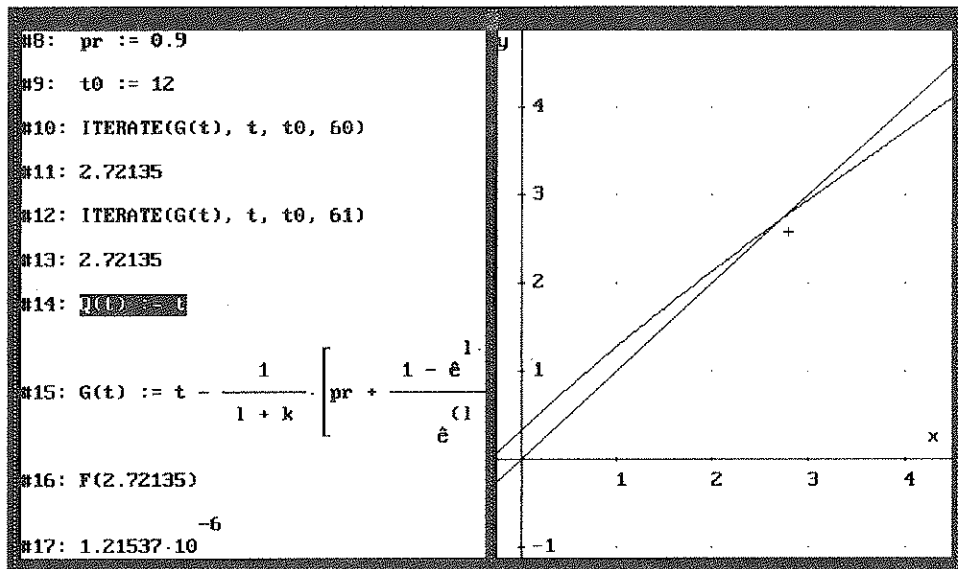


Gráfico 2: Resolución

Un caso más complicado se nos plantea en el caso de que la fiabilidad del elemento de control venga dado por una distribución Weibull. En este caso, se tiene que hallar el cero de la función:

$$f(t) = p_{\Sigma} + e^{-\left(\frac{1}{\alpha}t^{\beta} + \lambda t\right)} - e^{-\frac{1}{\alpha}t^{\beta}} - e^{-\lambda t}$$

En este caso, tenemos que

$$f'(t) = -\left(\frac{\beta}{\alpha}t^{\beta-1} + \lambda\right)e^{-\left(\frac{1}{\alpha}t^{\beta} + \lambda t\right)} + \lambda e^{-\lambda t} + \frac{\beta}{\alpha}t^{\beta-1} + e^{-\frac{1}{\alpha}t^{\beta}}$$

que también puede expresarse mediante:

$$\frac{1}{e^{\left(\frac{1}{\alpha}t^{\beta} + \lambda t\right)}} \left[ \frac{\beta}{\alpha}t^{\beta-1}(e^{\lambda t} - 1) + \lambda(e^{\frac{1}{\alpha}t^{\beta}} - 1) \right]$$

Dado que los dos paréntesis interiores son cantidades positivas, para cualquier  $t > 0$ , entonces se tiene que  $f'$  se mantiene positiva en todo el intervalo  $[a, b]$ , sin más que elegir  $a$  y  $b$  positivos y  $f(a) < 0$ ,  $f(b) > 0$ .

Busquemos una acotación para  $f$ , para lo cual, nos interesa expresar la derivada de la función como sigue:



$$f'(t) = \frac{\beta}{\alpha} \frac{e^{\lambda t} - 1}{e^{\frac{1}{\alpha} t^\beta}} + \frac{\lambda}{e^{\lambda t}} \frac{e^{\frac{1}{\alpha} t^\beta} - 1}{e^{\frac{1}{\alpha} t^\beta}}$$

Distinguiremos varios casos:

a)  $\beta > 1$  y  $t > 1$ :

$$0 < f'(t) < \beta \frac{\frac{1}{\alpha} t^\beta}{e^{\frac{1}{\alpha} t^\beta}} + \frac{\lambda}{e^\lambda} < \beta + \frac{\lambda}{e^\lambda}$$

b)  $\beta > 1$  y  $0 < t < 1$ :

$$0 < f'(t) < \beta \frac{\frac{1}{\alpha} t^{\beta-1}}{e^{\frac{1}{\alpha} t^\beta}} + \frac{\lambda}{e^0} < \beta \frac{1/\alpha}{1} + \lambda = \frac{\beta}{\alpha} + \lambda$$

c)  $\beta < 1$  y  $t > 1$ :

$$0 < f'(t) < \beta \frac{\frac{1}{\alpha} t^{\beta-1}}{e^{\frac{1}{\alpha} t^\beta}} + \frac{\lambda}{e^\lambda} < \beta \frac{1/\alpha}{\frac{1}{e^\alpha}} + \frac{\lambda}{e^\lambda} = \frac{\beta}{\alpha} \frac{1}{\frac{1}{e^\alpha}} + \frac{\lambda}{e^\lambda}$$

d)  $\beta < 1$  y  $0 < t < 1$ :

En este caso, la cota para  $f'$  es algo más complicada de encontrar, pero basándonos en que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{\lambda t} - 1}{t^{1-\beta}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\lambda}{1-\beta} t^\beta e^{\lambda t} = 0$$

se encuentra la cota

$$0 < f'(t) < \frac{\beta \lambda e^\lambda}{\alpha(1-\beta)} + \lambda(e^{\frac{1}{\alpha}} - 1)$$

Por lo tanto, en cualquier caso, podemos utilizar el método

$$t_{n+1} = t_n - \frac{1}{M} \left[ p_\Sigma + \frac{1 - e^{\lambda t_n} - e^{\frac{1}{\alpha} t_n^\beta}}{e^{\left(\frac{1}{\alpha} t_n^\beta + \lambda t_n\right)}} \right]$$

tomando como  $M$  la cota indicada para cada caso, y partiendo de cualquier punto  $t_0$  positivo.

En definitiva, el mecanismo para evaluar cuantitativamente la confianza en el control interno sería:

a) Estimar los parámetros de las distribuciones que se le suponen a los elementos de las distintas transacciones.

b) Construir la función de estructura del sistema de control interno.

c) Fijada la confianza que queremos conseguir, determinaremos el tiempo sin fallo y, al compararlo con el periodo al que se refiere el informe sacaremos las conclusiones.

Sabemos que la metodología anterior conlleva una dificultad técnica pero, una vez estudiada su aplicación será accesible a cualquier persona sin que tenga que ser experto en Fiabilidad, Estadística, Matemáticas, etc.

## BIBLIOGRAFÍA

[1] ERNST & YOUNG, Cómo aplicar la nueva normativa sobre Auditorías de Cuentas. Manuales de Gestión 2. Cinco Días. Diario de Economía y Negocios.

[2] BOICAC Número 4.

[3] BOICAC Número 2.

[4] HAUPTMANN, Ulrich; Análisis de Árboles de Fallos. Ediciones Bellaterra, S.A. (1986).

[5] SOTSKOV, B. Fundamentos de la Teoría y del Cálculo de Fiabilidad. Editorial MIR. Moscú (1972).

[6] FORNIELES MELERO, Antonio. ¿Sabe usted cómo le auditan?. Partida Doble Número 34, mayo 1993.

[7] KINCAID, D.; CHENEY, W.; Análisis Numérico. Addison-Wesley Iberoamericana, S.A. (1994)

# UNA VALORACIÓN ESPACIAL DE LOS ALMACENES DESAGREGADA POR TIPOLOGÍAS DE CONSUMIDORES

ISABEL P. ALBALADEJO PINA y  
MARIA TERESA DÍAZ DELFA

Dpto. Métodos Cuantitativos para Economía.  
Facultad de Económicas y Empresariales. Universidad de Murcia

## 1. INTRODUCCIÓN

Tanto desde el punto de vista práctico como desde el punto de vista académico (Rogers, 1984), la delimitación de las áreas de mercado representa una información relevante en los análisis de valoración de los almacenes existentes, dedicados, principalmente, al estudio de la actividad comercial de los establecimientos, durante determinados períodos de tiempo, así como a los factores internos y externos que pueden afectar dicha actividad. Pues, desde una perspectiva espacial, estas áreas dan lugar a que los centros de ventas puedan conocer su posicionamiento, su mercado real y potencial, e incluso establecer mediante esta medida las estrategias de actuación de dicho almacén.

Ante la gran variedad de almacenes entre los que, actualmente, un consumidor puede elegir para comprar sus bienes dentro de la distancia máxima que está dispuesto a recorrer, se pone de manifiesto que el factor determinante de las ventas que los establecimientos realizan, es el comportamiento de los individuos ante los almacenes. Dentro del contexto de las áreas de mercado, la metodología de Huff (1963) constituye el primer enfoque de este hecho.

La perspectiva de Huff deriva en la utilización de modelos desagregados de elección de almacén, que permite delimitar las áreas de mercado, bajo el punto de vista de una clientela segmentada por distintas tipologías, tal y como se expone en el segundo apartado de este trabajo.

En este marco presentamos una valoración empírica de las tres grandes superficies comerciales existentes en el casco urbano de Murcia. Lo que nos permite obtener información sobre la intensidad de demanda y el posicionamiento de estos almacenes, desde un punto de vista espacial y desde la perspectiva de los consumidores, segmentados en función de sus características individuales relevantes ante la elección de hipermercado.

## 2. MÉTODO DE HUFF

El objetivo del trabajo de Huff (1963) era proponer una técnica que permitiese delimitar la zona geográfica dónde un establecimiento comercial realiza la totalidad de sus ventas, considerando como el foco principal de su modelo a los consumidores. Pues, en un sistema de ventas, son los consumidores quienes eligen dónde realizar sus compras. Y por tanto, es en definitiva, el comportamiento de los individuos ante los almacenes el factor determinante de las ventas que estos realizan.

En virtud de este enfoque, el modelo que propone Huff consiste en describir el comportamiento de los individuos ante cada uno de los centros de ventas que constituyen el sistema a evaluar, para en función de éste poder obtener una estimación de la zona geográfica dónde residen la totalidad de sus clientes, denotada según Applebaum (1966), como área comercial total. Área que constituye la base para evaluar el funcionamiento del almacén.

Para definir el proceso por el que un consumidor elige de entre un conjunto posible de alternativas, un centro de mercado particular donde obtener un bien o servicio específico, Huff utiliza la siguiente función de probabilidad:

$$p_{ij} = \frac{\frac{m_j}{d_{ij}^\beta}}{\sum_k \frac{m_k}{d_{ik}^\beta}} \quad (1)$$

donde,  $p_{ij}$  denota la probabilidad de que un consumidor en un punto de origen  $i$  realice sus compras en un centro de mercado  $j$ ,  $m_j$  es el tamaño del centro  $j$ ,  $d_{ij}$  es la distancia del punto origen  $i$  al centro  $j$ , y  $\beta$  es un parámetro a estimar.

A través de estas expresiones de probabilidad, Huff describe el comportamiento de los individuos frente a un almacén concreto en función de la localización espacial de éstos. Para ello, una mediante una curva de equiprobabilidad, todos aquellos puntos origen, tales que los individuos situados en ellos tengan igual probabilidad de comprar en el centro en cuestión. Entonces, trazando todas las posibles curvas de equiprobabilidad para un almacén, desde aquellas que tienen un valor de probabilidad muy cercano a uno, a aquellas que lo tienen muy próximo a cero, se obtiene una estimación del área de mercado del centro de forma gradual en términos de estas curvas. Esto es, aquella zona geográfica en la que se sitúan las residencias de los individuos, que tienen una probabilidad mayor que cero de comprar el bien ofrecido por el centro en cuestión, constituye el área de mercado de dicho almacén.

En definitiva, Huff construye para cada uno de los centros de ventas, un mapa de curvas de isoprobabilidad de la superficie evaluada. Curvas que delimitan los sucesivos estratos en los que se divide el territorio, en función de los niveles de elección de ese almacén por parte de los consumidores que allí residen.

### 3. MODELOS DE ELECCIÓN DISCRETA Y ÁREAS DE MERCADO

En el contexto de las áreas de mercado, el procedimiento de Huff supone un cambio de conceptualización en cuanto a las principales metodologías existentes hasta ese momento: la Teoría de los Lugares Centrales (Christaller, 1933; Lösch, 1941) y la Ley de Reilly (Reilly, 1931). Pues, a diferencia de estos procedimientos, que se estructuran desde la perspectiva de la atracción que ejercen los centros de ventas, Huff considera como el foco principal de su modelo a los consumidores. Enfoque, este último, que nos lleva a utilizar modelos probabilísticos de elección, que permiten la introducción de nuevas variables influyentes en la decisión individual de elección de almacén, como nivel de ingresos, edad, sexo, ocupación, y otras más, tal y como se muestra en la recopilación de trabajos empíricos realizada por Shephard y Thomas (1980). La justificación de este hecho radica en que el modelo comportamental que propone Huff, se puede considerar como un caso particular del modelo de elección discreta conocido como Logit Multinomial (McFadden, 1974).

En general, los modelos de elección discreta describen el comportamiento de los individuos ante situaciones de elección usando sistemas probabilísticos, esto es, determinan la expresión de la probabilidad  $p_{ij}$ , de que el elector  $i$ , identificado por un vector de características, elija la alternativa  $j$  caracterizada por una serie de atributos. En el logit multinomial  $p_{ij}$  tiene la expresión siguiente:

$$p_{ij} = \frac{\exp(V_{ij})}{\sum_k \exp(V_{ik})} \quad (2)$$

donde  $V_{ij}$  denota la utilidad observable de que un individuo situado en el lugar  $i$  visite el almacén  $j$ . Utilidad que, usando el desarrollo de Lancaster (1966), podemos considerar función tanto de las características del almacén en cuestión, como de las del individuo. Por consiguiente, en particular, es posible suponer que  $V_{ij}$  viene dado como:

$$V_{ij} = \ln(m_i) - \beta \ln(d_{ij}) \quad (3)$$

En este caso, la expresión (2), se transforma en la (1), que define la formulación de las probabilidades de elección del modelo de Huff. Luego, podemos afirmar que este último modelo es un caso particular del logit multinomial, o equivalentemente, el logit multinomial generaliza al modelo de Huff. Generalización, que tal y como previamente anunciábamos, abre paso a la introducción de otras variables influyentes en la decisión de la elección de almacén. Gautschi (1981) presenta un importante estudio sobre la significatividad de las variables, que intervienen en los modelos de elección para estos análisis de áreas de mercado basados en las curvas de nivel.

En cuanto a la aplicación del modelo logit en la delimitación de las áreas de mercado según la modelización de Huff, podemos destacar por ejemplo, los trabajos de Masson y Moore (1970) y Young (1972). Pero, como este modelo verifica la propiedad de Independencia de las Alternativas Irrelevantes, denotada abreviadamente como propiedad II, presenta ciertas deficiencias para modelizar situaciones de elección espacial, entre las que se encuentra la elección de

almacén (Fotheringham, 1988). Con la intención de salvar estas insuficiencias, especialmente durante la década anterior, se han desarrollado diferentes modelos de elección discreta, entre los que cabe destacar el logit anidado, el probit multinomial o el logit con estructura espacial (Ver Borgers y Timmermans, 1988 y Albaladejo, 1994). Por consiguiente, tal y como apuntan O'Kelly y Miller (1989), la mejor alternativa para modelizar el comportamiento de los consumidores, y poder trazar las curvas de equiprobabilidad de los centros de ventas, es utilizando uno de estos modelos.

## 4. ESTUDIO EMPÍRICO

En este apartado, nuestro objetivo es ilustrar el procedimiento de delimitación de las áreas de mercado anteriormente expuesto, mediante su aplicación a las tres grandes superficies comerciales existentes en el casco urbano de Murcia: Continente, Pryca Infante y Pryca Zaraiche. Con la intención de obtener información sobre su funcionamiento desde una perspectiva espacial, y desde el punto de vista de sus clientes, clasificados en función de sus características individuales.

### 4.1. Muestra y variables a utilizar

Para realizar este estudio, disponemos de una muestra de familias del territorio que nos ocupa, obtenida para un proyecto de investigación de este Departamento (Albaladejo, 1994), mediante un muestreo aleatorio por cuotas de edad, y proporcional al tamaño de las secciones que definen los centros de demanda del territorio.

A través de encuestas personales obtuvimos información sobre el almacén donde habitualmente estas familias realizan sus compras de productos de alimentación, limpieza y aseo, así como de algunas de sus características socioeconómicas: edad, renta, lugar de residencia, número de componentes del núcleo familiar, etc. Información que nos ha permitido construir tres variables, que definen rasgos socioeconómicos de los individuos; y una que hace referencia tanto a éstos como a los almacenes:

**EDAD-** Es la edad de la persona que habitualmente hace la compra.

**FAM-** Número de personas que constituyen la unidad familiar.

**RENTA-** Es la variable que define la renta mensual de la familia. Se trata de una variable discreta, que toma únicamente tres valores: uno, cuando la renta es inferior a las ciento cincuenta mil pesetas mensuales; dos, cuando está comprendida entre ciento cincuenta mil y doscientas cincuenta mil pesetas mensuales; y tres, cuando se supera las doscientas cincuenta mil pesetas mensuales.

**DIST-** Hace referencia a la separación física existente entre los hipermercados y la residencia de los individuos. La distancia utilizada para esta medición ha sido la distancia euclídea.

Además del estudio de investigación arriba mencionado, se ha obtenido información para definir la variable IP:

IP- Indica el nivel de precios del almacén, definido como la suma de los cocientes del precio de cada producto en cada almacén entre la suma de los precios de dicho producto en los tres hipermercados considerados. Para calcular este índice se han considerado un total de treinta productos, en los que se incluyen productos de limpieza y alimentación (carnes, pescado, aceite, legumbres, etc.).

Por tanto, cuanto menor es el valor de IP más económico es el almacén en relación a los precios medios.

## 4.2. Modelo de elección de almacén

Para describir el comportamiento de elección individual de almacén utilizamos el modelo logit con estructura espacial (Bogers y Timmermans, 1988), según el cual la probabilidad de que un consumidor en un punto de demanda  $i$  realice las compras en el hipermercado  $j$ , viene dado por la expresión

$$p_i(Y = j) = \frac{R_j^\Theta \exp(V_{ij})}{\sum_{k=1}^J R_k^\Theta \exp(V_{ik})} \quad (4)$$

donde la variable dependiente  $Y$ , toma tres valores, uno por cada uno de los almacenes evaluados:

$Y = 1$  si el individuo elige Continente

$Y = 2$  si el individuo elige Pryca Infante

$Y = 3$  si el individuo elige Pryca Zaraiche

El término  $V_{ij}$ , siguiendo el criterio de McFadden (1974), va a ser función lineal tanto de las características socioeconómicas de las familias ( $i$ ) como de los atributos de los almacenes ( $j$ ), esto es:

$$V_{ij} = \beta x_{ij} + \gamma_i w_i \quad (5)$$

donde  $x_{ij}$  es el vector de características del almacén  $j$  observadas por el individuo  $i$ ,  $w_i$  un vector de características socioeconómicas del individuo  $i$ , y  $\beta$  y  $\gamma_i$  vectores de parámetros a estimar. Por consiguiente, en nuestro estudio  $x_{ij}$  y  $w_i$  vienen dados mediante las expresiones:

$$x_{ij} = (IP_j, DIST_{ij})'$$

$$w_i = (EDAD_i, FAM_i, REN1_i, REN2_i)$$

donde REN1 y REN2 son dos variables dummy que se construyen para poder introducir la renta, de la siguiente forma:

REN1- toma valor uno si la familia tiene una renta inferior a ciento cincuenta mil pesetas mensuales, es decir si la variable renta toma el valor uno; y cero en cualquier otro caso.

REN2- toma valor uno si la variable renta toma el valor dos; y cero en cualquier otro caso.

Evidentemente si  $REN1=REN2=0$ , la familia tiene una renta superior a doscientas cincuenta mil pesetas mensuales.

En virtud de lo anterior, en nuestro estudio el vector de parámetros  $\beta$  tiene dimensión dos y el  $\psi^i$ , asociado a  $w_i^i$ , tiene dimensión cuatro.

El término  $R_j^\theta$  nos mide la separación espacial de la alternativa  $j$  con las demás, donde  $\theta$  parámetro a estimar, indica el grado en que la localización espacial de una alternativa con respecto a las otras influye en la elección de dicha alternativa. La expresión considerada para  $R_j$  es la especificada por Borgers y Timmermans

$$R_j = \frac{1}{J-1} \sum_{k \neq j} d_{jk} \quad (6)$$

donde  $d_{jk}$  es la separación espacial entre los almacenes  $j$  y  $k$ , y  $J$  el tamaño del conjunto de elección.

Conocidas las variables de nuestro modelo, y su estructura, procederemos a la estimación de los parámetros que en el intervienen. Dado que en la muestra no se dispone de observaciones repetidas estimaremos el modelo utilizando el método de máxima verosimilitud. Todas estas estimaciones se realizan con el programa de ordenador LIMDEP versión 6.0 (Greene, 1991). La primera estimación incluirá la totalidad de las variables definidas, tomando como alternativa base al hipermercado Pryca Zaraiche, ya que es el almacén del que disponemos de más datos.

Una vez obtenida la primera estimación, se observa que variables son las menos significativas, aplicando el test de significatividad de la t-student, y se eliminan del modelo. Una vez eliminadas se procede a una nueva estimación del modelo con el resto de variables explicativas. Repetimos este proceso hasta que todas las variables explicativas incluidas en el modelo tengan una significatividad de al menos un 95%. Por último de entre todas las estimaciones realizadas elegimos la que mejor representa al modelo, según el test del cociente de máxima verosimilitud y el criterio de información de Akaike, siendo ésta:



## Discrete Choice Model

## Maximum Likelihood Estimates

Log-Likelihood..... -456.35

Restricted (Slopes=0) Log-L. -586.66

Chi-Squared ( 5)..... 260.61

Significance Level..... .00000

Variable Coefficient Std. Error t-ratio Prob|t|=x

|       |             |           |         |        |
|-------|-------------|-----------|---------|--------|
| EDAD2 | .17042E-01  | .5791E-02 | 2.943   | .00325 |
| REN11 | -.64629     | .2465     | -2.622  | .00874 |
| REN21 | -.50350     | .2401     | -2.097  | .03600 |
| DIST  | -.83912E-01 | .7132E-02 | -11.765 | .00000 |
| IP    | -.30854     | .7343E-01 | -4.202  | .00003 |

Los comentarios que de este resultado se desprenden son los siguientes:

1.- La variable  $R_j$  no es significativa, lo que implica que este modelo no se muestra sensible a efectos de estructura espacial, esto es, que las características espaciales de un almacén con respecto a los restantes no interviene en las probabilidades de elección.

2.- Las dos variables explicativas que definen las características de los hipermercados han resultado significativas en el modelo, por consiguiente, tanto el nivel de precios del almacén como la distancia de éste al individuo, influyen en la elección de hipermercado por parte de los consumidores del casco urbano de Murcia.

El coeficiente negativo de la variable DIST indica que cuanto mayor sea la separación entre la residencia de la familia y el almacén considerado, menor es la probabilidad de que esa familia compre en ese hipermercado, ceteris paribus. De igual forma, dado que IP también tiene un coeficiente negativo, cuanto mayor sea este índice menor es la probabilidad de elegir ese almacén, ceteris paribus. Y puesto que es el hipermercado Continente el que presenta un valor de la variable IP menor, mayor será la probabilidad de elegir dicho almacén respecto a los otros dos, ceteris paribus.

3.- En cuanto a las variables que hacen referencia a las características socioeconómicas de los individuos, únicamente han resultado significativas la renta y la edad, y no para todos los hipermercados.

El valor negativo del coeficiente de las variables REN1 y REN2 para la elección de Continente, pone de manifiesto que familias con renta inferior a doscientas cincuenta mil pesetas mensuales tienen menor probabilidad de elegir Continente para realizar sus compras que Pryca Zaraiche. Además dado que el coeficiente en valor absoluto es mayor en rentas bajas, la probabilidad de elegir Continente será sensiblemente menor que en el caso de renta media frente a Pryca Zaraiche. La variable EDAD es positivamente significativa para Pryca Infante frente a Pryca Zaraiche; esto es, cuanto mayor sea la edad del individuo que realiza la compra familiar mayor será la probabilidad de escoger Pryca Infante frente a Pryca Zaraiche.

4.3. Curvas de nivel

Para trazar las curvas de equiprobabilidad alrededor de cada uno de los hipermercados de nuestro estudio, necesitamos conocer las probabilidades de selección de estos en cada uno de los diferentes centros de demanda existentes en el territorio considerado (O’Kelly y Miller , 1989).

Nuestra zona de estudio la hemos dividido en un total de veintiséis centros de demanda, tal y como se muestra en la figura 1, siguiendo el procedimiento realizado en el trabajo de Albaladejo (1994). Por tanto, disponemos de un total de veintiséis puntos origen, o puntos desde los que se supone que los individuos del casco urbano de Murcia emprenden sus movimientos de compra.

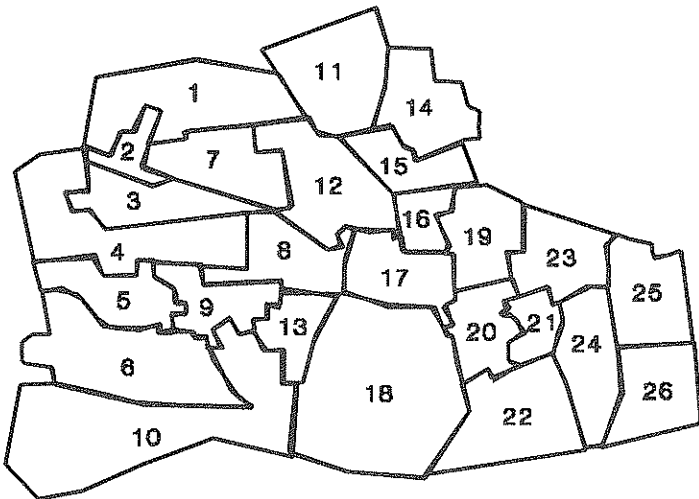


Figura 1  
Centros de demanda de la zona del casco urbano de Murcia correspondiente a la margen izquierda del río Segura

Ahora bien, dado que en nuestra estimación hemos obtenido que las características socioeconómicas de los individuos: edad y renta, resultan relevantes en la elección de almacén, para calcular las probabilidades de selección de esos almacenes procedemos a realizar una segmentación de las familias del casco urbano de Murcia en función de esas variables, de la siguiente forma:

| EDAD           | RENTA BAJA | RENTA MEDIA/ALTA |
|----------------|------------|------------------|
| hasta 30 años  | tipo 1     | tipo 5           |
| de 31 a 40     | tipo 2     | tipo 6           |
| de 41 a 50     | tipo       | tipo 7           |
| mas de 50 años | tipo 4     | tipo 8           |

A continuación, calculamos las probabilidades de elección de cada uno de los tres almacenes para individuos de los ocho tipos residentes en todos los centros de demanda. Con estos datos, y mediante el programa de ordenador SURFER versión 4.14, trazamos las curvas de isoprobabilidad para cada uno de los hipermercados y para los ocho tipos de familias considerados. Con la intención de ilustrar este estudio presentamos las curvas de isoprobabilidad calculadas para las familias de tipo 4 y tipo 6.

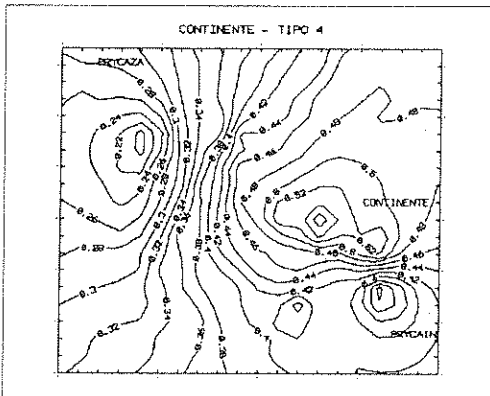


Figura 2. Familias con renta inferior a 150.000 pts. mensuales y edad superior a 50 años

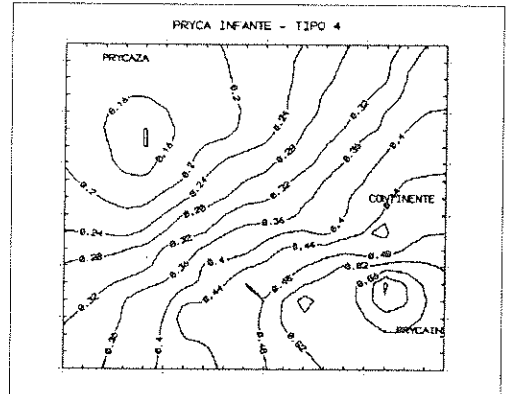


Figura 3. Familias con renta inferior a 150.000 pts. mensuales y edad superior a 50 años

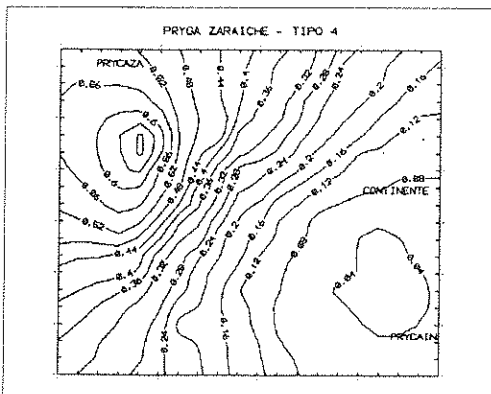


Figura 4. Familias con renta inferior a 150.000 pts. mensuales y edad superior a 50 años

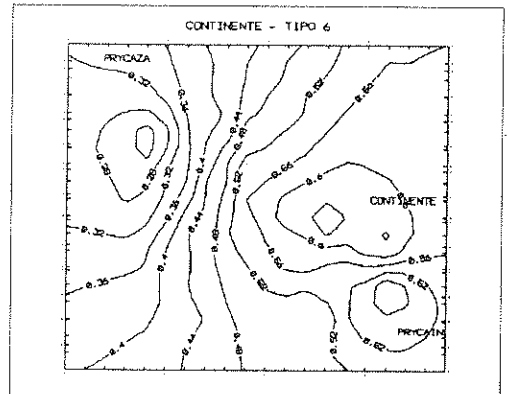


Figura 5. Familias con renta superior a 150.000 pts. mensuales y edad comprendida entre los 31 y 40 años.

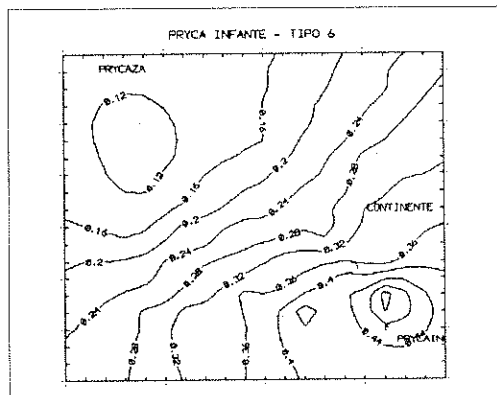


Figura 6. Familias con renta superior a las 150.000 pts. mensuales y edad comprendida entre 31 y 40 años.

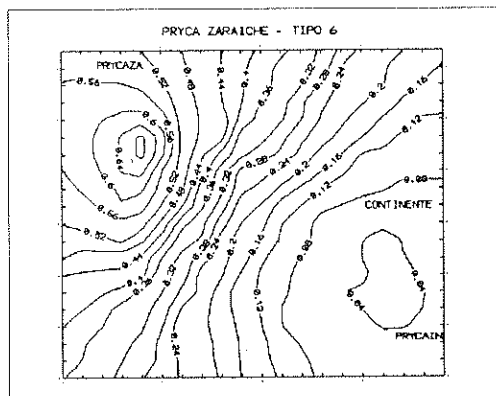


Figura 7. Familias con renta superior a las 150.000 pts. mensuales y edad comprendida entre 31 y 40 años.

Simplemente con la observación de las figuras 2 a 6, se obtiene una útil información de como se extienden las curvas de isoprobabilidad a lo largo del territorio evaluado. Destaquemos que cuanto más alejada está la curva del hipermercado en cuestión, menor es el valor de su probabilidad, tal y como se esperaba, pues hemos obtenido que la variable distancia influye negativamente en la elección de almacén. Aunque, también se desprende de esa observación, que la probabilidad de elección de Continente disminuye en menor proporción que la de los otros dos hipermercados cuando nos alejamos de ellos. Este hecho puede tener su justificación, en que estos dos últimos hipermercados pertenecen a una misma cadena: Pryca, y se encuentran en puntos extremos de la zona evaluada.

Dado que nuestro conjunto de elección está formado por tres almacenes, podemos considerar como el área donde la probabilidad de elección de un almacén domina a la de los otros, aquella región limitada por una curva de isoprobabilidad con un valor de aproximadamente 0.5. Pues, dado que la suma de las probabilidades de elección de los tres almacenes en cada punto del territorio debe ser uno, en esa zona de dominio estamos garantizando que ningún otro almacén sea preferido al almacén en cuestión.

Bajo esta perspectiva, observamos que para las familias con renta media-alta, y edad, del individuo que habitualmente hace la compra, entre 31 y 40 años, el área de dominio de Continente, es mayor que la de los otros dos almacenes. Además, observemos que para estas familias prácticamente no se puede hablar de zona de dominio para Pryca Infante. Sin embargo, en la zona de dominio de Continente, únicamente residen el cuarenta y cuatro por ciento de las familias de tipo 6 que habitualmente realizan sus compras de productos de alimentación, limpieza y aseo en este hipermercado. Mientras que en la zona de dominio de Pryca Zaraiche residen el cuarenta y ocho por ciento de las familias de tipo 6 que eligen dicho hipermercado para sus compras habituales, lo que pone de manifiesto, que la demanda de Pryca Zaraiche se encuentra bastante más concentrada desde una perspectiva espacial que la de Continente.

Para familias de tipo 4, destaquemos que la zona de dominio de Pryca Zaraiche prácticamente no sufre variación, mientras que si se alteran las de Continente y Pryca Infante, producién-

dose una disminución de la primera y un aumento de la segunda. Hecho que podemos justificar, dado que estamos considerando familias con una renta baja y con una edad de la persona que habitualmente hace la compra superior a la que habíamos considerado para las de tipo 6.

## 5. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos utilizado los modelos de elección discreta como una herramienta en los análisis de valoración de los almacenes existentes. A través de las probabilidades de elección que nos definen estos modelos, hemos construido para cada almacén y para cada tipo de clientes un mapa de curvas de isoprobabilidad. Mapas que nos proporcionan una útil información de la elección de cada uno de los almacenes a lo largo del territorio evaluado. Tal y como comprobamos en la evaluación empírica que realizamos de los tres hipermercados existentes en el casco urbano de Murcia .

Mediante este estudio empírico, se ha puesto de manifiesto que la renta de la familia, y la edad de la persona que habitualmente hace la compra, son características altamente influyentes en la elección de almacén. Pero, la variable que realmente determina esta elección, es la separación física entre la localización del almacén y la de la residencia del individuo.

Los mapas de curvas de isoprobabilidad para estos tres almacenes nos permiten, además de mostrar estos hechos, obtener una división del casco urbano de Murcia en diferentes estratos, en función de sus probabilidades de elección. Mediante una simple observación de estos mapas, se detecta que el hipermercado Pryca Zaraiche, el más antiguo de los evaluados, está fuertemente arraigado en esta comunidad, mostrando poca variabilidad en función de las características socioeconómicas de los individuos, al contrario de lo que ocurre con los otros dos almacenes.

## BIBLIOGRAFÍA

ALBALADEJO, I.P. (1994). "Modelos de Elección Espacial y áreas de Mercado". Proyecto de Investigación del Departamento de Métodos Cuantitativos de la Universidad de Murcia.

APPLEBAUM, W. (1966). "Methods for Determining Store Trade Areas, Market Penetration and Potential Sales". *Journal of Marketing Research*, 3:127-141.

BORGERS, A. y H. TIMMERMANS (1988). "Choice Model Specification, Substitution and Spatial Structure Effects: A Simulation Experiment". *Regional Science and Urban Economics* 17:29-47.

CHRISTALLER, W. (1933). *Central Places in Southern Germany*. English traslation by C. W. Baskin (1966). Englewood Cliffs: Prentice-Hall. New Jersey.

FOTHERINGHAM, A.S. (1988b). "Consumer Store Choice and Choice Set Definition". *Marketing Science*, Vol. 7, nº 3:299-310.

GAUTSCHI, D.A. (1981). "Specification of Patronage Models for Retail Center Choice". *Journal of Marketing Research*, 18:162-174.

HUFF, D.L. (1963). "A Probabilistic Analysis of Shopping Center Trade Areas". *Land Economics*, 39:81-90.

LANCASTER, K. (1966). "A New Approach to Consumer Theory". *Journal of Political Economy*, 74:132-157.

LÖSCH, A. (1941). *The Economics of Location*. Translated by W.H. Woglom y F. Stolper (1954). New Haven: Yale University Press.

MASON, J.B. y C.T. MOORE (1970). "An Empirical Reappraisal of Behavioristic Assumptions in Trading Areas Studies". *Journal of Retailing*, 50:31-37.

McFADDEN, D. (1974). "Conditional Logit Analysis of Qualitative Choice Behavior". En *Frontiers in Econometrics*, ed. P. Zarembka, Academic Press, New York.

O'KELLY, M.E. y H.J. MILLER (1989). "A Synthesis of Some Market Area Delimitation Models". *Growth & Change* (Summer): 14-33.

REILLY, W.J. (1931). *The Law of Retail Gravitation*. Pilsbury: New York, republished in 1953.

ROGERS, D.S. (1984). "Gravity Models". En *Store Location and Store Assessment Research*, ed. R.L. Davies y D.S. Rogers. John Wiley. New York.

SHEPHARD, I.D. y C.J. THOMAS (1980). "Urban Consumer Behaviour". En *Retail Geography*, ed. J.A. Dawson.

YOUNG, W.J. (1972). "Delimiting Shopping Center Trade Areas with a Huff Models". *Annals of the Association of American Geographers*, 1: 132-136.

# **EL GROUPWARE Y EL MARKETING COLABORANDO EN UN MODELO DE CALIDAD**

**ANA M<sup>a</sup> AREITIO BERTOLIN**

Facultad de C.C.E.E. - Dpto. de Economía Aplicada I  
Universidad del País Vasco (UPV/EHU)

## **1. LA CALIDAD COMO ELEMENTO DIFERENCIADOR PARA EL PRODUCTO/SERVICIO: CSI**

Los avances tecnológicos ocurridos en los últimos años han hecho aparecer nuevos mercados, nuevos productos/servicios, en definitiva nuevas necesidades y demandas, que han revolucionado el mundo económico-empresarial, e incorporado nuevos sistemas de información especializados en el desarrollo, producción, comercialización y difusión de estas tecnologías emergentes. Toda empresa como ente socio-económico que es, posee:

a) Información. De hecho toda empresa u organización es un sistema informacional (SI), que coexiste inmerso en el entorno que le rodea. La información de que dispone proviene de diferentes fuentes y posee distintos formatos, lo cual supone problemas de almacenaje, acceso y actualización.

b) Empleados. De hecho en toda empresa existe una estructura organizativa que se materializa en un entramado de relaciones humanas entre los distintos trabajadores del sistema empresarial. Para cada empleado existirán relaciones inherentes a su cargo y el acceso a los recursos del sistema variará según la función que desempeñe.

c) Recursos. Cada organización empresarial posee sus propias herramientas, dispositivos y todo tipo de objetos materiales e inmateriales con funcionalidad, que en general constituyen los recursos de que dispone para desarrollar su actividad.

d) Procedimientos y políticas. Desde la planificación, los métodos, las reglas, hasta el diseño final del producto/servicio pertenecen a un empresa concreta, aquella que pretende atender una demanda específica.

e) Tecnología. Cada sistema informacional posee su propia tecnología que le hace apto para enfrentarse a la competencia de los mercados. Además, la competitividad del entorno obliga a la empresa actual a aprovechar las ventajas que suponen la incorporación de las nuevas tecnologías en su vida. Desde la simple adquisición de un ordenador para el control de las ventas, hasta el establecimiento de sistemas de gestión de bases de datos, inmersos en arquitecturas cliente/servidor, son formas de beneficiarse de las nuevas tecnologías en el mundo empresarial.

Según esto, podemos definir al ente empresarial, como un sistema informacional, que será el conjunto formado por los siguientes conjuntos fundamentales:

$$S.I. = I \cup E \cup R \cup P \cup T$$

siendo

$I =$  {conjunto formado por las informaciones del ente}

$E =$  {conjunto formado por los empleados del ente}

$R =$  {conjunto formado por los recursos del ente}

$P =$  {conjunto formado por los procedimientos y políticas del ente}

$T =$  {conjunto formado por las tecnologías utilizadas}

Actualmente asistimos a la aparición de nuevas demandas correspondientes a productos/servicios innovadores que son tecnología puntera, convertida en bienes de consumo y servicios, para clientes que los requieren. Estos clientes/consumidores podrán ser otras empresas u organizaciones, como hemos visto anteriormente, o podrán ser individuos particulares, que de forma independiente deseen utilizar las nuevas tecnologías por motivos diversos (teletrabajo, hobbies, etc). Fijaremos nuestra atención en estos sistemas de información especializados en proporcionar las nuevas tecnologías disponibles y dado que toda empresa se encuentra inmersa en el entorno que la rodea y puede considerarse como un complejo entramado de interacciones humanas, que manejan información y tecnología; de hecho participará en la carrera de la competitividad, donde la confluencia del Marketing, la gestión de Recursos Humanos y la dirección de Operaciones, juegan un papel determinante, que conlleva el mantenimiento de su existencia como ente activo.

El término calidad vuelve a surgir hoy con mas fuerza que nunca, en el corazón de las empresas u organizaciones y especialmente en estos nuevos sistemas de información emergentes. Hablar de calidad supone algo mas que hablar de la obtención de un determinado nivel adecuado a los requerimientos del mercado, para cada una de las características físicas, funcionales y estéticas de un producto/servicio. Así, la calidad debe considerarse una herramienta estratégica de primer orden, que afecta a la totalidad del sistema de información empresarial (calidad del sistema informacional: CSI), e implica toda una nueva filosofía de trabajo (el término calidad total: CT, fué utilizado por Deming y Feigenbaum). Siguiendo con la notación utilizada anteriormente podemos definir CSI como el conjunto formado por:

$$C.S.I. = CI \cup CE \cup CR \cup CP \cup CT$$



siendo

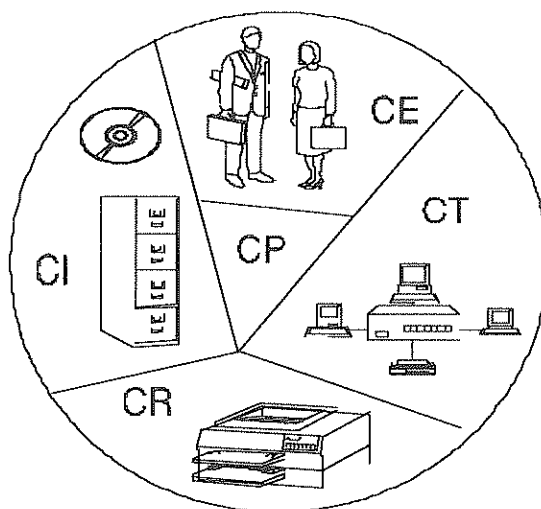
CI={calidad de la información del SI}

CE={calidad de los empleados del SI}

CR={calidad de los recursos del SI}

CP={calidad de los procedimientos y políticas del SI}

CT={calidad de las tecnologías del SI}



*Fig. 1. La calidad del SI.*

La calidad entendida como CSI, implica por tanto un proceso dinámico, sin fin, que abarca a todo aquello que sea susceptible de aportar mejoras en la satisfacción del cliente. La información manejada por el sistema deberá ser útil, actual, fidedigna,... La plantilla de empresa deberá estar convenientemente formada, motivada,... Los recursos deberán ser los precisos, fiables,... Los procedimientos y políticas seguidas durante el proceso deberán estar perfectamente definidas y establecidas,...; y dado que estamos fijándonos en el sector de organizaciones y empresas que ofrecen nuevas tecnologías, será preciso que ellas mismas se beneficien de su incorporación en los procesos que desarrollan. Será entonces al encontrar estos sistemas de información automatizados (SIAs), que utilizan los ordenadores como herramientas de trabajo, cuando surge el término CSIA (calidad del sistema de información automatizado).

De este modo, en la búsqueda por alcanzar una mayor calidad, se han sobrepasado las aportaciones del campo de la Ingeniería, tendiendo progresivamente a encontrar nuevas respuestas y estrategias en el mundo del Marketing. En definitiva, hoy la CSI para una organización o empresa debe enfatizar en alcanzar al cliente, logrando su satisfacción por las características del producto/servicio que adquiere. Es preciso diseñar y confeccionar hardware, software o proporcionar servicios con calidad, pero también hay que lograr hacerlo de acuerdo con las expectativas del cliente.

Considerando que la estrategia corporativa se refiere a la empresa en su conjunto, ésta deberá definirse como el resultado de considerar: un perfil de cliente al que llegar, una necesidad a cubrir, un proceso que permita satisfacerla y un conjunto de nuevas tecnologías disponibles en el mercado, para ser incorporadas al proceso.

Como puntos importantes a tener presentes a la hora de confeccionar el perfil de una empresa competitiva podemos citar los siguientes, todos ellos relacionados como puede verse con la CSI:

- Establecer una estructura jerárquica mas horizontal, donde existan unidades empresariales con cierta autonomía.
- Encontrar un elemento singular, “único”, con respecto a la competencia, que sea percibido como “diferencial”. Ese será el producto/servicio de la empresa.
- Concienciación e implicación de todos los empleados de la empresa en la necesidad de ofrecer calidad. Se trata de adoptar una nueva filosofía de mejora constante.
- Sensibilización a todos los niveles, ante las necesidades y demandas del cliente, satisfaciéndole de la mejor manera posible.
- Reducir costos, reduciendo fallos y errores. La productividad debe mejorar cada día.
- Implantación de planes de formación continua para los empleados.
- Incorporación de nuevas técnicas, materiales y maquinarias innovadoras. Automatización del sistema de información existente, mediante la incorporación del ordenador como herramienta.
- Buena disposición a la incorporación de redes de información y servicios dentro del sistema empresarial y en relación con otras empresas, que permitan a los empleados trabajar con mas recursos, utilizando experiencias e información disponibles en otras compañías del sector,...
- Conseguir un beneficio razonable, resultado de la transformación experimentada día a día.
- ...

En efecto, en un mercado competitivo las expectativas del cliente suelen ser elevadas y la CSI puede servir como elemento diferenciador, implicando el logro de un mejor producto o de un servicio satisfactorio.

Sin embargo, dado que detrás de cualquier planteamiento empresarial debe existir el equilibrio económico-financiero correspondiente, habrá que descubrir cómo combinar:

- El logro del conjunto de atributos físico-técnicos perseguidos por los clientes.
- Con la formación, motivación y otras políticas de recursos humanos, dirigidas todas ellas a los trabajadores de las empresas, figuras decisivas en la búsqueda de una mayor CSI.
- Y con las posibilidades económicas disponibles en el sistema.

## **2. LA CSI DESDE SU PERSPECTIVA HUMANA: LOS RECURSOS HUMANOS**

Todo sistema de información esté o no automatizado presenta una vertiente humana. De hecho, los empleados que trabajan día a día en él, serán los últimos responsables de que el producto/servicio resultante tenga mejor o peor calidad. Un SI puede disponer de información, recursos, tecnología, procedimientos y políticas eficaces, con un alto nivel de calidad, pero si los empleados no son capaces de utilizarlas eficientemente en el desarrollo de sus funciones ¿de qué sirven?, ¿obtendrán un resultado con calidad?.

Por ello, la CSI puede verse desde muy distintas facetas, pero vamos a considerar la perspectiva del empleado, como una forma de colaborar en su progreso; para él calidad significará estar orgulloso de su trabajo, contribuyendo con ello a que la empresa permanezca en el mercado. Sin embargo, este planteamiento resulta demasiado simplista considerando la subjetividad de esta afirmación, para todos y cada uno de los trabajadores que integren la plantilla de un SIA.

La formación, la motivación y la mejora de las características del puesto de trabajo han sido durante años fórmulas utilizadas para lograr lo mejor de cada empleado. En la actualidad el empleado/trabajador de un sistema de información dirigido a proporcionar productos/servicios tecnológicos, asiste al crecimiento de la conectividad entre los distintos subsistemas de la empresa u organización, debido en gran parte a la incorporación de las redes locales (LANs) en la vida empresarial; y a la aparición de la conectividad entre sistemas de información independientes (empresas del sector,...), como resultado de la construcción de redes de área extendida (WANs), que les permite comunicarse mas eficientemente entre si. Esta conectividad ha influido en gran manera sobre todos ellos, permitiendo desarrollar y apostar por la coordinación. Los trabajadores de los diferentes departamentos comparten información, la intercambian, cooperando y coordinando sus actividades, gracias a la incorporación de sistemas de gestión de bases de datos, o “repositorios” en arquitecturas cliente/servidor; e incluso pueden enviar y recibir mensajes entre si, gracias a la incorporación de servicios de mensajería electrónica.

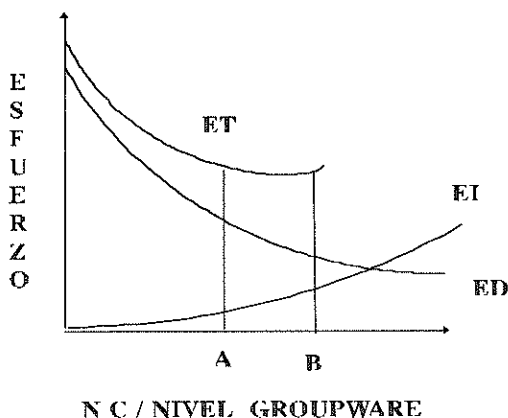


Figura (2a). Caso de un sistema centralizado

El término Groupware significa trabajar en equipo, utilizando el ordenador como herramienta y soporte. Por ello, si se desea seguir el camino de la CSIA, groupware deberá ser la filosofía de trabajo que radique en el sistema, aportando colaboración, en la distribución de las tareas y un ambiente de trabajo mas cómodo para cada empleado. La cooperación óptima entre los empleados, permite dividir el trabajo y las responsabilidades en componentes integrantes de un conjunto. Sin embargo, toda división debe ser gestionada perfectamente para lograr el resultado esperado.

Las FIGURAS (2a) y (2b) muestran el efecto que supone la disgregación del sistema informacional en componentes operativos (nivel de groupware) respecto del esfuerzo para alcanzar el producto/servicio deseado, tanto en el caso de considerar:

(a) Un sistema de información centralizado, en el cual coexista un ordenador central para llevar a cabo los procesos, poseedor de toda la información disponible y un conjunto de terminales o estaciones de trabajo que formen un sistema multiusuario, repartiéndose el tiempo de proceso y recursos del primero.

(b) Como en el de considerar un sistema de información distribuido, en el cual coexistan procesos independientes ejecutados en ordenadores independientes, compartiendo en algunos casos la información disponible, o recursos como periféricos caros: impresoras laser,...

Para observar este efecto utilizaré:

- La curva que representa el esfuerzo que habrá que realizar para lograr integrar los componentes del sistema, haciendo que colaboren entre si (EI). A medida que aumenta el número de componentes, aumentará el esfuerzo que hay que efectuar para integrarlos y lograr la coordinación adecuada.

- La curva que representa el esfuerzo que habrá que realizar para lograr disgregar el SI en ese conjunto de componentes activos (ED). Cuanto menor sea el número de componentes, mayor será el esfuerzo necesario para descomponer el SI.

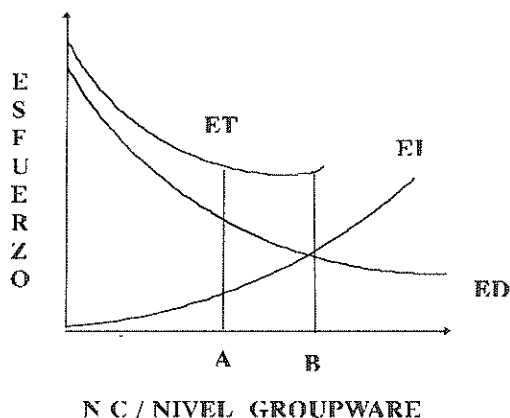


Figura (2b). Caso de un sistema centralizado

Dado que ambos esfuerzos se mueven en direcciones opuestas, podemos obtener una curva que represente el resultado de combinar las dos anteriores. Esta nueva curva corresponderá al esfuerzo total (ET) que un SI (ya sea centralizado, o descentralizado) debe realizar para obtener el producto/servicio, razón de su existencia. Si observamos la curva obtenida ET descubriremos que únicamente para los valores contenidos dentro del intervalo [A, B], la división habrá merecido la pena, dado que el nivel de esfuerzo a realizar será el menor posible. Existirá un intervalo válido de valores de entre los cuales se elegirá uno; éste será el número de componentes en que se dividirá el SI y corresponderá al nivel de groupware óptimo en relación con el esfuerzo total a realizar.

La FIGURA (2a) representa el caso de un sistema centralizado, mientras que la FIGURA (2b) es el de un sistema distribuido. La curva que muestra el comportamiento del EI estará mas próxima al eje Y en el caso distribuido, ya que para un número de componentes X, al existir independencia de procesos, el esfuerzo será mayor que en el caso centralizado. Sin embargo, la curva ED permanecerá igual en ambos casos, ya que para un número de componentes X, el esfuerzo será el mismo sea el sistema centralizado o distribuido.

El ET descrito es aquel esfuerzo preciso para llevar a cabo el proceso/servicio con un grado de eficiencia óptimo. Por ello, dado que la eficiencia es un factor de calidad [McCA 77], podemos concluir que el intervalo de valores [A, B] obtenido, correspondiente al intervalo de niveles de groupware adecuados a la organización en cuestión, serán los idóneos, siempre y cuando la empresa apueste por la CSI. ¿Cuál será el valor concreto de A y B?. Dependerá de la organización o empresa, pero nos acotarán el nivel de groupware adecuado a ella, que proporcionará un nivel de calidad óptimo.

### 3. LA COLABORACION DEL MARKETING EN EL CAMINO DE LA CSI

Paralelamente, dado que el objeto de un sistema de información será desarrollar un producto/servicio para cubrir una demanda, correspondiente a un grupo de consumidores/clientes; la CSI considerada desde su punto de vista significará que dicho producto/servicio satisface perfectamente sus necesidades; aspecto del todo subjetivo y que depende de los criterios en los que base su elección. Así por ejemplo un producto/servicio caro no tiene porque tener calidad superior a otro mas barato; y para un cliente determinado el mas barato puede que posea las características deseadas, determinantes de su elección.

Los departamentos de Marketing de estos SIAs que abastecen de tecnología al mercado, son responsables de una parte importante del camino de la CSIA en el producto/servicio ofertado. Las investigaciones de mercado orientadas a la calidad (siguiendo la norma europea UNE 66-904) permitirán: diferenciar la necesidad de un producto/servicio; determinar la demanda del mercado y el sector concreto, para asignar cantidad, precio, plazo,...; establecer los requisitos del cliente/consumidor; y comunicar estos requisitos claramente al resto del sistema.

El cliente/consumidor es una figura decisiva de este entramado socio-económico-cultural, que en base a información recogida proveniente del entorno, es capaz de tomar o no la decisión de compra. De hecho, la secuencia que sigue es la siguiente: primero identifica las alternativas disponibles del producto/servicio; luego, organiza y analiza la información correspondiente a cada alternativa; selecciona los criterios en base a los cuales decidirá finalmente, teniendo en cuenta que estos criterios varían según el sujeto y pueden ser personales, influenciados por otros individuos: amigos, familia, etc, o incluso influenciados por una campaña publicitaria de una empresa, etc; y por último, compara las alternativas, decidiendo una de entre todas ellas.

Aunque bien es cierto que si el precio del producto/servicio supera sus posibilidades, y si sus características no satisfacen sus necesidades, y si su duración no sirve a sus propósitos y si su marca no tiene una buena imagen, el consumidor generalmente no adquirirá el producto/servicio, también es cierto que la calidad de un producto/servicio puede llegar a encontrarse como resultado de la evaluación de su precio, sus características, su duración, su marca o mas frecuentemente por una combinación de estos criterios, en base a los cuales el cliente pueda decidir adquirirlo.

El precio, el diseño de sus características, la duración y la marca suelen ser frecuentemente criterios en base a los cuales el cliente valora la calidad de un producto/servicio y toma sus decisiones. Por tanto, estos cuatro criterios seleccionados del conjunto total de criterios posibles pueden servirnos para comprender mejor cómo satisfacer la demanda, fijando nuestra atención en el modo en que toma el consumidor sus decisiones de compra o adquisición.

En la FIGURA (3), tenemos el caso de un cliente que debe decidir entre cuatro productos/servicios P1, P2, P3, P4 (por ejemplo cuatro workstations de las cuales desea adquirir una como servidor de la red existente en su organización). Consideraremos como criterios para la toma de decisión su precio P, sus características CR, su duración D y su marca M (es decir la imagen de la empresa que lo produce). En base a ellos el cliente percibirá la calidad del producto/servicio.

Los valores existentes en la tabla para cada producto/servicio (en una escala del 1 al 9), para cada criterio serán la puntuación que el usuario les asigna a la hora de tomar su decisión, obtenida en base a información recogida por él mismo (del entorno).

**Figura 3: Valoración de Criterios**

|    | P1   | P2    | P3   | P4   |
|----|------|-------|------|------|
| P  | 5    | 6     | 6    | 8    |
| CR | 3    | 5     | 7    | 4    |
| D  | 3    | 4     | 5    | 4    |
| M  | 6    | 5     | 5    | 9    |
| C  | BAJA | MEDIA | ALTA | BAJA |

Algunas de las conclusiones extraídas de este caso son:

- Cuando existe mas de un criterio con puntuación por debajo de la media (5 en nuestro caso), automáticamente el cliente concluye que su calidad es baja; no es el producto/servicio buscado. Este sería el caso de P1 y P4.

- Cuando existe un criterio con puntuación por debajo de la media, puede compensarse si existe otro criterio cuya puntuación supere la media notablemente; sin embargo el cliente no quedará completamente satisfecho con él, para él su calidad será media. Este sería el caso de P2.

Sin embargo en este caso hemos procedido a simplificar la realidad porque:

- El cliente toma sus decisiones en base a un juego de criterios mas complejo.
- Generalmente cada criterio tiene a su vez un peso o significación distinto a los demás.

De aquí que por ejemplo:

- el precio no debe ser el criterio mas decisivo para el cliente,
- y por el contrario, las características que posee dicho producto/servicio deberían ser el criterio de mayor peso en su decisión.

- Ante una elección por parte del cliente de un producto/servicio puede surgir la duda, motivada por: el número de alternativas, la similitud entre ellas, la importancia psicológica del producto/servicio (¿realmente lo necesito?), la credibilidad de la fuente de información utilizada, la comunicación materializada en forma de publicidad,...

## 4. ¿QUE CUESTA LA CALIDAD?

Sin duda alguna la calidad no debe ser entendida como una meta que alcanzar, sino que es una actitud, una cultura, una forma de ser que sitúa a las empresas y organizaciones en un “lugar privilegiado” del camino de la competitividad existente en los mercados actuales; pudiendo hoy en día y en el futuro significar la diferencia entre vivir o morir. Será por tanto preciso:

- \* Definir unos objetivos y asignarles recursos.
- \* Ejecutar acciones para el logro de los objetivos establecidos.
- \* Comparar los resultados logrados obtenidos a partir de las acciones ejecutadas, con los objetivos.
- \* Ejecutar acciones correctoras según las desviaciones producidas.

Aunque nadie pueda dudar de que la calidad es una buena estrategia a todos los niveles, el problema surge cuando intentamos medirla por medio de indicadores financieros, como por ejemplo el beneficio. De hecho la calidad también debería medirse por indicadores no financieros, considerando la medida del grado de satisfacción del cliente. Sin embargo, la “no satisfacción” del cliente supone la no generación de beneficios para la empresa, de forma que la diferencia entre la satisfacción real del cliente y la deseada por la empresa implica una diferencia equivalente entre el beneficio real y el esperado.

Muchos opinan que la calidad es cara, dado que supone en cierta forma una inversión para el futuro, materializada en rentabilidad a medio-largo plazo. Pero sin lugar a dudas la “no calidad” es generalmente aún mas cara, sobre todo si consideramos el coste que trae consigo la gestión y el control poco óptimo de cualquier producto/servicio:

a) Los productos/servicios no conformes. Suponen costes por rechazos, devoluciones, reclamaciones, reembolsos, pérdida de clientes, acciones legales con el consumidor (individual) o con organizaciones de protección al consumidor, deterioro de la imagen, etc.

b) Los productos/servicios con retrasos. Suponen costes por penalizaciones, transportes y procedimientos especiales, pérdida de clientes, deterioro de la imagen, etc.

c) Las pérdidas de productos y materiales. Suponen costes por falta de materiales debido a errores en los recuentos, robos, roturas, sobreconsumo de materiales, daños ocurridos en el transporte y almacenamiento de los productos, etc.

d) Infrautilización de los equipos (humanos, materiales). Suponen costes por mala distribución en las tareas, falta de personal, personal no adiestrado, rupturas de stock, etc.

e) Bajo rendimiento del personal. Suponen costes por absentismo, poca motivación, falta de eficacia debida a la poca formación, al tiempo dedicado a gestionar pérdidas, etc.



f) Relaciones públicas mal planificadas. Suponen costes por una atención al cliente deficiente, campañas publicitarias mal diseñadas (no queda claro si satisface o no sus necesidades), en general pérdidas de ventas y clientes, sobrecostes, etc.

Dado que resulta casi imposible evaluar en cifras concretas cada uno de estos problemas, bastaría con afirmar en términos humanos, que sin clientes no hay demanda; de modo que un cliente/consumidor no satisfecho puede ser en muchos casos una medida de calidad objetiva. Así las reclamaciones deben servir para descubrir que algo en nuestro SIA no funciona con la calidad deseada y que el camino de la CSIA necesita “reasfaltarse” si queremos seguir resultando competitivos.

## 5. CONSIDERACIONES FINALES

Cuando el cliente/consumidor demanda un producto/servicio, múltiples empresas u organizaciones acuden a competir en el mercado por esa demanda. En concreto, la demanda de las nuevas tecnologías es un hecho actualmente, sin embargo pocos SIAs que las proporcionan conseguirán mantenerse como entes activos. ¿Qué puede contribuir a hacerlas competitivas?. La calidad viene a darnos respuesta. ¿Pero cómo progresar en el camino de la CSIA?

Si consideramos el aspecto relativo a los recursos humanos disponibles, la filosofía groupware puede ayudarnos a fomentar la cooperación y a la vez la distribución de tareas. Tendremos que ser capaces de descubrir el intervalo de niveles groupware, que aportan calidad al sistema.

Si consideramos por otra parte como puede ayudar el Marketing en esta labor, la respuesta está en nuestros clientes/consumidores. Descubriendo sus criterios de selección y sus necesidades, la calidad del producto/servicio será óptima.

## 6. BIBLIOGRAFIA

[AREI 94] AREITIO, M.G. AREITIO, A. y AREITIO, J. “Herramientas avanzadas de diseño para redes de ordenadores”. Revista de Electrónica. nº 470. Enero 1994. Pags. 64-67. Barcelona.

[CROS 79] CROSBY, P.B.: Quality is free. McGraw-Hill, 1979.

[DEMI 86] DEMING, W.E.: Out of the crisis. Quality, Productivity and Competitive Position. Ed. Cambridge University Press, 1986.

[GROO 93] GROOCKOCK, J.M.: La Cadena de la Calidad. Ed. Diaz de Santos, 1993.

[HAMI 76] HAMILTON, D.: The Consumer in our Economy. The Riverside Press. Cambridge, 1976.

[LESC 91] LESCA, H.: Información y cambio en la empresa. Fundemi Books Ed. Gestión 2000. Barcelona, 1991.

[McCA 77] McCALL, J.A. y otros: Factors in Software Quality. Vols I-III, Rome Air Development Centre, 1977.

[THOM 90] THOMPSON, J.L.: Strategic management. Awareness and change. Chapman and Hall. London, 1990.

# APLICACIÓN DEL ANÁLISIS DE CORRESPONDENCIAS A LA DIFERENCIACIÓN DE CLIENTES

JOSÉ J. GARCIA CLAVEL

Dpto. Métodos Cuantitativos. Facultad de Económicas  
Universidad de Murcia.

## I. INTRODUCCION

Los primeros intentos de introducir la *comida rápida* en el mercado español estuvieron a cargo de Burger King, McDonald's y Wendy hacia finales de los setenta. Desde entonces, la oferta se ha ampliado y diversificado, no sólo por las pizzerías y los restaurantes chinos, sino también por la aparición de nuevos productos basados en el bocadillo (Pans & Company), la empanada (Ten Empanada), o la tortilla española (Welcome).

Según el servicio que ofrecen, podríamos clasificar estas empresas entre los que ofrecen sólo servicio de restaurante, y las que además o exclusivamente sirven a domicilio. En este trabajo se ofrece un estudio sobre los clientes de una de estas últimas: *Pizza World*. Esta franquicia, explotada por *Agrolimen*, ha abierto desde que empezó en 1988 más de 80 pizzerías, y en 1993 tuvo un volumen de facturación cercano a los 5.000 millones de pesetas.

En lo que hace referencia a los hábitos de sus clientes, *Pizza World* ha estimado que la mitad de ellos solicita un pedido una vez al mes o más, que el 60% de las llamadas se concentra en los fines de semana, y que el 80% de los pedidos caen dentro del horario nocturno. Su grupo más fuerte de compradores está en las amas de casa con familia, y los jóvenes con edades comprendidas entre los 18 y los 25 años de edad. Sin embargo, pensamos que esta caracterización no es bastante precisa para aprovechar al máximo las posibilidades de su estrategia de marketing: publicidad fundamentalmente local, basada en cuñas de radio y un buzoneo de apoyo.

Para maximizar el impacto de la campaña explotando las posibilidades del medio radiofónico, es conveniente una caracterización mas nítida del potencial cliente, que permite establecer un marketing diferenciado. El presente trabajo es una aproximación a ese objetivo, a través del *análisis de correspondencias*, para un establecimiento de nuestra ciudad.

## II. METODOLOGIA

Los datos en los que se apoya el estudio fueron recogidos durante un mes, a partir del 25 de febrero de 1994, por Sergio Alberola Planelles, alumno de la asignatura de estadística en nuestra facultad, que compatibilizaba la carrera con el trabajo de repartidor de pizzas. El proyecto inicial para el que se tomaron los datos pretendía determinar el importe de las propinas recibidas en función, entre otras cosas, del precio de la pizza encargada, el tiempo empleado en atender el pedido, si el cliente era hombre o mujer, y otras variables similares.

De esa base de datos, hemos extraído las variables que emplearemos en este estudio: *hora* y el *día* en que se realizó el pedido, y *edad* del cliente. Respecto a esta última variable hay que hacer dos observaciones. La primera es que se trata de la edad de la persona que recibe al motorista, que no tiene necesariamente que ser la persona que decidió pedir la pizza, que es el objetivo de la campaña. Y la segunda, que la edad se estimó de modo aproximado, a partir de la experiencia personal del alumno.

Por este y otros motivos, terminamos redefiniendo las variables implicadas, agrupándolas según los siguientes criterios:

a) Para la *edad* definimos cinco grupos: E1, que serían los de menos de 18 años (17.76% de la muestra); E2, desde 18 a 23 años, que vendrían a ser los universitarios (17.54%); E3, desde 24 a 29 años, que entendemos como opositores, o solteros de piso (18.42%); E4, desde 30 a 39, que ya los damos por casados pero con hijos demasiado pequeños para tomar pizzas (28.07%); y por último E5, que serían por último a partir de 40, y pensamos que son los que encargan el producto para sus familiares.

b) En el caso de la variable *horas*, la información era muy precisa, ya que según el modo de trabajar en este tipo de establecimientos, el telefonista anota en la hoja de pedido la hora de la llamada. Después de estudiar los datos, decidimos definir periodos de veinte minutos, a excepción de las colas -antes de las 20:30, y después de las 10:50-, para las que apenas si teníamos casos, y era preferible agrupar en intervalos de mayor amplitud. En concreto, definimos el grupo H1 para todos aquellos pedidos realizados antes de las 20:30 (5.48%) y el H9 para los realizados después de las 10:50 (8.77%). El resto de los nueve grupos van definidos cada 20 minutos. Por ejemplo, H2 para los pedidos entre las 20:30 y las 20:50 (6.80%); H3 desde 20:50 a 21:10 (10.53%) etc. Sólo hemos trabajado con el horario nocturno por no tener datos para todos los días de la semana del horario diurno (de 13:30 a 16:30).

c) Por último, para la variable *días* asignamos al lunes el valor D1, al martes D2, etc. Aproximadamente el número de pizzas repartidas al día es similar, lo que es lógico por que supone que el motorista estuvo repartiendo continuamente.

Antes de seguir adelante en la exposición, creemos conveniente recordar que el objetivo de este trabajo es la caracterización de los potenciales clientes, no la búsqueda del mayor volumen de ventas. Si quisiéramos determinar en que momento se piden más pizzas, no es preciso realizar ningún estudio: basta mirar la caja para saber que eso ocurre durante el fin de semana. De hecho,

durante viernes, sábados y domingos el número de motoristas del establecimiento se multiplicaba por cuatro, y se duplicaba el número de pizzeras y telefonistas.

Teniendo esto en cuenta, los cruces que pensábamos *a priori* que podían ofrecer alguna información interesante son los siguientes:

**TABLA 1: *edad\*día***

|    | <b>D1</b> | <b>D2</b> | <b>D3</b> | <b>D4</b> | <b>D5</b> | <b>D6</b> | <b>D7</b> |
|----|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| E1 | 9         | 10        | 13        | 6         | 17        | 15        | 11        |
| E2 | 10        | 8         | 13        | 10        | 15        | 15        | 9         |
| E3 | 14        | 8         | 16        | 11        | 11        | 11        | 12        |
| E4 | 17        | 20        | 14        | 15        | 19        | 19        | 24        |
| E5 | 20        | 10        | 12        | 8         | 19        | 8         | 13        |

**TABLA 2: *edad\*hora***

|    | <b>h1</b> | <b>h2</b> | <b>h3</b> | <b>h4</b> | <b>h5</b> | <b>h6</b> | <b>h7</b> | <b>h8</b> | <b>h9</b> |
|----|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| E1 | 6         | 4         | 4         | 12        | 20        | 13        | 10        | 7         | 5         |
| E2 | 2         | 7         | 7         | 9         | 15        | 9         | 13        | 9         | 9         |
| E3 | 2         | 7         | 7         | 15        | 12        | 13        | 13        | 8         | 7         |
| E4 | 10        | 7         | 20        | 18        | 16        | 14        | 24        | 9         | 10        |
| E5 | 5         | 6         | 10        | 12        | 10        | 14        | 9         | 8         | 9         |

TABLA 3: *día\*hora*

|    | h1 | h2 | h3 | h4 | h5 | h6 | h7 | h8 | h9 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| D1 | 5  | 5  | 8  | 6  | 9  | 8  | 12 | 9  | 8  |
| D2 | 2  | 3  | 11 | 9  | 11 | 6  | 7  | 2  | 5  |
| D3 | 3  | 5  | 7  | 10 | 11 | 12 | 11 | 5  | 4  |
| D4 | 3  | 5  | 2  | 10 | 8  | 8  | 6  | 5  | 3  |
| D5 | 3  | 4  | 6  | 13 | 14 | 9  | 13 | 5  | 8  |
| D6 | 3  | 5  | 8  | 9  | 9  | 10 | 11 | 8  | 5  |
| D7 | 6  | 4  | 6  | 9  | 11 | 10 | 9  | 7  | 7  |

De entre los diversos métodos multivariantes disponibles para analizar estas tablas de frecuencia, siguiendo a Hoffman y Franke (1986), pensamos que el método más apropiado es el de Análisis de Correspondencias simple, o *simple correspondence analysis* en su denominación inglesa. Este método permite el estudio de tablas de contingencia para variables cualitativas, mediante la descomposición de la información contenida en las mismas.

Por último, respecto a la paquetería empleada, decir que las transformaciones de las series, y la elaboración de las tablas fueron efectuadas con Systat (versión 5.0 para Windows); y el cálculo de las soluciones del Análisis de Correspondencias se ha realizado mediante el paquete SimCA, versión 2, elaborado por Greenacre (1986) para PCs.

### III. RESULTADOS

La primera de las caracterizaciones de los clientes se plantea en función de las variables *edad* y *día* de la semana. La tabla de perfiles (*profiles* en la terminología habitual) no muestra gran diferencia entre las filas. De hecho, el estadístico chi-cuadrado que emplearíamos en un contraste de homogeneidad vale 19.37 con 24 grados de libertad, de modo que no se rechazaría la hipótesis al 95%. Esto nos indica que quizás no hay grandes diferencias entre los distintos grupos de edad, en cuanto al día de la semana que realizan sus pedidos.

Sin embargo, con el método del análisis de correspondencias es posible establecer una cierta diferenciación entre los perfiles de los diferentes grupos de edad. Los resultados más importantes de la aplicación de simCA a la *tabla 1* son los siguientes:

## ROW CONTRIBUTIONS

| I | NAME | QLT MAS INR  | k=1 COR CTR  | k=2 COR CTR  | k=3 COR CTR |
|---|------|--------------|--------------|--------------|-------------|
| 1 | E1   | 979 178 196  | 185 732 272  | -16 6 3      | 107 242 395 |
| 2 | E2   | 913 175 148  | 149 622 174  | -95 249 114  | -39 42 51   |
| 3 | E3   | 935 184 123  | -59 124 29   | -124 538 205 | -88 273 281 |
| 4 | E4   | 1000 281 220 | -7 1 1       | 179 962 653  | -35 36 66   |
| 5 | E5   | 995 182 312  | -255 890 525 | -43 26 25    | 76 79 206   |

## COLUMN CONTRIBUTIONS

| J | NAME | QLT MAS INR  | k=1 COR CTR  | k=2 COR CTR  | k=3 COR CTR  |
|---|------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 1 | D1   | 988 154 308  | -274 880 512 | -80 74 71    | 54 34 87     |
| 2 | D2   | 1000 123 105 | -13 4 1      | 188 972 314  | 29 24 21     |
| 3 | D3   | 916 149 129  | 25 17 4      | -180 887 353 | -21 12 13    |
| 4 | D4   | 962 110 85   | -24 18 3     | -12 4 1      | -176 939 668 |
| 5 | D5   | 993 164 99   | 133 697 130  | -35 47 14    | 80 248 204   |
| 6 | D6   | 985 149 167  | 216 985 310  | 3 0 0        | -1 0 0       |
| 7 | D7   | 946 151 108  | -77 197 40   | 150 741 247  | -16 8 7      |

donde el significado de los coeficientes de las tablas es el siguiente: QLT mide la calidad de la representación de esa fila (o columna) en los tres ejes para los que se ha hecho el estudio (la dimensión máxima -tres en este caso- se fija como un *input* más del programa); MAS es el peso relativo que tiene esa fila (o columna) dentro del total de casos (esto es una de las diferencias con el método de las componentes principales, en el que cada punto recibe normalmente la misma ponderación en el análisis); y INR es el porcentaje de inercia que aporta esa fila (o columna) al total de inercia de la tabla.

La *inercia* es el estadístico chi-cuadrado dividido por el tamaño de la muestra, y puede ser interpretada como la media ponderada del cuadrado de las distancias chi-cuadrado entre los perfiles de las filas y el perfil fila medio, (o entre los perfiles de las columnas y el perfil columna medio)

Pasando al segundo bloque de la tabla,  $k=1$  recoge las coordenadas de cada una de las filas (o columnas) para la primera dimensión; COR mide la adecuación de cada una de las variable al eje medida en términos de correlación, y CTR es la contribución de esa fila (o columna) a la localización en es espacio n-dimensional del eje. Estos coeficientes son análogos a los que proponen por ejemplo Abascal y Grande (1985), y Benzécri (1992) entre otros. La representación simétrica de las primeras dos dimensiones está recogida en el *gráfico 1*, que incluye no solo los puntos correspondientes a las filas, sino también los puntos columna (ver Nishisato (1994) para un enfoque análogo), condensando en esas dos dimensiones el 85.3% del total de la inercia.

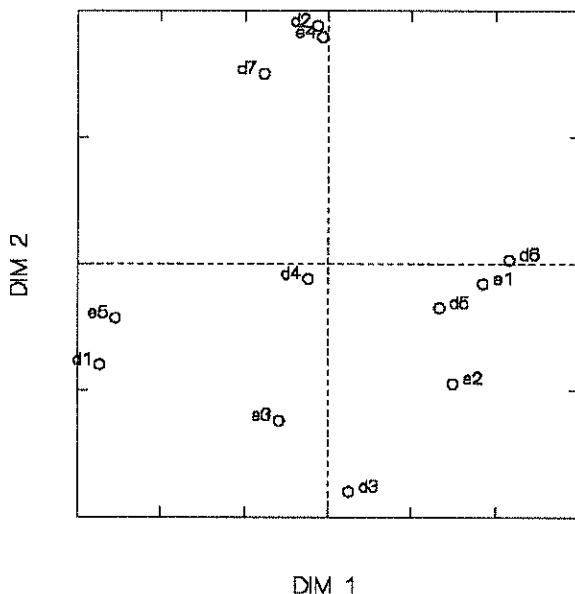


GRAFICO 1

Antes de pasar a la interpretación del gráfico, conviene hacer una precisión más sobre el significado de las distancias entre puntos del gráfico. En primer lugar, las distancias entre *puntos filas* del mapa es igual a la distancia chi-cuadrado de los perfiles de las filas de la tabla correspondiente. Lo mismo hay que decir respecto a los *puntos columnas*. Por contra, no tienen un significado matemático estricto las distancias entre *puntos filas* y *puntos columnas*, y la información de este tipo hay que emplearla sólo como orientativa.

Hecha esta precisión, pasamos a la interpretación de los resultados para la *tabla 1*. Para ello, completamos la información que aporta el *gráfico 1* con los valores de los coeficientes COR, INR, ya mostrados. Siguiendo a Greenacre y Hastie (1987), destacamos como en el posicionamiento del primer eje intervienen principalmente las filas E5 (52.5%), y E1 (27.2%), que están perfectamente representadas además por esa dirección: COR de 89.0% y 73.2% respectivamente. Por otra parte, desde el punto de vista de los perfiles columnas, observamos que la mayor contribución proviene de las columnas D1 (CTR=51.2%) y D6 (CTR=31.0%), ambas muy correlacionadas con este mismo eje: COR de 0.985 para D6, y de 0.88 para D1.

Por tanto, en lo referente a esta primera dimensión, viernes (D5) y sábado (D6) se encuentran en el extremo opuesto, en cuanto al perfil del grupo de edad de los clientes, a lunes (D1). Y desde el punto de vista de las filas (variable *edad*) los grupos E1 y E2, bien representados por esta dimensión, se oponen al grupo E5. Los grupos intermedios E3 y E4 por contra están mal representados. Si tenemos ahora en cuenta quien está representado por cada grupo, podemos concluir que esta primera dimensión opone a los jóvenes (menores de 23 años), que consumen *relativamente*



más que otros grupos los viernes y sábados, frente a las familias con hijos, que parece que destacan los Lunes.

Respecto a la segunda dimensión, desde el punto de vista de la variable *día*, enfrenta los lunes y los martes, ambos muy correlados con ese eje (0.972 y 0.887 respectivamente). El domingo, aunque con una menor contribución a la inercia (24.7%), también está bien representado, y tiene un comportamiento análogo al del martes, en lo que se refiere a los grupos de edad. El jueves, en el medio del gráfico, sigue sin explicarse y precisaría de una tercera dimensión.

Y desde la variable *edad*, los grupos sin hijos se reparten el protagonismo de este segundo eje: grupo E4, (desde 30 a 39 años) en el norte del gráfico, frente al grupo E3. Combinando ambas informaciones, pensamos que los partidos televisados de los miércoles puede explicar la proximidad relativa a ese día del grupo de 24 a 29 años. El grupo E4, de ordinario más ligado a un trabajo con horario, es el que tiene *relativamente* más protagonismo en los domingos, y quizás se podría tener en cuenta a la hora de realizar la publicidad ese día.

Pasemos ahora a la segunda de las tablas, la que enfrenta grupos de *edad* con la *hora* en la que se realizó el pedido. Los resultados más importantes están recogidos en el siguiente cuadro:

#### ROW CONTRIBUTIONS

| I | NAME | QLT MAS INR  | k=1 COR CTR  | k=2 COR CTR  | k=3 COR CTR  |
|---|------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 1 | E1   | 1000 178 310 | 250 592 373  | -207 408 449 | -2 0 0       |
| 2 | E2   | 921 175 160  | 96 169 55    | 148 397 226  | 140 355 385  |
| 3 | E3   | 610 184 116  | 71 133 31    | 128 429 177  | -43 48 38    |
| 4 | E4   | 996 281 302  | -236 861 529 | -83 105 113  | 45 31 63     |
| 5 | E5   | 818 182 112  | -44 52 12    | 58 90 36     | -158 676 514 |

#### COLUMN CONTRIBUTIONS

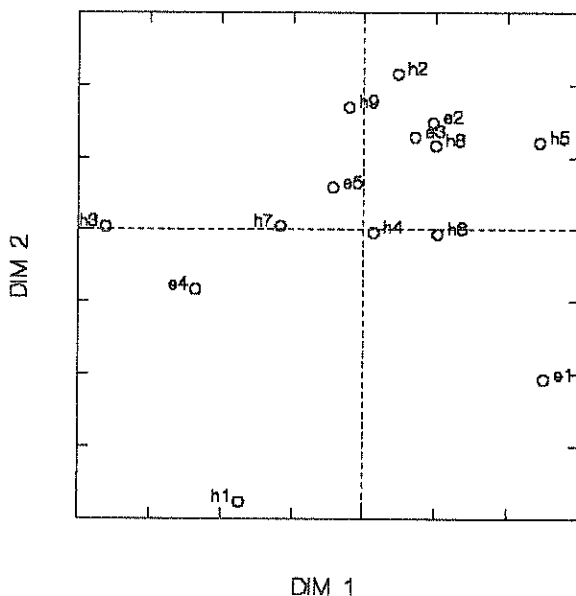
| J | NAME | QLT MAS INR | k=1 COR CTR  | k=2 COR CTR  | k=3 COR CTR  |
|---|------|-------------|--------------|--------------|--------------|
| 1 | h1   | 958 55 168  | -174 164 56  | -377 768 459 | -69 26 30    |
| 2 | h2   | 1000 68 55  | 47 46 5      | 215 951 185  | 12 3 1       |
| 3 | h3   | 990 105 232 | -362 989 466 | 4 0 0        | -4 0 0       |
| 4 | h4   | 352 145 46  | 13 9 1       | -4 1 0       | -81 343 107  |
| 5 | h5   | 992 160 223 | 244 709 322  | -120 170 135 | 98 113 172   |
| 6 | h6   | 998 138 79  | 103 305 49   | -6 1 0       | -154 692 371 |
| 7 | h7   | 861 151 95  | -117 365 70  | 5 1 0        | 137 495 318  |
| 8 | h8   | 897 90 39   | 100 379 30   | 116 514 72   | 9 3 1        |
| 9 | h9   | 670 88 63   | -21 10 1     | 169 659 148  | -8 1 1       |

Observamos como, desde el punto de vista de los perfiles de las columnas (variable *hora*), la orientación de la primera de las dimensiones viene dada por el perfil H3 (de 8:50 a 9:10) que contribuye con un 46.6% a la localización del eje, frente al perfil H5 (de 9:30 a 9:50) con CTR del 32.2%. Estos grupos además tienen una correlación muy alta con el eje (0.989 y 0.709 respectivamente) de modo que podemos pensar que están bien representados.

Desde el punto de vista de las filas (variable *edad*) las principales contribuciones son las de los grupos E4 (52.9%) y E1 (37.3%) que se disponen en los extremos con una buena correlación con el eje, y podemos concluir, en lo referente a esta dimensión, que el grupo más joven (menores de 18 años), curiosamente tienen unos hábitos relativamente más *nocturnos* que los del grupo E4 (de 30 a 39 años) que tienden a hacer sus pedidos más en la franja que va de 8:50 a 9:10, posiblemente por previsión a la hora de realizar sus planes, o por que al día siguiente tengan que madrugar.

En la segunda dimensión, por el lado de los perfiles de las filas, destaca de nuevo el grupo E1, que tiene una coordenada negativa, y una INR de 44.9%. Le sigue E2 con 22.6% y E3 con 17.7%, que aunque sea de las tres la que menos contribuya, es la que presenta una correlación más alta con el eje (0.429), y por tanto la que está mejor representada por él. Sin embargo, como se puede observar, se trata de cifras de correlaciones relativamente bajas, y la interpretación deberá de ser cuidadosa.

GRAFICO 2



Por el lado de las columnas sin embargo no existe ese problema: H1 y H2, con correlaciones de 0.768 y 0.951 marcan los extremos de una dimensión con la que también H9 está bien correlacionada. Hay que despreciar los grupos H4, H6 y H7 por el bajo COR que presentan.

Con toda esta información, se podría inferir del gráfico 2 -con un 77.4% de la inercia total- que la banda de edad entre los 18 a los 29 (grupos E2 y E3) tienen unas preferencias horarias relativamente similares, centradas en dos momentos: de 20:30 a 20:50, y ya más tarde, a partir de

las 10:30 (grupos H8 y H9). El extremo inferior del horario, antes de las 20:30, esta relativamente más cubierto por el grupo de menor edad.

Por último la tercera de las tablas que vamos a estudiar enfrenta la variable *hora* con los *días* de la semana. La aplicación de simCA a la matriz de frecuencias da el siguiente resultado:

#### ROW CONTRIBUTIONS

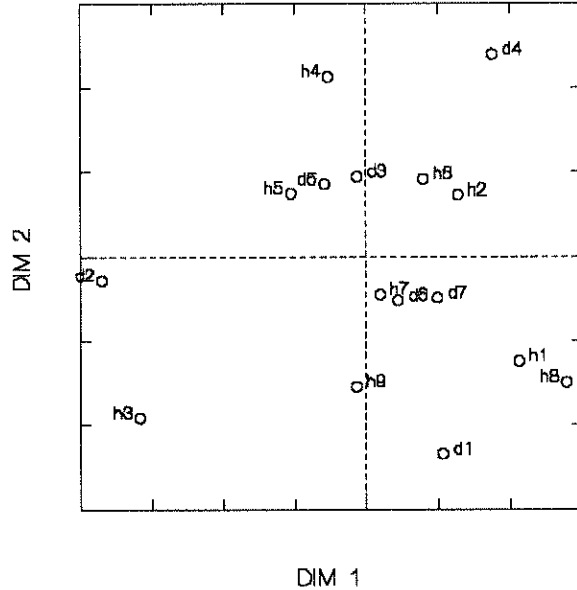
| I | NAME | QLT MAS INR | k=1 COR CTR  | k=2 COR CTR  | k=3 COR CTR  |
|---|------|-------------|--------------|--------------|--------------|
| 1 | D1   | 974 154 182 | 106 164 71   | -234 807 464 | 13 2 3       |
| 2 | D2   | 964 123 308 | -370 956 693 | -28 6 5      | -20 3 6      |
| 3 | D3   | 723 149 69  | -13 7 1      | 95 338 74    | -100 378 196 |
| 4 | D4   | 909 110 186 | 175 316 139  | 239 589 347  | -19 4 5      |
| 5 | D5   | 774 164 112 | -58 87 23    | 86 190 67    | 139 498 418  |
| 6 | D6   | 804 149 58  | 44 89 12     | -52 122 22   | -114 594 255 |
| 7 | D7   | 567 151 84  | 99 306 61    | -49 75 20    | 77 185 116   |

#### COLUMN CONTRIBUTIONS

| J | NAME | QLT MAS INR | k=1 COR CTR  | k=2 COR CTR  | k=3 COR CTR  |
|---|------|-------------|--------------|--------------|--------------|
| 1 | h1   | 652 55 101  | 212 426 102  | -124 145 46  | 93 81 61     |
| 2 | h2   | 777 68 51   | 127 373 45   | 73 124 20    | -110 280 108 |
| 3 | h3   | 987 105 280 | -317 663 437 | -191 240 212 | -113 84 176  |
| 4 | h4   | 948 145 132 | -53 54 17    | 213 875 365  | 32 19 19     |
| 5 | h5   | 977 160 60  | -105 516 73  | 75 267 50    | 64 194 87    |
| 6 | h6   | 784 138 70  | 79 217 36    | 92 291 64    | -89 276 144  |
| 7 | h7   | 130 151 50  | 19 19 2      | -45 108 17   | 7 3 1        |
| 8 | h8   | 959 90 169  | 278 723 288  | -149 206 110 | -56 29 37    |
| 9 | h9   | 989 88 87   | -14 3 1      | -154 420 115 | 179 566 368  |

Comenzando por las columnas (variable *hora*) destaca la baja calidad del análisis para el caso del perfil H7, que con las tres dimensiones sólo esta explicado en un 13.0% de su comportamiento. Tampoco es demasiado alto el valor para H1, y quizás se haría necesario recurrir a una cuarta dimensión. Esta falta de representatividad, sin embargo, se compensa con el resto de puntos, y de hecho el *gráfico 3* contiene el 74.1% de la inercia total del modelo.

GRAFICO 3



Aparte de esto, en la orientación de la primera de las dimensiones encontramos enfrentados el período H3, frente al H8. Y el estudio de las correlaciones nos muestra como, además de estos dos perfiles, también están bien representados por el eje los puntos H1, H2, H6 y sobre todo H5, que aunque apenas si contribuye al posicionamiento del eje (CTR del 7.3%) tiene una correlación de 0.516.

Por el lado de las filas, D2 aporta casi todo, en oposición a D4. Destaca D7 por su alta correlación con el eje. No hay que considerar a D3 en esta dimensión por su bajo COR. Una vez estudiado los resultado de la segunda dimensión de esta tabla, destacaríamos el parecido de sábados y domingo en cuanto a los hábitos horarios, frente a martes y jueves que serían los más diferentes. Combinando ambos espacios, se podría decir que los martes tienen especialmente importancia la franja representada por H3, que va desde las 20:50 a las 21:10, y los viernes la franja que cubre de 9:30 a 9:50.

### III. CONCLUSION

Una vez realizado el análisis del modo en que los diferentes grupos de clientes -entendidos como grupos de edad, por ejemplo- realizan sus encargos -días de la semana, hora- hay dos posibles enfoques de la campaña publicitaria. El primero es tratar de ganar cuota de mercado con nuevos grupos, reforzando en el mensaje en los *puntos negros* -días u horas en los que un determinado grupo de clientes no acostumbra a pedir pizza- para modificar el comportamiento de los consumidores. El segundo enfoque es incrementar el consumo de los grupos ya conocidos, o al menos defender el producto de la acción de los competidores. Combinando la información obtenida, con

el diseño de cinco cuñas de radio específicas, pensadas para cada uno de los grupos a los que se dirige el mensaje, se dispone de un buen instrumento para diseñar una campaña adaptada perfectamente al consumidor potencial, que era el objetivo que nos propusimos en el trabajo: la aplicación del análisis de correspondencias a la diferenciación de clientes.

## BIBLIOGRAFIA:

BENZÉCRI, J.P.(1992); *Correspondence Analysis Handbook*, Marcel Dekker, New York.

GRANDE, I.(1992); *Dirección de Marketing*, McGraw Hill, Madrid.

GREENACRE, M., BLASIUS, J.(1994); *Correspondence Analysis in the Social Sciences*, Academic Press, San Diego, CA.

GREENACRE, M.(1983); *Theory and Applications of Correspondence Analysis*, Academic Press, Orlando.

GREENACRE, M. (1993); *Correspondence Analysis in Practice*, Academic Press, San Diego, CA.

NISHISATO, S. (1994); *Elements of Dual Scaling*, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, NJ.

CARROL, D., GREEN, P. (1988); "An INDSCAL-Based Approach to Multiple Correspondence Analysis", *Journal of Marketing Research*, XXV. pág. 193-203.

CARROL, D., GREEN, P., SCHAFFER, C. (1987); "Interpoint Distance Comparisons in Correspondence Analysis", *Journal of Marketing Research*, 23. pág. 271-280.

CARROL, D., GREEN, P., SCHAFFER, C.(1987); "Comparing Interpoint Distances in Correspondence Analysis: A Clarification", *Journal of Marketing Research*, XXIV. pág. 445-450.

GREENACRE, M.J. (1986); "SimCA: a program to perform simple correspondence analysis", *Psychometrika*, 51. pág. 172-173.

GREENACRE, M.J., HASTIE, T.J. (1987); "The Geometric Interpretation of the Correspondence Analysis", *Journal of the American Statistical Association*, 82. pág. 437-447.

GREENACRE, M.J.(1989); "The Carrol-Green-Schaffer Scaling in Correspondence Analysis", *Journal of Marketing Research*, XXVI. pág. 358-365.

HOFFMAN, D.L., FRANKE, G.R. (1986); "Correspondence Analysis: Graphical Representation of categorical Data in Marketing Research", *Journal of Marketing Research*, XXIII, pág 213-227.



# PLANTEAMIENTO DE UN MODELO DINAMICO DE MANTENIMIENTO, PUBLICIDAD Y PRODUCCION

ALFREDO GARCIA GÜEMES

E.U.E. Empresariales.  
Universidad de Burgos

## 1. INTRODUCCION

Existen muchos modelos dinámicos relativos a la toma de decisiones en el ámbito de la producción o bien en el ámbito del reemplazamiento o del marketing. Es sin embargo más difícil encontrar modelos en los que se consideren conjuntamente estas cuestiones. Concretamente el problema conjunto de producción y mantenimiento, puede verse por ejemplo en Feichtinger,G.(1982) y en Jorgensen,S. (1984).

En primer lugar, se presenta un modelo que recoge el problema de la producción, la publicidad y el mantenimiento del equipo, bajo determinadas supuestos que se modificarán en la segunda parte del trabajo, dando lugar a formulaciones alternativas.

De entre los distintos departamentos de una empresa, se van a considerar únicamente dos: producción y comercialización.

Dos de las decisiones más importantes que se deben de tomar en el departamento de producción son: el mantenimiento y en su caso el criterio de reemplazamiento de la maquinaria y por otra el nivel adecuado de producción, (Esta decisión en general no se tomará únicamente en ese departamento).

La maquinaria se supondrá que está sujeta a shocks, que se producen de acuerdo con un proceso de Poisson no homogéneo. Por otra parte, la política de mantenimiento que se va a considerar, es la de efectuar reemplazamientos preventivos a intervalos constantes de tiempo.(García Güemes,A. 1994).

El equipo, a medida que se producen los shocks, se va deteriorando, lo que hace aumentar el coste de producción.

En cuanto a la cantidad que debe de producirse, en su decisión intervienen entre otras cuestiones, su almacenamiento, con los costes que ello supone y además la limitación de espacio del propio espacio físico y capacidad productiva de la empresa.

Por su parte entre las decisiones del departamento de ventas se considerará únicamente la cantidad de recursos que se dedican a la publicidad. Los gastos en publicidad, incidirán en el nivel de demanda del producto.

Se considerará en un primer momento un horizonte de planificación infinito.

Los objetivos que se utilizan más habitualmente, son dos: Maximización de la esperanza matemática del beneficio medio a largo plazo y maximización de la esperanza matemática del valor actual del beneficio total a largo plazo. En este escrito se considerará el segundo criterio.

Aún cuando, el problema es estocástico, puede ser tratado como determinista, considerando constante la aparición de shocks por unidad de tiempo. Este es un tratamiento muy habitual y aparece frecuentemente en la literatura. (Cho,D.I. y otros 1993)

## 2. FORMULACION DEL PROBLEMA

Sean las variables:

$d(t)$ : tanto de demanda en el momento  $t$ . (variable de estado)

$s(t)$ : nivel de stock en el momento  $t$ . (variable de estado)

$S$ : capacidad máxima de los almacenes.

$p(t)$ : tanto de producción programada en el momento  $t$ .(variable de control).

$P$ : tanto máximo de producción.

$\mu[d(t)]$ : tanto de gasto en publicidad necesario para mantener el nivel de demanda  $d(t)$ .

$g(t)$ : tanto de gasto en publicidad en el momento  $t$ .(variable de control)

$\lambda(t)$ : tanto de intensidad con que se producen los shocks en la maquinaria.

$\tau$  : tiempo transcurrido entre dos reemplazamientos. Esto es, los reemplazamientos, se efectúan en los momentos  $\tau, 2\tau, 3\tau, \dots, (n-1)\tau, n\tau, \dots$ .(variable de control).

$K(\tau)$ : coste neto de reemplazamiento.

$\rho(\tau)$  : tanto de amortización de la maquinaria.

$\delta$  : tanto instantaneo de descuento.



Consideremos una función de costes cuadrática y creciente en  $p(t)$ , al menos a partir de un cierto nivel de  $p(t)$ . (Sethi, S.P. y Thompson, G.L. 1981). Sea:

$$C[p(t)] = Ap^2(t) + rp(t) + q$$

El coeficiente  $A$  consideraremos que es proporcional al número de shocks que se han producido desde el último reemplazamiento. Esto es,  $A$  será función de  $t$ .

Como la esperanza del número de shocks ocurridos en un intervalo  $(0, t)$ , es:

$$\int_0^t \lambda(s) ds$$

se tiene:

$$A(t) = k \int_{(n-1)\tau}^t \lambda(s) ds; \quad k > 0; \quad (n-1)\tau < t < n\tau$$

por lo que la función de costes resulta:

$$C[p(t)] = \left[ k \int_{(n-1)\tau}^t \lambda(s) ds \right] p^2(t) + rp(t) + q$$

siendo :  $(n-1)\tau < t < n\tau$

El stock en el momento  $t+\Delta t$  será igual al stock existente en el momento  $t$ , más la producción en el intervalo  $(t, t+\Delta t)$  menos las ventas en ese mismo intervalo:

$$s(t+\Delta t) = s(t) + p(t)\Delta t - d(t)\Delta t$$

pasando  $s(t)$  al primer miembro, dividiendo por  $\Delta t$  y haciendo  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$s(t) = p(t) - d(t)$$

El tanto de demanda, se ve afectado naturalmente por los gastos en publicidad. Supondremos que la variación del tanto de demanda es proporcional a dichos gastos y que para mantener un nivel de demanda dado es preciso mantener un gasto de publicidad que dependerá de dicho nivel de demanda.

Así pues, el nivel de demanda en el momento  $t+\Delta t$ , será igual al nivel existente en el momento  $t$  más una proporción del exceso de gasto en publicidad, en el intervalo  $(t, t+\Delta t)$ :

$$d(t+\Delta t) = d(t) + h \{g(t) - \mu [d(t)]\} \Delta t$$

pasando  $d(t)$  al primer miembro, dividiendo por  $\Delta t$  y haciendo  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$d(t) = h \{g(t) - \mu [d(t)]\}$$

Por otra parte habrá que suponer que el gasto necesario para mantener un nivel de demanda, debe de crecer más que proporcionalmente al aumentar dicho nivel de demanda. En otras palabras, es difícil mantener niveles de demanda muy elevados, por ejemplo, por el hecho de que habrá que quitar clientes a la competencia. En este sentido se supondrá que el tanto de gasto en publicidad para mantener un nivel dado de demanda, es una función cuadrática creciente en el tanto de demanda. Esto es:

$$\mu[d(t)] = ad(t)^2 + bd(t) \quad c \quad a > 0$$

En cuanto al problema del mantenimiento del equipo, supondremos que el coste de reemplazamiento aumenta con el tiempo únicamente como consecuencia del menor valor residual; por tanto  $K$  será función de  $\tau$ . Consideremos asimismo que este coste se amortiza a lo largo de la vida de la maquinaria, a un tanto  $\rho(t)$ , es decir:

$$K(\tau) = \int_0^{\tau} \rho(t) e^{-\delta t} dt$$

El objetivo que se persigue como ya se comentó en la introducción, es el de maximizar el valor actual del beneficio total.

Siendo  $\pi$  el precio de venta, el funcional objetivo será:

$$B = \int_0^{\infty} [\pi d(t) - A(t)p^2(t) - rp(t) - q] e^{-\delta t} dt - \sum_{n=1}^{\infty} K(\tau) e^{-n\delta\tau}$$

siendo:

$$K(\tau) = \int_0^{\tau} \rho(t) e^{-\delta t} dt$$

$$A(t) = k \int_{(n-1)\tau}^t \lambda(s) ds; \quad (n-1)\tau < t < n\tau$$

sujeto a:

$$s(t) = p(t) - d(t) \quad s(0) = s_0$$

$$d(t) = h\{g(t) - [d(t)]\} \quad d(0) = d_0$$

$$0 \leq s(t) \leq S$$

$$0 \leq p(t) \leq P$$

### 3. ALGUNAS FORMULACIONES ALTERNATIVAS

#### 3.1. Horizonte de planificación finito. $[0; T]$

En este caso, será necesario cambiar el funcional objetivo de la forma:

$$B = \int_0^T [\pi d(t) - A(t)p^2(t) - rp(t) - q] e^{-\delta t} dt - \sum_{n=1}^m K(\tau) e^{-n\delta\tau} + R(t) e^{-\delta T}$$

donde:

$$m\tau < T < (m+1)\tau$$

y

$R(t)$ , es el valor residual de un equipo que ha funcionado durante un periodo  $t$ .

En este caso:  $t = T - m\tau$ .

El resto de la formulación se mantiene si bien en este caso, parece indicado añadir alguna condición final. Por ejemplo si en  $T$ , va a finalizar la actividad de la empresa, lo lógico es que se desee que el almacén quede a cero.  $S(T) = 0$ .

#### 3.2. Un modelo alternativo de publicidad

Un modelo clásico de publicidad es el siguiente: (Vidale, M.L. y Wolfe, M.B. 1957)

$$d(t) = rg(t) \frac{m - d(t)}{M} - \omega d(t)$$

donde:

$r$  es la tasa de variación de las ventas con respecto a la publicidad, cuando las ventas son cero.

$M$  nivel de saturación del mercado.

$\varpi$  tasa de decrecimiento de las ventas en ausencia de publicidad.

### 3.3. Un modelo de reemplazamiento a la edad

Tanto en el modelo original (equipo sujeto a shocks) como en este, los costes se podrían desglosar en dos partes. Por una parte una función cuadrática de la producción con coeficientes constantes:

$$C[p(t)] = Ap^2(t) + rp(t) + q$$

y por otra los costes derivados del envejecimiento del equipo, que en el caso de un modelo determinístico de reemplazamiento a la edad sería, con horizonte de planificación infinito: (Jorgenson, D.W. y otros 1.974)

$$C(\tau) = \frac{\int_0^{\tau} c(t)e^{-\delta t} dt + e^{-\delta \tau} K(\tau)}{1 - e^{-\delta \tau}}$$

donde  $c(t)$ , es precisamente la función creciente que recoge los costes derivados del envejecimiento del equipo.

El objetivo quedará:

$$B = \int_0^{\infty} [\pi d(t) - Ap^2(t) - rp(t) - q] e^{-\delta t} dt - \frac{\int_0^{\tau} c(t)e^{-\delta t} dt + e^{-\delta \tau} K(\tau)}{1 - e^{-\delta \tau}}$$

condicionado a:

$$s(t) = p(t) - d(t) \quad s(0) = S_0$$

$$d(t) = h\{g(t) - \mu[d(t)]\} \quad d(0) = d_0$$

$$0 \leq s(t) \leq S$$

$$0 \leq p(t) \leq P$$

#### 4. BIBLIOGRAFIA

Cho, D.I., Abad, P.L. and Parlar M. Optimal production and maintenance decisions when a system experience age-dependent deterioration. Opt. Con. Appl. Meth. 14, 153-167 (1993)

Feichtinger,G. The Nash solution of a maintenance-production differential game. Eur. J. Oper. Res. ,10, 165-172 (1982)

García Güemes, A. Un modelo de reemplazamiento para un sistema sujeto a shocks poissonianos. Estudios de Economía Aplicada. nº 1 pp. 31-44 . (1994)

Jorgensen ,S. , A Pareto-optimal solution of a maintenance-production differencial game. Eur. J. Oper. Res., 18, 76-80 (1984)

Jorgenson,D.W., McCall.J.J. and Radner, R. Optimal replacement policy. North-Holland. Amsterdam (1974)

Sethi, S.P. and Thompson G.L. Optimal control teory: Applications to management science. Martinus Nijhoff. Boston ,M.A. (1981)

Vidale,M.L. and Wolfe,M.B. An operations research study of sales response to advertising. Oper. Res. vol v, 378-381. ( 1957)



# **LA INFLUENCIA DE LA PRIVATIZACION EN LA GESTION DE LAS EMPRESAS: ESTUDIO DEL CASO DE SEAT, S.A.**

**PEDRO GONZALEZ DE LA FE**  
Facultad de Ciencias Jurídicas  
Universidad de Las Palmas de G. C.

## **INTRODUCCION**

Son numerosos en el terreno empírico los estudios que tratan de investigar la influencia de la propiedad sobre la eficiencia productiva de las empresas, basados, en su mayoría, en análisis comparativos entre empresas públicas y privadas que operan simultáneamente en contextos similares. Son en cambio menos abundantes los estudios de casos antes y después de la privatización de las empresas públicas, lo cual se explica por el escaso tiempo transcurrido para evaluar los resultados conseguidos, debido a que el fenómeno privatizador es todavía bastante reciente. Es por esta razón por lo que es en el ámbito británico (donde con mayor antelación se pusieron en marcha políticas de privatización) en el que se han desarrollado con mayor amplitud trabajos de investigación dedicados a evaluar el impacto de los cambios de propiedad sobre la gestión y eficiencia productiva de sus anteriormente empresas públicas, especialmente en aquellas privatizadas al inicio o hacia la mitad de la década de los ochenta. Entre estos trabajos realizados pueden señalarse los debidos a: Bishop y Kay (1988), Parker y Hartley (1991a y b), Dunsire (1991), Hutchinson (1991), Bishop y Thompson (1992), Parker (1993), Cao (1993) y Parker (1994).

El presente trabajo pretende contribuir desde su modestia a la investigación desarrollada en esta línea, teniendo como objetivo el estudiar en qué medida la privatización de Seat contribuyó a la mejora de su gestión, incrementando de esta forma su eficiencia. Para la realización del estudio se confronta la gestión llevada a cabo entre los años 1982-86, años en los que perteneció al sector público, con la realizada entre 1987-91; período, en el que ya privatizada, la misma corre a cargo de la multinacional Volkswagen (en adelante VW).

Para evaluar si el cambio de propiedad ha significado mayores aciertos y mejoras en la gestión se ha recurrido al análisis de los Estados de Pérdidas y Ganancias y de los Balances de Situación a lo largo de los períodos señalados, estos últimos se analizan empleando indicadores y ratios específicos deducidos de sus cifras respectivas. Asimismo, se comparan dichas Cuentas y ratios con los de otras tres empresas del sector del automóvil que se toman como referencia: Fasa, Renault, Citroën y Peugeot-Talbot. Todos los datos han sido extraídos de las memorias anuales de cada empresa.

El análisis de las repercusiones de la privatización sobre las que anteriormente fueron empresas públicas, y sus consecuencias sobre su comportamiento y resultados, puede ser de utilidad para evaluar las políticas y estrategias de aquellas empresas que todavía permanecen en nuestro sector público empresarial.

## **1. ANALISIS DE LA GESTION DE SEAT DURANTE EL PERIODO 1982-1986**

### **1.1. Estados de pérdidas y ganancias**

En el período en que Seat estuvo bajo propiedad del Instituto Nacional de Industria (INI) ocupó, con la excepción del año 1984, el primer lugar en el *ranking* de las empresas con mayores pérdidas de dicho Instituto entre los años 1982 y 1986<sup>1</sup>. Las causas de este elevado volumen de pérdidas pueden examinarse a través del análisis de los Estados de Pérdidas y Ganancias de la Compañía durante esos años (tabla 1), siendo los aspectos más destacable de los mismos los siguientes:

1ª) Las compras netas o Gastos de Aprovisionamiento ascienden para Seat al 61.05% del valor de su producción de 1982, pasando a ser este porcentaje el 60.70% en 1986. Para Renault, Citroën y P.Talbot los porcentajes respectivos pasan de un 62.32% a un 62.05%, siendo más elevados y reduciéndose menos en estas últimas empresas que en Seat.

2ª) Los gastos agrupados bajo la denominación Otros Gastos de Explotación (servicios exteriores, tributos, publicidad, transportes, gastos diversos) son bastantes más elevados en Seat que en las tres empresas del sector a lo largo de todos los años (ver tabla 1), habiéndose pasado en esta empresa el porcentaje de dichos gastos sobre el valor de la producción de representar un 12.47% en 1982 a representar un 35.74% en 1986, mientras que en las empresas privadas de referencia la evolución para los mismos años fue de 7.95% a 8.76%.

3ª) El Valor Añadido generado por las empresas de referencia es considerablemente superior al generado por Seat, pasando en las primeras de un 29.73% en 1982 a un 28.83 en 1986, y experimentando una fuerte reducción en la segunda en tan sólo cinco años (24.69 a 1.96%).

4ª) Los Gastos de Personal son en Seat el 20.54% del valor de la producción en 1982, descendiendo hasta el 18.60 en 1986. Renault, Citroën y P.Talbot experimentan un descenso más acusado, pasando del 21.27% al 16.70% en los mismos años.

5ª) Los Gastos Financieros, aunque disminuyen en Seat en el último año (del 19.33% al 5.87%), presentan para esta empresa porcentajes mucho más elevado que para las tres empresas del sector a lo largo de todo el período.

---

1. Véase empresas del INI con mayores pérdidas en Anuarios de El País, 1982-1986.



Sóamente la suma de tres partidas de gastos (compras, personal y financieros) va a equivaler, e incluso superar, al total del valor de la producción de Seat durante los años 1982, 1983 y 1984, mientras que en las empresas de referencia esta suma va a significar un promedio del 90% de dicho valor para los mismos años.

A partir de 1985, y como consecuencia de la política de reducción de costes y saneamiento financiero emprendida por el INI en 1983, el conjunto de estos gastos empiezan a disminuir como promedio hasta un 90% del valor de la producción, siendo dicho porcentaje del 85% para Renault, Citroën y P.Talbot.

Los Gastos Financieros, junto con los agrupados bajo la denominación Otros Gastos de Explotación, son los que más van a contribuir a los resultados negativos de Seat, siendo la causa de su importante magnitud las altas tasas de endeudamiento que va a padecer la firma hasta 1986, año a partir del que disminuyen debido a las políticas de ajuste aplicadas por INI<sup>2</sup>.

Los resultados negativos de esta Compañía durante esos años no son ajenos a la situación que por entonces padecía el sector público empresarial español, caracterizada por el deterioro económico y financiero de sus empresas públicas, la mayoría heredadas del franquismo en condiciones deplorables (Comín, Martín y Jiménez, 1992:233-234). A partir de 1983 se pone en marcha un proceso de saneamiento y racionalización de las mismas cuyos resultados van a manifestarse desde el año 1985 en adelante, replegándose a partir de dicho año el INI de actividades como la fabricación de automóviles en las que, conforme a lo que se proclamaba oficialmente, ya no tenía sentido la prolongación de su presencia<sup>3</sup>.

## 1.2. Balances de situación

En la tabla nº 2 podemos comprobar como en lo concerniente a la estructura de la inversión, destaca el fuerte peso del inmovilizado neto sobre el activo total de Seat, hecho que disminuye a lo largo del período de análisis. En 1986 este ratio fue del 31.7% en Seat y 32.9% en las privadas, habiendo sido en 1982 del 64% y 31.2% respectivamente. Esta fuerte inmovilización de la inversión en Seat va a ser hasta 1984 superior a la de las tres empresas de referencia, a partir de ese año van a ser estas últimas las que detentan mayor porcentaje de activo inmovilizado. Las importantes inversiones, con maduración a medio plazo y largo plazo, realizadas ante la necesidad de afrontar el desarrollo de productos propios y crear una red de ventas en el exterior tras la ruptura con Fiat y las exigidas por la renovación de las instalaciones destinadas a la fabricación de los nuevos modelos VW tras el Acuerdo firmado con esta multinacional en 1982, van a ser las causas de que Seat registre esta elevada relación entre su Inmovilizado y su Activo total entre los años 1982 y 1984.

<sup>2</sup> En la tabla nº 3 puede verse como el ratio Tasa de Endeudamiento evoluciona desde un 694,2% en 1982 a un 220,7% en 1986.

<sup>3</sup> Sobre esta política ver Croissier (1985), Myro (1985) y Cuervo (1985a).

La política inversora desarrollada se financió hasta 1985, como demuestra el ratio Recursos ajenos a largo plazo/Activo inmovilizado neto, casi en su totalidad con recursos ajenos, contribuyendo a incrementar de esta forma los ya elevados gastos financieros de Seat. A partir de ese año las inversiones disminuyen como consecuencia de la política de reducción de costes y saneamiento financiero iniciada por el INI en 1983, descendiendo fuertemente para la empresa la relación Recursos Ajenos a largo/Activo inmovilizado, alcanzando valores inferiores a los de las firmas privadas.

En cuanto a la inversión en circulante, es de destacar el notable empeoramiento en la gestión de los clientes y deudores en general (recogidos en la cuenta Deudores), que pasan de detentar en 1982 un peso en el Activo considerablemente inferior al de las empresas privadas (9.3% frente a 32.8%) a detentar en 1986 un porcentaje mayor que estas (40.5% frente a 35%)(tabla 3). Las Existencias experimentan una muy ligera mejoría en su gestión, disminuyendo su peso del 11.8% del Activo en 1982 al 9.2% en 1986, inferior al que tienen las empresas de referencia.

En cuanto a la estructura de capital, la Tasa de Endeudamiento (Recursos Ajenos/Recursos Propios) de Seat, que era 694.2% en 1982, es 220.7% en 1986 (en dicho período, en las empresa privadas de referencia este ratio había pasado de 239.1% en 1982 a 279.6% en 1986), reflejando de este modo el cambio que experimenta su financiación a partir de 1984 derivado de la ya mencionada política de ajuste del INI, que establece de forma explícita el objetivo de rentabilidad como principio fundamental de actuación de sus empresas.

Lo más significativo de la estructura de endeudamiento es el mayor peso hasta 1984 de los recursos ajenos a corto en el total de los recursos ajenos en las empresas privadas con relación a Seat. Así, en 1982, los recursos ajenos a corto sobre el total de recursos ajenos representaban el 84.2% en las privadas, frente al 47% en Seat, pero ya en 1986 son el 82.1% frente al 85.1%, respectivamente.

## **2. ANALISIS DE LA GESTION DE SEAT DURANTE EL PERIODO POSTERIOR A SU PRIVATIZACION (1987-91)**

### **2.1 Estados de pérdidas y ganancias**

Los Estados de Pérdidas y Ganancias de Seat y de las empresas de referencia correspondientes al período 1987-1991 (posterior a la privatización de Seat) se muestran en la tabla 3, de ella podemos deducir los siguientes rasgos fundamentales que van a caracterizar la gestión de la Compañía entre 1987 y 1991:

1ª) Seat recupera a partir del año 1988 su rentabilidad, tras once años de pérdidas. Sin embargo a partir de 1991 estas aparecen de nuevo.

2ª) Las compras netas o Gastos de Aprovisionamiento ascienden para Seat al 60.77% del valor de su producción de 1987, pasando a ser este porcentaje el 70.82% en 1991. Para las empresas del grupo de referencia los porcentajes respectivos pasan de un 65.18% a un 67.23%. El creci-

miento de estos gastos es de más de 10 puntos para Seat y de sólo 2.05 para las otras empresas, todo lo contrario a lo ocurrido en el período en que Seat fue gestionada públicamente, en el que el porcentaje de estos gastos disminuyó para Seat en mayor medida que para las empresas privadas.

El fuerte crecimiento de los Gastos de Aprovisionamiento tras la privatización de Seat, puede ser atribuido probablemente al rápido aumento que a partir de 1986 experimentan sus importaciones de componentes<sup>4</sup>; no olvidemos que, al ser extranjeras todas las marcas de vehículos con producción en España, las decisiones sobre aprovisionamiento se toman, en todas las empresas del automóvil, lejos de nuestras plantas<sup>5</sup>.

3º) Los gastos agrupados bajo la denominación Otros Gastos de Explotación (servicios exteriores, tributos, publicidad, transportes, gastos diversos) siguen siendo en 1987, al igual que en el período anterior, más elevados en Seat que en las empresas del sector (15.16% frente a 9.38%), sin embargo en 1991 esta consigue reducirlos hasta el 11.45%, mientras que las otras los aumentan hasta el 13.13%.

4º) El valor añadido generado por las empresas de referencia sigue siendo, como en el período anteriormente analizado, superior al generado por Seat, pasando en las primeras de un 25.44% en 1987 a un 28.83% en 1991, y experimentando la segunda una reducción de un 24.07% a un 17.32%.

5º) Los gastos de personal son en Seat el 19.46% del valor de la producción en 1987, descendiendo hasta el 15.51% en 1991. Las empresas de referencia experimentan, al contrario de lo ocurrido entre 1982-1986, un descenso menos acusado, pasando del 13.85% al 13.09% en los mismos años.

A pesar de lo anterior y contrariamente a lo que suele suceder en otras experiencias de privatización, en esta ocasión no se producen reducciones significativas en el empleo tras el cambio de propiedad<sup>6</sup>, ya que en el Acuerdo de venta a VW esta se comprometió al mantenimiento del empleo en los máximos niveles posibles.

<sup>4</sup> Según Costa y otros (1992: 183), en 1989 Seat solamente importaba el 27% de sus componentes, aunque tales importaciones habían aumentado rápidamente desde su integración en el grupo VW. Para Barciela (1994), en 1994 Seat utilizaba sólo un 54% de piezas españolas, habiéndolo hecho antes de 1986 en más de un 90%. Desgraciadamente no hemos encontrado, en las Memorias de todas las empresas estudiadas que cubren el período 1987-91, información sobre el porcentaje que representan las importaciones sobre el importe total de las compras.

<sup>5</sup> En el caso de Seat, mientras el tipo de cambio de la peseta frente al marco mantuvo una evolución alcista, estas importaciones fueron favorables para la empresa. A partir de las sucesivas devaluaciones de la peseta ocurridas en 1992 la situación cambió, con lo que VW fue en cierta medida culpable de buena parte de los problemas de Seat a partir de esa fecha. Para Costa (1993: 371), la decisión de la firma de endeudarse en marcos sin suscribir un seguro de cambio (se creía que la peseta no iba a depreciarse), junto con el aumento de suministros procedentes de Alemania, han sido las causas de la aceleración de la crisis en la que se ha visto precipitada la empresa.

<sup>6</sup> Al mantener las empresas públicas, con bastante frecuencia, plantillas claramente superiores a las necesarias, los cambios de propiedad suelen significar una oportunidad excelente para su reducción. Sobre la experiencia británica al respecto véase Bishop y Kay (1992) y Haskel y Szymanski (1990).

6º) En relación a los gastos financieros, estos experimentan en Seat una fuerte reducción tras su privatización, aunque las reducciones experimentadas por Renault y Citroën van a ser de mayor intensidad. Estos gastos fueron los de mayor nivel en el período de gestión pública, la entrega a VW de una empresa “limpia de deudas” contribuyó sin duda a esta notable disminución de los mismos.

## 2.2. Balances de situación

De la observación de las cifras que se muestran en la tabla 4, se comprueba como el inmovilizado neto sobre el activo total detenta en los años 1987 y 1988 porcentajes aproximados a los de las empresas de referencia. A partir de 1989, y hasta 1991, las diferencias a favor de Seat son crecientes, como consecuencia de las fuertes inversiones en inmovilizado de todo tipo que esta compañía emprende a partir de dicho año.

En lo que respecta al mismo, los principales factores causantes de su incremento son las inversiones destinadas al inicio de la construcción de la planta de fabricación de Martorell (concebida con los más innovadores criterios tecnológicos y organizativos) y a la modernización del resto de las plantas. De entre ellas, la de más bajos niveles de eficiencia era la de Zona Franca cuyo cierre ya se planteó VW en el momento de su adquisición, pero la expansión del mercado y el consiguiente incremento de ventas que se experimentaba en aquellos momentos determinaron que se optara por su continuación y el inicio en Martorell del nuevo proyecto industrial<sup>7</sup>. La realización de este proyecto, financiado en gran parte mediante créditos, ha significado una inversión próxima a los 300.000 millones de pesetas, incorporando no sólo avances técnicos como la robotización, sino cambios en la organización del trabajo (en la línea de grupos de trabajo altamente adaptables), producción continua sin existencias y alta externalización de las fases intermedias a desarrollar por empresas auxiliares situadas cerca de la fábrica de ensamblaje<sup>8</sup>.

Otro factor causante del crecimiento del inmovilizado lo constituye el aumento de los recursos destinados a la investigación y desarrollo de nuevos productos, a la duplicación, entre 1986 y 1991, del número de técnicos dedicados a tareas de I+D y la ampliación del Centro Técnico de Seat, situado en Martorell (Díaz, 1992).

En cuanto a la inversión en circulante, es de destacar la mejora de la gestión de las existencias, que disminuyen su peso del 11,33% del activo en 1987 al 8,10% en 1991, peso inferior al que tienen las empresas de referencia (ver tabla 4). Igualmente es de destacar la gestión de los clientes y deudores en general, que han disminuido su importancia y pasan de situarse por encima de las empresas de referencia a situarse por debajo de las mismas.

---

<sup>7</sup> A partir de 1992 y hasta 1994 el sector del automóvil registró una caída de la demanda de sus productos que, según Costa (1993:371), no vino sino a poner de manifiesto que la decisión de mantener simultáneamente la Zona Franca y Martorell fue equivocada, ya que obligó a la empresa a mantener un volumen de inversiones que no podía ser amortizado en un período soportable e implicó, además, una disminución de la rotación del capital y la aparición de tasas negativas de rentabilidad económica.

<sup>8</sup> Sobre el proyecto de Seat en Martorell existe abundante información en Costa y otros (1992).

En cuanto a la estructura de capital, los datos de la tabla 4 reflejan el cambio experimentado en la financiación de Seat entre los años 1987 y 1991. La relación Recursos Ajenos/Recursos Propios o Tasa de Endeudamiento de Seat disminuye hasta 1990 para volverse a incrementar de nuevo en 1991, debido al recurso a los créditos externos a que acude Seat para financiar sus inversiones en Activo Inmovilizado. Como puede comprobarse en la tabla 4, la relación Recursos Ajenos/Activo inmovilizado pasa de ser un 16,37% en 1987 a un 34,51% en 1991. Lo más significativo de la estructura de endeudamiento es el mayor peso hasta 1988 de los recursos ajenos a corto en el total de los recursos ajenos en Seat con relación a las empresas privadas, invirtiéndose la situación a partir de dicho año (ver tabla 4).

Sí en 1987 los recursos ajenos a corto sobre el total de recursos ajenos representaban el 92,77% en Seat, frente al 85,57% en las otras empresas, ya en 1989 estos representan el 86,84% en la primera frente al 92,74% de las segundas, alcanzando estas cifras en 1991 valores de 70,99% frente a 96,11% respectivamente.

## CONCLUSIONES

Cuatro son los aspectos más relevantes que van a caracterizar la gestión pública de Seat entre 1982 y 1986: 1º) El abultado volumen de pérdidas que va a padecer la empresa a lo largo del período, 2º) Las fuertes tasas de endeudamiento generadoras de unos elevados gastos financieros, que a su vez van a contribuir en gran medida a las cuantiosas pérdidas, 3º) El mayor crecimiento de los costes laborales en relación con las empresas privadas del sector, y, 4º) El intenso proceso de saneamiento industrial y financiero llevado a cabo por el INI (inyectando cuantiosas aportaciones de capital a la Compañía) como paso previo a su privatización. A partir de esta, se consiguen eliminar los elevados gastos financieros y el enorme endeudamiento del período previo al cambio de propiedad gracias a la entrega por el INI de una empresa saneada. Sin embargo, los Gastos de Aprovisionamiento van a experimentar un importante crecimiento a causa probablemente de los mayores desembolsos que suponen las importaciones de componentes procedentes de la casa matriz. Tras la privatización, Seat va a recuperar (aunque sólo por tres años) su rentabilidad y se va a beneficiar de las fuertes inversiones en inmovilizado de todo tipo que VW promueve en esta compañía con objeto de modernizar sus instalaciones dotándolas con los procedimientos y técnicas de producción más avanzadas. En definitiva, la mejora de la gestión es incompleta elevándose desmesuradamente determinando costes (Aprovisionamiento) y perdiéndose la oportunidad de reducir otros (costes laborales).

## ANEXO ESTADISTICO

TABLA N° 1 COMPARACION ENTRE LAS CUENTAS DE PERDIDAS Y GANANCIAS DE SEAT Y LAS DEL SECTOR (Porcentajes)  
(1982-1986)

|                                    | 1982   |       | 1983   |       | 1984   |       | 1985   |       | 1986   |       |
|------------------------------------|--------|-------|--------|-------|--------|-------|--------|-------|--------|-------|
|                                    | SEAT   | EMP   | SEAT   | EMP   | SEAT   | EMP   | SEAT   | EMP   | SEAT   | EMPR  |
| Vtas. netas e ing. acs. explot.(1) | 96.82  | 96.19 | 89.36  | 96.94 | 92.97  | 95.42 | 99.75  | 98.99 | 99.31  | 99.12 |
| + Aumento existencias              | 0.00   | 3.05  | 8.13   | 1.94  | 1.14   | 3.09  | 0.00   | 0.00  | 0.00   | 0.00  |
| + Trabajos para su innov.          | 3.11   | 0.76  | 2.48   | 1.13  | 5.73   | 1.49  | 0.18   | 1.01  | 0.63   | 0.88  |
| + Sub. a la explotación            | 0.07   | 0.00  | 0.03   | 0.00  | 0.16   | 0.00  | 0.07   | 0.00  | 0.06   | 0.00  |
| = Valor de la producción           | 100    | 100   | 100    | 100   | 100    | 100   | 100    | 100   | 100    | 100   |
| - Compras netas                    | 61.05  | 62.32 | 62.03  | 65.88 | 61.04  | 67.26 | 56.08  | 65.36 | 60.70  | 62.05 |
| + Reducción existencias            | 1.79   | 0.00  | 0.00   | 0.00  | 0.00   | 0.00  | 3.35   | 1.30  | 1.60   | 0.36  |
| -Otros gastos de explot.           | 12.47  | 7.95  | 19.94  | 8.20  | 23.87  | 8.06  | 26.63  | 8.22  | 35.74  | 8.76  |
| = Valor añadido de la empresa      | 24.69  | 29.73 | 18.03  | 25.92 | 15.10  | 24.68 | 13.94  | 25.12 | 1.96   | 28.83 |
| -Gastos de personal                | 20.54  | 21.27 | 23.92  | 19.64 | 21.58  | 18.68 | 18.80  | 18.45 | 18.60  | 16.70 |
| = Rtdo. bruto de explot.           | 4.16   | 8.47  | -5.88  | 6.28  | -6.48  | 6.00  | -4.86  | 6.67  | -16.64 | 12.12 |
| -Dotación amortiz.                 | 4.71   | 4.28  | 4.51   | 4.18  | 3.68   | 4.07  | 5.46   | 3.30  | 6.35   | 5.23  |
| -Dot. neta prev. y prov.           | 0.60   | 0.16  | 0.16   | 0.55  | -0.12  | 0.15  | 0.41   | 0.27  | 2.42   | 0.18  |
| = Rtdo. neto de explot.            | -1.15  | 4.03  | -10.55 | 1.55  | -10.04 | 1.78  | -10.72 | 3.10  | -25.40 | 6.71  |
| + Ingresos financieros             | 0.61   | 2.63  | 1.89   | 4.36  | 1.53   | 2.90  | 1.38   | 3.05  | 2.34   | 2.56  |
| -Gastos financieros                | 19.33  | 5.19  | 22.35  | 5.41  | 19.67  | 6.15  | 19.13  | 5.12  | 5.87   | 3.84  |
| = Rtdo. de las act. ord.           | -19.87 | 1.47  | -31.01 | 0.49  | -28.17 | -1.46 | -28.48 | 1.03  | -28.94 | 5.43  |
| Rtdos. Extr. y de C. de V.         | -0.31  | -4.48 | 3.16   | -0.10 |        | -0.02 | -0.48  | -0.06 | -0.81  | -0.14 |
| = Rtdo. a. de impuestos            | -20.18 | -3.01 | -30.50 | 0.39  | -30.85 | -1.48 | -31.18 | 1.25  | -23.39 | 5.29  |

(1) Incluye ingresos por desgravación fiscal a la exportación.

Fuente: Elaboración propia en base a las memorias de las empresas

TABLA 2 ESTRUCTURA FINANCIERA DE LA EMPRESA

|                                    | 1982  |       | 1983   |       | 1984   |       | 1985  |       | 1986  |       |
|------------------------------------|-------|-------|--------|-------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                                    | Seat  | Empr. | Seat   | Empr. | Seat   | Empr. | Seat  | Empr. | Seat  | Empr. |
| ESTRUCTURA DE INVERSION            |       |       |        |       |        |       |       |       |       |       |
| Inmoviliz. neto/Act. total         | 64.0  | 31.2  | 56.4   | 38.5  | 59.9   | 39.6  | 37.2  | 41.0  | 31.7  | 32.9  |
| Existencias/Act. total             | 11.8  | 20.5  | 11.5   | 19.0  | 10.6   | 20.1  | 10.0  | 15.9  | 9.2   | 12.5  |
| Deudores/Act. total                | 9.3   | 32.8  | 9.7    | 29.6  | 16.0   | 31.4  | 33.2  | 35.0  | 40.5  | 35.0  |
| ESTRUCTURA DE CAPITAL              |       |       |        |       |        |       |       |       |       |       |
| Recursos Ajen./P.P.                | 694.2 | 237.6 | 1498.5 | 229.1 | 1641.9 | 230.1 | 924.7 | 254.8 | 220.7 | 276.9 |
| Recursos aje. a c.p./Rec. ajen.    | 47.0  | 84.2  | 45.2   | 87.1  | 53.9   | 86.3  | 92.4  | 82.1  | 85.1  | 82.1  |
| Act. inmoviliz./Financ. permanente | 111.3 | 84.7  | 102.0  | 103.5 | 133.5  | 103.4 | 249.9 | 103.3 | 86.7  | 92.0  |
| Recur. ajen. a i.p./Act. inmov.    | 70.6  | 32.2  | 87.4   | 22.1  | 74.0   | 23.1  | 16.5  | 30.3  | 28.5  | 36.1  |

TABLA N° COMPARACION DE LAS CUENTAS DE PERDIDAS Y GANANCIAS DE SEAT Y LAS DEL SECTOR (M.Pias.) (Porcentajes)  
(1987-1991)

|                               | 1987  |       | 1988  |       | 1989  |       | 1990  |       | 1991  |       |
|-------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                               | SEAT  | EMPR  | SEAT  | EMPR  | SEAT  | EMPR  | SEAT  | EMPR  | SEAT  | EMPR  |
| Vtas. netas e ing.acs.explot. | 99.06 | 96.74 | 99.44 | 98.24 | 99.78 | 98.98 | 99.90 | 98.15 | 99.20 | 99.93 |
| + Aumento existencias         | 0.57  | 2.60  | 0.00  | 1.17  | 0.06  | 0.18  | 0.00  | 0.70  | 0.38  | -1.36 |
| + Trabajos para su inmov.     | 0.35  | 0.66  | 0.53  | 0.59  | 0.17  | 0.85  | 0.10  | 1.15  | 0.01  | 1.43  |
| + Sub. a la explotación       | 0.02  | 0.00  | 0.04  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.01  | 0.00  |
| = Valor de la producción      | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   |
| - Compras netas               | 60.77 | 65.18 | 60.76 | 65.15 | 66.51 | 66.51 | 69.15 | 69.03 | 70.82 | 67.23 |
| + Reducción existencias       | 0.00  | 0.00  | 0.72  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.05  | 0.00  | 0.00  | -1.36 |
| - Otros gastos de explot.     | 15.16 | 9.38  | 13.30 | 11.43 | 13.71 | 11.85 | 14.37 | 12.51 | 11.45 | 13.13 |
| = Valor añadido de la empresa | 24.07 | 25.44 | 25.22 | 23.42 | 19.78 | 21.64 | 16.42 | 18.46 | 17.32 | 21.00 |
| - Gastos de personal          | 19.46 | 13.85 | 18.28 | 13.40 | 18.30 | 12.62 | 17.34 | 12.54 | 15.51 | 13.09 |
| Rtdo. bruto de explot.        | 4.61  | 11.59 | 6.94  | 10.01 | 1.48  | 9.02  | -0.92 | 5.93  | 1.81  | 7.91  |
| - Dotación amortiz.           | 4.88  | 4.21  | 3.96  | 3.05  | 2.41  | 2.60  | 1.89  | 3.00  | 3.06  | 3.81  |
| - Dot.neta prev. y prov.      | 0.34  | 0.31  | 1.61  | 0.19  | 0.11  | 0.29  | 0.56  | 0.44  | 0.37  | 0.69  |
| - Rtdo. neto de explot.       | -0.61 | 7.07  | 1.36  | 6.77  | -1.03 | 6.13  | -3.36 | 2.49  | -1.61 | 3.41  |
| + Ingresos financieros        | 2.00  | 3.17  | 0.86  | 2.22  | 2.33  | 2.39  | 3.80  | 1.74  | 1.99  | 1.41  |
| - Gastos financieros          | 3.56  | 2.92  | 2.08  | 1.43  | 0.03  | 1.12  | 0.10  | 0.73  | 0.57  | 0.45  |
| - Rtdo. de las act.ord.       | -2.17 | 7.32  | 0.14  | 7.56  | 1.26  | 7.40  | 0.34  | 3.50  | -0.19 | 4.37  |
| Rtdos. Extr. y de C. de V.    | 0.63  | 0.35  | 0.15  | 0.24  |       | -0.04 |       | -0.76 | 0.23  | -1.85 |
| Rtdo. a. de impuestos         | -1.54 | 7.67  | 0.30  | 7.80  | 1.26  | 7.36  | 0.34  | 2.74  | 0.45  | 2.52  |

Fuente: Elaboración propia en base a las memorias de las empresas.

TABLA 4 ESTRUCTURA FINANCIERA DE LA EMPRESA (%)

|                                  | 1987   |        | 1988   |        | 1989   |        | 1990   |       | 1991   |        |
|----------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|--------|--------|
|                                  | Seat   | Empre. | Seat   | Empre. | Seat   | Empre. | Seat   | Empr. | Seat   | Empre. |
| ESTRUCTURA DE INVERSION          |        |        |        |        |        |        |        |       |        |        |
| Inmoviliz. neto /Act.total       | 30.52  | 31.17  | 29.77  | 32.42  | 39.18  | 31.66  | 49.74  | 36.01 | 56.06  | 33.84  |
| Existencias/Act.total            | 11.33  | 16.85  | 10.14  | 19.59  | 14.32  | 18.15  | 9.86   | 21.52 | 8.10   | 16.96  |
| Deudores/Act.total               | 49.70  | 35.19  | 55.53  | 27.54  | 33.81  | 31.23  | 31.85  | 31.10 | 26.97  | 31.89  |
| ESTRUCTURA DE CAPITAL            |        |        |        |        |        |        |        |       |        |        |
| Recursos Ajen./F.P.              | 382.99 | 201.19 | 186.18 | 112.23 | 144.00 | 100.24 | 106.36 | 79.58 | 253.26 | 86.11  |
| Recursos aje. a c.p./Rec.ajen.   | 92.77  | 85.57  | 99.94  | 88.74  | 86.84  | 92.74  | 80.33  | 94.11 | 70.99  | 96.11  |
| Act.inmoviliz./Financ.permanente | 132.46 | 86.66  | 107.93 | 77.21  | 102.11 | 74.67  | 96.48  | 69.19 | 122.73 | 65.43  |
| Recur. ajén. a l.p./Act. inmov.  | 16.37  | 25.96  | 0.11   | 14.53  | 15.60  | 9.09   | 17.93  | 6.47  | 34.51  | 4.95   |

## BIBLIOGRAFIA

AZOFRA, V. y otros (1991): "Análisis sectorial del comportamiento financiero de las empresas públicas y privadas en España", en **Anales de Estudios Económicos y Empresariales**, nº 6, pp.

BARCIELA, F. (1994): "Las concentraciones provocan el cierre de plantas de componentes", en **El País**, de 18 de septiembre de 1994.

BISHOP, M. y KAY, J. (1988): "Does Privatization Work? Lessons from the UK, Centre for Business Strategy, London Business School, Londres.

BISHOP, M. y THOMPSON, D. (1992a): "Privatisation in the UK: Internal organisation and productive efficiency", en **Anales of public and Cooperative Economics**, vol. 63, nº 2, pp. 171-188.

CAO, A. (1993): "Privatization of State-owned Enterprises: A framework for impact analysis", en Ramanadham (1993), pp. 313-327.

CLARKE, T. y PITELIS, C. (Eds.) (1993): **The political economy of privatization**, Routledge, Londres.

COSTA, M.T. y otros (1992): "El sector del automóvil frente a una estrategia de futuro. Análisis del caso español", en **Economía Industrial**, nº 285, pp. 175-184.

COSTA, M.T. (1993): "La crisis de Seat", en **Economistas**, nº 58, pp. 369-373.

CUERVO, Alvaro y MAROTO, Juan A. (1983): "Análisis económico-financiero comparativo entre grandes empresas industriales, públicas y privadas. Años 1979-80 y 1980-81", en **Economía Industrial**, nº 231, pp. 49-72.

CUERVO GARCIA, Alvaro (1989): "La empresa pública: estructura financiera, rentabilidad y costes financieros", en **Papeles de Economía Española**, nº 38, pp. 177-198.

CUERVO GARCIA, A. (1992): "Las empresas públicas, sociales y cooperativas en la nueva Europa. El comportamiento económico de las empresas públicas concurrenciales ante el mercado único". Ponencia presentada al XIX Congreso Internacional de CIRIEC, Valencia, 1992.

DE LA FUENTE, J.M. y otros (1988): "Perfil económico-financiero de las empresas españolas", en **Economía Industrial**, nº 262, pp. 77-87.

DIAZ, J.A. (1992): "Las prioridades para la industria", en **España en la nueva Europa. Ganadores y Perdedores**. Conferencia realizada por Financial Times y Expansión, Madrid, 18 y 19 de noviembre de 1992.



DUNSIRE, A. (1991): "Organizational Status Change and Performance: The Significance of Internal Structure", en OTT, A.F. y HARTLEY, K. (Eds.) (1991).

HASKEL, J. y SZYMANSKI, S. (1990): "What happens to wages and employment after privatisation? Theory and evidence for the UK. Documento de Trabajo nº 90 del Centre for Business Strategy, London Business School.

HUTCHINSON, G. (1991): "Efficiency Gains through Privatization of UK Industries", en OTT, A.F. y HARTLEY, K. (Eds.) (1991).

JACKSON, P. y PRICE, C. (Eds.) (1994): **Privatisation and Regulation. A review of the issues**, Logman, Londres y N. York.

MYRO, Rafael (1985): "Productividad y rentabilidad en las industrias del INI: una comparación sectorial con empresas privadas", en **Economía Industrial**, nº 241, pp. 77-88.

NOVALES, A. y otros (1987): **La empresa pública industrial en España**, Ed. Fedea, Madrid.

OTT, A.F. y HARTLEY, K. (Eds.) (1991): **Privatization and Economic Efficiency**, Edward Elgar, Gran Bretaña.

PARKER, D. y HARTLEY (1991a): "Status Change and Performance: Economic Policy and Evidence", en OTT, A.F. y HARTLEY, K. (Eds.) (1991).

PARKER, D. y HARTLEY (1991b): "Do Changes in Organizational Status effect Financial Performance?", en **Strategic Management Journal**, vol. 12, pp. 631-641.

PARKER, D. (1993): "Ownership, organizational changes and performance", en CLARKE, T. y PITELIS, C. (Eds.) (1993).

PARKER, D. (1994): "Nationalisation, privatisation, and agency status within government: testing for the importance of ownership", en JACKSON, P. y PRICE, C. (Eds.) (1994).

RODRIGUEZ, J.M. y DE LA FUENTE, J.M. (1987): "Características económicas y financieras de la empresa pública española desde una perspectiva multivariante", en **Economía Industrial**, nº 256, pp. 137-143.

VERGES, J. y PRIOR, D. (1985): **La empresa pública española: evolución, déficit y financiación**. Documentación de Trabajo, nº 7, Caja de Pensiones, Barcelona.

YAGUE, M.J. (1987): "Análisis económico-financiero de la empresa industrial española 1985-1986", en **Economía Industrial**, nº 257, pp. 73-84.



# INTERNACIONALIZACIÓN E IMAGEN DE MARCA

ANA ISABEL JIMÉNEZ ZARCO

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de Albacete.  
Universidad de Castilla la Mancha.

## I. INTRODUCCIÓN

La competitividad de las organizaciones empresariales en los mercados domésticos y exteriores se apoya en la consecución y sostenimiento de ventajas competitivas como fuente de obtención de niveles superiores de beneficios a medio y largo plazo.

Una empresa puede obtener una ventaja competitiva mediante la gestión eficiente de sus recursos y activos, tanto tangibles como intangibles, o por la correcta elección del producto-mercado en el que va a desarrollar su actividad. Sin embargo, su sostenimiento dependerá de la capacidad que tenga de mantener y reforzar dicha ventaja en el tiempo, de modo que contribuya a la obtención de una posición superior frente a la competencia directa dentro de su sector. Unas veces mediante una *ventaja en costes*<sup>1</sup> u otras a través de una *ventaja en diferenciación*,<sup>2</sup> lo cierto es que la empresa que sostenga uno de estos tipos de ventajas está en posición de obtener mayores beneficios a medio y largo plazo.

Dentro del actual sistema libre-competitivo en que se mueve la actividad empresarial, la diferenciación

basada en atributos funcionales básicos entre productos es difícil de conseguir dado el grado de homogeneidad que el mercado impone<sup>3</sup>. Además una ventaja en costes únicamente puede obtenerse en algunos mercados, bien a través de métodos de producción novedosos, posibilidad de obtención de materias primas a menor coste, o distribución de costes entre varias líneas de productos. Por ello se plantea la necesidad de buscar y adoptar aquellas estrategias que permitan desmarcarse de la competencia mediante la consecución de algunas ventajas competitivas en diferenciación, basadas en la creación de atributos funcionales complementarios o simbólicos dentro del producto.

Una de las principales estrategias que la empresa puede utilizar en la obtención de una ventaja competitiva en diferenciación, consiste en la construcción de un fuerte capital comercial basado en el valor añadido que la creación de una marca, representante de esos atributos simbóli-

<sup>1</sup> Mediante la producción y comercialización de productos o servicios que satisfagan de igual manera que los de la competencia las necesidades de los consumidores, pero que presenten como atractivo un menor coste y precio.

<sup>2</sup> Mediante la producción y comercialización de productos o servicios que satisfagan mejor que los producidos por la competencia las necesidades de los consumidores.

<sup>3</sup> Producción de productos altamente estandarizados.

cos que diferencian al producto, puede conferir tanto a los consumidores<sup>4</sup> como a la empresa. Esto, mediante una gestión eficiente de modo que se genere una imagen de marca positiva, y ayudado de una imagen corporativa adecuada<sup>5</sup> permitirá a la empresa conseguir a lo largo del tiempo uno de sus principales activos: *un fuerte capital de marca*.<sup>6</sup>

Una empresa con una marca fuerte<sup>7</sup> conseguirá atraer consumidores, creando fidelidad o lealtad en su comportamiento de compra, haciendo la demanda más insensible al precio, y a los productos sustitutivos, puesto que incrementa la satisfacción del consumidor y le suministra razones para seguir comprando el producto. Crea barreras de entrada en el mercado que le permitan explotar las ventajas de poder de monopolio, así como suministra altos márgenes de beneficios al permitir introducir precios más elevados, reducir la dependencia de las promociones y mejorar la eficiencia de los programas de marketing. Al mismo tiempo, le proporcionará otras ventajas competitivas en cuanto que actúa como plataforma para el lanzamiento de nuevos productos, *crecimiento a través de extensiones de marca*, aumenta las probabilidades de éxito en la internacionalización de éstos, y sirve como punto de apoyo para reaccionar ante situaciones de crisis o ataques de la competencia.

En la actualidad, el estudio de la imagen de marca, así como la ventaja competitiva que genera, es uno de los temas que más preocupan a la comunidad académica y profesional del marketing. Ésta es quizá la razón que nos ha llevado a tratar de evaluar sus implicaciones no tanto a nivel nacional, donde hasta cierto punto parecen evidentes, sino a nivel internacional. Al mismo tiempo trataremos de determinar otros factores que puedan influir conjuntamente en el éxito del proceso de penetración en mercados internacionales de una marca líder en su mercado nacional.

## II. LA INTERNACIONALIZACIÓN DE LAS EMPRESAS

Aunque el concepto de internacionalización suele ser definido como el establecimiento de sedes y filiales en diversos países a fin de penetrar en sus mercados, se puede observar que esta definición únicamente hace referencia a aquellas estrategias de internacionalización globales o

---

<sup>4</sup> El Marketing Science Institute (NSI) definió en 1989 el valor de marca como el valor añadido del nombre que es recompensado por el mercado con márgenes de beneficio o cuotas de mercado mayores, y los consumidores y/o los distribuidores pueden verlo como un activo financiero y como un conjunto de asociaciones favorables y de comportamiento.

<sup>5</sup> Siguiendo a D. Aaker y a K. Keller, una imagen corporativa adecuada puede ayudar a establecer la imagen de las marcas al suministrarle algunas dimensiones adicionales sobre las cuales puede sustentar dicha imagen.

<sup>6</sup> Cuando una marca comunica calidad, servicio, credibilidad, confianza y estabilidad a sus consumidores es capaz de generar en ellos una lealtad hacia la misma y hacia sus extensiones. Esto ofrece a la compañía una ventaja que proporciona diferenciación frente a la competencia así como la generación de altos ingresos y beneficios marginales durante años, asentando las bases para la construcción de un fuerte capital de marca.

<sup>7</sup> David Aaker considera que las compañías suelen construir marcas fuertes, las cuales les suponen una ventaja que dará beneficios en el futuro, como una alternativa a la competencia basada en precios o especificaciones del producto, tan difícil de conseguir en el entorno económico actual.

multinacionales<sup>8</sup>, olvidándose por completo de la llamada internacionalización comercial, que, si bien constituye una forma distinta de estrategia, es a menudo un complemento para afrontar la competencia internacional (Myro y Yagüe, 1991).

Tratar de determinar cuáles han sido las causas que han motivado este proceso es una tarea difícil de llevar a cabo, debido a la multitud de acontecimientos que, de forma directa o indirecta han influido en la internacionalización de la economía. Entre ellos podemos citar:

a) El práctico agotamiento de las posibilidades dentro de los mercados interiores. El hecho de que algunos sectores dentro del mercado interior se encuentren en una fase de madurez, y ante la imposibilidad por parte de la empresa de poder ampliar su cuota dentro de aquél al que tradicionalmente se ha dirigido<sup>9</sup>, le impone la necesidad de orientarse hacia nuevos mercados.

Otras veces, este agotamiento de las oportunidades del mercado no se debe al hecho de que éste se encuentre o no en una fase de madurez, sino que viene derivado de la introducción en el mismo de nuevos competidores venidos de terceros países, que pueden presentar características distintas a las de los nacionales. En este caso la empresa nacional puede llegar a la conclusión de que el único modo de competir en el futuro es a base de internacionalizarse.

b) Cambios tecnológicos que incrementan el tamaño mínimo eficiente de la empresa y suponen grandes inversiones en capital; fuerzan a la empresa a orientarse hacia mercados exteriores como único modo de amortizar esa inversión a través de un aumento de producción que el mercado nacional no es capaz de absorber<sup>10</sup>.

c) La obtención de ventajas que este tipo de estrategias puede ofrecer<sup>11</sup>, que si bien algunas veces no son muy amplias se pueden acumular de modo que se obtenga una posición más sólida en el mercado. (Myro y Yagüe, 1991)

d) La apertura de algunos mercados, como el de la Europa del Este o de otras economías menos desarrolladas, que permiten acceder a un mercado potencial de consumidores, o al menos a algunos segmentos de mercado, bastante amplio.

e) La homogeneización de gustos en los consumidores, con la posible pérdida de identidad cultural que esto supone, pero que presenta como ventaja la cuasi-homogeneización de algunas áreas del mercado.

<sup>8</sup> En Myro y Yagüe (1991) se recogen una tipología de estrategias internacionales basada en dos dimensiones básicas en la toma de decisiones de la empresa: coordinación e integración de actividades entre países y la configuración o distribución geográfica de la empresa.

<sup>9</sup> Para una empresa que compite en un mercado que se encuentra en una fase de madurez es muy difícil el poder modificar su cuota de mercado: por un lado debido a la estabilidad que la competencia suele presentar, sin salida o entrada de nuevos competidores, y por otro de la imposibilidad de una ampliación de mercado que se realiza normalmente en las fases de crecimiento del mismo.

<sup>10</sup> Si un país deseara tener su propia planta de producción para abastecer su mercado local, esta debería trabajar a bajo rendimiento y por tanto establecer un alto precio para su producto, pues su rendimiento óptimo, dada la tecnología de fabricación, es muy superior al tamaño del mercado nacional.

<sup>11</sup> Aprovechamiento de economías de experiencia, fortalecimiento de las ventajas competitivas en coste, y un mayor control de los mercados que posibilite una tasa de expansión más sostenida.

Afirmar que el proceso de internacionalización es lo más aconsejable para una empresa que se encuentra ante las circunstancias anteriores, supone un grave riesgo. Debemos resaltar que la puesta en práctica de este tipo de estrategias implica, no sólo de el transcurso de un amplio periodo de tiempo y un árduo proceso de planificación y control, como si de un proceso de aprendizaje se tratara, sino también de la necesidad de conocer y tener en cuenta los múltiples factores que dificultan este tipo de actuación. Entre ellos se encuentran: gobiernos nacionales con tendencias proteccionistas que dificultan la entrada de empresas extranjeras en su mercado mediante la imposición de barreras tanto arancelarias como no arancelarias<sup>12</sup>); altos costes de transporte; acceso a canales de distribución; barreras idiomáticas, culturales o de comunicación; gustos de los consumidores locales que, aunque estén en un proceso de convergencia, todavía son distintos en muchas áreas, etc.

Sin embargo de entre los múltiples factores antes mencionados, será la dificultad de acceder a los canales de distribución internacionales uno de las más importante. La empresa productora ante las exigencias de los distribuidores se verá forzada a llevar a cabo un proceso de negociación, que le obliga a revisar las actividades de marketing, sus prácticas de distribución, y le supone una pérdida del poder distintivo de su marca de modo que pueda acomodarse a los principales distribuidores. Por contra este mismo proceso le permitirá obtener una reducción de sus costes de distribución, un incremento de beneficios, y la garantía de que sus marcas se van a distribuir en la práctica totalidad del nuevo mercado.

Otra opción alternativa consiste en el establecimiento por parte de la empresa de sus propios canales de distribución, que si bien implica una alta inversión en la construcción del mismo, le garantiza una pérdida mínima de poder dentro del canal. No obstante, la elección entre una alternativa u otra dependerá únicamente del tipo de mercado en el que se compita, y de la política de distribución de que la empresa desee llevar a cabo.

## **II.1 Internacionalización y marca**

La mayoría de las empresas que deciden actuar más allá de sus fronteras son aquellas que tienen éxito en su mercado nacional, éxito que se debe normalmente a la posesión de algún activo intangible, difícil de imitar por sus competidores y que les proporciona una ventaja competitiva en su mercado. Cuando la empresa se aventura en otros países, tiene que seguir apoyándose en estos activos para tener una ventaja competitiva que se pueda explotar, de otro modo las empresas locales, que conocen mucho mejor el mercado, que cuentan con una buena aceptación por parte de los consumidores, y están relacionadas con las instituciones locales serían unos competidores demasiado poderosos.

Cierto es que la extensión internacional forma parte de la lógica de la marca, siendo una condición necesaria para su crecimiento, para su capacidad de renovarse y para mantener una ven-

---

<sup>12</sup> Exigencias de fabricación con un producto únicamente obtenido en este país, cuotas voluntarias de exportación, mejor posición de los proveedores locales ante los pedidos de su gobierno, barreras de entrada en sectores considerados como estratégicos, etc.

taja competitiva. Pero para el establecimiento de esta forma de actuación se exige a las empresas introducir cambios en sus estrategias funcionales en las áreas de I+D, aprovisionamiento, producción y comercialización, así como llevar a cabo un proceso de toma de decisiones incrementales de ajuste a las cambiantes condiciones de la empresa y del entorno. El resultado neto es que la empresa vaya instalando fuera de sus fronteras aquellas actividades de la cadena de valor, junto con las ventajas que estas le proporcionan, lo más próximo posible al cliente final.

Para el acceso de la marca al mercado internacional, las empresas disponen de dos estrategias de carácter genérico: comercializar una *marca global* a través de una estrategia indiferenciada en todos los mercados, o adaptar en cada país el nombre de marca a las contingencias y características específicas de los mercados nacionales, ofreciendo un posicionamiento, unos niveles de precios distintos y unas campañas específicas.

Dilucidar cuál de los dos enfoques es el más adecuado es un duro reto para cualquier equipo gerencial que se enfrente al diseño de una estrategia internacional de marca, en el cual se pueden plantear varias cuestiones: ¿Cómo acceder a los mercados internacionales?, ¿Qué proporción hay que mantener de marketing mundial haciendo caso omiso de las fronteras o sin adaptar las marcas a sus contextos nacionales y a sus características específicas?, ¿Qué autonomía de decisión se deben dejar a los equipos de marketing de las distintas naciones?.

## II.2 La estrategia de mundialización de marcas

El desarrollo de una marca mundial considera al país en un campo competitivo más amplio, donde sus objetivos de marketing dejan de estar determinados por la filial de dicho país y son cedidos, en función de un sistema mundial de competencia (Kapferer, 1992). Esto puede ser una necesidad en algunos sectores, sobre todo en aquellos en que los propios compradores lo son a nivel mundial, sea el caso de empresas multinacionales, o donde la marca procede de un individuo que se percibe como su creador, siendo esta su firma, su sello. Pero otras veces, esta estrategia es tan sólo fruto de un intento de racionalizar la dirección de la empresa<sup>13</sup>), o de sacar partido de nuevas oportunidades de comunicación, ante la similitud existente entre las estructuras de algunos mercados y la existencia de algunas tendencias sociales de carácter internacional.

La empresa que se plantea llevar a cabo una estrategia de mundialización de sus marcas, requiere no sólo una actitud mundial, más fácil de conseguir en aquellas que tienen un único dueño, sino que precisan además de una modificación de sus procedimientos de decisión y de sus estructuras en general, haciendo que su función de marketing ascienda hasta la sede central, y exigiendo en materia publicitaria la adopción de una única red que facilite la homogeneidad creativa, los intercambios de información y de hombres y la creación de un *saber hacer* circulante. La mundialización es una actividad que intenta aprovechar al máximo las convergencias y similitudes de un país con otro, y no va dirigida a explotar las diferencias de orden menor, así se comprende, que

<sup>13</sup> La estrategia de globalización, según Kapferer, es menos arriesgada que cualquier otra alternativa de crecimiento pues sólo exige acciones de refuerzo y apoyo que consoliden las fortalezas existentes, y tiene mayores posibilidades de aprovechamiento de economías de escala y una óptima utilización de los recursos humanos.

debido a su cultura y organización haya empresas favorables a una actitud mundial y otras que sean rebeldes a ella (Kapferer, 1991).

En lo que respecta al modo de llevar a cabo esa penetración en el mercado, las empresas suelen optar bien por hacerlo mediante la marca propia que compite en su mercado nacional, bien por adquirir una marca conocida a nivel mundial. La primera opción supone que la empresa intente penetrar con su marca inicialmente en aquellos países con características similares a propio, normalmente pertenecientes al entorno geográfico o cultural, donde la incertidumbre a la hora de actuar es menor, y hasta cierto punto es posible crear un cierto reconocimiento por parte de los consumidores, e inferir el capital de marca. Posteriormente y una vez que la marca haya conseguido posicionarse en esos mercados, solventando múltiples problemas, intentar expandirse hacia terceros países.

La otra opción consiste en la adquisición por parte de la empresa de una marca que posea cierto reconocimiento y un capital de marca a nivel mundial. Adquisición que si bien supondrá una gran inversión financiera, aportará como ventaja un ahorro en tiempo y trabajo dentro de un entorno incierto.

Entre las múltiples ventajas que la mundialización de las marcas presenta encontramos: la eliminación de la duplicidad de esfuerzos en el campo de la creatividad y a nivel de lanzamiento de productos, la obtención de oportunidades derivadas del desarrollo de los medios de comunicación a nivel internacional, aprovechamiento de la internacionalización de los distribuidores, mayor potencialidad de las extensiones de marca, obtención de economías de escala en el desarrollo de la publicidad, envase, promoción y volumen de ventas, etc. Sin embargo, los dos principales atractivos que esta estrategia aporta son por una parte la obtención de sinergias derivadas de la credibilidad suplementaria que obtiene por su implantación internacional, y por la aceleración del proceso de capitalización de su nombre que adquiere mayor irradiación, obteniendo una notoriedad y un "Goodwill" capaz de proporcionar una irremplazable palanca para la introducción en otros mercados.

La marca global puede tener algunas asociaciones útiles. Unas veces el mismo concepto de globalidad puede simbolizar la habilidad de generar productos competitivos, además de fuerza y poder de permanencia. Esta imagen puede ser particularmente importante en productos industriales o bienes de consumo duradero donde hay riesgos para el cliente de que un producto pueda no ser de confianza o ser superado tecnológicamente por un competidor (Aaker, 1994). Otras veces puede generarse una asociación con el país origen que en muchos casos suele formar parte de la esencia de la marca. En base a la posición que cada país ocupa en la mente de los consumidores, claramente asociada con estereotipos tradicionales de los productos fabricados en él, se produce un efecto *made in* que puede ser considerado como uno de los elementos que configuran la imagen de los productos y que, hasta cierto punto, determina su posicionamiento en el mercado exterior.



### II.3 CRITICAS A LA MUNDIALIZACIÓN DE LA MARCA. LA ESTRATEGIA DE INTERNACIONALIZACION

En determinadas situaciones es más fácil una política de marca y comunicación mundial: aquellos sectores nuevos donde todo está por crear y donde nada se opone a la mundialización de la marca pudiendo esta imponer su propio sistema de valores, o aquellos otros, en que ésta es capaz de extraer del inconsciente colectivo los resortes de su inspiración (Kapferer, 1992).

Los cambios sociales, culturales y tecnológicos también ofrecen un terreno favorable para las marcas mundiales. Según Theodore Levitt (1987), en estas condiciones es posible encontrar que el resultado de esta corriente conforme una nueva realidad comercial, con el surgimiento de mercados globales para productos de consumo estandarizados, donde el consumidor ya no acepte valores heredados y nacionales, tienda a la desaparición de las acostumbradas diferencias entre los gustos y a la búsqueda nuevos modelos para afirmar su identidad. La Universalidad en las preferencias conducirá inexorablemente a la estandarización de los productos, de las formas de manufactura y de las instituciones comerciales e industriales.

No obstante lo anterior no prueba que todas las personas que habitan en el mundo tienen preferencias similares. Los avances tecnológicos y las mayores posibilidades de viajes al exterior han contribuido al surgimiento de una *cultura de tipo universal* que genera ciertas corrientes o tendencias sociales de carácter universal que facilitan la homogeneización de la demanda a nivel mundial, lo cual puede ser capitalizado por los comercializadores de marcas. Sin embargo, esta homogeneización no es totalmente efectiva, en determinadas situaciones está probado que los gustos o creencias de los consumidores llevan a un comportamiento de compra diferenciado. En este sentido Philip Kotler afirmó en 1985 que los mercados se están volviendo cada vez más fragmentados ante lo cual la estandarización producirá consecuencias adversas. Las endebles marcas globales serán muy vulnerables ante marcas locales dirigidas a nichos de mercado, cuyo mayor poder de adecuación a las preferencias locales les dará una ventaja competitiva que las primeras no poseen.

Además la situación competitiva de una empresa con marcas globales puede verse afectada de modo significativo por su posición en otros países. Se debe tener en cuenta que los productos exportados raramente mantienen el mismo capital e imagen de marca<sup>14</sup>, así como el mismo posicionamiento en los aspectos precio/producto en el extranjero que en su país de origen. Esto obligará a la empresa a usar un posicionamiento publicitario y una estrategia de marketing diferente en cada país.

La realidad demuestra que la mayoría de las corporaciones siempre han estado adaptando su actividad de marketing a condiciones locales. En contraposición a un enfoque mundializador, siguen una *filosofía multinacional*; optando por adaptarse en cada país a las contingencias y características específicas de los mercados nacionales, donde los productos presentarán en cada merca-

<sup>14</sup> Roray Morgan y sus compañeros de Investigación Internacional han demostrado mediante el modelo Pilot-Locator, como cambios simulados en la imagen de marca podían modificar las preferencias de los consumidores por ellas, y alterar el capital de marca de la empresa.

do un posicionamiento diferente, unos niveles de precios distintos, unas campañas de comunicación y hasta incluso un nombre específicos. Es en este caso cuando nos encontramos ante lo que podríamos denominar *estrategia de multimarca o marcas locales*.

Sin embargo, el hecho de que una empresa no adopte una estrategia de mundialización de sus marcas, sino que se decante por la adecuación de ésta a la demanda de un segmento determinado dentro de un mercado nacional, no implica que deba llevarse hasta sus máximas consecuencias adoptando estrategias de corte local. Es posible que algunos segmentos que la empresa ha identificado en un determinado país, y a los cuales dirige su marca, rebasen los límites nacionales convirtiéndose en un *segmento global*, a pesar de que los mercados se estén fragmentando. En este caso es cuando hablar de una estrategia multinacional basada en el *enfoque piense globalmente, actue localmente* tiene verdaderamente sentido. Este enfoque da por sentado que la concepción de marca y su estrategia central va a ser la misma a nivel mundial, o al menos a nivel regional, *status de marca global*, pero la implementación de acciones estratégicas debe adecuarse a condiciones locales<sup>15</sup>.

Según David Arnold (1994): Por encima de todo una compañía debe tener los objetivos bien definidos si pretende llevar a cabo una estrategia de internacionalización de sus marcas. Ciertos aspectos de las operaciones se beneficiarán de la consolidación que proviene del campo de una acción mayor. La *parte dura* como las finanzas, los sistemas de distribución, procesos de producción o los sistemas de información probablemente funcionarán mejor en un sistema único internacional, pudiendo cada área obtener sinergias de los enfoques globales y de las economías de escala. El manejo de la marca es la parte del *lado blando* de los negocios, trata de percepciones del público consumidor y por tanto puede clasificarse en el manejo de recursos humanos y de cultura corporativa, áreas en que cualesquiera variaciones sutiles locales qu se incorporen probablemente produzcan profundas repercusiones.

La internacionalización de la marca parece ser la respuesta más adecuada. Una marca verdaderamente internacional debe ofrecer mucho más que una distribución internacional. Debe ser al mismo tiempo capaz de diferenciar los aspectos de organización que pueden estar estandarizados de los que exigen adaptaciones a nivel local, y equilibrar la necesidad de una sólida estrategia de posicionamiento a nivel internacional con la necesidad del máximo valor agregado de los segmentos de los consumidores donde quieran que se hallen.

---

<sup>15</sup> Algunos estudios han demostrado que la estrategia de marca estandarizada para un conjunto de países es independiente de la estrategia seguida en publicidad.

### III. BIBLIOGRAFÍA

Aaker David A. (1994). *Gestión del Valor de la Marca*. Ed. Diaz de Santos. Madrid.

Aaker David A. and Kevin L. Keller (1993). *The Effects of Corporate Branding Strategies on Brand Equity*. Advances in Consumer Research. Vol XX. pag 27

Aaker David A. and Kevin L. Keller (1993). *Managing the Corporate Brand: The Effects of Corporate Images and Corporate Brand Extension..* Research Paper Series. Standford University.

Aaker David A (1992). *Managing the Most Important Assest: Brand Equity*. Planning Review. Vol 20. Septiembre-Octubre. pag 56-58.

Aaker David A. (1992). *The Value of Brand Equity*. Journal of Business Strategy. Vol 13. Julio-Agosto. pag 27-32.

Alpert Frank (1993). *Consumer Market Beliefs and Their Management Implications: An Empirical Examination*. Journal of Consumer Marketing. Vol 10. pag 56-70

Arnold David (1994). *Como Gestionar una Marca*. Colección Gestión y Empresa. G.E. Parramon Ediciones S.A. Barcelona.

Biel Alexander L. (1992). *How Brand Image Drives Brand Equity*. Journal of Advertising Research. Vol 32. Noviembre. pag RC6-RC12.

Blesa Andreu. (1993). *La Imagen Corporativa. Una Ventaja Competitiva en el Mercado Internacional*. Esic Market. Octubre- Diciembre. pag 117-124.

Clay Edmunds (1991). *Evaluating The Equities in Your American Brand: Will They Traslate in The EC?*. Journal of European Business. Vol 2. Marzo-abril. pag 11-16

Bavara Alicia y Franca Deumier. (1993). *Marcas del Distribuidor en Europa*. Dossier realizado por European Distribution Press Group. Distribución Acutalidad. No 208. Septiembre. pag 3-20.

Dent Harry S. JR (1990). *Branding Strategies*. Small Business Report. Vol 15. Septiembre. pag 62-66.

Egan Willian. C.III. (1992). *Brand Equity: The Value of Trademark*. Editor & Publisher. Vol 25. Diciembre. pag 4T-6T, 26T.

Gordon GeoffreL. Calantone Roger J. Di Benedetto C. Anthony. (1993). *Brand Equity in the Business -to Business Sector: An Exploratory Study*. Journal of Product & Brand Management. Vol 2. pag 4-16.

Han Min C. (1989). *Country Image: Halo or Summary Construct?*. Journal of Marketing Research. Vol XXVI. mayo. pag 222-229.

Jarillo José Carlos y Jon Martínez Echezarraga. (1991). *Estrategia Internacional, Más Allá de la Exportación*. McGraw-Hill.

Kapferer Jean- Noel (1984). *La Marca Capital de la Empresa*. Ed Deusto S. A. Madrid.

Kapferer Jean -Noel and Jean-Claude Phoening. (19991). *La Marca*. McGraw-Hill de Management. Madrid.

Kotler Philip. (1985). *Global Standardization- Counting Danger*. American Marketing Association Conference. Washinton D.C.

Lanon Judie.(1991). *Devoloping Brand Strategies Across Borders*. Marketing and Research Today. pg 160-168.

Levitt Theodore (1983). *The Gobalization of Markets*. Havard Business Review. Mayo-Junio pg 92-95.

Lukeman Gerald (1992). *Image is Everything*. Small Business Report. Vol 17. pag 15-19.

Marmol Luis. (1993). *La Guerrra de las Marcas Marca nuevos Estilos de Marketing*. IPMARK. nº 418/1-15. Noviembre. pag 28-31.

Miquel Salvador, Karin Newman and Enrique Bigne (1993). *Buying Preference and Posicioning in Spain and Britain of Products Made in Various European Countries*. Proceeding of 22nd anual Conference of European Academy. Esade. Barcelona.

Miquel Salvador, Karin Newman and Enrique Bigne (1993). *La Imagen de los Productos Fabricados en España*. ICE. nº 722. Octubre. pag 49-77.

Myró Rafael y Mª Jesús Yagüe (1991). *Apertura e Internacionalización de la Economía Española*. Colección Economistas Libros. Madrid. pag 337-396.

Queen Penelope. (1992). *New World Brand Equity*. Adweek (Midwest Ed.). pag 36-39.

Restall Christine and Wendy Gordons (1993).. *Brands the Missing Link; Understanding the Emotional Relationship*. Marketing and Research Today. Vol 21.nº 2 Mayo. pag 59-69.

Roth Martin S. (1992). *Depth Versus Breadth Strategies for Global Brand Image Management*. Journal of Advertising. Vol 21. nº 2. Junio. pag 25-36.

Sandler Dennis M. and David Shani. (1991). *Brand Globally but Advertising Locally?: An Empirical Investigation*. International Marketing Review. Vol 9. nº4. pag 18-31.

Villafañe Justo. (1993). *Imagen Positiva. Gestión Estratégica de la Imagen de las Empresas*. Ed Pirámide S.A. Madrid.

Wilbacher Willian M. (1993). *Brand Marketing*. NTC. Business Books.

Weinstein Steve. (1994). *A Case for National Brands*. Progressive Grocer. Vol 73. Abril. pag 109-110

# **EL ENFOQUE ANALITICO DE LAS LISTAS DE ESPERA HOSPITALARIAS EL CASO DEL HOSPITAL ARANZAZU DE SAN SEBASTIAN**

**FERNANDO LOPEZ DE VICUÑA ARCAUZ**

Facultad de CC. EE. y Empresariales (ESTE)

Universidad de Deusto (campus de San Sebastián)

## **1. INTRODUCCION**

Voy a tratar de hacer en esta comunicación un breve resumen de la metodología y de las principales conclusiones de una tesis que con el mismo título que encabeza esta intervención tuve el honor de leer en el campus de San Sebastián de la Universidad de Deusto en diciembre del año pasado.

Dicha tesis tenía un doble propósito:

- Proporcionar en primer lugar una perspectiva ajustada del problema de las listas de espera, mostrando el peso relativo que ha tenido en España durante los últimos diez años en relación al conjunto de la problemática de la gestión hospitalaria, y exponiendo así mismo el enfoque que ha venido recibiendo el problema concreto de las colas a través de los análisis y diagnósticos que le han consagrado los facultativos, administradores sanitarios y observadores interesados de diferentes países desarrollados.
- Mostrar la utilidad de la teoría de colas en el análisis del proceso de formación de las listas de espera de hospitalización mediante una aplicación de dicha teoría en el caso del Hospital Aranzazu de San Sebastián (hospital de cabecera que como en otras capitales venía

denominándose como "residencia sanitaria"). La teoría de colas se complementa con otros métodos de diagnóstico estadístico como el estudio de las series temporales de los datos de las colas y algunas técnicas de análisis multivariante.

## **2. GESTION HOSPITALARIA Y LISTAS DE ESPERA**

El examen de las monografías y, en general, de la literatura hospitalaria aparecida en España a lo largo de los diez años precedentes a la realización de mi investigación, permiten afirmar que durante ese decenio de los ochenta las listas de espera no han sido abordadas, ni por la prensa especializada ni por los organismos sanitarios, como un problema que mereciera una atención especial; por lo general cuando se ha hecho referencia a ellas ha sido más bien al soslayo o tratándolas como consecuencia derivada de otros problemas caracterizados, como el desequilibrio entre oferta y demanda, la falta de racionalización de la estancia media o la ausencia de un buen servicio centralizado de admisión.

Aún en la segunda mitad de los ochenta, en la época de la reforma, cuando ya existe un modelo de gestión hospitalaria y se establecen indicadores y objetivos, las listas de espera quedan al margen de estos últimos y su tratamiento se limita a la confección de unas estadísticas. No se incluyen en ningún enfoque sobre control de calidad y las encuestas o formularios dirigidos a los pacientes tampoco las contemplan. Las propias encuestas sanitarias del CIS (Centro de Investigaciones Sociológicas) las excluyen de igual modo.

Hay que esperar a finales de los ochenta y principios de los noventa para que, de forma un tanto repentina, el asunto de las listas de espera se convierta en un tema de actualidad. Los motivos que confluyen en este despertar de la preocupación especial por las listas de espera son varios. Junto a los factores internos de la propia dinámica de la Administración y de la sociedad españolas, como el inicio de la descentralización de los servicios de salud y el incremento de la demanda de hospitalización inducido por la universalización de las prestaciones y por la mejora en la variedad y calidad de la

oferta de los centros públicos, hay que poner de relieve la influencia que han tenido los estudios monográficos dedicados a las colas de consulta y de hospitalización en otros países, en especial en el Reino Unido, donde lo endémico del problema (téngase en cuenta que allí llevan unos cuarenta años padeciéndolo) unido al hecho de que últimamente se estaba agravando alarmantemente, venía suscitando una atención especial por parte de los analistas y de las autoridades haciendo correr bastante tinta tanto en la literatura especializada como en la prensa diaria.

Si se desciende del análisis contextual de las colas, dentro de la problemática general de la gestión hospitalaria, al nivel particular de las monografías (en su práctica totalidad foráneas) centradas en el examen específico de las listas de espera, constatamos que, desgraciadamente, las fuentes de documentación no son abundantes y además son geográficamente bastante dispersas, pero, en contrapartida, resultan ser convergentes en bastantes de las observaciones que se hacen sobre el tema que nos ocupa.

En cuanto a las estadísticas que proporcionan los centros hospitalarios caben destacar en un breve resumen: su formato prácticamente estándar en todos los sitios donde se publican, las imprecisiones que se derivan de su método de elaboración y de su deficiente control, la variabilidad de sus resultados según zonas, hospitales o especialidades quirúrgicas, y, en general, su escasez, su esporádica y reducidísima publicación. Las imprecisiones conducen, entre los analistas, a constantes reflexiones sobre las posibles sobreevaluaciones o subestimaciones de los datos de pacientes en lista de espera y de los datos de demora media. En definitiva la posición de los observadores es bastante ambivalente en este punto. Por un lado muestran bastante desconfianza y escepticismo en las estadísticas y por otro reconocen su utilidad y demandan mejoras en su concepción y en su control.

Pasando a la cuestión de las causas, es mucho más fácil encontrar referencias al tema de las estadísticas y al de las soluciones que a lo que concierne al análisis de los factores que intervienen en la formación de las colas. De estos tres aspectos: los síntomas, la diagnosis y el tratamiento, se propende a pasar de una forma demasiado rápida del primero al tercero. A juzgar por una visión de conjunto de la literatura monográfica y coincidiendo con la opinión de investigadores como Yates, que ha sido el principal desmenuzador del tema de la complejidad de los factores que intervienen en las colas, la razón de este poco ahondar en las causas de las listas es una mezcla de dos lugares comunes preponderantes en torno a este tema: la utilidad y la fatalidad de las listas de espera hospitalarias.

El primero consiste en que muchos profesionales consideran que las listas son un mecanismo de regulación de la demanda y de racionalización de la adecuación de recursos. El segundo lugar común, el de la fatalidad, se refiere a una pretendida indefectibilidad de las listas de espera como consecuencia de que la demanda hospitalaria está fuertemente inducida por la oferta, siendo ésta última cada vez mayor y más variada. Estas dos cuestiones de la conveniencia y la fatalidad de las colas se relativizan pormenorizadamente en mi investigación. El argumento de la utilidad tiene sentido mientras no se superen ciertos umbrales de espera que la sociedad está dispuesta a aceptar como razonables. En cuanto a la fatalidad, se demuestra que no es una razón consistente y que existe, en general, una combinación de factores que no son por naturaleza irremediables y que se engloban en mi trabajo bajo los epígrafes de la falta de recursos y del mal uso de los mismos. La ineficacia en el uso de los recursos disponibles es, con mucho, el factor que más se asocia, en la bibliografía, con las listas de espera. Dicha ineficacia puede consistir en infrautilización de camas, de quirófanos, o de una forma más genérica, en lo que se caracteriza como hábitos o estilo de trabajo de los médicos.

En lo que se refiere al análisis de las soluciones que se proponen, por lo general el objetivo que se persigue es reducir al cabo de un determinado periodo de tiempo las listas de espera quirúrgicas consiguiendo que el tiempo de espera no sobrepase en ningún caso un límite máximo. La determinación de esta meta así como la del tiempo necesario para alcanzarla, dependerá del nivel de gravedad alcanzado por el problema, de la sensibilidad social, profesional y gubernamental, y de las restricciones presupuestarias. En el R.U. las autoridades del Servicio Nacional de Salud se fijaron como meta a finales del año 1990 que no hubiese ningún paciente con una espera superior a dos años en marzo de 1992 y ninguno en una espera superior a un año en marzo del 93. Sin embargo Osakidetza, al comienzo de la anterior legislatura, fijó la meta en la reducción de la demora a plazos no superiores a tres meses para la fecha del final del mandato del anterior equipo de gobierno.

Si nos remitimos al paradigma del Reino Unido y a algunas otras fuentes de otros países anglosajones, observamos que las soluciones que se propugnan y/o se llevan a la práctica para alcanzar los objetivos antedichos son una conjunción de varias medidas cuya orientación puede resumirse descomponiéndola en cuatro direcciones principales: a) racionalización de la asignación presupuestaria ordinaria y de los fondos extraordinarios destinados a reabsorber listas de espera; b) buena información; c) mejora de la eficacia hospitalaria y puesta en marcha de más cirugía ambulatoria; y d) control de la eficacia mediante auditorías externas.



Hasta aquí un resumen, como decía, de las principales orientaciones que se dan en general a la diagnosis y a la terapia de las listas de espera. No obstante, desde mi punto de vista, estoy obligado a extraer mis propias conclusiones en torno a las lagunas, en mi opinión relevantes, que se pueden advertir en la literatura consultada en lo concerniente al déficit de enfoques cuantitativos, tanto de tipo descriptivo como probabilístico y de optimización. Estas deficiencias que encuentro en los diagnósticos de las colas constituyen la base que motiva mi modesta aportación, cuyos puntos fundamentales resumiré a continuación.

### **3. EL DIAGNOSTICO ESTADISTICO DE LAS LISTAS DE ESPERA Y EL CASO DEL HOSPITAL ARANZAZU**

Cuando uno sigue los análisis que se hacen en diferentes países acerca de las posibles causas de las listas de espera, intentando encontrar en ellos coincidencias que permitan establecer una causalidad más o menos típica, descubre que ésto último no es tan sencillo, pues si bien es cierto que los observadores están de acuerdo en la identificación de una serie de factores perniciosos (ausencia de gestión empresarial en los centros, falta de recursos, ineficacia, favorecimiento de cierto tipo de intervenciones en detrimento de otras, etc.) no llegan sin embargo a sacar deducciones concluyentes sobre la importancia relativa de cada uno de los factores en un contexto general, bien sea referido a un conjunto exhaustivo de centros, a un conjunto de servicios de una determinada especialidad o a una cierta categoría de hospitales. Son muy ilustrativas, a este respecto, las conclusiones del ya citado Yates cuando después de haber examinado uno a uno los argumentos que se proponen habitualmente para explicar la gravedad de las colas, nunca encuentra uno que sea convincente pues puede servir en algunos casos y en otros no. De manera que siempre termina diciendo que no sabe que explicación darle a su pobre vecina, una señora de edad avanzada que lleva años esperando para una operación protésica.

Este escepticismo característico también de otros autores proviene, para decirlo en pocas palabras, de la falta de información y de un enfoque algo simple y poco aclaratorio en los estudios estadísticos comparativos entre distintos centros o distintas especialidades donde lo que se comparan

son promedios extraídos de un conjunto heterogéneo de observaciones. La utilización abusiva de promedios, tanto de resultados de espera como de recursos o de parámetros de eficacia, crea dificultades para encontrar relaciones de causa a efecto y provoca un cierto desánimo hacia las estadísticas.

Por ello, al comentario de Yates que acabo de citar yo me atrevo a añadir que las estadísticas, por muy buenas que sean, tampoco van a tranquilizar seguramente a su vecina, pero pueden ser otro de los recursos mal utilizados en la asistencia hospitalaria y, por ende, otra manifestación de ineficacia que habrá que plantear y resolver con la misma determinación que se pone en la revisión de otras costumbres u otras fallas. Así que propongo la utilización de dos vías de investigación estadística que sin ser, obviamente, la panacea, pueden resultar indispensables y muy productivas en el esclarecimiento del fenómeno de las colas hospitalarias.

La primera vía tiene que ver con el aspecto dinámico de las mismas y consiste en el estudio de las series temporales de datos. Se trata, por lo tanto, de una vía de investigación individualizada para cada centro y para cada una de las especialidades del mismo. Efectivamente, y en esto estamos todos de acuerdo, cualquier diagnóstico sobre listas de espera debe descender necesariamente al nivel pormenorizado de cada hospital, de cada situación particular, y, naturalmente, la evolución temporal de las colas es el primer síntoma a observar.

La segunda vía se refiere al análisis comparativo y puede desarrollarse por medio de análisis factoriales, clasificatorios y discriminates; estos análisis pueden ser muy válidos para profundizar en el diagnóstico y, en especial, para poner de relieve la relación entre las características de las listas de espera (su tamaño, su demora media, el porcentaje de gente que espera más de un determinado tiempo) y un conjunto, todo lo amplio que se quiera (o que se pueda) de parámetros que tengan que ver con la actividad hospitalaria.

De hecho, he intentado ilustrar lo que acabo de decir con un análisis factorial y unas tipologías de la actividad de diferentes servicios quirúrgicos en varios hospitales de la Comunidad Autónoma Vasca. Se trata de un ejemplo esquemático por la carencia de datos pero arroja resultados sorprendentemente consistentes, tanto en lo que se refiere a la diferenciación nítida de factores básicos

descriptivos, como en lo que atañe a la clasificación de servicios y hospitales. Los tres servicios que he podido incluir en el análisis pertenecientes al Hospital Aránzazu (Oftalmología, Traumatología y Otorrino) y el de Traumatología de Cruces (Bilbao) son los peor situados con respecto al eje principal del análisis, que opone demora media alta y alto porcentaje de gente que espera más de tres meses contra buenos parámetros de rendimiento quirúrgico en el otro extremo.

En cuanto al análisis dinámico de las colas, también he llevado a cabo un estudio de las series temporales de los datos de listas de espera de los diez servicios quirúrgicos investigados en el Hospital Aránzazu. El propósito es describir la tendencia subyacente en cada una de las series, y los resultados, que por cierto son bastante congruentes con lo que se descubre más adelante cuando se aplica la investigación operativa, permiten distinguir tres grupos principales de servicios: los de lista de espera grande y aparentemente explosiva (Oftalmología, Otorrino, Cirugía Plástica y Cirugía Vascular), los de lista de espera grande y evolución aparentemente creciente (Traumatología y Cirugía General) y los de lista menor y evolución estabilizada (Neurocirugía, Cirugía Pediátrica, Tocoginecología y Urología)

#### **4. EL DIAGNOSTICO MEDIANTE LA INVESTIGACION OPERATIVA Y EL CASO DEL HOSPITAL ARANZAZU**

Podríamos decir que allí donde concluye la observación y el análisis estadístico de la evolución de una o varias listas de espera surge al mismo tiempo la necesidad de penetrar en las características de los sistemas dinámicos que las producen. Si de la observación de los resultados se desea pasar al estudio de los mecanismos que los producen, la fase estadística preliminar se prolongará con un trabajo de investigación operativa cuyo objetivo será precisamente analizar las condiciones en que se desarrollan la oferta y la demanda de servicios a través del tiempo. Este es el objetivo principal de la parte empírica de mi trabajo y consiste formalmente en la elección de un modelo matemático que recogiendo lo esencial de las circunstancias del problema, permita explicar las razones inmediatas de la formación de las colas y obtener -o prever- resultados en función de los datos del modelo.

Como decía antes, la bibliografía sobre el problema de las colas hospitalarias, al menos en lo que a mi se me alcanza, proporciona escasa información sobre aplicaciones de métodos cuantitativos y, en especial, hay pocas experiencias o monografías relativas al uso de métodos de optimización y de teoría de colas. El panorama en este aspecto es muy reducido, y dejando al margen algunos proyectos de programación de quirófanos, cuyo contenido y finalidad son de naturaleza distinta a la de mi trabajo, quedan sólo algunos análisis de simulación y algunos modelos analíticos que siendo desde luego aportaciones muy interesantes que buscan una adecuación de la teoría a realidades concretas, tienen en general la debilidad de contar con pocos datos y de basarse en hipótesis demasiado simplificadoras sobre la naturaleza aleatoria de las variables principales de los problemas. En efecto y para referirme en concreto a los modelos analíticos éstos son siempre markovianos, lo cual facilita las cosas desde un punto de vista matemático pero suele ser una hipótesis demasiado forzada que no se corresponde con la realidad. Yo he optado en mi análisis por un modelo de otras características.

Naturalmente la primera fase en cualquier aplicación de teoría de colas es la elaboración de un modelo de diagrama de flujos que refleje el funcionamiento de la dinámica del sistema en el que se producen las colas. El diagrama permite identificar e interpretar las variables involucradas y definir las ecuaciones que a menudo resultan útiles para deducir o estimar, partiendo de los datos conocidos, otros parámetros que se desconocen y que son absolutamente imprescindibles para un planteamiento y una solución realistas del problema. El caso del Hospital Aránzazu, como me temo que el de otros muchos hospitales, se ajusta de lleno a esta situación que acabo de describir, en la que los datos que nos proporciona el centro, aparte de su relativa fiabilidad o consistencia, resultan incongruentes en algunos aspectos e insuficientes en general para explicar los resultados de la atención hospitalaria en términos de listas de espera de hospitalización.

De hecho, la demanda de cirugía programada en el Hospital Aránzazu no es solamente la que se encauza por las listas de espera procedente de las consultas externas y los ambulatorios, sino que existe una parte cuantitativamente importante que no está expresada en las estadísticas del hospital y que además tiene un carácter prioritario sobre la anterior. Me refiero a las urgencias diferidas a quirófano programado, a los pacientes ya intervenidos en espera de otra intervención y a los enfermos trasladados y ectópicos. Como decía, esta parte de llegadas (utilizando la terminología de colas) es muy importante y oscila, según los servicios, entre la cuarta parte y la mitad del total de la demanda de cirugía programada.

Después de estimar esta proporción de atención prioritaria en la actividad quirúrgica y dejándola a un lado ya que no origina lista de espera propia, se puede diseñar un sistema más reducido de colas en cada servicio, con una única fuente de entrada -las llegadas no prioritarias vía consulta externa- un solo canal de de servicio -la cirugía programada- y una única cola. Una vez calculadas las tasas promedio de llegadas y unidades atendidas se hace una estimación de las varianzas de estos datos, llegándose a la conclusión de que es preciso descartar la hipótesis más sencilla de distribuciones markovianas y adoptar un modelo de distribuciones atípicas para llegadas y servicios.

El desarrollo y la formulación matemática del modelo GI/G/1 apropiado para los sistemas de flujos definidos en mi trabajo se extraen de una obra de Newell de 1982 y proporcionan, de forma aproximativa, unas cotas superiores para la demora media y el tamaño esperado de la cola en condiciones de estado estable.

La aplicación de este modelo matemático en los seis servicios quirúrgicos en los que su uso es posible, descartando los otros cuatro en los que el factor de utilización es superior a uno y que ya mostraban una tendencia explosiva o netamente creciente en la serialización temporal, arroja unos resultados en mi opinión satisfactorios cuando se comparan a los datos empíricos conocidos; si bien es cierto que se producen algunas desviaciones, sobre todo en lo que se refiere a la demora media, acerca de las cuales pueden darse algunas explicaciones bastante verosímiles y ratificadoras de la adecuación del modelo.

Concluye la aplicación con un análisis paramétrico en el que se estima el incremento de actividad necesario en los servicios de cirugía programada si se desea un tiempo promedio de espera de un mes (1ª hipótesis) o de dos meses (2ª hipótesis). Esta intensificación de la actividad quirúrgica no incluye la reducción de los coeficientes e variación, en apariencia bastante grandes, que se manifiestan en los ritmos de atención de los quirófanos, aunque la disminución de dicha variabilidad podría ser, tal y como ponen de relieve las fórmulas, una vía posible y conveniente para la reabsorción de las colas.

De este modo doy por terminado el repaso de lo que creo que son los rasgos básicos del

contenido de mi trabajo. A continuación recordaré muy sumariamente las principales conclusiones concernientes a la realización y a los resultados del trabajo empírico:

1ª) No existe en el Hospital Aránzazu, en el momento de mi investigación, una verdadera gestión de las lista de espera de hospitalización. En especial se echan en falta registros informatizados para los pacientes en lista de espera y un auténtico control sistemático de las colas. Parece necesaria una gestión integrada de las listas de espera, una gestión coordinada con todos los demás procesos de gestión (gestión ambulatoria, de camas, de pacientes, etc.)

2ª) A pesar de la lógica imprecisión derivada de la deficiente calidad de los datos y de la utilización de un modelo teórico aproximativo, se consigue una buena valoración e interpretación de las variables que intervienen en el problema y el modelo proporciona globalmente buenos resultados.

3ª) Desde un punto de vista prescriptivo (para utilizar un término común en el contexto de aplicación de mi estudio) los resultados del análisis permiten establecer cómo intensificar las horas trabajadas en quirófanos programados para reducir la demora media por debajo de un límite. Si éste se establece en un mes, hay tres servicios que no necesitan mejora (Neurocirugía, Tocogine y Urología). Entre los restantes la intensificación de trabajo oscilaría entre un 8% en el mejor de los casos (Cirugía Pediátrica) y un 41% en el caso más grave de Oftalmología.

4ª) Además del incremento de la actividad asistencial, el modelo puede incorporar, mediante previa cuantificación, los efectos de otras posibles mejoras en la eficiencia de la asignación de recursos, como una mejor planificación o una menor variación en el ritmo de funcionamiento de la cirugía.

Y ésto es todo lo que he podido resumir de mi trabajo en esta breve exposición en la que me ha parecido acertado, por no decir irremediable, prescindir de datos numéricos y de notas bibliográficas, trazando meramente el hilo conductor del contenido del trabajo referido; contenido al

que por cierto remito a las personas interesadas en esos datos y notas antes aludidos y cuyo detalle ha sido eludido en el presente resumen.





# UNA OPTIMIZACIÓN DE PRECIOS: CASO MONOPRODUCTO Y MONOETAPICO CON DEMANDA POTENCIAL-NORMAL

SANCHEZ MONTERO, JESUS M<sup>a</sup> y  
GAMERO ROJAS, JAVIER

Escuela Universitaria de Estudios Empresariales.  
Universidad de Sevilla

Pretendemos estudiar la determinación del precio que hace óptimo el beneficio de un producto en el sentido de maximizar la utilidad de dicho beneficio.

Las hipótesis básicas que mantendremos son:

a) la demanda  $q$  del producto es potencial-normal:

$$q = PN(\alpha, \mu, \sigma)$$

b1) la media de la demanda transformada  $t = q^a$  depende del precio según:

$$q = ap^b$$

b2) la desviación típica de la demanda transformada es, o bien constante respecto al precio, o bien proporcional a la media.

c) el coste de producción es lineal en  $q$ :

$$C(q) = C(p) = C_v q + C_f$$

d) el ingreso es proporcional al precio.

e) la valoración de alternativas de precios se efectúa a través de la esperanza de la utilidad del beneficio.

f) la utilidad se puede expresar como el criterio media-varianza con un coeficiente de aversión al riesgo constante.

El beneficio a optimizar será:

$$B(p) = I(p) - C(p) = pq - C_v q - C_f = (p - C_v) q - C_f$$

La utilidad esperada del beneficio será ( ver [1]):

$$E[U(B(p))] \approx E[B(p)] - k(\mu)\sigma^2 [B(p)]$$

siendo:

$$E[V(p)] = E[(p - C_u)q] = (p - C_u) E[q]$$

$$\sigma[B(p)] = \sigma[(p - C_u)q] = |p - C_u| \sigma [q]$$

$$k(\mu) = -\frac{1U''(\mu)}{2U'(\mu)}$$

Al ser  $q = PN(\alpha, \mu, \sigma)$  entonces:

$$q^\alpha = t = N(\mu, \sigma)$$

con lo cual:

$$E[q] = E\left[t^{\frac{1}{\alpha}}\right] = E\left[t^\beta\right] \approx \mu^\beta + \frac{1}{2}\beta(\beta-1)\mu^{\beta-2}\sigma^2$$

$$\left(\text{utilizando que } E[g(x)] \approx g(u_x) + \frac{1}{2}g''(u_x)\sigma_x^2\right)$$

$$\text{Además: } \sigma[q] = \sigma\left[t^\beta\right] \approx \beta\mu^{\beta-1}\sigma$$

Si suponemos el caso  $\sigma$  proporcional a  $\mu$  obtenemos:

$$\mu = ap^b \text{ y que } \sigma = \lambda\mu \text{ entonces:}$$

$$E[q] = \mu^\beta + \frac{1}{2}\beta(\beta-1)\mu^{\beta-2}\lambda^2\mu^2 =$$

$$= \mu^\beta \left(1 + \frac{1}{2}\beta(\beta-1)\lambda^2\right) =$$

$$= a^\beta p^{b\beta} \left(1 + \frac{1}{2}\beta(\beta-1)\lambda^2\right)$$

Por lo tanto:

$$E[B(p)] = (p - C_u) E[q] = a^\beta p^{b\beta} \left(1 + \frac{1}{2}\beta(\beta-1)\lambda^2\right)$$

$$\text{obteniéndose el } p \text{ óptimo: } p_0 = C_u \frac{b\beta}{b\beta + 1}$$

(solución suponiendo riesgo nulo, desviación nula o utilidad lineal —ni aversión ni propensión al riesgo—)

en caso contrario optimizaríamos:

$$E[U(B(p))] \approx E[B(p)] - k(E[B(p)]) \sigma^2[B(p)]$$

Calculamos ahora  $\sigma^2[B(p)]$ :

$$\begin{aligned}\sigma^2[q] &= \sigma^2[t^\beta] \approx \left(\beta \mu^{\beta-1}\right)^2 \sigma^2 = \\ &= \beta^2 \mu^{2(\beta-1)} \sigma^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\text{hemos utilizado que: } \sigma^2[g(x)] \approx \left[g'(\mu_x)\right]^2 \sigma_x^2\right) \\ = \beta^2 \mu^{2\beta} \lambda^2\end{aligned}$$

Si  $\mu = ap^b$  entonces:

$$\sigma^2[q] \approx (\beta \lambda a^\beta p^{b\beta})^2$$

De donde:

$$\sigma^2[B(p)] \approx (p - C_u)^2 (\beta \lambda a^\beta p^{b\beta})^2$$

Retomamos:

$$\begin{aligned}E[U(B(p))] &\approx (p - C_u) a^\beta p^{b\beta} \left(1 + \frac{1}{2} \beta(\beta - 1) \lambda^2\right) - \\ &- k(p)(p - C_u)^2 \beta^2 \lambda^2 (a^\beta p^{b\beta})^2 = \\ &= H(p) \left(1 + \frac{1}{2} \beta(\beta - 1) \lambda^2\right) - k(p) \beta^2 \lambda^2 H^2(p)\end{aligned}$$

Maximizar  $E[U(B(p))]$  en  $p$  (suponiendo  $k(p)=k$  constante), sería equivalente a:

a) máximo de:

$$H(p) \left(1 + \frac{1}{2} \beta(\beta - 1) \lambda^2\right) - k \beta^2 \lambda^2 H^2(p)$$

b) máximo de:

$$H(p) \text{ hallando } P_{\text{opt}}$$

Presolución (a):

llamando:

$$\begin{aligned}
 A &= 1 + \frac{1}{2}\beta(\beta-1)\lambda^2 \\
 \text{y } B &= k\beta^2\lambda^2 \\
 \frac{d}{dH} &= A - 2BH = 0 \Rightarrow \\
 H_{\text{opt}} &= \frac{A}{2B} = \frac{1 + \frac{1}{2}\beta(\beta-1)\lambda^2}{2k\beta^2\lambda^2} \Rightarrow \\
 (p - C_v)a^\beta p^{b\beta} &= \frac{A}{2B} \Rightarrow P_{\text{opt}} \\
 (\text{si } k > 0 \text{ -- aversión al riesgo--})
 \end{aligned}$$

Presolución (b):

$$\begin{aligned}
 &\text{Optimizar } H(p): \\
 \frac{d}{dp}(p - C_v)a^\beta p^{b\beta} &= 0 \Rightarrow \\
 (\text{lo mismo que con riesgo nulo}) \\
 P_{\text{opt}} &= C_v \frac{b\beta}{b\beta + 1}
 \end{aligned}$$

Es decir, se obtiene la solución de precio óptimo igual a la que se obtendría con demanda determinística de elasticidad  $b\beta$ .

Supongamos ahora que la varianza de  $t$  es constante respecto al precio ( esto implica que la varianza de la demanda es creciente respecto al precio):

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \text{constante} \\
 E[q] &\approx \mu^\beta + \frac{1}{2}\beta(\beta-1)\mu^{\beta-2}\sigma^2 \\
 \sigma^2[q] &\approx \beta^2\mu^{2\beta-2}\sigma^2 \\
 E[U(B(p))] &\approx E[B(p)] - k\sigma^2[B] = \\
 &= (p - C_v)\mu^\beta \left(1 + \frac{1}{2}\beta(\beta-1)\mu^{-2}\sigma^2\right) - k(p - C_v)^2\beta^2\mu^{2\beta}\mu^{-2}\sigma^2 \approx \\
 &\approx H(p) \left(1 + \frac{1}{2}\beta(\beta-1)\frac{1}{\mu^2}\right) - kH^2(p)\beta^2\frac{1}{\mu^2}
 \end{aligned}$$

siendo:

$$H(p) = (p - C_u) \mu^b \sigma^2$$

El máximo que se obtendría no sería ya el determinístico con demanda de elasticidad  $b\beta$  ya que  $\mu$  depende de  $p$ , y por tanto el óptimo no coincide con el de  $(p - C_u) a^b p^{b\beta}$ .

## CONCLUSION

Cuando la demanda es potencial-normal se puede seguir obteniendo la solución de precio óptimo que se alcanzaría en una situación no aleatoria, igual que se mostró que ocurría con demanda normal ( ver [1] ), si bien, el parámetro de “asimetría” aparece en dicha solución. En cambio, con ciertas asunciones ( como en el segundo caso estudiado ) la solución que se obtiene tiene en cuenta el riesgo, y por tanto no puede expresarse en la forma determinista.

## APENDICE

*Decimos que  $X$  es potencial-normal PN  $(a, m, s)$  si  $X^a = N(m, s)$  ( en  $X^a > 0$  ).*

Cuando  $a = 1$  la variable PN es normal, cuando  $a > 1$  PN es campaniforme asimétrica negativa, cuando  $a < 1$  PN es campaniforme asimétrica positiva, en particular cuando  $a \rightarrow 0$  la variable PN tiende a la log-normal.

El parámetro  $a$  podría obtenerse mediante el siguiente procedimiento:

Supongamos que  $(x_1, x_2, x_3)$  es un intervalo de confianza “triangular” de una variable PN  $(a, m, s)$ , esto es,  $x_1$  y  $x_3$  forman un intervalo centrado de probabilidad  $p$  y  $x_2$  es la mediana de la variable. Entonces  $(x_1^a, x_2^a, x_3^a)$  es el intervalo correspondiente para una variable  $N(m, s)$ , por tanto:

$$x_2^a - x_1^a = x_3^a - x_2^a \text{ y por tanto}$$

$$\frac{x_3^a - x_2^a}{x_2^a - x_1^a} = 1$$

el primer miembro es función de  $a$  y por tanto se puede hallar este parámetro con un proceso iterativo de búsqueda de raíces. Sin embargo, con objeto de linealizar dicha función y acelerar la convergencia del proceso, tomamos logaritmos en dicha igualdad:

$$\Phi(a) = \ln \frac{x_3^a - x_2^a}{x_2^a - x_1^a}$$

En la práctica la función  $\Phi$  es sensiblemente lineal, de manera que hallando el valor de dicha función, por ejemplo en 0 y en 1 o en 1 y en 2 y utilizando el método *regula falsi* podemos aproximar correctamente el valor de a:

$$a \approx 1 - \frac{\Phi(1)}{\Phi(2) - \Phi(1)}$$

## BIBLIOGRAFIA

SANCHEZ, J.M<sup>®</sup> , GAMERO, J. “Un método de fijación de precios en un entorno mono-producto y monoetápico con demanda estocástica”. Estudios de Economía Aplicada, VIII reunión Asepelt-España, volumen II.

R.L.KEENEY, H. RAIFFA (1976). “ Decisions with multiple objectives”. John Wiley & Sons.

Tabla I

| Estimación de los parámetros de la demanda |       |     |        |             |             |       |       |           |
|--|-------|-----|--------|-------------|-------------|-------|-------|-----------|
| precio                                     | 2,50% | 50% | 97,50% | alpha       | phi0        | phi1  | ln p  | ln q(50%) |
| 15   | 80    | 120 | 146    | 2,61        | -0,78       | -0,47 | 2,71  | 11,68     |
| 17   | 60    | 90  | 110    | 2,38        | -0,70       | -0,41 | 2,83  | 10,88     |
| 20   | 50    | 70  | 85     | 2,10        | -0,65       | -0,29 | 3,00  | 10,37     |
| 22   | 40    | 55  | 65     | 2,89        | -0,65       | -0,41 | 3,09  | 9,78      |
|  |       |     |        | alfa = 2,44 | beta = 0,41 |       | -4,78 | 24,61     |

| precio | t(2,5%)  | t(50%)    | t(97,5%)  | m              | s         | lambda |
|--------|----------|-----------|-----------|----------------|-----------|--------|
| 15     | 43986,15 | 118292,68 | 187708,49 | 115847,32      | 38863,86  | 0,32   |
| 17     | 21801,18 | 58830,29  | 95666,14  | 58733,68       | 18843,10  | 0,32   |
| 20     | 13972,82 | 31765,75  | 50988,27  | 32485,59       | 9445,24   | 0,29   |
| 22     | 8106,69  | 17831,14  | 28503,03  | 17304,81       | 4692,97   | 0,27   |
|        |          |           |           | a = 4877322668 | b = -4,78 | 0,30   |

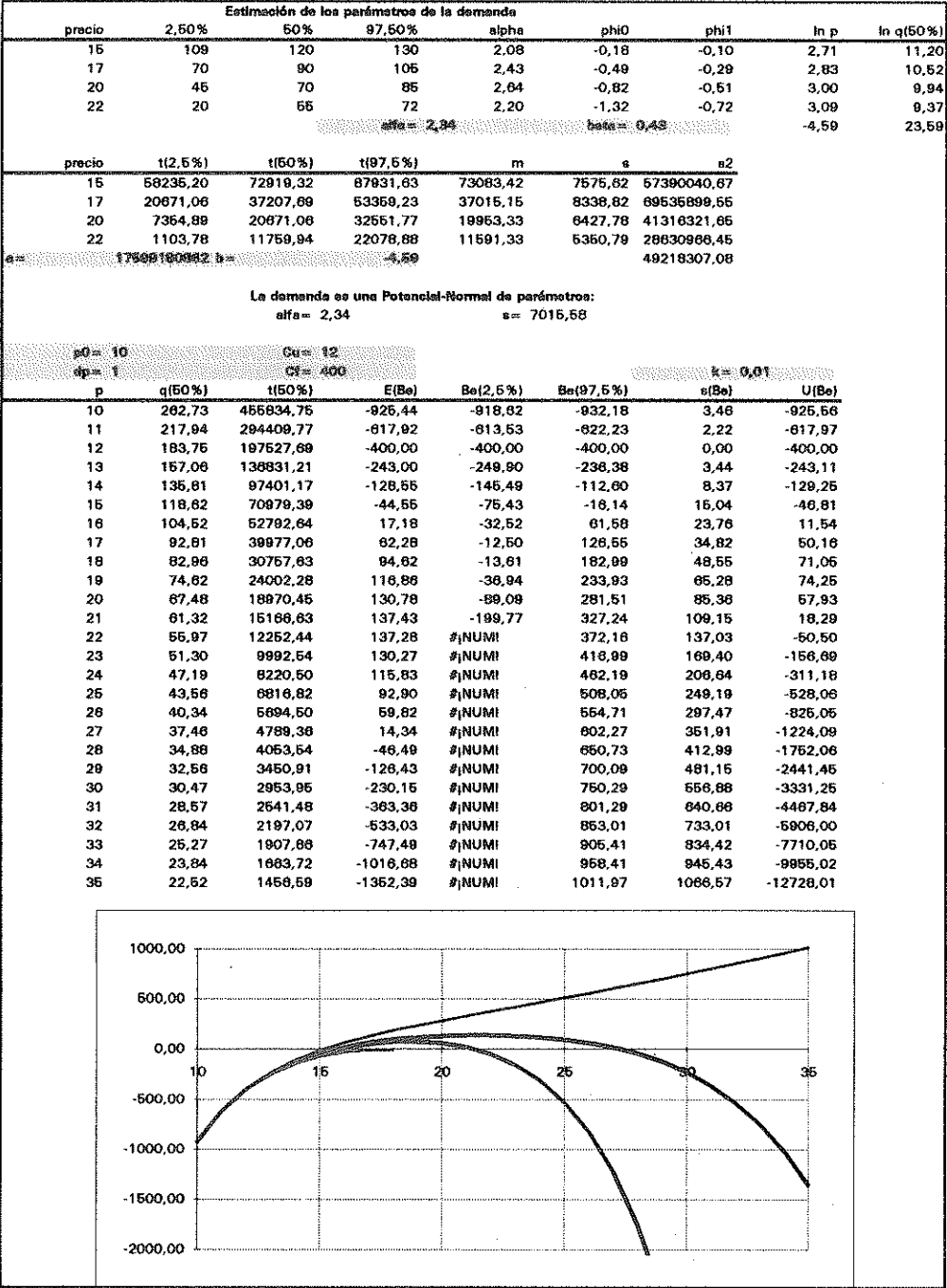
La demanda es una Potencial-Normal de parámetros:

alfa = 2,44      lambda = 0,30

| p0 = 10<br>q0 = 1 |        | Cu = 12<br>Ci = 600 |         | k = 0,02 |           |       |          |  |
|-------------------|--------|---------------------|---------|----------|-----------|-------|----------|--|
| p                 | q(50%) | t(50%)              | E(Be)   | Be(2,5%) | Be(97,5%) | a(Be) | U(Be)    |  |
| 10                | 262,73 | 800414,56           | -919,75 | -786,48  | -1036,06  | 64,67 | -1003,13 |  |
| 11                | 217,94 | 507290,16           | -815,57 | -663,40  | -683,40   | 26,78 | -628,91  |  |
| 12                | 183,75 | 334538,24           | -400,00 | -400,00  | -400,00   | 0,00  | -400,00  |  |
| 13                | 157,08 | 228092,54           | -244,66 | -290,76  | -210,18   | 19,30 | -252,10  |  |
| 14                | 135,81 | 159896,92           | -131,33 | -211,08  | -71,72    | 33,38 | -153,61  |  |
| 15                | 118,62 | 115011,58           | -48,00  | -152,48  | 30,10     | 43,73 | -86,24   |  |
| 16                | 104,52 | 84455,48            | 13,54   | -109,20  | 105,30    | 51,37 | -39,24   |  |
| 17                | 92,81  | 63189,86            | 58,98   | -77,25   | 160,82    | 57,02 | -6,04    |  |
| 18                | 82,98  | 48089,52            | 82,37   | -53,77   | 201,62    | 61,17 | 17,54    |  |
| 19                | 74,62  | 37112,12            | 116,66  | -36,70   | 231,28    | 64,18 | 34,26    |  |
| 20                | 67,48  | 28035,29            | 133,95  | -24,54   | 252,42    | 66,33 | 45,95    |  |
| 21                | 61,32  | 22989,98            | 145,88  | -16,15   | 267,00    | 67,82 | 53,90    |  |
| 22                | 55,97  | 18402,11            | 153,66  | -10,68   | 276,49    | 68,78 | 59,03    |  |
| 23                | 51,30  | 14876,30            | 158,17  | -7,50    | 282,01    | 69,34 | 62,00    |  |
| 24                | 47,19  | 12135,41            | 160,15  | -6,11    | 284,44    | 69,59 | 63,30    |  |
| 25                | 43,58  | 9982,18             | 160,15  | -6,11    | 284,43    | 69,59 | 63,30    |  |
| 26                | 40,34  | 8274,13             | 158,58  | -7,22    | 282,61    | 69,38 | 62,27    |  |
| 27                | 37,48  | 6907,11             | 155,78  | -8,19    | 278,09    | 69,04 | 60,44    |  |
| 28                | 34,88  | 5803,94             | 152,02  | -11,83   | 274,50    | 68,58 | 57,96    |  |
| 29                | 32,56  | 4808,84             | 147,52  | -14,98   | 269,00    | 68,02 | 54,99    |  |
| 30                | 30,47  | 4172,08             | 142,44  | -18,57   | 262,79    | 67,38 | 51,61    |  |
| 31                | 28,57  | 3568,27             | 136,91  | -22,45   | 256,04    | 66,70 | 47,93    |  |
| 32                | 26,84  | 3063,65             | 131,05  | -26,57   | 248,88    | 65,97 | 44,00    |  |
| 33                | 25,27  | 2644,20             | 124,95  | -30,88   | 241,42    | 65,22 | 39,89    |  |
| 34                | 23,84  | 2292,23             | 118,68  | -35,28   | 233,76    | 64,44 | 35,64    |  |
| 35                | 22,52  | 1995,36             | 112,29  | -39,77   | 226,95    | 63,64 | 31,28    |  |

Tabla 2





# ESTRATEGIAS COMERCIALES SOBRE EXCLUSIVIDAD DE MARCA. UNA APLICACION AL SECTOR TEXTIL

JOSE L. QUESADA GONZALEZ

CARMEN R. SUAREZ MORENO

Universidad de Las Palmas de G.C.

## 1. INTRODUCCION

Las decisiones que adopte el empresario en relación a los precios de sus productos son de vital importancia cuando se lleva a cabo un plan de marketing, ya que afectan al beneficio de la empresa.

Dentro de las estrategias de precios que puede adoptar una empresa podemos referirnos a aquellas que se relacionan con la fijación de los denominados "precios de prestigio o de premio". Este término puede ser utilizado para el caso de cierto tipo de productos de marca en exclusiva que tienen un precio elevado. Las empresas suelen recurrir a esta estrategia cuando en el mercado existe una demanda heterogénea de productos sustitutivos (Tellis, 1986).

Si bien éste tipo de precios debería asociarse con un bajo volumen de ventas, no siempre es así y en determinadas ocasiones pueden éstos hacer que ciertos productos sean más deseables y con ellos la empresa obtener un mayor volumen de ventas.

Algunos compradores utilizan el precio como un indicador de calidad, pero el hecho cierto es que éstos sólo lo usan en determinados casos. Cuando los consumidores poseen poca información o experiencia del producto establecen una mayor relación precio-calidad y comparan el precio del producto con otros precios -precios de referencia o de una alternativa mejor- (Kahn y Louie, 1990). Esta argumentación fue tratada un poco antes por Rao y Monroe (1989) que descubrieron que las asociaciones precio-calidad son más fuertes en los consumidores que tienen una menor información y experiencia en el uso del producto. Sin embargo, cuando poseen una mayor información y tienen más experiencia derivada del uso del producto encuentran posiblemente menos inferencia entre calidad-precio. En este último caso se sienten más comprometidos con ciertos atributos u otros aspectos del artículo. Kerin y otros (1992) consideran que la experiencia percibida al comprar el producto en un establecimiento es relativamente más importante que la percepción de calidad derivada del mayor precio de un bien.

La utilización del precio como indicador de la calidad dependerá también de la evaluación del consumidor en relación a la compra del producto. En algunas ocasiones el consumidor compra un artículo caro no porque perciba calidad, sino porque otras personas consideran que un alto precio se relaciona con una mayor calidad. La percepción positiva de valor podrá estar basada en este caso en lo que otros opinan sobre dicho producto en un contexto social. En este sentido, Lichtenstein y otros, (1993) consideran que la sensibilidad hacia el prestigio y calidad de un producto caro podrá derivar

de las percepciones favorables basadas en sensaciones de prominencia y estatus que el comprador puede alcanzar como consecuencia de la influencia de una concienciación social.

Según Dodds y otros, (1991) la percepción de calidad, y de lo sacrificado en términos monetarios -coste de oportunidad- al comprar el bien afectaran también a la percepción de valor de un producto (Ilustr. 3 anexo).

Las percepciones de calidad varían con el paso del tiempo debido a la influencia de las distintas fuentes de información que llegan al consumidor a través del mercado y también debido a los cambios de expectativas de los mismos. Por esta razón, la empresa debe utilizar estrategias promocionales que tenga en cuenta esta dinámica (Zeithaml, 1988). La información de marca suministrada a través de un anuncio puede referirse a: 1) el nombre de la marca, atributos del producto, beneficios, usuarios, situaciones de uso (diferente usos para cada situación); 2) aspectos afectivos o emocionales; y 3) expresiones verbales y no verbales (Macinnis y otros, 1991).

Por otro lado, la exclusividad de una marca asociada a una mayor calidad se relaciona con la percepción del consumidor del denominado valor exclusivo de un producto. Esta percepción del valor exclusivo por parte del consumidor permitirá al empresario el uso de forma efectiva de un "precio de prestigio".

Desde este punto de vista analizamos una posible estrategia de marketing para aquellos empresarios del sector textil que quieran conseguir una exclusividad de marca para determinados artículos. Para lograr el éxito en esta estrategia se tendrá que considerar determinados factores psicológicos del consumidor y la puesta en acción de determinadas políticas comerciales. Todo estos aspectos que incidirán en un mayor margen de beneficio derivado de una mayor demanda constituyen el enfoque central de este trabajo.

## **2. ESTRATEGIA DE PRECIOS ALTOS EN MARCAS DE PRESTIGIO**

Algunas empresas tienen que llevar a cabo una estrategia de precios altos, y elegir un precio que suministre significativamente un más alto margen de beneficio que el normal. Tal precio denominado "precio de prestigio" se da en la mayoría de los casos en artículos de lujo. Esta estrategia busca posicionar la marca ofreciendo un producto que sea exclusivo.

Una marca de prestigio para determinados bienes permite establecer precios de premio. El nivel de prestigio de la misma estará relacionado con la posición de mercado alcanzada, lo cual permitirá la asignación de un precio alto en relación con otros productos similares. Dicho precio unido a otros factores refuerzan una positiva imagen de marca en la mente del consumidor. Existe un principio que establece que el Valor de Mercado de un producto es una función que está asociada a: el Valor de Utilidad del Producto (VUP) -que puede ser superior o inferior al precio de coste relacionado con el mismo- y el Valor del Premio Exclusivo (VPE). Así, el Precio de Mercado del Producto (PM) = El Valor del Premio Exclusivo (VPE) + Valor de Utilidad del Producto (Kneale, 1989).

La diferencia entre precios de venta y costes de producción y marketing (ingreso - costes relacionados) es la contribución al margen. Este margen también puede venir determinado por el Valor de Utilidad del Producto, el precio de coste asociado al producto y el Valor del Premio Exclusivo, así:

$$CM = (VUP - PC) + VPE$$

El objetivo fundamental de la estrategia de marketing, para aquellas marcas con las que se pretenden alcanzar un alto nivel de prestigio, consistirá en elevar lo más posible el margen de contribución, dado unos costes. El tamaño del valor del premio exclusivo, el posible incremento positivo del volumen de ventas, los rendimientos potencialmente mayores de los beneficios darán lugar a que el resultado del margen de contribución por unidad pueda ser mayor. La contribución del margen cubre los costes fijos de ese período y una vez que éstos estén cubiertos cualquier venta adicional contribuirá a generar beneficios. Por tanto, los rendimientos incrementales de ventas producirán incrementos mayores en beneficios y ello hará que la empresa esté sometida a un menor riesgo.

Se pueden dar dos situaciones de mercado: que el valor de utilidad del producto (VUP) sea mayor que los costes del producto (PC) o que sea menor.

En el primer caso suponiendo que el producto se vende a un precio superior al coste de producción y marketing y que el valor de utilidad del producto es superior a este coste, a mayor valor del premio exclusivo mayor contribución al margen de rentabilidad proporcionado a la empresa. Este podría aún seguir siendo positivo si el valor del premio exclusivo es nulo (en este caso el precio de venta coincidirá con el valor de utilidad del producto). Si eso ocurre, el margen de ventas descendería pero no sería negativo. Una situación más extrema sería aquella en la que los costes de producción y de marketing superasen al valor de utilidad del producto. En este caso existirá un margen de contribución positivo solamente debido a la presencia del valor del premio exclusivo. Esto es así porque los costes de producción superan a lo que en el mercado podría pagarse por el valor de utilidad de un producto básico. Si el valor del premio exclusivo se anulase, entonces habría un margen de contribución negativo (en este caso el precio de venta estará por debajo del coste y coincidirá con el valor de utilidad del producto).

Esos dos ejemplos ilustran la importancia del valor del premio exclusivo para conseguir la rentabilidad y supervivencia de la empresa. En el primer caso, si el VPE (valor del premio exclusivo) desaparece, la empresa puede continuar operando y generar flujos de cajas positivos pero se reduce mucho el nivel del margen de rentabilidad. En el segundo caso, la continuación de las operaciones sin el VPE requiere reforzar las operaciones con las disponibilidades de caja. Si se mantiene esta situación durante un período más largo de tiempo la empresa podría tener grandes problemas de liquidez que le llevarían irremediablemente a la quiebra. Por lo tanto, el valor del premio exclusivo es importante no sólo por sus efectos en los beneficios sino también porque está íntimamente unido con el éxito o fracaso de las empresas. La relación entre los costes de producción y marketing, precio de mercado, valor de utilidad del producto, y valor del premio exclusivo por lo tanto afecta a la rentabilidad, riesgo, supervivencia y valor de la empresa. La necesidad que tiene el empresario en este sector de incrementar el grado de percepción del consumidor respecto a este VPE es evidente.

Algunas empresas dedican una parte importante de sus presupuestos publicitarios a la realización de anuncios que permitan alcanzar este objetivo cuando quieren conseguir una exclusividad de marca.

### **3.FACTORES PSICOLOGICOS QUE INCIDEN EN EL VALOR EXCLUSIVO DE UNA MARCA**

Para Bayton (1958) existen unos factores psicológicos que subyacen en la elección de una marca y que influyen en la percepción del consumidor para diferenciar atributos en los distintos productos.

Estos factores afectan al valor exclusivo de una marca y contribuyen al desarrollo de estrategias que pueden incidir en la consecución de un mayor beneficio (Hanna, 1980). Ciertas necesidades asociadas con el consumidor elevan las percepciones sobre el valor de premio exclusivo de un producto. Como consecuencia, estas necesidades o motivaciones, denominadas "factores psiquicos", asociados con un producto determinan el valor del premio exclusivo de éste. Esos factores psiquicos pueden ser:

#### **3.1. NECESIDAD DE CONSECUCION DE LOGROS**

El logro alcanzado a través del uso de un producto proviene del reconocimiento por parte del consumidor o derivado de una influencia externa de que con éste se consigue una determinada meta propuesta. Las personas que persiguen altos logros son a menudo más propensas a utilizar productos exclusivos, no importándoles pagar un precio alto por los mismos. Para Schiffman y Kanuk (1991) la necesidad de logro se relaciona con una necesidad de autorealización y las personas que tienen altas necesidades de logro poseen rasgos que le hacen ser más abiertas a los atractivos relevantes relacionados con el producto, tienen mucho más confianza en si mismas, disfrutan al asumir riesgos calculados, investigan su medio ambiente de forma activa, y les interesa aquellas situaciones en las cuales pueden asumir responsabilidades personales para encontrar soluciones. Son receptivas a aquellos eslogan publicitarios que hagan referencia a productos innovadores o que reconozcan necesidades relacionadas con grupos específicos de personas con las que trata de identificarse. Por tanto, los anuncios publicitarios deberían hacer referencia a la consecución de unos mayores logros a alcanzar con la utilización del producto cuando se refieren a marcas exclusivas.

#### **3.2. NECESIDAD DE AUTOIMAGEN PERSONAL**

Un producto que es percibido como aquel que se ajusta a la autoimagen de una persona tiene una mayor posibilidad de ser seleccionado que otro que no se percibe así (Schiffman y Kanuk, 1991). Cada individuo tiene una imagen de si mismo en relación con los demás en función de una serie de características, como pueden ser: rasgos de personalidad, formas de comportamiento, habilidades físicas, etc. En muchas ocasiones ciertos atributos que posee un producto se relacionan con estos aspectos de las personas y proporcionan un determinado nivel de distinción, influyendo en la autoimagen. La capacidad que tenga la empresa de poder influir en la percepción de estos atributos que determinan el VPE dependerá de la personalidad, el nivel de educación y el conocimiento que tenga el consumidor del producto.

### 3.3. NECESIDAD DE RECOMPENSA

Se relaciona con la aceptación del consumidor (generada de forma interna o por influencia externa), del beneficio que se conseguirá con el uso del producto el cual aportará una satisfacción posterior. El beneficio puede ser tangible o intangible. Se ha de hacer lo posible para que el consumidor perciba dicha recompensa asociada al uso del producto.

### 3.4. NECESIDAD QUE SURGE POR INFLUENCIA SOCIAL

Las necesidades varían enormemente de un consumidor a otro y muchas de ellas nacen de una interacción con otras personas. La afiliación social de una persona tiene una influencia importante en el comportamiento del consumidor. Esta está relacionada con deseos de aceptación o de pertenencia a un grupo social. Las personas que tienen necesidades altas de afiliación social tienden a tener una fuerte dependencia social con relación a otras. Con frecuencia seleccionan productos que creen satisfarán la aprobación de otras personas y a menudo adaptan su comportamiento de compra a las normas y estándares de sus grupos de referencia. Una alusión de la empresa al uso del producto por parte de un colectivo de consumidores incrementará la percepción de valor.

### 3.5. NECESIDAD DE ESTATUS SOCIAL

Los deseos de prestigio de una persona en relación con otras se relaciona con el deseo de alcanzar un determinado nivel social. Esta necesidad se manifiesta con el deseo de un individuo de influir en su medio ambiente. La empresa ha de tener en cuenta esta necesidad cuando formula una estrategia comercial.

### 3.6. NECESIDAD DE CUMPLIMIENTO DE OBJETIVOS

Se relaciona con sentimientos de satisfacción por la consecución de una meta que tiene un nexo psíquico. La actividad publicitaria de la empresa deberá encaminarse a resaltar la consecución de estos objetivos que derivan del uso del producto.

### 3.7. NECESIDAD DE SATISFACCION

El grado de satisfacción depende directamente del consumidor y en este sentido, una persona puede ser reconocida por haber alcanzado unos logros pero ésta puede sentirse no satisfecha con la consecución de los mismos. La empresa ha de intentar transmitir al consumidor, a través del mensaje publicitario, el grado de satisfacción personal que podría alcanzar con el uso de una marca exclusiva.

Los individuos con necesidades psicológicas específicas tienden a ser receptivos a los atractivos publicitarios que hagan referencia a esas necesidades. En este sentido, existen estrategias comerciales que pueden influir en las motivaciones del consumidor si éstas promueven, mediante el anuncio, su personalidad y/o aluden a la consecución de unas metas, de un prestigio o reconocimiento, al logro de una satisfacción, etc.

Un determinado consumidor puede desear pagar un precio de premio a una determinada empresa si con ello consigue unos fines específicos.

La presencia, peso y efectos de los factores psíquicos varían con el producto, mercado, segmentos de mercado, e incluso con el ciclo económico y social.

Para determinar que factores psicológicos inciden más cuando se compra un producto de marca exclusiva hemos efectuado una encuesta a 182 personas<sup>1</sup> y llegamos a la conclusión, analizando la tabla 2 del anexo, que los factores relacionados con la imagen personal y con el grado de satisfacción son los más influyentes en el comportamiento de compra (Ilustr. 2, anexo).

### **4. ESTRATEGIAS DE LA EMPRESA QUE PUEDEN AFECTAR AL VALOR DEL PREMIO EXCLUSIVO**

El doble beneficio alcanzado con una estrategia de precios de prestigio -margenes de beneficio incrementados y demanda potencial alta del consumidor- es, quizás, el aspecto que hace atractivo el mercado para estos productos. Para el caso de una marca con la que se pretende conseguir un alto nivel de exclusividad, la estrategia de marketing sería aspirar a incrementar el valor del premio exclusivo. Desarrollar esta estrategia implica el seguimiento de las motivaciones o necesidades de compra del consumidor.

Se han de considerar los más importantes factores psíquicos asociados con la compra y uso del producto mencionados en el apartado anterior. Identificar los segmentos de mercado que proporcionan mayores niveles de venta en relación a ese tipo de producto, considerando esos factores psíquicos.

Las estrategias para maximizar el VPE (valor de premio exclusivo) e incrementar la exclusividad de la marca, precio y margen de contribución se pueden agrupar dentro de tres categorías de marketing-mix como son el producto, la promoción y los canales de distribución. Las estrategias relacionadas con la exclusividad de marca podrían centrarse en determinadas características relacionadas con el producto que añadidas a éste mejoren el valor de premio exclusivo, como por ejemplo, la utilización de un certificado oficial de autenticidad, el uso de un determinado proceso productivo que le confiera una determinada exclusividad o incluso llevar a cabo producciones limitadas.

Las estrategias relacionadas con la promoción harían referencia a poner el énfasis de la comunicación en aquellos aspectos que mejoren el valor o la posición de exclusividad del producto. Por ejemplo, la exclusividad debe conseguirse mediante esfuerzos promocionales que enfatizen la calidad superior de un producto.

Los canales de distribución deben también ser una base para conseguir la exclusividad. Típicamente esta estrategia podría tomar la forma de establecer una política de distribución exclusiva

---

<sup>1</sup>Se ha considerado en la encuesta una muestra de población formada por alumnos y profesores de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de Las Palmas de G.C elegida al azar, sin utilizar criterios estadístico en su elección.

más que una intensiva o incluso una estrategia de distribución selectiva. El hecho de que exista un limitado número de productos que se distribuyan, es decir, que la distribución sea restringida, podría tender a incrementar el valor del premio exclusivo del producto.

Algunas de estas estrategias que pueden ser adoptadas por parte de una empresa para lograr la exclusividad de una marca pueden ser las siguientes:

#### 4.1. EN RELACION AL PRODUCTO

*Estrategia de expedición de un certificado de autenticidad.* El producto deberá poseer un certificado original de autenticidad que permanezca unido al mismo incluso en las siguientes reventas.

*Estrategia de especificación de características distintivas.* Se grabará en el embalaje del producto o en el mismo producto aquellas características distintivas que le dan un carácter de exclusividad, como por ejemplo, el método único empleado en su producción, o alusión a otros atributos.

*Estrategia de control de calidad.* Se ha de hacer referencia a dicho control mediante la expedición de un certificado de calificación proveniente del laboratorio de análisis.

*Estrategia de limitación en la producción.* Se relaciona con el hecho de que solamente un número determinado de marcas exclusivas serán producidas.

*Estrategia de ofrecimiento de fiabilidad a largo plazo.* Dar a entender que se trata de un producto que posee una durabilidad a largo plazo.

*Estrategia de embalaje y/o presentación del producto.* El revolucionario embalaje ha de suministrar una protección y una presentación atractiva no igualada.

#### 4.2. EN CUANTO A LA PROMOCION

*Estrategia de asociación de uso.* Hacer referencia a que el mismo producto es usado por otra persona muy conocida.

*Estrategia de creación de imagen del producto.* Considera que la marca lleva implícita una señal de valor reconocida por otros consumidores más informados e influyentes a nivel mundial.

*Estrategia de limitación del campo de la promoción.* Se basa en la promoción del producto por reconocimiento a una marca y no mediante el uso de actividades publicitarias dirigidas hacia una masa.

*Estrategia de premios de propiedad.* Sugerir que la propiedad de ese producto único exclusivo hará que su propietario se sienta orgulloso al usarlo.

#### 4.2. EN RELACION CON LOS CANALES DE DISTRIBUCION

*Estrategia de entrega exclusiva.* El producto será entregado en persona por un representante de la empresa.

*Estrategia de empleo de un procedimiento formal.* La distribución de las ventas serán revisadas por un comité de la empresa y se dará cuenta de ello al consumidor.

*Estrategia de mercado limitado de distribución.* Las ventas estarían limitadas solamente a determinado grupo de consumidores.

Realizada una encuesta y analizado posteriormente los resultados de la tabla 3 del anexo la cual contiene los valores medios de las variables y los porcentajes de frecuencia podemos decir al considerar las variables comerciales producto, promoción y distribución, lo siguiente: los factores que más inciden en el comportamiento de compra del consumidor son aquellos que hacen referencia al establecimiento de un control de calidad, a la durabilidad a largo plazo del producto, al embalaje y/o presentación del producto, a la distribución supervisada por la empresa y al empleo de una publicidad de marca no dirigida hacia una masa de consumidores (Ilustr. 1, anexo).

A su vez, mediante el análisis factorial y determinado el peso de cada factor -obtenido mediante la media ponderada en función de la contribución de la variable al factor-, se ha llegado a los siguientes resultados teniendo en cuenta por un lado las variables psicológicas relacionadas con el consumidor y por el otro las variables de marketing-mix: 1) desde el punto de vista de las variables psicológicas, la empresa al promocionar sus productos ha de insistir en la imagen personal o prestigio social que el comprador puede alcanzar con el uso del producto; 2) considerando los factores relacionados con la implantación de estrategias de marketing-mix, la empresa ha de tener en cuenta preferentemente y desde el punto de vista del producto, la durabilidad a largo plazo, la calidad y la diferenciación.

## 5. CONCLUSIONES

Distintas estrategias comerciales permiten fijar un precio de prestigio que genere el máximo beneficio a la empresa. Muchos empresarios no tienen en cuenta las percepciones de compra del consumidor cuando intentan fijar determinados precios de prestigio para sus productos. Tampoco consideran los medios que pueden emplear para posicionar una marca en el mercado que permita conseguir unos beneficios derivados del valor exclusivo. En este artículo ponemos de manifiesto la utilización de determinadas estrategias de marketing que sirvan de base para la determinación de un "precio de prestigio". Hemos considerado que el precio de mercado para un producto es una función que se asocia a dos factores: el valor de utilidad del producto (VUP) y el valor del premio exclusivo (VPE). Este último depende de factores psicológicos que afectan a los consumidores. Por tanto, se puede fijar un precio de prestigio a través de la formulación de una estrategia de marketing que aspire a maximizar el valor exclusivo del premio. Mediante una referencia en los anuncios publicitarios de aquellos factores psicológicos que afectan a la elección de una marca, la empresa puede influir en las percepciones del consumidor del valor exclusivo. La implantación de determinadas estrategias por parte de la empresa permitiría fijar un precio de prestigio que incida en el logro de unos mayores beneficios.



## 6. BIBLIOGRAFIA

- BAYTON, J.A. (1958): "Motivation, Cognition, Learning - Basic Factors in Consumer Behavior". Journal of Marketing, vol. 20. Enero. Pág. 282.
- DODDS, W.B. Y OTROS (1991): "Effects of Price, Brand, and Store Information on Buyers' Product Evaluations". Journal of Marketing Research, vol. XXVIII. Agosto. Págs. 307-319.
- HANNA, J.G. (1980): "A Typology of Consumer Needs". Research in Marketing, vol. 3, Págs. 83-104.
- KAHN, B.E. and LOUIE, T.A (1990): "Effect of Retraction of Price Promotion on Brand Choice Behavior for Variety-Seeking and Last-Purchase-Loyal Consumers.
- KERIN, R.A. y OTROS (1992): "Store Shopping Experience and Consumer Price-Quality-Value Perceptions". Journal of Retailing, vol. 68, nº 4. Winter. Págs. 376-397.
- KNEALE, D. (1989): "Glitzy Brands Make Small Impressions". Wall Street Journal, Vol 15. Diciembre. Pág 81.
- MACINNIS, D.J. y OTROS (1991): "Enhancing and Measuring Consumers' Motivation, Opportunity, and Ability to Process Brand Information from Ads". Journal of Marketing, vol. 55, nº 4. Octubre. Págs. 32-53.
- RAO, AKSHAY R. and MONROE, K.B. (1989): "The Effect of Price, Brand Name, and Store Name on Buyers' Perceptions of Product Quality: An Integrative Review". Journal of Marketing Research, vol. XXVI. Agosto. Págs. 351-357.
- SCHIFFMAN, L.G. and KANUK, L.L. (1991): "Consumer Behavior". Editorial Prentice-Hall.
- TELLIS, G.J. (1986): "Beyond the Many Faces of Price: An Integration of Pricing Strategies". Journal of Marketing, vol. 50, nº 4. Octubre. Págs. 146-160.
- ZEITHAML, V.A. (1988): "Consumer Perceptions of Price, Quality, and Value: A means-End Model and Synthesis of Evidence". Journal of Marketing, vol. 52, nº 3. Julio. Págs. 2-22.

ANEXO

| TABLA 1                         |      |         |         |         |         |
|---------------------------------|------|---------|---------|---------|---------|
| VALORES MEDIOS DE CADA VARIABLE |      |         |         |         |         |
| Variable                        | Mean | Std Dev | Minimum | Maximun | N Label |
| P1                              | 1.60 | 0.95    | 1.0     | 5.0     | 182     |
| P2                              | 2.75 | 1.09    | 1.0     | 5.0     | 182     |
| P3                              | 2.88 | 1.48    | 1.0     | 5.0     | 176     |
| P4                              | 1.82 | 0.96    | 1.0     | 5.0     | 180     |
| P5                              | 2.47 | 1.33    | 1.0     | 5.0     | 182     |
| P6                              | 2.70 | 1.50    | 1.0     | 5.0     | 176     |
| P7                              | 3.21 | 1.17    | 1.0     | 5.0     | 181     |
| P8                              | 2.42 | 1.47    | 1.0     | 5.0     | 182     |
| P9                              | 3.09 | 1.59    | 1.0     | 5.0     | 182     |
| P10                             | 4.05 | 1.12    | 1.0     | 5.0     | 180     |
| P11                             | 2.10 | 1.23    | 1.0     | 5.0     | 181     |
| P12                             | 4.65 | 0.67    | 1.0     | 5.0     | 182     |
| P13                             | 3.25 | 1.41    | 1.0     | 5.0     | 181     |
| P14                             | 1.63 | 0.92    | 1.0     | 5.0     | 182     |
| P15                             | 1.68 | 1.01    | 1.0     | 5.0     | 175     |
| P16                             | 2.84 | 1.08    | 1.0     | 5.0     | 180     |
| P17                             | 2.56 | 1.43    | 1.0     | 5.0     | 180     |
| P18                             | 1.70 | 1.23    | 1.0     | 5.0     | 180     |
| P19                             | 3.48 | 1.47    | 1.0     | 5.0     | 178     |
| P20                             | 2.05 | 1.30    | 1.0     | 5.0     | 179     |

| TABLA 2        |                             |                                     |            |         |              |         |
|----------------|-----------------------------|-------------------------------------|------------|---------|--------------|---------|
| Preguntas      | Valores medios de la escala | Porcentaje valido de cada respuesta |            |         |              |         |
|                |                             | Nunca                               | Casi nunca | A veces | Casi siempre | Siempre |
| P <sub>1</sub> | 1.60                        | 68.1                                | 7.1        | 22.5    | 1.1          | 1.1     |
| P <sub>2</sub> | 2.75                        | 20.3                                | 9.3        | 49.5    | 16.5         | 4.4     |
| P <sub>3</sub> | 2.88                        | 28.4                                | 11.4       | 23.3    | 17.6         | 19.3    |
| P <sub>4</sub> | 1.82                        | 50.6                                | 22.2       | 22.2    | 4.4          | 0.6     |
| P <sub>5</sub> | 2.47                        | 36.3                                | 11.5       | 28.6    | 15.9         | 7.7     |
| P <sub>6</sub> | 2.70                        | 33.5                                | 13.6       | 18.8    | 17.0         | 17.0    |
| P <sub>7</sub> | 3.21                        | 11.6                                | 10.5       | 37.6    | 26.0         | 14.4    |

| TABLA 3         |                             |                                     |            |         |              |         |
|-----------------|-----------------------------|-------------------------------------|------------|---------|--------------|---------|
| Preguntas       | Valores medios de la escala | Porcentaje valido de cada respuesta |            |         |              |         |
|                 |                             | Nunca                               | Casi nunca | A veces | Casi siempre | Siempre |
| P <sub>8</sub>  | 2.42                        | 40.1                                | 18.1       | 17.0    | 9.3          | 15.4    |
| P <sub>9</sub>  | 3.09                        | 28.0                                | 9.3        | 15.4    | 19.8         | 27.5    |
| P <sub>10</sub> | 4.05                        | 3.3                                 | 5.6        | 22.8    | 19.4         | 48.9    |

|                 |      |      |      |      |      |      |
|-----------------|------|------|------|------|------|------|
| P <sub>11</sub> | 2.10 | 47.0 | 14.4 | 26.0 | 7.2  | 5.5  |
| P <sub>12</sub> | 4.65 | 0.5  | 1.6  | 2.7  | 22.5 | 72.5 |
| P <sub>13</sub> | 3.25 | 17.1 | 12.2 | 24.9 | 20.4 | 25.4 |
| P <sub>14</sub> | 1.63 | 61.0 | 19.8 | 15.9 | 1.6  | 1.6  |
| P <sub>15</sub> | 1.68 | 61.7 | 16.0 | 17.7 | 1.7  | 2.9  |
| P <sub>16</sub> | 2.84 | 13.9 | 18.3 | 45.0 | 15.6 | 7.2  |
| P <sub>17</sub> | 2.56 | 37.2 | 9.4  | 25.0 | 16.7 | 11.7 |
| P <sub>18</sub> | 1.70 | 69.4 | 9.4  | 10.0 | 3.9  | 7.2  |
| P <sub>19</sub> | 3.48 | 16.9 | 7.9  | 23.0 | 15.2 | 37.1 |
| P <sub>20</sub> | 2.05 | 50.3 | 17.3 | 17.3 | 7.3  | 7.8  |

## TABLAS DE ANALISIS FACTORIAL

Rotated Factor Matrix: Factores psicológicos

|    | <u>FACTOR 1</u> | <u>FACTOR 2</u> |
|----|-----------------|-----------------|
| P1 | 0.66318         | 0.00787         |
| P2 | 0.32067         | 0.69310         |
| P3 | 0.73912         | 0.16840         |
| P4 | -.10218         | 0.83134         |
| P5 | 0.54970         | 0.42076         |
| P6 | 0.77222         | -.00119         |
| P7 | 0.61927         | 0.38088         |

|      |      |      |
|------|------|------|
| Peso | 1.72 | 1.71 |
|------|------|------|

SPSS/PC+

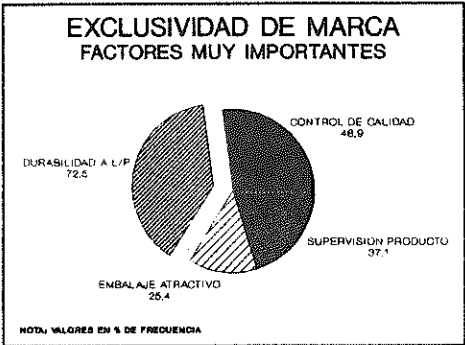
Factor 1= Satisfacción Personal; Factor 2= Imagen Personal

Rotated Factor Matrix: Factores de Marketing-mix

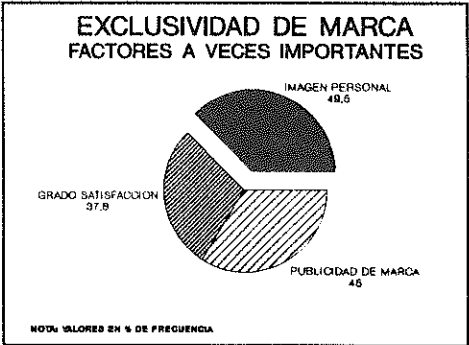
|     | <u>FACTOR 1</u> | <u>FACTOR 2</u> | <u>FACTOR 3</u> | <u>FACTOR 4</u> | <u>FACTOR 5</u> |
|-----|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| P8  | -.04265         | 0.15178         | -.25205         | 0.70641         | -.12182         |
| P9  | 0.07593         | 0.23826         | 0.23493         | 0.75835         | -.04900         |
| P10 | 0.07563         | 0.63679         | -.22289         | 0.18989         | 0.27124         |
| P11 | 0.76914         | 0.12486         | 0.06211         | 0.14804         | 0.10352         |
| P12 | -.00066         | 0.16886         | -.01194         | -.02955         | 0.90385         |
| P13 | 0.13983         | 0.60209         | 0.02136         | 0.28604         | 0.20321         |
| P14 | 0.15650         | 0.06037         | 0.82180         | -.00443         | 0.07837         |
| P15 | 0.16054         | 0.02673         | 0.85338         | 0.01542         | -.09847         |
| P16 | 0.23078         | -.15584         | 0.05302         | 0.55496         | 0.30849         |
| P17 | 0.63999         | 0.16447         | 0.28957         | 0.18063         | -.08130         |
| P18 | 0.42654         | 0.59233         | 0.10318         | -.04391         | -.21633         |
| P19 | -.06537         | 0.75864         | 0.17734         | -.02659         | -.01548         |
| P20 | 0.81287         | -.03619         | 0.08901         | -.06828         | 0.02387         |

|      |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|------|
| Peso | 1.64 | 2.05 | 1.47 | 1.88 | 4.20 |
|------|------|------|------|------|------|

Factor 1= Uso privilegiado; Factor 2= Calidad;  
Factor 3= Asociación de uso; Factor 4= Diferenciación,  
Factor 5= Durabilidad a largo plazo.  
SPSS/PC+



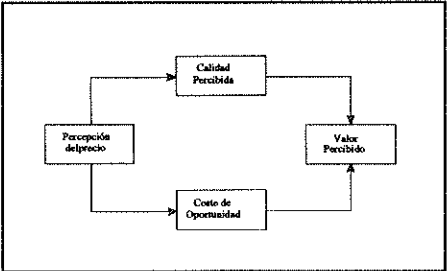
Ilustr. 1



Ilustr. 2

TABLA 4

| PREGUNTAS RELACIONADAS CON LA ENCUESTA |   |
|--|---|
| P <sub>1</sub>                         | Consigue una meta con el uso del producto               |
| P <sub>2</sub>                         | Influye el producto en su imagen personal               |
| P <sub>3</sub>                         | Busca una recompensa a través del producto              |
| P <sub>4</sub>                         | Influyen otras personas en su elección                  |
| P <sub>5</sub>                         | Busca con el producto una posición de prestigio         |
| P <sub>6</sub>                         | Planifica objetivos al comprarlo                        |
| P <sub>7</sub>                         | Alcanza gran satisfacción al consumir estos productos   |
| P <sub>8</sub>                         | Exige certificado de autenticidad                       |
| P <sub>9</sub>                         | Exige atributos distintivos                             |
| P <sub>10</sub>                        | Le interesa el control de calidad                       |
| P <sub>11</sub>                        | Le interesa que la producción sea limitada              |
| P <sub>12</sub>                        | Busca durabilidad a L/P                                 |
| P <sub>13</sub>                        | Desea un embalaje atractivo                             |
| P <sub>14</sub>                        | Influyen personas destacadas en su elección             |
| P <sub>15</sub>                        | Contribuyen algunas personas a crear la imagen de marca |
| P <sub>16</sub>                        | Le interesa la publicidad del producto                  |
| P <sub>17</sub>                        | Se siente orgulloso de que el producto sea único        |
| P <sub>18</sub>                        | Desea un trato personalizado                            |
| P <sub>19</sub>                        | Es importante que la venta esté supervisada             |
| P <sub>20</sub>                        | Le interesa saber que la venta es limitada              |



Ilustr. 3 Efecto del precio en el valor percibido

# **TENDENCIAS EN LA EVOLUCION CUALITATIVA DE LAS RELACIONES ENTRE FABRICANTES Y PROVEEDORES DEL SECTOR DE AUTOMOCION: EL CASO DEL PAIS VASCO Y NAVARRA**

**\*RICARDO ALÁEZ ALLER**

**\*JAVIER BILBAO UBILLOS**

**\*\*JUAN CARLOS LONGÁS GARCÍA**

**\*Departamento de Economía Aplicada**

**Universidad del País Vasco**

**\*\*Departamento de Economía**

**Universidad Pública de Navarra**

## **INTRODUCCIÓN**

El objeto de esta comunicación es la presentación e interpretación de las nuevas tendencias observadas en las relaciones entre fabricantes y proveedores del sector de automoción, a través de una amplia investigación empírica desarrollada, en los últimos meses, en las comunidades autónomas vasca y navarra. El estudio se ha interesado especialmente en dos aspectos básicos de las relaciones interempresariales: las compras y la logística. Eso sí, el análisis de estos dos aspectos se enmarcaba en el espacio delimitado por los requerimientos tecnológicos inherentes a la industria de automoción.

El trabajo empírico, del que hemos obtenido la información imprescindible para detectar los cambios en las pautas que rigen las mencionadas relaciones, halla su causa en la necesidad de contrastar una serie de hipótesis de partida, que abundaban en la traslación, al ámbito geográfico en cuestión, de los sistemas productivos típicos del sector, caracterizados en la fórmula del *just in time*. La generalización de esta fórmula en la industria de automoción ha sido frecuentemente afirmada a partir de impresiones y razonamiento lógicos, sin procurar un suficiente soporte empírico.

Respondiendo a este déficit de información, nos planteamos la realización del citado trabajo empírico, presentando un proyecto de investigación, que vinculaba a equipos de trabajo de las Universidades del País Vasco, Pública de Navarra y de Pau-Bayona y a los Fondos de Cooperación Transfronteriza Euskadi-Navarra-Aquitania. La financiación obtenida de estos Fondos, sufragada por los respectivos gobiernos regionales, así como la recibida de la Universidad del País Vasco, posibilitó el desarrollo del trabajo de campo.

Por lo que respecta a la propia metodología del trabajo empírico, sin llegar a un detalle excesivo, creemos necesario destacar que:

- El estudio, como ya hemos comentado, se ha concentrado en la industria de automoción y en un espacio geográfico concreto: las comunidades autónomas de Navarra y el País

Vasco. Se ha entrevistado tanto a personal de las dos plantas de ensamblaje existentes en estas regiones (Volkswagen Navarra y Mercedes Benz Vitoria), como a numerosas empresas proveedoras (88) localizadas en las dos regiones objeto de estudio.

- Se ha seguido el método de entrevistas cualitativas, basadas en un cuestionario dirigido al análisis de las relaciones entre los proveedores y las plantas de ensamblaje del sector. La duración media de cada entrevista puede estimarse en unos 120 minutos. El cuestionario ha permitido entrar en múltiples aspectos de las relaciones interempresariales, con especial atención a la tecnología, compras y cuestiones logísticas.

## ESTRATEGIAS DE COMPRAS

Analizaremos, en primer lugar, las tendencias observadas en las relaciones establecidas entre fabricantes y proveedores de la industria de automoción a través del propio fenómeno de la externalización. Empezaremos afirmando que son consideraciones de índole tecnológica las que determinan *a priori* el ámbito de la subcontratación, de manera que se aprovechen al máximo las ventajas inherentes a la especialización del proveedor en un proceso o producto concretos, sin que padezca por ello la primacía técnica del fabricante, que le asegura su posición dominante en un sector en el que las relaciones interempresariales aparecen altamente jerarquizadas.

Dentro de estos condicionamientos de carácter tecnológico, se ha delimitado un amplio campo de externalización —las compras representan un porcentaje del 60-65% de las ventas de los fabricantes— que ha incrementado la porción de valor añadido generada por los proveedores de la industria.

Paralelamente, se ha venido observando una paulatina reducción en el número total de proveedores de primer nivel —suministradores directos de componentes al ensamblador— que, a nuestro juicio, es la consecuencia natural de un proceso de selección de los mejores proveedores, que se ha atendido a los siguientes criterios:

- a) Suficiencia tecnológica: que implicaría, inicialmente, el manejo de las tecnologías de producción más adecuadas y, como tendencia, una serie de aportaciones específicas en el diseño del componente en cuestión.
- b) Nivel de calidad: que libere al fabricante del riesgo de paralización de su actividad por defectos en los componentes suministrados.
- c) Seriedad en las entregas: que, del mismo modo, garantice la continuidad en el montaje del fabricante.
- d) Eficiencia productiva: que aliente la progresiva reducción, o al menos contención, del precio unitario de los componentes.

Este proceso de selección continua de proveedores parece haberse acercado a su límite. En este sentido, podríamos considerar los siguientes como síntomas del agotamiento del mencionado proceso:

- La dificultad de entrada en el mercado como proveedores de primer nivel para aquellas empresas que no estuvieran ya entre las seleccionadas. Para los productores que desean iniciar su actividad en el sector sólo parece posible conseguir pedidos intensificando la agresividad comercial y siempre limitados a un grupo determinado de fabricantes.
- Cierta estabilidad en la cartera de clientes de las empresas que parecen haber superado este proceso de selección. Se observa que los incrementos de facturación se deben no tanto a la captación de nuevos clientes, como a un aumento en el valor de las ventas a sus clientes tradicionales. Circunstancia que se relaciona con la progresiva concentración de las compras, por parte de los ensambladores de automóviles, en un número cada vez menor de proveedores.
- Las homologaciones propias de cada ensamblador, básicas en la etapa de selección de proveedores de primer nivel, están siendo sustituidas por la exigencia general de la normalización ISO. Con ello se rebajan los costes de homologación para el productor de automóviles, que ya no considera necesario, toda vez que ha sido contrastada la capacidad del proveedor, continuar con una vigilancia tan intensa. En todo caso, la exigencia de la norma ISO mantiene la preocupación por la calidad en los proveedores.

A nuestro juicio, el agotamiento del proceso de selección de proveedores obedece principalmente a tres causas:

- Las restricciones que la estrategia tecnológica de los productores de automóviles impone a la subcontratación de determinados productos y procesos considerados vitales.
- El ajuste progresivo de la capacidad productiva de los proveedores de primer nivel a la demanda potencial de sus clientes. Una reducción adicional en dicha capacidad podría llegar a producir estrangulamientos en una fase expansiva del ciclo económico.
- El intenso proceso de concentración empresarial vivido en algunos mercados de equipos para automoción, que permitiría hablar de oligopolios en conjuntos como transmisión-dirección, servofrenos, ...

Una vez agotado este proceso e identificados aquellos proveedores que recibirán, con cierta estabilidad, los pedidos, los fabricantes de automóviles han pasado a diseñar mecanismos que estimulen continuamente la reducción en los costes de sus proveedores y les permitan, simultáneamente, apropiarse de los resultados económicos de dicha mejora en la eficiencia.

Al analizar tales mecanismos, en un intento por describirlos de manera ordenada, conviene diferenciar dos grandes grupos de proveedores:

- a) El primer grupo estaría formado por los grandes proveedores de equipos con cierto grado de sofisticación y que disponen de poder de mercado. En este caso, ante las dificultades de sustitución del proveedor seleccionado, los fabricantes tienden a establecer relaciones contractuales a largo plazo, normalmente incluyendo rebajas anuales en los precios de los equipos. De esta forma se aseguran el suministro a un precio predeterminado. Las negociaciones iniciales sirven para conseguir, a través de las reducciones anuales en precios, estimular y captar las mejoras en los costes de estos proveedores. En este, grupo, los fabricantes de automóviles suelen verse forzados a contratar con un único proveedor, sin que la situación del mercado haga viable su sustitución a corto plazo.
- b) El segundo grupo estaría integrado por los proveedores de componentes o equipos muy estandarizados, esto es, más fácilmente sustituibles. En este caso se detecta también una tendencia hacia proveedor único pero, frente al caso anterior, ahora son varios los productores que pueden alcanzar esa condición de proveedores únicos de un componente durante la vida de un modelo. En este sentido, en la industria se conocen ejemplos de retirada del utillaje (propiedad del fabricante de automóviles) y adjudicación del componente o equipo a un nuevo proveedor.

Las relaciones entre los fabricantes y este segundo grupo de proveedores responden a pautas bien diferenciadas en función de las estrategias específicas de aquéllos. Así, se podrían describir dos modelos extremos entre los que estarían comprendidos el resto de experiencias: uno, que denominaríamos modelo Volkswagen-Opel y otro, al que a partir de ahora nos referiremos como modelo Nissan.

El caso Volkswagen-Opel se caracterizaría por la práctica del llamado *global sourcing* como mecanismo clave para estimular y apropiarse de las mejoras en la eficiencia productiva. Se trataría, en esencia, de una estrategia de compras conducente a la adjudicación de cada componente o equipo a aquel proveedor, entre un grupo de preseleccionados, que ofrezca el mejor precio. Este mecanismo suele asociarse con un nivel extremo de centralización en las decisiones de compras. En coherencia con esta estrategia la variable dimensión del proveedor adquiere una relevancia singular entre los criterios de adjudicación del componente o equipo: resulta especialmente conveniente trabajar con proveedores de primer nivel capaces de abastecer buena parte de la demanda de las plantas de todo el grupo. En este contexto, las economías de escala derivadas del mayor volumen de producción permitirán los primeros ahorros en costes. La presión que suponen continuas subastas para la adjudicación del componente o equipo garantizaría tanto la traslación a los precios de esos menores costes, como la perenne preocupación del proveedor por conseguir reducciones de costes adicionales. El hecho de que el proveedor sea consciente de que: primero, el fabricante, por la centralización de compras, toma contacto con nuevos proveedores que no suponían competencia hasta entonces y, segundo, pueda retirarle la producción del componente o equipo por una oferta mejor, refuerza esa presión sobre el proveedor.

Este mecanismo de subastas se complementa con lo que se ha dado en llamar genéricamente *mejora continua* que, instada por el fabricante de automóviles, pretendería, mediante la visita de equipos específicos a la planta del proveedor, sugerir mejoras productivas que implicaran reba-



Dicha reducción de costes se pretende alcanzar incidiendo en aquellos aspectos o factores que, implicando algún tipo de gasto, no aportan nada al valor añadido de la empresa, o en los que se observan derroches o gastos superfluos. Se trata, pues, de actuar en el ámbito organizativo, mejorando la coordinación de las distintas unidades productivas, internas y externas. En este contexto, los aspectos relacionados con la logística cobran singular importancia, puesto que van a configurar las características de esa coordinación.

La organización logística de las empresas afecta tanto a los aprovisionamientos, como a la gestión de *stocks* y a la propia producción. Aquí nos vamos a centrar en los dos primeros, en la medida en que nuestro interés se dirige hacia las relaciones interempresariales. El sistema de aprovisionamientos de la empresa comprende aspectos como los sistemas de comunicaciones con proveedores, la organización del transporte, el número de proveedores o el sistema de entregas, mientras que de la gestión de inventarios nos interesa la política de inventarios mínimos y los sistemas de facturación.

El objetivo mencionado de reducción de costes exige en primer lugar una coordinación de la producción entre proveedores y clientes que va más allá de la tradicional dinámica pedidos-entregas. No se trata de que el proveedor fabrique un pedido para una fecha determinada, sino de ajustar el ritmo de las producciones para adaptarse a las necesidades del ensamblador final, tanto en cantidad como en variedad. Y para ello es necesario un sistema de comunicaciones que garantice no sólo el intercambio de información en tiempo real, sino además la transmisión de esa información a la cadena de montaje del proveedor. Así, se observa la generalización de sistemas de intercambio electrónico de datos del tipo EDI (puede haber variantes según las peculiaridades de las empresas), al menos entre el fabricante de primeros equipos y los proveedores de primer nivel, y comienza a extenderse a los de segundo nivel.

Otro aspecto relevante y que ocupa de forma preferente la atención de los gestores de las empresas es el del transporte. Se trata no sólo de minimizar su coste, que en algunos casos es significativo, especialmente cuando los componentes son voluminosos, sino de coordinarlo para el conjunto de proveedores de forma que la cadena de ensamblaje no sufra interrupciones. Aquí encontramos una diversidad de opciones, que van desde la coordinación del transporte a cargo del fabricante final (lo que no es habitual) hasta la exigencia de almacenes reguladores o de existencias mínimas de producto terminado cerca del cliente. En general, estas exigencias se aplican a los proveedores alejados (teniendo en cuenta lo relativo del concepto de distancia) y salvo raras excepciones su coste recae sobre éstos. Se observan, no obstante, diferencias sustanciales entre el grado de coordinación fabricante final-proveedores de primer nivel y el resto de niveles. Muchos proveedores de primer nivel están intentando coordinar el transporte e introducir sistemas como almacenes reguladores, aunque los avances son de momento escasos. Hay que tener en cuenta que gran parte de sus proveedores lo son de materias primas, que operan en mercados oligopolistas y disponen por tanto de gran capacidad negociadora. Adicionalmente, esos productos suelen estar sujetos a variaciones erráticas de precios o a escaseces coyunturales que incentivan los aprovisionamientos estratégicos. Obviamente, y salvo muy raras excepciones, el transporte se realiza por carretera, normalmente a cargo de empresas especializadas. En un caso, incluso, la falta de acuerdo sobre la distribución del coste del transporte de un componente que debe ser suministrado *just in time* ha llevado a que sea el fabricante final quien se haga cargo del transporte.

jas adicionales en costes. En opinión de algunos proveedores de primer nivel, estas visitas permitirían, sobre todo, un mejor conocimiento de su estructura de costes. Con lo que, haciendo uso activo del método de mejora continua, nunca sería posible la eventualidad de que existiera un proveedor que, aun ofreciendo los mejores precios del mercado, no trasladara los avances en las reducciones de costes a los precios en su totalidad.

En el otro extremo, pero con objetivos similares de estímulo para mejorar la eficiencia y desarrollo de mecanismos que permitan captar esos avances, se encuentra el que hemos denominado modelo Nissan. En este caso, el fabricante de automóviles, a través de un proceso gradual, concentra sus compras en unos pocos proveedores de cada componente o equipo, hasta llegar a suponer un porcentaje significativo del volumen de ventas del proveedor. En otras palabras, el ensamblador consigue llevar el grado de dependencia del proveedor de primer nivel hasta un extremo que le permita imponer sus decisiones.

En este modelo, las mejoras en costes son inducidas por una estrecha colaboración entre el fabricante y el proveedor. El ensamblador asume este esfuerzo porque, como primer cliente, se convertirá en el principal beneficiario de estas mejoras. Se detectan incluso tendencias hacia la transmisión al proveedor de la cultura productiva del cliente, con el objetivo último de conseguir una mayor integración de estos proveedores de primer nivel en su proceso. Por su parte, los productores de componentes o equipos acceden a esta colaboración tan directa motivados por la importancia de sus clientes en la cartera de pedidos. Asumiendo, además, que su futuro productivo se encuentra muy vinculado al éxito en los mercados de su principal cliente.

En cuanto a la captación de las mejoras en costes, logradas tras esa colaboración, el alto grado de dependencia constituye un mecanismo con potencia suficiente para permitir su apropiación por el fabricante de automóviles.

Entre los dos extremos descritos cabría situar toda una serie de estrategias empresariales que toman elementos de ambos, aunque combinándolos de forma diferente. En todo caso, parecen ser aspectos comunes a casi todos los fabricantes de automóviles la progresiva centralización de las compras y el aumento de la presión en precios a sus proveedores de primer nivel, cuya dimensión se valora en mayor grado. En el caso de los fabricantes franceses -especialmente Renault- este proceso de centralización de compras ha ido acompañado de una política de nacionalización de componentes que ha afectado con claridad a sus proveedores tradicionales no franceses.

## LOGÍSTICA

Vemos, pues, que la estrategia competitiva de las empresas del sector del automóvil, tanto de los fabricantes de primeros equipos como de los proveedores (al menos los de primer nivel), se basa en la profundización de la reducción de costes como método para mantener o mejorar la posición competitiva, en un entorno en el que las presiones para la reducción de precios son continuas.

Cuando el proveedor está alejado, se suele recurrir a centros de consolidación, que normalmente son proveedores cercanos, encargados de recibir los componentes, e incluso secuenciarlos. Evidentemente, la provisión de ese servicios es objeto de negociación y constituye un elemento más en la relación proveedor-cliente.

La problemática asociada al número de proveedores ya ha sido considerada al tratar de las estrategias de compras. Baste apuntar aquí que la política de proveedores también tiene un coste, asociado especialmente a los sistemas de selección, homologación y control, y que explican en parte la tendencia observada a su simplificación o a basarlas en la obtención por el proveedor de homologaciones normalizadas.

La teorización del sistema productivo conocido como “fordismo” (que ha dominado el panorama industrial desde comienzos de siglo) y el análisis de la crisis económica y de sistemas alternativos de organización de la producción, han hecho que el tema estrella de toda la problemática asociada a la reducción de costes sea la gestión de inventarios, a pesar de constituir únicamente un aspecto de la cuestión.

Es indiscutible que la utilización de inventarios como medio de regular el flujo productivo y obtener continuidad en la línea de montaje, evitando interrupciones muy costosas, genera a su vez costes que en un entorno como el actual inciden poderosamente en la posición competitiva de la empresa. Así, constituye un lugar común la insistencia de las empresas en el tema de las entregas de proveedores, observándose una tendencia generalizada al aumento de su frecuencia y la reducción de su volumen. El objetivo es mejorar la capacidad de adaptación a las variaciones de la demanda y la incertidumbre de los mercados, obtener una mayor flexibilidad en el producto (aumentando las versiones) y reducir costes de inventarios.

La forma en que se lleva a la práctica induce a pensar que se trata más de un intento de trasladar costes hacia atrás en la cadena productiva, que de introducir nuevos métodos productivos con una visión global. Así, es frecuente la exigencia a los proveedores del mantenimiento de unos inventarios mínimos de producto terminado (e incluso de materias primas; todo ello siempre que las características del producto lo permitan), ya sea en la planta del proveedor (en este caso la exigencia es más bien teórica), en el almacén regulador, o en la planta del cliente. La incertidumbre y los riesgos que la producción *just in time* y similares comporta, hacen que esos sistemas no se lleven hasta sus últimas consecuencias.

La tendencia a la transferencia de costes queda patente en los sistemas de facturación utilizados, siendo cada vez más frecuente que se facture a medida que el producto final (el automóvil) sale de la cadena de montaje.

Estos planteamientos explican la extensión de la implantación de sistemas del tipo *just in time* para gestionar la producción, optimizar flujos y reducir inventarios. Va a afectar, pues, tanto a la organización interna de la empresa como a la relación cliente-proveedor. El resultado esperado es el incremento de la productividad, y por tanto la reducción de los costes unitarios. El *just in time* no se aplica en su totalidad, sino que se limita a aquellas áreas en que son más patentes las posibilida-

des de reducción de costes. Entre las razones cabe citar el coste de la implantación, especialmente de logística, y la propia inercia organizativa.

Una de las manifestaciones de estos procesos es la externalización, ya mencionada, de actividades, ya que las empresas aspiran a centrarse en sus competencias distintivas (“en lo que realmente saben hacer”). En el caso de la Comunidad Vasca y Navarra se puede decir que el proceso de externalización está prácticamente concluido, salvo el recurso coyuntural a la subcontratación de capacidad.

No obstante, la externalización no significa *per se* la reducción del tamaño de las empresas, al menos si las entendemos en términos jurídicos, ni su aglomeración espacial. Más bien se asiste a la toma de posiciones a escala mundial de grupos oligopolistas que controlan grandes cuotas de mercado y que negocian de forma centralizada con el cliente. Si a ello sumamos los avances en los sistemas de transmisión de información y las posibilidades logísticas para estar cerca del cliente, el resultado es ambiguo en términos espaciales.

# LA ACTIVIDAD INNOVADORA: UN IMPERATIVO EN EL NUEVO ENTORNO COMPETITIVO

ANGELA GONZALEZ MORENO

CARMEN RUIZ AMAYA

Facultad de CC. EE. Y EE. (Albacete)

Universidad de Castilla-La Mancha

## 1. INTRODUCCION: NUEVO ENTORNO COMPETITIVO

Hasta ahora la situación característica en la que se venía desarrollando la actividad empresarial estaba caracterizada por productos estandarizados que se comercializaban en mercados homogéneos en expansión, favoreciéndose la producción en masa. El nuevo marco aparece definido por mercados con tasas de crecimiento bajas lo que intensifica la competencia y cuyas consecuencias se resumen en las siguientes características:

- *Fragmentación*: Dado el aumento de concurrencia, la mayor presión competitiva y la velocidad del proceso de difusión tecnológica, los mercados homogéneos se fragmentan, obligando a las empresas a especializarse según la tecnología o según la relación con los clientes. Esta fragmentación exige una nueva forma de organizarse, es decir, un nuevo diseño del producto o servicio adaptado, una nueva organización del proceso productivo y una estrategia definida sobre nuevas bases.

- *Internacionalización*: Aunque estemos ante mercados fragmentados, no debemos de entender que se trata de mercados pequeños, la fuerte competencia obliga a la internacionalización de muchos mercados que antes se encontraban encerrados dentro de las fronteras nacionales; por tanto tenemos mercados de mayor tamaño, más productos y más clientes, lo que obligará a un cambio en la estrategia empresarial, al estar desarrollando la actividad en un ámbito más amplio.

- *El factor tiempo cobra una importancia decisiva*: La mayor competencia a la que se enfrenta la empresa va a determinar la incorporación de esta variable en los planes empresariales para poder llegar en primer lugar al mercado, aspecto que se convertirá en un factor competitivo clave.

- *Homogeneización de los costes del factor capital y del factor trabajo*: Paulatinamente se está produciendo una equiparación en los costes de capital y de mano de obra que obliga a las empresas a buscar otras fuentes de ventaja competitiva en costes.

Debido a estas características que configuran el nuevo entorno competitivo la actividad de innovación se convierte en un imperativo para la empresa que quiera desarrollar sus actividades con la competitividad exigida por el propio entorno.

## 2. LA ACTIVIDAD DE INNOVACION Y EL PROCESO DE CAMBIO EN LA EMPRESA

La innovación en una empresa consiste en descubrir nuevas oportunidades en la aplicación de nuevas o mejores posibilidades que aumenten los resultados de la misma. En este sentido, innovación se orienta hacia mercados, productos/servicios, procesos y/o formas de gestionar u orientar la organización. Podemos establecer una clasificación de la innovación atendiendo a su naturaleza:

- *Innovación Tecnológica*: Este tipo se refiere a la introducción de nuevos productos y/o nuevos procesos en la empresa.

- La *innovación de producto* se centra en la introducción de productos nuevos y en la mejora de los existentes, de forma que le pueda reportar una ventaja en diferenciación.
- La *innovación de proceso* tendrá como consecuencia la incorporación de nuevos bienes de equipo en la empresa o nuevos procesos de producción, esta actividad generará una mayor productividad, concretándose en ventajas en costes, en la medida en que su incorporación se anticipe al proceso de difusión.

- *La innovación en métodos de gestión*: Agrupa el conjunto de cambios introducidos, relacionados con: la comercialización, el diseño organizativo, la información, el control, la financiación, etc. Para que la innovación tecnológica tenga éxito, esto es, incrementalmente la competitividad de la empresa en cuestión, debe ser acompañada y potenciada con este tipo de medidas.

- *La innovación social*: Tiene como finalidad mejorar los métodos de producción, es una innovación dirigida a las personas que forman parte de la organización y tiene como finalidad aumentar las tasas de productividad del trabajo.

La introducción de la innovación, entendida en sentido amplio —tecnológica, de métodos de gestión y social—, va a provocar un cambio en la cultura, un cambio total en la forma de concebir y desarrollar la actividad empresarial, que no siempre va a ser fácil de asumir por parte de los miembros de la organización. Por ello se hace necesario idear e implantar un determinado *proceso de cambio* en el que se implique a toda la empresa, desde la alta dirección hasta el último operario.

Como objetivo principal, el proceso de cambio va a buscar una mejora sustancial en los resultados a través de la concentración en los procesos que generan valor para la empresa, la diferenciación competitiva y los cambios de estructura, gestión y sistemas de comunicación. Para ello, habrá que considerar diversos aspectos: los objetivos han de estar perfectamente definidos, debe establecerse la cooperación entre todos los miembros para el logro de estos objetivos, las actuaciones y esfuerzos deben estar integrados, los esfuerzos han de estar equilibrados para que el peso no recaiga en un frente concreto, el proceso de cambio es un trabajo en equipo.

Considerados estos aspectos podríamos establecer la siguiente secuencia de actividades que limitan el marco de actuación sobre el que se tiene que desarrollar dicho proceso, no constituyendo

por sí mismo el único método válido para todo tipo de organización, sino más bien una orientación que deberá adaptarse a las circunstancias de cada empresa.

- *Establecimiento de la nueva línea de acción.* Primero habrá que concienciarse de la necesidad del cambio para, posteriormente, delimitar la línea que va a seguir la organización dependiendo siempre del entorno competitivo en el que se mueva, las capacidades con las que cuenta y la perspectiva de futuro que tenga. En este contexto, la organización tiene que realizar un análisis interno y externo que detecte los problemas con los que se puede encontrar y las posibles consecuencias positivas y negativas. Asimismo, se debe explicar e implicar a toda la organización en la necesidad de la generación de innovaciones (a través de la actividad de I+D) o de la introducción de las mismas procedentes del exterior, también se informará sobre los resultados del análisis efectuado.

- *Fijación y cuantificación de objetivos específicos y rediseño de los procesos.* En esta fase la organización deberá designar expresamente a un equipo que se ponga al frente del proceso de cambio y que oriente el mismo hacia los problemas claves.

Los objetivos específicos deberán dirigirse hacia las diferentes unidades, estableciendo cuáles son los problemas de cada una, en qué aspectos se debe incidir y cuál empezará primero el proceso. Por último habrá que diseñar los procesos que han de modificarse.

- *Puesta en marcha del plan.* Para llevar a cabo los planes establecidos en la etapa anterior hay que actuar en tres sentidos: descendente, ascendente y horizontal. En el primero, las actividades se realizan empezando por la alta dirección hasta llegar a los niveles más bajos de la organización. En el segundo, la actuación será al contrario: empezando por los niveles bajos de la organización y llegando a la cúpula. En sentido horizontal lo que se trata es de que los equipos interfuncionales empiecen a actuar en los diferentes procesos clave.

- *Control y ajuste.* Se puede decir que el proceso de cambio es repetitivo y continuo. El equipo encargado del mismo debe detectar, una vez puesto en marcha el plan, cualquier anomalía, problema o circunstancia que modifique las actuales líneas de actuación para realizar las modificaciones oportunas en el momento adecuado.

Como punto final, hay que señalar que el proceso de cambio, para que obtenga resultados satisfactorios, implica un esfuerzo de todos los miembros de la organización para modificar su cultura y sus comportamientos; esfuerzo que debe tener continuidad en el tiempo y estar orientado hacia el aprendizaje.

El proceso de cambio supone una ruptura total con los esquemas tradicionales de una organización, afectando tanto a la estructura como a la forma de configurar la acción y el proceso económico-empresarial. Es un cambio de cultura que necesita nuevos conocimientos en cuanto al modo de configurar la empresa y a cómo hacerlo. Esta nueva mentalidad deberá ser adoptada y aceptada tanto por la dirección como por el resto de recursos humanos que integran la organización.

La dirección ha de ser el motor que impulse este cambio, empezando por modificar los criterios de decisión. Debe orientarse hacia aspectos que hasta ahora la empresa española no había identificado como claves de competitividad como son:

- *El prestigio*: se debe potenciar la imagen de la empresa tanto a nivel externo —de cara al mercado—, como interno —todos los miembros deben identificarla como algo propio en la que ellos mismos son parte importante—.

- *La capacidad innovadora*: han de establecerse medidas de I+D y mentalizarse de su necesidad.

- *Flexibilidad de la organización*: respecto al entorno y respecto a las condiciones organizativas internas.

Sin embargo, como es obvio, no existe una fórmula concreta que deba seguir la empresa para introducir los cambios en la organización. Lo que sí puede afirmarse es que la dirección tiene que tener “vocación” innovadora y que las iniciativas deben de ser coherentes y continuadas.

En definitiva, se trata de que la dirección abandone los esquemas tradicionales y entre en una dinámica innovadora buscando, no sólo la adaptación a los cambios que van surgiendo, sino provocando el cambio que puede llegar a proporcionarle una posición competitiva ventajosa.

### 3. PROBLEMAS EMPRESARIALES ANTE EL CAMBIO TECNOLÓGICO

Acabamos de resaltar los efectos positivos y lo conveniente de implantar en la empresa estrategias de innovación, pero en muchas ocasiones la empresa se siente incapaz de entrar en esta dinámica, ya que la generación de innovaciones procede principalmente de las actividades de I+D que implican un gran esfuerzo en recursos financieros y encierran una gran incertidumbre.

La necesidad de que un gobierno acometa determinadas políticas tecnológicas o proyecte ayudas para la financiación y promoción del proceso innovador, está precisamente en la dificultad que encuentran algunas empresas para abordar estas cuestiones por sí solas, debido a que actúa dentro de un sistema de mercado que presenta grandes fallos para asignar de manera eficiente los recursos disponibles a las actividades generadoras de innovaciones, como la actividad de I+D.

Entre estas dificultades podemos destacar:

- *Rendimientos a escala*: Para poder obtener resultados e incorporarlos al proceso productivo es necesaria una considerable dotación de recursos humanos y materiales a I+D. Por ello, son las grandes empresas las que pueden acometer estas actividades. Sin embargo, la aplicación de los conocimientos generados en el proceso de investigación presenta fuertes rendimientos crecientes. El desarrollo tecnológico no necesitará información adicional, se limitará a reproducir las innovaciones fruto de los conocimientos de la empresa investigadora, que sí ha invertido grandes cantidades de fondos en la obtención de una información determinada.

- *Riesgo*: El factor riesgo es el centro de atención para la empresa, dado que la asignación de recursos a actividades de I+D conlleva un alto grado de incertidumbre respecto a los resultados.



Durante el proceso innovador, desde la concepción hasta el lanzamiento, pasan largos períodos durante los cuales las empresas soportan grandes costes no cubiertos por ingresos. Esto dificulta la correcta estimación de costes y beneficios, por lo que las empresas privadas, dada su común aversión al riesgo, no invierten en I+D lo suficiente como para mantener su competitividad. El riesgo actúa de freno para la investigación, sobre todo en aquellas empresas con deficiencias financieras como las PYME, con escasa capacidad de endeudamiento, baja rentabilidad, descapitalización, etc.

- *Imperfecciones en los mercados de factores*: Existen otros factores que frenan a las empresas a la hora de realizar actividades de I+D: son intensivas en capital y requieren mano de obra calificada. El hecho de que sean intensivas en capital hace que las empresas generalmente necesiten acudir al mercado de capitales. Sin embargo, los intermediarios financieros carecen de la información necesaria para poder clasificar a sus clientes potenciales en función del riesgo inherente a estas actividades. La consecuencia es que no realizarán discriminación en precios, favoreciendo los proyectos de I+D más rentables a corto plazo frente a los de a largo plazo, con mayor grado de incertidumbre. En cuanto a la necesaria mano de obra calificada, las empresas también encuentran grandes dificultades para acceder a este mercado de recursos escasos y altamente costosos.

- *Externalidades*: Todo proceso innovador genera efectos beneficiosos tanto para quien los ha producido como para agentes externos. Es decir, los usuarios primeros generan externalidades, en forma de información a otros usuarios potenciales. El problema surge cuando estas externalidades no son transmitidas a los agentes mediante los correspondientes incentivos, lo que provocará que el volumen de innovación sea menor. Las empresas generadoras de nuevos conocimientos no recuperarán los costes en los que han incurrido mediante su venta en el mercado, porque al hacerlos públicos serán del dominio general y nadie estará dispuesto a pagar por algo que ya conoce, con lo que se desincentiva la iniciativa privada para actividades de I+D.

- *Ineficiencia de resultados*: En determinados casos existe gran cantidad de empresas que realizan actividades de I+D pero en volúmenes tan pequeños que el resultado es ineficiente. Por ello, las empresas han de cooperar para generar una *masa crítica* de I+D tal que se pueda competir en el mercado internacional.

- *Aversión psicológica*: Además de los factores técnicos y económicos señalados anteriormente, existe un aspecto importante que impide a las empresas realizar actividades de I+D: escasa inclinación a acometer proyectos que varíen las condiciones de trabajo. El empresariado es reacio a todo aquello que suponga cambios en el seno de la empresa, máxime si estos cambios implican riesgo. Para modificar esas actitudes será necesario incentivar o motivar a los directivos de forma que adquieran una postura más competitiva.

#### **4. POLITICAS DE APOYO A LA EMPRESA PARA ACOMETER EL CAMBIO**

Para hacer frente a los problemas que supone para la empresa el nuevo entorno turbulento y la necesidad de adaptación, el sector público ha desarrollado una serie de instrumentos, cuyos des-

tinarios serán el personal docente y profesional, tanto científico como técnico, los centros de investigación y centros técnicos, otras instituciones no lucrativas y cualquier tipo de empresa.

Los citados instrumentos se pueden clasificar, según diferentes criterios, en relación a los tipos de políticas tecnológicas.

- *En función de los objetivos perseguidos* se pueden distinguir tres grandes grupos de medidas:

- Dirigidas a *fomentar a las empresas para que incorporen a sus funciones de producción innovaciones fundamentales* y también para estimular su aparición. Resultan importantes en los períodos de recesión económica cuando la inversión privada no está dispuesta a llevar a cabo innovaciones radicales. Estos instrumentos abarcan tanto apoyos financieros directos como otras medidas de tipo indirecto, sus efectos no aparecerán hasta el medio plazo.
- Encaminados a *mejorar la difusión de nuevas tecnologías existentes en los distintos sectores*. Pueden utilizarse con un mayor grado en aquellos mercados que supongan un monopolio estatal o privado y en los oligopolios o en sectores que no estén expuestos a la competencia internacional. Comprende desde ayudas directas a pequeñas empresas innovadoras, hasta apoyos generales a programas de información para la introducción de tecnologías específicas. También se pueden incluir en este grupo las medidas encaminadas a reducir aquellos “cuellos de botella” que pueden darse, por ejemplo, respecto al capital humano cuya falta de especialización impide a veces la rápida difusión de los nuevos sistemas tecnológicos.
- Utilizados para *mejorar la importación y difusión interna de tecnologías extranjeras* para asimilarla y mejorarla.

- *Instrumentos de intervención estratégicos e instrumentos tácticos:*

- Los *instrumentos estratégicos* tienen un horizonte a largo plazo y están relacionados con el estímulo para que puedan surgir nuevos sectores tecnológicos que induzcan a cambios radicales en la industria. Ejemplos de estos instrumentos son la financiación de proyectos a largo plazo, el capital riesgo para algunas empresas de tecnología avanzada, la financiación de programas tecnológicos nacionales que impliquen colaboración entre distintos agentes, etc.
- Los *instrumentos tácticos* están relacionados con la mejora del potencial innovador de las empresas existentes, de su productividad y calidad del producto. Normalmente tienen un bajo contenido político, a diferencia de los estratégicos. Como ejemplos tenemos la normalización y homologación de productos y procesos, esquemas de transferencias de tecnología, etc.

Las medidas para promocionar la generación y difusión tecnológica, que actualmente se están empleando son:

- *Formación de personal investigador*: La importancia del factor humano es determinante en los procesos de innovación y difusión de la tecnología, por tanto se han llevado a cabo actuaciones en dos niveles diferentes. Por un lado, a nivel general, la reforma de los sistemas de enseñanza superior, posibilitada por la aprobación de la Ley de Reforma Universitaria en 1983 y la actual revisión de los planes de estudios. Por otro lado, y ya dentro del Plan Nacional de Investigación, la aprobación y puesta en marcha de un Programa Nacional de Formación de Personal Investigador y la toma en consideración de la formación específica en cada uno de los planes y programas nacionales.

- *Investigación en centros públicos*: La política llevada a cabo por el Gobierno con relación a los centros públicos (organismos públicos de investigación, Universidades y empresas públicas) ha consistido en aumentar su dotación de recursos para que pudieran efectuar labores de investigación, a la vez que adoptar medidas para aumentar su coordinación, mejorar su funcionamiento y canalizar las actividades hacia las necesidades del país y del sistema productivo.

Este instrumento tiene su existencia más que justificada, ya que la participación pública en I+D es importante sobre todo en lo referente a la investigación básica, dado que estas actividades son las que entrañan mayor incertidumbre para las empresas privadas.

Junto con la educación, la formación y los sistemas de información, es la medida que mayores externalidades positivas y rentabilidad social presenta. Gracias a la actuación gubernamental se evita la duplicación competitiva de esfuerzos. Los resultados de dicho instrumento no son discriminatorios como ocurre con las ayudas financieras directas, ya que suele ser utilizado por todo el conjunto de actividades y agentes que forman el sistema productivo. No sucede lo mismo con las actividades llevadas a cabo por las empresas públicas, que sí comportan cierto grado de discriminación al competir en el mercado con empresas privadas, pero sin difundir sus conocimientos.

- *Cooperación en I+D*: Un fenómeno de creciente actualidad en el campo de la tecnología es la formación de acuerdos entre empresas para realizar proyectos de I+D. Esta cooperación se justifica por la necesidad de compartir riesgos y costes que pueden resultar importantes para una empresa aislada, de este modo puede competir mejor con otros países.

El sector público no es ajeno a este fenómeno, por diversos medios trata de facilitar el establecimiento de acuerdos entre empresas en materia de I+D a nivel nacional y supranacional, ya sea entre sí o incluyendo también a las Universidades y a los organismos públicos de investigación en estos acuerdos.

La colaboración Universidad-Empresa es un caso particular en esta cooperación en I+D, a través de la Universidad, el gobierno contribuye a las actividades de I+D de las empresas, mediante la formación de los trabajadores, la realización de proyectos de I+D o el asesoramiento y la formación de empresas innovadoras.

La creación de programas internacionales para que las empresas y otros agentes investigadores realicen proyectos de I+D, es otro tipo de cooperación favorecido por el poder público, por ejemplo dentro del marco de la UE.

- *Centros de innovación y parques tecnológicos*: Son instrumentos que se usan para desarrollar regionalmente empresas o sectores de alta tecnología, constituyen por lo tanto elementos de la política regional y son mucho más selectivos y discriminatorios que los que se planifican a nivel nacional.

- *Sistema de patentes*: Permite a las empresas que han generado una invención que se puedan beneficiar de ella en el mercado, al garantizarles durante un largo período de tiempo disfrutar de los beneficios de esa tecnología y de sus aplicaciones; se incentiva así la inversión en actividades de investigación y desarrollo en las empresas privadas. No obstante las patentes están en relación con la política de la competencia.

- *Sistema de información*: Tiene por objetivo facilitar el conocimiento por parte de los científicos y tecnólogos. Este instrumento se traduce en la constitución de una red interconectada de bases de datos, de bibliotecas, departamentos de asesorías de empresas, etc.

Además de estas intervenciones hay que considerar otros grupos de actuaciones que estimulan las actividades tecnológicas de las empresas, esto es, ayudas directas e indirectas. Las ayudas directas son apoyos financieros a las empresas a través de programas que estimulen las actividades tecnológicas reduciendo costes o suministrando recursos insuficientemente ofrecidos por el sistema financiero. Las indirectas consisten en la oferta por parte de los gobiernos de una desgravación fiscal variable de aquellos gastos que las empresas han realizado en I+D.

## 5. COMENTARIO

Como conclusión podemos afirmar, que para que una empresa pueda desarrollarse en el actual entorno global, debe intentar mantener su competitividad e incrementar y mejorar su posición competitiva. Uno de los factores fundamentales que determinan ésta es la capacidad de innovación; esto es, el modo de actuar de las empresas de forma dinámica, adaptándose y anticipándose a los continuos cambios del mercado. En gran medida, esta capacidad de innovación deriva por una parte de la cultura organizativa —siendo muchas las dificultades que se deben superar dentro de la organización para gestionar el cambio tecnológico— y, por otra, se basa en el acceso de la empresa a las innovaciones.

La innovación, en sus distintas manifestaciones -tecnológica, de gestión y social-, puede realizarse por dos vías: desarrollándose dentro de la propia empresa o adquiriéndola del exterior. El primer camino supone elevados costes en actividades de I+D y alto grado de incertidumbre y riesgo, además de ser lenta de cara a la obtención de resultados. La adquisición del exterior tiene como inconveniente la dependencia tecnológica de terceros, con lo que la empresa está a expensas de lo que suceda en su entorno, sin capacidad propia para la generación de conocimientos.

*En definitiva, lo que la empresa debe procurar para poder acometer el cambio es un consenso entre ambas vías de acceso; es decir, tiene que desarrollar sus propias innovaciones y debe adquirir del exterior aquello que no puede desarrollar por sí misma. Todo ello deberá ir acompa-*

ñado del consiguiente apoyo público para solventar los problemas que se le planteen respecto a la reducción del riesgo e incertidumbre y para que los esfuerzos realizados se vean compensados con los resultados obtenidos.

## 6. BIBLIOGRAFIA

BUENO CAMPOS, E.: *Innovación como factor de crecimiento:...PYMES C.A. de Cantabria*, Institución Cultural de Cantabria, 1989.

DE LA PUERTA, E.: *Crisis y mutación del "organismo" empresa*, *Economía Industrial*, nº 289, 1993.

DICHTER, S.F.; GAGNON, C.; ALEXANDER, A.: *El liderazgo en los procesos de cambio organizativo*, *Harvard-Deusto Business Review*, nº 58, 1993.

GARCIA ECHEVARRIA, S.; DEL VAL, T.: *Cultura corporativa y competitividad de la empresa española*, Díaz de Santos, Madrid, 1993.

MARTIN, C. y otros: *Política Industrial: Teoría y Práctica*, Círculo de Empresarios, Madrid, 1992.

MARTINEZ SANCHEZ, A.: *El cambio tecnológico y el Sector Público*, *ESIC MARKET*, nº 73, 1991.

MARTINEZ SANCHEZ, A.: *Las implicaciones organizativas de las nuevas tecnologías*, *Alta Dirección*, nº 159, 1991.

MARTINEZ SANCHEZ, A.: *Políticas Tecnológicas: evolución y criterios de actuación*, *ESIC MARKET*, nº 71, 1991.

MINTZBERG, H.: *Minzberg y la Dirección*, Díaz de Santos, Madrid, 1991.

NAVARRO ARANCEGUI, M.: *Política de promoción del cambio tecnológico en España*, *Estudios Empresariales*, nº 75, 1991.

PAVON MOROTE, J.; HIDALGO NUCHERA, A.: *Del Proyecto de Ley de Innovación Tecnológica a la Ley de Ciencia: análisis de un cambio de modelo*, *ESIC MARKET*, nº 71, 1991.

RODRIGUEZ CORTEZO, J.: *Plan de Actuación Tecnológico Industrial*, *Dirección y Progreso*, nº 116, 1991.

SAEZ, F.: *Cambio técnico, procesos productivos y factor trabajo*, *Economía Industrial*, nº 289, 1993.

URRUTIA, E.; VAZQUEZ, A.: *La organización innovativa*, *Estudios Empresariales*, nº 81, 1993.



# EL LIDERAZGO EN LAS EMPRESAS DE EXITO

## Diseño estratégico del comportamiento del empresario, para conseguir una organización exitosa

MIGUEL GONZÁLEZ SIMÓN

Departamento de Economía Industrial  
Universidad del País Vasco / E.H.U.

### INTRODUCCION

Los expertos del campo de la dirección de empresas han establecido una separación entre tres importantes tipos de actores:

- a) Empresario emprendedor (innovador, schumpeteriano).
- b) Empresario directivo (ejecutivo).
- c) Empresario líder (transaccional y/o transformador).

El *empresario emprendedor* es el que crea empresas, el “verdadero” empresario, con frecuencia el patrón, el propietario. Es capaz de detectar oportunidades y transformarlas en empresa.

El *empresario ejecutivo* es el que resuelve los problemas que se presentan en la vida de las empresas. El ejecutivo destaca por su capacidad para planear, presupuestar, organizar y controlar. Suele trabajar a sueldo en empresas que no ha fundado y que no son suyas.

El *empresario líder* es el que es capaz de generar una imagen futura de la situación de la empresa y arrastrar con él a todas las partes implicadas (trabajadores, directivos, accionistas, clientes, proveedores, banqueros, sindicatos, etc.) para hacer realidad la imagen. A esta imagen que crea el líder se le llama “visión”. El líder es capaz de obtener un resultado extraordinario a través de una motivación superior. A este último actor, el empresario-líder, dedicaremos este trabajo.

Ciertamente que las personas que nos encontramos en la vida real pueden ser simultáneamente ejecutivos, emprendedores y líderes y que por tanto puede no tener sentido práctico empeñarse en buscar las fronteras; sin embargo, su caracterización intelectual puede reportarnos alguna utilidad.

Es consustancial a un empresario-líder saber combinar los intereses de un conjunto de personas con una determinada tarea u objetivo, de forma que el conjunto se mueva hacia el objetivo común. Sin embargo, de los empresarios-emprendedores, se predicen dificultades para extender este efecto de liderazgo más allá de unos pocos colaboradores; incluso en muchos casos operan en soli-

tario o sin preocuparse de esa congruencia entre los objetivos de las personas y los de la organización que lideran.

Respecto al elemento tiempo, el *directivo* suele actuar en un horizonte temporal relativamente corto y rígido, con cada elemento de su trabajo claramente encajado en un calendario. El *líder* puede funcionar con otro sentido del tiempo, utilizándolo como uno de los elementos de su trabajo: ahora puede convenir la urgencia o casi la emergencia, luego puede convenir un ritmo lento. El *emprendedor* subordina el tiempo a la oportunidad.

Pero centrándonos ya en la figura del empresario-líder, afrontaremos la investigación de la naturaleza del liderazgo. ¿Qué significa ser líder?

## NATURALEZA DEL LIDERAZGO

Sin querer ser pretencioso daré una breve y personal definición de liderazgo: “*capacidad de influir sobre la conducta de otras personas, de modo persuasivo*”.

La anterior definición pone bien a las claras la relación del “liderazgo” con el concepto más amplio de “poder”. Y es que Max Weber definió el poder precisamente así: “capacidad de influir sobre la conducta de otras personas”. El liderazgo efectivo supone, pues, ante todo poder. Pero el poder puede tener muchas expresiones. Así, si yo pongo una pistola apuntando al pecho de mi compañero, puedo ejercer influencia sobre él; en este caso sería un poder coactivo. Pero obviamente existen otros tipos de poder muy diversos, como por ejemplo, el que puede ejercer un obispo a través de la lectura de una pastoral en todas las parroquias de su diócesis o el que puede ejercer un líder político arengando a su seguidores e influyendo claramente en sus conductas.

Cuando los súbditos aceptan de buen grado el poder, diremos que éste está legitimado. Max Weber distinguió tres fuentes de legitimidad del poder:

A) *Legitimidad legal o racional*: tiene por fundamento la creencia en la legalidad de los ordenamientos establecidos y en la de los títulos de quienes ejercen el dominio.

B) *Legitimidad tradicional*: se basa en la creencia en el carácter sagrado de las tradiciones en vigor y en la legitimidad de quienes son llamados en virtud de aquéllas al poder.

C) *Legitimidad carismática*: descansa sobre la sumisión de los súbditos al valor personal de un hombre, ya sea profeta, héroe o líder de cualquier tipo, que está dotado de cualidades extraordinarias.

La importancia de esta tipología proviene del carácter universal que le confiere Max Weber, en la posibilidad de su aplicación sociológica general. Este es, pues, el marco general del tratamiento weberiano del poder. Los sociólogos de la Organización y de la Empresa, parten de él para avanzar en el estudio de la estructura de poder.



Parece lógico pensar que en las organizaciones actuales, el tipo más habitual de legitimidad es la llamada por Weber racional; aunque también se encuentren los tipos tradicional y carismático. E incluso podamos encontrar organizaciones en las que predomina el poder coercitivo, sin apenas rastro de legitimación.

## **Análisis moderno de la estructura de poder en una organización empresarial.**

El análisis sociológico actual de las organizaciones, escoge como uno de los elementos clave de estudio, la “estructura de poder” existente. Efectivamente, toda organización para su supervivencia necesita de una estructura de poder. Y ésta, a su vez, puede clasificarse, en consonancia con los medios de control utilizados, en cinco tipos: poder coercitivo, poder utilitario, poder del cargo, poder de liderazgo y poder pericial<sup>1</sup>.

El primero consiste en el control basado en el empleo de medios físicos; es el poder basado en el castigo.

El poder utilitario se basa, al contrario del anterior, en el premio, que puede adoptar formas diversas: dinero, elogio, status, etc.

El poder del cargo se basa en el puesto que ostenta una persona; el subordinado le reconoce el derecho a darle directrices, dentro de un ámbito definido (la “zona de indiferencia” de Barnard). El poder en este caso, le viene al superior por el cargo que ocupa, más que por sus cualidades personales.

El poder de liderazgo, también llamado normativo-simbólico, contrasta con el anterior porque el asentimiento se expresa en base a la persona misma del superior, (y no en base al cargo). Cuando un individuo alcanza esta forma de poder decimos que es un líder.

El poder pericial, o saber de competencia profesional, confiere un potencial de influencia. No es casualidad que en estos casos digamos que alguien es “una autoridad en la materia”.

La mayoría de las organizaciones utilizan simultánea o sucesivamente una combinación de esta cinco clases de poder; si bien dando preferencia a algunas de ellas.

Ahora bien, un fenómeno importante que interesa resaltar, es que el uso de los distintos tipos de poder, entraña consecuencias diversas en lo tocante a las actitudes generadas en los miembros de la organización. Quiere esto decir que la respuesta psicológica de los individuos, tiende a corresponderse con el tipo de poder utilizado.

Graficamente podríamos representarlo del siguiente modo:

---

<sup>1</sup> French J. R.P.Jr. y Raven B.: “The bases of social power”. En D. Cartwright (ed): Studies in social power. Ann Arbor, MI: Institute for Social Research.

### Tipos de Estructura de poder

| TIPOS DE ACTITUD<br>↓ | COERCITIVO<br>(Castigos) | UTILITARIO<br>(Premios) | CARGO<br>(Puesto<br>ocupado) | LIDERAZGO<br>(Normativo-<br>Simbólico) | PERICIAL<br>(Saber<br>profesional) |
|-----------------------|--------------------------|-------------------------|------------------------------|--|------------------------------------|
| ALIENACIÓN            | X                        |                         |                              |  |                                    |
| CÁLCULO               |                          | X                       |                              |  |                                    |
| LEGITIMACIÓN          |                          |                         | X                            |  |                                    |
| IDENTIFICACIÓN        |                          |                         |                              | X                                      |                                    |
| ACEPTACIÓN            |                          |                         |                              |  | X                                  |

Fuente: Elaboración propia

Se produce, pues, una correspondencia entre la naturaleza de la estructura de poder de una organización y el estado anímico de sus miembros. La diagonal señala las coincidencias predominantes entre estructura de poder y mentalidad de los subordinados. Ello señalaría que los tipos de organización que forman la diagonal, “constituyen contratos psicológicos congruentes y operativos entre la organización y sus miembros; lo que éstos están dispuestos a darle está en consonancia con lo que reciben a modo de recompensa y con la clase de autoridad al uso”. Ejemplo: Si una organización utilitaria, como una empresa manufacturera, espera de sus trabajadores que les guste el trabajo y que se identifiquen con ella, puede que tal vez esté esperando recibir de ellos más de lo que les da.

En todo caso, no hacemos ningún juicio de valor acerca de cual sea el mejor tipo de poder a aplicar. La “eficacia” de uno u otro dependerá de diversas variables entre las que se encuentran: el tamaño de la organización, la tarea a realizar, los objetivos que se intentan conseguir, el tipo de personalidad de los miembros componentes y el entorno externo donde se ubica la organización. Además hay que tener en cuenta que, en la realidad, las organizaciones suelen reunir, en combinaciones distintas, los cinco tipos de poder descritos.

Si observamos el cuadro anterior, sólo un tipo de poder corresponde al verdadero liderazgo. El tipo de actitud que origina es la identificación. El poder de liderazgo se puede diferenciar teóricamente bien, respecto de los otros cuatro tipos. Así, por ejemplo, el liderazgo es un asentimiento que se produce no en base al cargo que se ocupa, sino en base a la persona misma del superior. Y aunque el liderazgo suele implicar la capacidad real de premiar y/o castigar, no gira realmente alrededor de esa capacidad.

¿Cómo se produce la identificación?. Todo parece indicar que un individuo se constituye en líder, cuando quienes le rodean —subordinados o seguidores potenciales— perciben en él la pre-

sencia de ciertas cualidades que despiertan su confianza. (Subrayamos el término “perciben” porque las posibilidades de manipulación psicológica están más que demostradas).

Estas cualidades dependen, en cierto modo, de las circunstancias: no son las mismas en el cabecilla de un movimiento obrero violento, en un jefe militar, o en un directivo de empresa.

Sin embargo, podemos generalizar que los subordinados han de confiar en que el líder es capaz de resolver los problemas que les atañen y de dar satisfacción a sus necesidades.

Esta confianza implica, a su vez, que los seguidores o subordinados han de percibir en el líder una voluntad de servicio, o sea, la intención positiva de tener en cuenta el bien de ellos. Sin embargo, la historia nos muestra múltiples ejemplos, de que el líder puede manipular de tal modo las motivaciones de sus seguidores, que éstos den por supuesto en él una voluntad de servicio que es pura farsa.

Esta forma de poder puede acompañar -y frecuentemente acompaña- al poder basado en el cargo. Cuando sucede así, el poder del cargo (*authority of position*) se refuerza con el poder personal del líder (*authority of leadership*). Entonces decimos que el superior “se ha ganado el mando”. Cuando pasa ésto, el superior puede pedir a sus subordinados esfuerzos que superan los límites de la “zona de indiferencia”, ya que esta zona se ha ampliado por la confianza depositada en aquél. Esta observación nos permite ver la intersección entre diversas formas de poder.

De todo lo dicho se deduce, que si un empresario está interesado en que sus trabajadores sean creativos en el taller o en la oficina, que se identifiquen con la empresa, que sean capaces de sacrificarse por ella (si se está pasando una mala racha), en definitiva, tengan los trabajadores un íntimo compromiso con, por y para la empresa, la utilización del poder “utilitario” (sueldos, mejoras, promoción,...) no es suficiente. Se deben utilizar otros tipos de poder, y el poder del liderazgo aparece como especialmente relevante.

No obstante, la utilización del poder normativo-simbólico (liderazgo) en la empresa, con la generación de tipos de actitud de “identificación” en los trabajadores, tal como nos indica el cuadro anterior, no debe suponerse que sea condición indispensable para que una empresa pueda funcionar exitosamente.

## **DIMENSIONES BASICAS DEL LIDERAZGO**

Diversos investigadores han analizado aquellas cosas que hay que hacer, o aquellas actividades que hay que llevar a cabo, para que un grupo organizacional funcione.

¿Cuáles son las funciones esenciales de liderazgo que deben darse en un grupo empresarial, para que éste pueda llevar a cabo sus objetivos?

Fundamentalmente son dos:

- 1.- Funciones relacionadas con la tarea (task-oriented), u orientado hacia la acción.
- 2.- Funciones relacionadas con el mantenimiento (human-oriented), u orientado hacia las personas.

*Las funciones relacionadas con la tarea*, son aquellas actividades encaminadas a lograr la consecución de los objetivos que se ha propuesto el grupo; como son clarificar temas, resumir lo tratado, proponer ideas, sugerir maneras de actuar, delimitar la metodología a seguir, aportar datos, coordinar las ideas propuestas por los miembros del grupo. Cuando esta función es la que predomina en la organización, estaremos en una situación en ciertos aspectos coincidente con el llamado mando autoritario, donde el poder y la fuente de la iniciativa se halla en la cabeza de la organización y donde los aspectos de tipo convivencial son pospuestos, en cierto modo, a los de disciplina y eficacia<sup>3</sup>.

*Las funciones relacionadas con el mantenimiento*, son las actividades encaminadas a que el grupo mejore y se refuerce, a que la tensión de las relaciones se mantenga en unos límites aceptables, a que se solucionen los problemas internos del grupo. En conjunto, se busca el equilibrio, el bienestar psico-social del grupo como tal y de cada uno de los miembros en particular. Esto se puede lograr a través de dar la oportunidad, a los que mantienen una postura minoritaria, a que se les escuche; a mediar en los conflictos interpersonales; a que se expliciten los sentimientos de los miembros; a que todos tengan la oportunidad de exponer sus puntos de vista, es decir, equilibrar el tiempo de intervención de tal manera que no haya “acaparadores” y “oyentes pasivos”; a que no haya interrupciones continuas; a mantener la comunicación siempre abierta; a que se pongan sobre la mesa las agendas ocultas. Los problemas de eficacia y disciplina ceden aquí un poco el puesto a los convivenciales. Su actitud hacia los subordinados no se basa exclusivamente en criterios de eficacia en el trabajo, sino que está más orientada hacia una promoción humana de tipo individual.

Las preguntas que suelen formular los directores al hablar de las funciones de liderazgo son muchas. Por ejemplo: ¿son necesarias las dos funciones, de tarea y mantenimiento? ¿Cómo se puede formar a las personas en este liderazgo? ¿Puede una sola persona ejercer las dos funciones? ¿Qué debe hacer un grupo, solucionar primero la tarea o intentar dar salida a los conflictos psico-sociológicos?, es decir, ¿es primero la función de tarea o la función de mantenimiento?

Diferentes autores han dado diversas respuestas a esas preguntas. No obstante, la opinión mayoritaria sostiene que no es necesario el establecer una secuencia temporal entre tarea y mantenimiento; ambos se dan al mismo tiempo; lo que hay que saber es darles solución oportuna, cuando surgen dificultades en uno u otro aspecto.

Parece claro que la ignorancia de la función de mantenimiento, redundará en un mal funcionamiento grupal y, por lo mismo, en un mal tratamiento de la tarea.

*Respecto a si una misma persona puede ser líder de tarea y de mantenimiento* o se deben separar ambas funciones, muchos autores, (aunque no hay consenso), opinan lo siguiente:

---

<sup>3</sup> El asimilar “función relacionada con la tarea” y “mando autoritario” es bastante frecuente en la literatura. Ver por ejemplo, Manuel Peña Baztán, pag. 257. Sin embargo, personalmente, creo que son dos conceptos claramente diferenciados y que no se gana sino que se pierde mucha precisión y poder de análisis al indiferenciarlos.

Lo más probable es que no ejerza una misma persona las dos funciones de liderazgo indicadas, sino que se repartan entre varios miembros del grupo. Cuando un director se reúne con su grupo es fácil que no pueda realizar las dos funciones a la vez; probablemente sea especialista en una cosa y no en otra. Idealmente un director deberá ser especialista en ambas. Hay estudios que demuestran que los grandes líderes son aquellos que poseen la capacidad para ambas funciones de liderazgo. Sin embargo, normalmente no es así.

Por lo tanto:

- a) Un director debe saber en qué función es fuerte y en cuál es débil.
- b) Un director no debe impedir, sino potenciar que otros miembros del grupo ejerzan las funciones para las que él no está dotado.

Lo más conveniente, en el caso de que el director no pueda ejercer ambas funciones es, según la literatura convencional, que el líder sea de tarea o intelectual y que otra persona o personas, ejerzan la función de liderazgo social (o de mantenimiento).

El tipo de habilidades requeridas para el ejercicio de una u otra función son distintas.

#### *Habilidad para la tarea:*

El liderazgo de tarea está muy ligado a la capacidad que se puede llamar “intelectual”, es decir, a la habilidad para definir, analizar, resumir, proponer caminos de solución, crear sugerencias nuevas, mantener al grupo dentro de los límites del problema que se trata, proponer la metodología adecuada, aportar datos, exigir precisión en las aportaciones, saber explicitar los pros y contras de cada intervención.

¿Se pueden aprender estas destrezas? Hemos indicado anteriormente, que tienen que ver con la inteligencia, y la experiencia demuestra que no es fácil formar en la “inteligencia”. Sin embargo, sí hay técnicas que se pueden aprender, como por ejemplo:

- a) Preparar las reuniones y definir bien los problemas a tratar; delimitar con claridad el campo de discusión.
- b) Preparar una metodología adecuada de trabajo para proponérsela al grupo.
- c) Habilidad para resumir las distintas aportaciones, etc.

#### *Habilidad para el mantenimiento:*

La función de mantenimiento está relacionada con la sensibilidad psicológica, o capacidad social para percibir los estados emocionales, no estrictamente racionales del grupo.

Si ha habido en los últimos años ofertas de cursos para la formación de líderes, éstas se han centrado fundamentalmente en el campo psico-social. Han proliferado los cursos de dinámica de grupos para directivos, sobre cómo dirigir en participación, tomas de decisión, resolución de con-

flictos, relaciones interpersonales, relaciones humanas, todas ellas para potenciar la función de mantenimiento, es decir, para dominar las técnicas del proceso grupal.

Ciertamente estas habilidades se pueden aprender. Y que los directores dominen la técnica del comportamiento grupal es importante; aunque sólo sea por el hecho de que tienen que dedicar muchas horas a las reuniones grupales.

Sin embargo con ello *no queremos decir* que el mejor método de dirección, sea el que usa siempre el grupo como centro de la actividad gerencial.

EL MODELO DE HERSEY Y BLANCHARD SOBRE EL LIDERAZGO

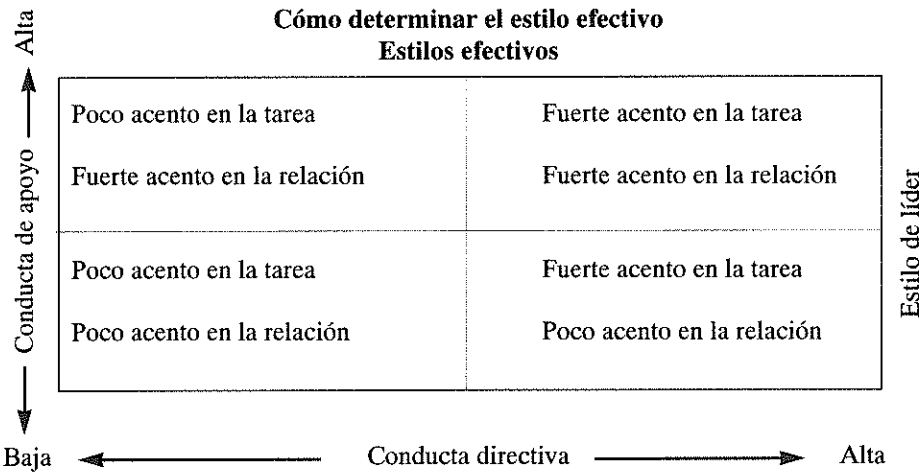
Entre los diversos modelos existentes sobre el liderazgo, el de Hersey y Blanchard es actualmente el de mayor aplicación empresarial.

Este modelo parte de la idea de que el estilo directivo a aplicar no es lineal, sino que corresponde más bien a una función curvilínea. Hersey y Blanchard la denominan liderazgo situacional.

En la actuación del líder se distinguen dos dimensiones; que anteriormente han quedado ya bien explicitadas:

- 1.- La capacidad de guiar y dirigir que dispone un líder (“task behavior”).
- 2.- La capacidad del líder para proporcionar un soporte socio-emocional (“relationship behavior”).

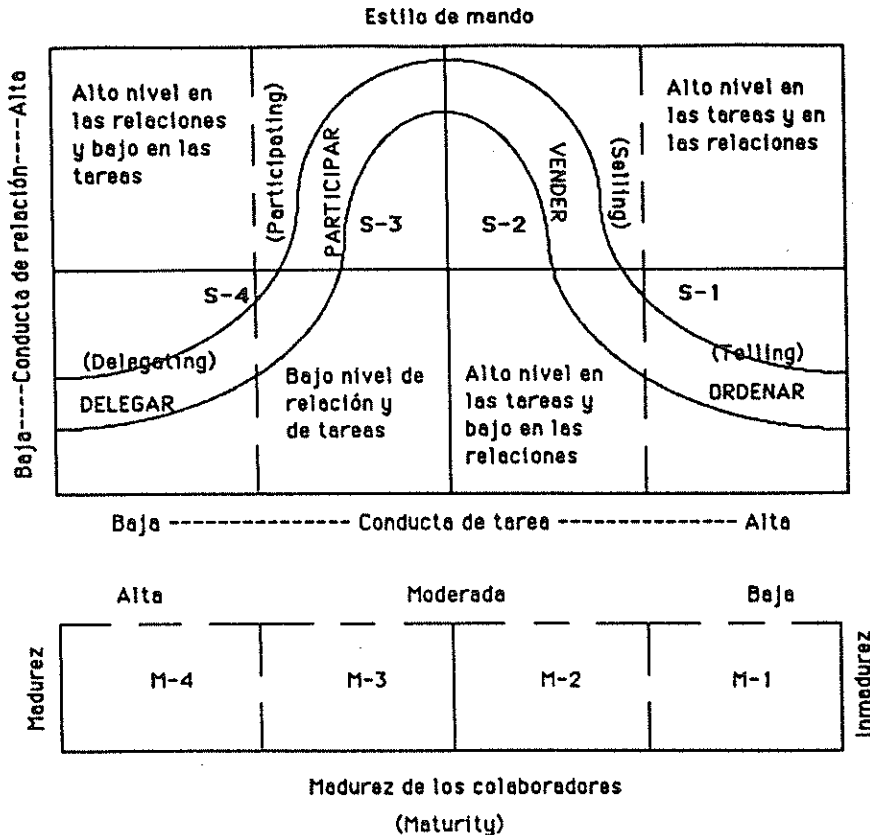
Estas dos clases de conducta, según los autores, pueden combinarse en proporciones distintas en la actuación del líder. Según el modo en que se combinen, nos dan cuatro pautas o estilos de mando. Véase cuadro siguiente:



Hersey y Blanchard hacen depender el estilo de liderazgo apropiado de la *madurez del subordinado*. Este factor puede definirse como la *responsabilidad* de dirigir el propio comportamiento, en relación con una tarea específica a llevar a cabo. La “madurez” incluye, tanto la *capacidad* del subordinado para desempeñar el puesto, como su *motivación* para el mismo.

Según los autores, los individuos y los grupos, en cierto modo, no son maduros o inmaduros en un sentido absoluto. Toda persona tiende a ser más o menos madura en función de una tarea específica o conjunto de objetivos, que su jefe pretende realizar o conseguir a través de sus esfuerzos. Así, un vendedor puede resultar muy responsable en cuanto a conseguir nuevas ventas, pero muy descuidado respecto al papeleo que conlleva dicha venta. Como consecuencia, su jefe puede dejarle vender sin prácticamente supervisión, pero debe controlarlo estrechamente respecto a su trabajo administrativo.

No existe, pues, una fórmula maestra para influir en las personas. El estilo de dirección que un líder puede utilizar con individuos o grupos, depende, como se ha dicho, del nivel de madurez de los colaboradores, tal como ilustra el gráfico siguiente:



Cada uno de los cuatro estilos directivos (ordenativo, comercial, participativo y delegativo), es una combinación del elemento tarea y del elemento relación. El razonamiento de los autores, expresado sintéticamente, es el siguiente:

A) Ordenar (“Telling”) resulta apropiado para las cotas bajas de madurez. Colaboradores incapaces y que no están dispuestos a tomar responsabilidades. Son incompetentes e inseguros. En este caso, el estilo directivo S-1 resulta apropiado: órdenes claras y específicas, diciendo qué, cómo, cuándo y dónde han de efectuarse los distintos trabajos; supervisando tareas, etc.

Un comportamiento excesivamente tolerante con las personas de este bajo nivel de madurez, corre el riesgo de ser percibido como blando, permisivo e incluso gratificador de una actuación en realidad pobre. No obstante, el superior deberá expresar su satisfacción al subordinado tan pronto como observe un rendimiento positivo en éste. El elogio bien administrado contribuirá a aumentar la propia estima del subordinado y lo motivará a superarse. Estilo Directivo: Control.

B) El estilo comercial (“Selling”) es aplicable para las personas de madurez baja moderada. Personas incapaces, pero con voluntad (M-2). El estilo S-2 presta soporte para compensar la falta de habilidad, a la vez que trata, con la adecuada relación, de reforzar la voluntad y el entusiasmo del colaborador. Este estilo se llama “comercial” porque a través del diálogo y la explicación, el jefe trata de llevar a sus colaboradores psicológicamente hacia las conductas deseadas, lo cual consigue si les presta ayuda y los dirige. Hay, respecto a la fase anterior, una mayor conducta de apoyo hacia el subordinado, manteniendo la dosis de conducta directiva. Estilo Entrenador : Supervisión.

C) Participar (“Participating”), es el estilo apropiado para una madurez alta y moderada. Los colaboradores de este grupo tienen capacidad, pero poca disposición a colaborar, generalmente como resultado de su falta de confianza e inseguridad. El jefe precisa abrir la puerta del diálogo y saber escuchar, para apoyar los esfuerzos de sus colaboradores, para usar de sus capacidades. Es, pues, preciso un estilo de apoyo no sólo directivo, sino participativo (S-3). Estilo de Apoyo: Asesoramiento.

D) Delegar (“Delegating”), resulta aplicable para los niveles altos de madurez, que se suma a una buena capacidad y disposición para tomar responsabilidades. Es un estilo (S-4) que facilita poca dirección y ayuda. El jefe identifica normalmente el problema, pero la responsabilidad de conseguir los objetivos se otorga a estos colaboradores maduros, que deciden cómo, cuándo y dónde. El subordinado, en cierto modo, se vale por sí mismo y se puede delegar en él, con un apoyo y control mínimos. Estilo delegador: Delegación.

Hersey y Blanchard califican a su modelo como *teoría del ciclo vital* y trazan una analogía entre las relaciones líder-seguidor y las del padre-hijo. Lo mismo que los padres van cediendo control, como consecuencia de la creciente madurez de sus hijos, también los líderes deben compartir más su poder de toma de decisiones, a medida que sus subordinados adquieren mayor experiencia en su trabajo y se comprometen más en su tarea.

Tampoco hay ninguna razón para que un líder no pueda adoptar una postura “delegativa” con un subordinado y otra de “ordenar” con otro, si ambos se encontraran situados en los extremos opuestos del espectro de la madurez, (estilo de mando *adaptativo*).



En el modelo se analiza una sola dimensión: el nivel de madurez de los subordinados. Intuitivamente, parece razonable esperar que la eficacia de los métodos de compartir el poder, como la “participación” o la “delegación”, se rija por factores adicionales, como la naturaleza del problema por resolver e incluso, quizá, las tradiciones de la empresa en que ha de producirse la decisión.

Aunque Hersey-Blanchard definen la madurez de los subordinados relacionándola con el trabajo de grupo, sus análisis no reconocen expresamente que los grupos pueden tener “múltiples madureces”, dependiendo de las exigencias externas, los requisitos del papel que ha de desempeñar, los trabajos que hay que realizar y la información disponible.

Otra de las limitaciones del modelo es no tener suficiente número de investigaciones que lo respalden y que serían necesarias para validar el modelo en su conjunto o sus componentes. Para ello sería necesario clarificar, tanto conceptual como operativamente, el significado preciso de los términos utilizados en el modelo, especialmente el de la madurez de los subordinados. Tales términos nos hacen evocar imágenes muy definidas, pero que pueden variar de forma considerable de una a otra persona.

## ALGUNAS CONSIDERACIONES FINALES

Hoy en día, en el campo de la Empresa, está de moda hablar de la cultura. Toda organización posee su propia cultura. Y hace ya algunos años, Schein concluyó que la función única y esencial del liderazgo es el manejo de la cultura.

El peso del líder fundador en la formación de la cultura organizativa es decisivo, al nacer la empresa. Pero también es importante posteriormente, en el transcurso del tiempo.

Peters y Waterman, al analizar las empresas mejor gestionadas, observan como la cultura en cada una de esas organizaciones puede dividirse en dos partes bien diferenciadas:

a) Un núcleo cultural, relativamente pequeño, compuesto de una serie de pautas, valores y símbolos que se tienen como esenciales y que gozan de gran estima. Es un núcleo “sagrado” que debe ser aceptado por todos y cada uno de los miembros de la organización. Tal núcleo cultural proporciona la marca, la impronta, las señas de identidad de la organización.

b) Una periferia cultural, mucho más extensa, en la que se encuentran elementos culturales mucho más flexibles que abogan por la propia iniciativa de los individuos, la creatividad, la reinterpretación de los valores y pautas acomodándolos a los tiempos y circunstancias, etc<sup>3</sup>.

---

<sup>3</sup> Esta dicotomía cultural es, a mi entender, propia de organizaciones eficientes y está suficientemente expresada en los autores citados. Ver, Peters Thomas J. y Waterman Robert H.: “En busca de la Excelencia”, Ed. Folio, pags. 17, 29, 88, 93-98, 109, 118, 258, 322, 326, 328, 329 y capítulo 12.

Clarificar el sistema de valores e infundirle vida son las mayores aportaciones que puede hacer un líder empresarial. En situaciones estables el líder debe contribuir a mantener la llama viva del núcleo cultural organizacional, es decir, reforzar los elementos centrales de la cultura de la empresa<sup>4</sup>. En los tiempos turbulentos, y este puede ser el caso para muchas de nuestras organizaciones actuales, se necesitan por el contrario, fuertes cambios en la propia cultura de la organización empresarial, para poder así adaptarse exitosamente a las transformaciones experimentadas por los entornos externo e interno. Ahora bien, esos cambios generan incertidumbre, ansiedad, perdedores y ganadores. Se requiere, para tal labor, la presencia de líderes transformadores, líderes carismáticos, cuya presencia en múltiples organizaciones debiera de ser impulsada<sup>5</sup>.

Así pues, el fenómeno del liderazgo en la empresa parece estar ligado, por su naturaleza, al tema del “poder” y, por su finalidad, al tema de la cultura organizativa. El moderno análisis de la cultura empresarial gana cada vez más adeptos en el mundo científico. Pues bien, el papel del empresario-líder en ese mundo cultural aparece cada vez como más relevante. En la tipología “liderazgo transaccional-liderazgo transformador” se vislumbran las distintas aportaciones que los líderes pueden hacer a la cultura de la empresa. El análisis progresivo de ésta y el estudio operativo de conceptos como el de “carisma” resultan muy prometedores.

## BIBLIOGRAFIA

Bernard Bass: “Leadership and Performance beyoud Expectations”. The Free Press. Nueva York, 1985.

Díez de Castro Luis y García-Gutierrez Fdez Carlos: “La formación del Empresario”, en “Papeles de Economía”, nº 39, 1989.

Drucker Peter: “La innovación y el empresario innovador”. Ed. Edhasa. Barcelona 1991.

Kotter John P.: “El factor liderazgo”. Ed. Díaz de Santos. Madrid, 1989.

Wroom Victor H. Jago Arthur G.: “El nuevo liderazgo” Ed. Díaz de Santos. Madrid 1990.

---

<sup>4</sup> Tal función correspondería al liderazgo transaccional, en la tipología acuñada por Bernad Bass y en oposición al liderazgo transformador. Esta función no aparece en el tramo final del modelo de Hersey y Blanchard, donde “delegar” aparece casi como sinónimo de desentenderse de la marcha de la organización.

<sup>5</sup> La figura de líder transformador o carismático está bien estudiada en, Bernard Bass: “Leadership and Performance beyoud Expectations”. The Free Press, Nueva York, 1985. Un resumen puede encontrarse en J.M. Rodríguez Porras, Capítulo 10, donde se hace referencia al concepto original de “carisma” en Max Weber como opuesto a “rutinización”. Por otro lado, según John P. Kotter, las funciones del líder se relacionarán con tres grandes retos en las organizaciones: 1) Desarrollar todo el potencial humano y organizativo (“madurez” en el modelo de Hersey y Blanchard. 2) Tratamiento del conflicto (encontrar cauces adecuados a su tratamiento: el 85% de las decisiones en las organizaciones son de tipo “ganar-ganar” y el 15% “ganar-perder”). 3) No dejar que la organización se anquilose, cómo manejar el cambio, ante la complejidad del entorno externo e interno a la organización.

# PLANIFICACION DE PERSONAL EN UN CENTRO DE MARKETING TELEFONICO

DRA. SUSANA LÓPEZ ARES  
DR. ISIDRO SÁNCHEZ ALVAREZ

Fac. de C.C. Económicas y Empresariales  
Universidad de Oviedo

## 1. INTRODUCCION

El sector de marketing telefónico en España está alcanzando su época de madurez. Esta se caracterizará, previsiblemente, por una reducción en los niveles de crecimiento, por la existencia de una cierta saturación en el mercado, la utilización por parte de las empresas líderes de estrategias con el objeto de mantener sus cuotas de mercado y por la innovación en productos y servicios. En este periodo las inversiones irán dirigidas a la reducción de costes, a alcanzar la eficiencia en el funcionamiento cotidiano, la racionalización y la rentabilidad. Este hecho llevará a que las decisiones que deban ser tomadas en la empresa deban ser tales que le permitan alcanzar un funcionamiento óptimo.

Andrews, B; Parsons, H. y Quinn, P. (1991) clasifican estas decisiones teniendo en cuenta su horizonte temporal en decisiones a largo, a medio y a corto plazo. Las primeras hacen referencia a la localización y adquisición de los edificios y equipos que permitan llevar a cabo la actividad de la empresa, así como la determinación del número de líneas telefónicas que deben ser asignadas. La determinación del número de operadores que deben ser contratados y formados será una decisión que afectará en el medio plazo, mientras que la gestión de personal lo hará en el corto.

En este trabajo nos planteamos la construcción de un modelo matemático que permita a la empresa determinar el número de agentes que deben ser asignados a una campaña de marketing telefónico de tal forma que se suministre un servicio eficiente al cliente, es decir realizar la gestión de personal a corto plazo. Ello se hará de tal forma que no haya un exceso ni de servidores para la demanda de servicio existente ni de demanda para el número de agentes asignado, ya que un exceso en el número de operadores supondría que estos permaneciesen un periodo importante de su jornada laboral desocupados incurriendo, por tanto, la empresa en unos costes de personal innecesarios, por el contrario, un número de agentes insuficiente llevará a que un porcentaje de clientes no despreciable, o bien, permanecerán unos periodos de tiempo elevados en la línea de espera para recibir el servicio, o bien, no podrán entrar en el sistema al encontrarse todas las posiciones de la misma ocupadas. Este hecho le supondrá a la empresa no solo una posible pérdida de imagen ante sus clientes sino también unos elevados costes telefónicos en relación con el número de clientes atendidos.

Para alcanzar este objetivo deberán seguirse tres etapas: en primer lugar, habrá que determinar los requerimientos de personal para los diferentes periodos del día, en segundo lugar, el núme-

ro de agentes que deben ser contratados a la semana así como los turnos y horarios de trabajo y, por último, la asignación de cada agente en particular a un turno en concreto en la programación realizada.

Para establecer el número de agentes necesarios en cada uno de los diferentes periodos del día se considerará el sistema como un fenómeno de espera, al existir unos clientes que desean recibir un servicio a través del teléfono, adquirir un producto o recibir una información, y unos agentes cuya función es atender esas llamadas, de tal forma que si en el instante de su llegada todos los servidores están ocupados entrarán a formar parte de una línea de espera. La discusión de este problema podemos encontrarla en Hoffman, K. y Harris, C. (1986), Mok, S y Shanthikumar, J. (1987), Harris, C., Hoffman, K. y Saunders, P. (1987), Andrews, B. y Parsons, H. (1989, 1993), Agnihotri, S. y Taylor, P. (1991) y Quinn, P., Andrews, B. y Parsons, H. (1991).

Una vez que ha sido alcanzada la primera etapa se plantea la necesidad de determinar el número de operadores telefónicos necesarios de tal forma que se satisfagan las necesidades anteriormente establecidas, para ello se construirá un modelo optimización que permita a la empresa establecer el número de agentes que deben ser contratados a la semana, los turnos existentes y el número de servidores que deben ser asignados a cada uno de ellos, minimizando el coste de personal y cubriendo los requerimientos establecidos con anterioridad. Este problema ya ha sido tratado en Dantzig, G., (1954), Segal, M. (1974), Henderson, W. y Berry, W. (1976), Gaballa, A. y Pearce, W. (1979) y Andrews, B. y Parsons, H. (1989).

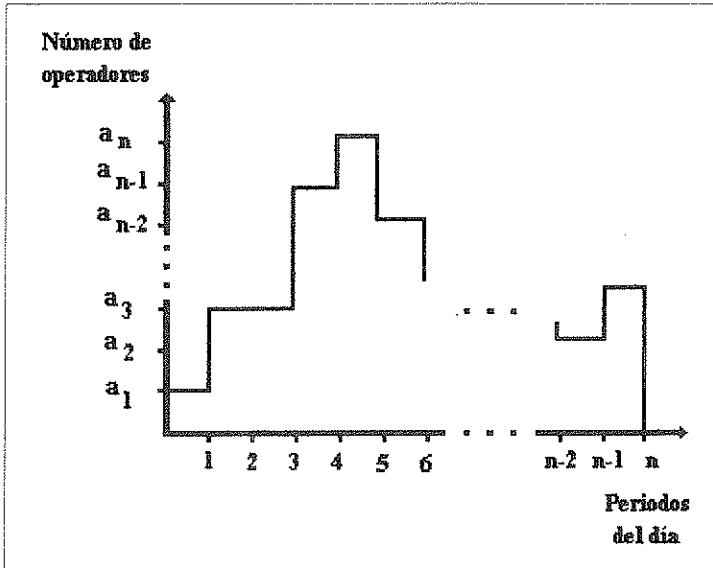
Conocidos el número de agentes y los turnos existentes, ya solo resta el asignar cada uno de los operadores a cada uno de los turnos existentes, para alcanzar el objetivo propuesto.

En nuestro trabajo nos centraremos en la segunda de las etapas establecidas, es decir, una vez que han sido determinados los requerimientos de personal a las distintas horas del día establecer el número de agentes a contratar y la asignación de los mismos a los turnos existentes.

## **2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA**

Para la construcción del modelo que permita a la empresa alcanzar el objetivo fijado será necesario establecer, en primer lugar, los criterios seguidos por la empresa a la hora de concretar la jornada laboral de un operario telefónico. Para ello se fijarán: la duración mínima y máxima de la misma, diaria y semanalmente, instantes en que comienzan y finalizan las sesiones de trabajo en cada uno de los días de la semana y en el caso de que los trabajadores lo sean a jornada partida el intervalo de tiempo disponible para comer. En segundo lugar, supondremos que se conoce el número de agentes necesarios en cada uno de los periodos en los que la demanda de servicio es estacionaria. La Figura 1 representa el número de operadores telefónicos necesarios () en cada uno de los intervalos existentes entre el momento en que la empresa comienza a suministrar el servicio y el instante en que se deja de atender llamadas.

**Figura 1. Número de operadores asignados a los diferentes periodos del día en función de la demanda de servicio existente**



**Fuente:** Elaboración propia

Para resolver el problema planteado en la literatura existente se plantean varias soluciones posibles, Dantzig, G. (1954) y Segal, M. (1974) construyen un modelo de programación lineal entera, que permite determinar el número de agentes que deberán ser contratados diariamente y la asignación de cada operario a cada turno diario existente de tal forma que se minimicen los costes de personal y se cubra la demanda de servidores. La diferencia existente entre los dos trabajos citados viene dada por que en el segundo de ellos se considera posible el hecho de que los agentes tengan un tiempo disponible para comer situación que no se contempla en el primero.

El trabajo realizado por los dos autores mencionados es completado por Gaballa, A. y Pearce, W. (1979). En este caso, se construyen dos modelos de programación lineal entera, el primero de ellos es similar a los anteriores salvo que en este caso se minimiza no una función de costes sino el número de agentes que deben ser asignados cada día de la semana; por lo que se refiere al segundo, se determina el número mínimo de personas que deben ser contratadas a la semana una vez que se han fijado las necesidades diarias a partir del modelo anterior.

Sin embargo ninguno de los modelos considerados podrá ser utilizado en el sistema que tratamos de analizar ya que: en primer lugar, en los anteriores se supone que es conocido el número de horas que dura la jornada diaria de trabajo de un agente telefónico, mientras que en nuestro caso úni-

camente se conoce la duración mínima y máxima permitida por el convenio; en segundo lugar, en este caso las necesidades de personal dependen no solamente de los diferentes periodos del día sino también del día de la semana considerado, supuesto no incluido en los trabajos anteriores. Como consecuencia, los condicionamientos de los turnos diarios requieren la consideración de las limitaciones semanales y viceversa, dando lugar a una interrelación de restricciones horarias que suponen la necesidad de plantear los mismos en un único modelo de optimización que considere a su vez las limitaciones horarias semanales y los requerimientos de los turnos diarios.

### 3. FORMULACION DEL PROBLEMA

En el modelo construido se parte de las siguientes hipótesis:

- 1.- El servicio es suministrado por la empresa los siete días de la semana.
- 2.- Los trabajadores contratados trabajaran cinco días seguidos de los siete disponibles a la semana.
- 3.- Las necesidades de personal dependen no sólo del periodo del día sino también del día de la semana considerado, razón por la cual los turnos dependerán de las dos variables mencionadas.
- 4.- Se considera la posibilidad de que los trabajadores con jornada partida dispongan de un periodo de tiempo para comer, existiendo varios turnos con dicho fin. Se supone que los trabajadores de un mismo turno disponen del mismo tiempo para ello.

#### 3.1 Definición de variables

$D \rightarrow$  Número de trabajadores que empiezan a trabajar el día de la semana  $D$ . Donde  $D=1,2,\dots, 7$  (1=Lunes, 2=Martes,...).

$d_i \rightarrow$  Número de trabajadores que el día  $d$  entran a trabajar a la hora  $i$ . Donde  $d=1,2,\dots,7$  (1=Lunes, 2=Martes,...) e  $i=1,2,\dots,n$

$ds_{i,j} \rightarrow$  Número de trabajadores que habiendo entrado a trabajar a la hora  $i$  salen a la  $j$ . Donde  $j=1,2,\dots,m$ .

$dc_{i,j} \rightarrow$  Número de trabajadores que habiendo entrado a trabajar a la hora  $i$  salen a comer a la  $k$ . Donde  $k=1,2,\dots,r$ .

$\alpha_{i,d} \rightarrow$  Número de trabajadores necesarios el día  $d$  a la hora  $i$ .

$d_{i,d} \rightarrow$  Número máximo de horas que trabajan los operarios que el día  $d$  entran a la hora  $i$ .

$c_i \rightarrow$  Número de horas de las que disponen para comer los trabajadores del turno  $i$ .

$hd_iD \rightarrow$  Número de horas que trabajan el día  $d$  los trabajadores que entran a la hora  $i$  habiendo empezado a trabajar el día  $D$ .

$d_iD \rightarrow$  Número de trabajadores que entran a trabajar a la hora  $i$  el día  $d$  habiendo empezado a trabajar el día  $D$ .

### 3.2 Función objetivo

En este caso se pretende minimizar el número de trabajadores que se contratan a la semana, o lo que es lo mismo, la suma de los operadores telefónicos que empiezan a trabajar cada uno de los siete días de la misma.

$$\text{Min } z = \sum_{D=1}^7 D$$

### 3.3 Restricciones

En el modelo planteado podemos diferenciar cuatro tipos de restricciones:

a.- Restricciones que permiten asignar las personas que trabajan cada día a cada uno de los turnos existentes.

$$\sum_{i=1}^7 d_i - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m ds_{i,j} - \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^r dc_{i,k} \geq a_i, d \quad \forall d / d = 1, 2, \dots, 7$$

$$d_i - \sum_{j=1}^m ds_{i,j} = 0 \quad \begin{array}{l} \forall i / i = 1, 2, \dots, n \\ \forall d / d = 1, 2, \dots, 7 \end{array}$$

$$d_i - \sum_{k=1}^r dc_{i,k} - \sum_{j=1}^m ds_{i,j} = 0 \quad \begin{array}{l} \forall i / i = 1, 2, \dots, n \\ \forall d / d = 1, 2, \dots, 7 \end{array}$$

b.- Restricciones que permiten igualar el número total de trabajadores que trabajan el día  $d$  con los que han empezado a hacerlo los cinco días anteriores.

$$\sum_{i=1}^n d_i - \sum_{D=d-5}^d D = 0 \quad \forall d / d = 1, 2, \dots, 7$$

c.- Restricciones que permiten determinar el número de horas que trabajan el día  $d$  los operarios que empiezan a la hora  $i$  habiendo comenzado su turno semanal el día  $D$  de tal forma que no se sobrepase el número máximo que establece el convenio.

$$(b_{i,d} + c_i)d_i - \sum_{j=1}^m (m-j)ds_{i,j} - c_i \sum_{k=1}^r dci_{i,k} - \sum_{D=d-5}^d hdiD = 0 \quad \begin{matrix} \forall i / i = 1, 2, \dots, n \\ \forall d / d = 1, 2, \dots, 7 \end{matrix}$$

d.- Por último se introducen dos tipos de restricciones encaminadas a evitar que un operario sea asignado el mismo día a dos turnos diferentes.

$$\sum_{i=1}^n diD - D = 0 \quad \begin{matrix} \forall D / D = d-5, d-4, \dots, d \\ \forall d / d = 1, 2, \dots, 7 \end{matrix}$$

$$hdiD - di, adiD \leq 0 \quad \begin{matrix} \forall i / i = 1, 2, \dots, n \\ \forall D / D = d-5, d-4, \dots, d \\ \forall d / d = 1, 2, \dots, 7 \end{matrix}$$

#### 4. APLICACION DEL MODELO

Este modelo ha sido aplicado a una campaña de marketing telefónico de una entidad financiera de nuestro país. Esta campaña ha sido creada con el objeto de poner a disposición de sus clientes, tanto reales como potenciales, un medio a través del cual puedan ponerse en contacto con la empresa para obtener información sobre sus productos financieros o para dejar constancia de una queja. Este proceso tendrá lugar a través de un teléfono de llamada gratuita, perteneciente a la línea 900, de tal forma que el coste de la llamada recaerá no sobre el emisor sino sobre el receptor de la misma.

El servicio es suministrado desde las nueve hasta las veintidós horas de lunes a sábado y de once a veintidós horas el domingo. El objetivo consiste en determinar el número de agentes telefónicos que deben ser contratados con el fin de suministrar un servicio eficiente al cliente.

Utilizando la teoría de los fenómenos de espera y la simulación se han determinado los requerimientos de personal en los diferentes periodos del día. El sistema analizado se caracteriza por que las entradas al sistema no son estacionarias, es decir, dependen del periodo del día considerado, razón por la cual las necesidades de personal serán distintas según los diferentes intervalos horarios. Por lo que se refiere al día de la semana, el número de agentes será independiente del mismo, salvo para los sábados y domingos en los que la demanda existente es lo suficientemente pequeña para que no plantee problemas de congestión.

En la Tabla 1, se recogen las necesidades existentes el sábado y el domingo, por lo que se a los días comprendidos entre lunes y viernes vienen recogidas en la Figura 2.

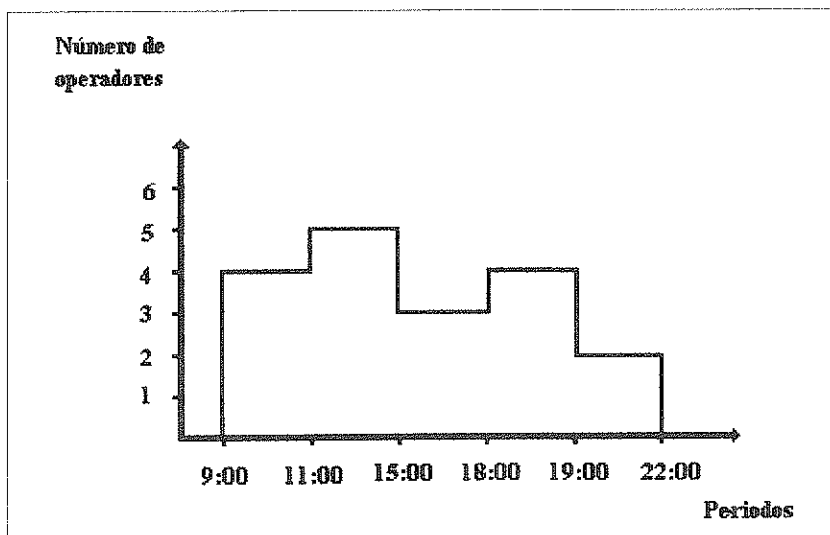


**Tabla 1** Número de operadores necesarios en los diferentes periodos del día para el sábado y el domingo.

| DÍA     | PERÍODO     | NÚMERO DE AGENTES |
|---------|-------------|-------------------|
| SABADO  | 9:00-15:00  | 2                 |
|         | 15:0-22:00  | 1                 |
| DOMINGO | 11:00-22:00 | 1                 |

**Fuente:** Elaboración propia.

**Figura 2** Número de operadores necesarios en los diferentes periodos del día de lunes a viernes



**Fuente:** Elaboración propia

Por lo que se refiere al convenio al cual está adscrito al empresa de marketing telefónico que implementa la campaña de la entidad financiera, especifica que la jornada laboral no excederá en ningún caso las cuarenta horas semanales, siendo asimismo la jornada mínima de cuatro horas y la máxima de nueve. Por otro lado, la empresa ha fijado los siguientes turnos de trabajo siguiendo verificándose las condiciones exigidas en el convenio. (Tabla 2)

**Tabla 2 Turnos diarios establecidos por la empresa**

| Día de la semana | Horas de entrada | Horas de salida                          | Horas de comida<br>(Duración) |
|------------------|------------------|--|-------------------------------|
| Lunes a viernes  | 9:00             | Cada hora desde las<br>15:00 hasta 19:00 | 15:00<br>(1 hora)             |
|                  | 11:00            | Cada hora desde las<br>15:00 hasta 22:00 | 15:00                         |
|                  | 15:00            | Cada hora desde las<br>19:00 hasta 22:00 |                               |
|                  | 16:00            | Cada hora desde las<br>20:00 hasta 22:00 |                               |
| Sábado           | 9:00<br>15:00    | 15:00<br>22:00                           |                               |
| Domingo          | 11:00<br>16:00   | 16:00<br>22:00                           |                               |

**Fuente:** Elaboración propia.

La Tabla 3, recoge el número mínimo de agentes que deben ser contratados semanalmente, los días en los que deben trabajar y sus horarios de tal forma que se satisfagan las necesidades de personal diarias recogidas en la Tabla 1 y en la Figura 2, verificándose además los turnos diarios establecidos por la empresa presentados en la Tabla 2.

**Tabla 3 Número mínimo de agentes que deben ser contratados semanalmente, días en los que deben trabajar y horarios establecidos de tal forma que se satisfagan las necesidades de personal fijadas.**

| <b>Día en que empiezan a trabajar</b>          | <b>Día al que está referido al turno</b> | <b>Número de operarios operarios con ese turno</b> | <b>Hora de entrada</b> | <b>Hora de salida</b> |
|--|--|--|------------------------|-----------------------|
| Lunes (5 operarios)                            | Lunes                                    | 3  | 9:00                   | 19:00                 |
|  |  | 2  | 14:00                  | 22:00                 |
|  | Martes                                   | 2  | 9:00                   | 19:00                 |
|  |  | 1  | 11:00                  | 16:00                 |
|  | Miércoles                                | 2  | 15:00                  | 22:00                 |
|  |  | 3  | 9:00                   | 19:00                 |
|  |  | 1  | 11:00                  | 16:00                 |
|  |  | 1  | 15:00                  | 22:00                 |
|  | Jueves                                   | 4  | 9:00                   | 19:00                 |
|  |  | 1  | 15:00                  | 22:00                 |
| Martes (1 operario)                            | Viernes                                  | 2  | 9:00                   | 17:00                 |
|  |  | 2  | 15:00                  | 22:00                 |
|  | Martes                                   | 1  | 9:00                   | 19:00                 |
|  | Miercoles                                | 1  | 14:00                  | 22:00                 |
|  | Jueves                                   | 1  | 15:00                  | 22:00                 |
|  | Viernes                                  | 1  | 9:00                   | 19:00                 |
| Jueves (1 operario)                            | Sábado                                   | 1  | 9:00                   | 15:00                 |
|  | Jueves                                   | 1  | 11:00                  | 16:00                 |
|  | Viernes                                  | 1  | 9:00                   | 19:00                 |
|  | Sábado                                   | 1  | 9:00                   | 15:00                 |
|  | Domingo                                  | 1  | 16:00                  | 22:00                 |
| Sábado (1 operario)                            | Lunes                                    | 1  | 11:00                  | 16:00                 |
|  | Sábado                                   | 1  | 15:00                  | 22:00                 |
|  | Domingo                                  | 1  | 11:00                  | 16:00                 |
|  | Lunes                                    | 1  | 9:00                   | 19:00                 |
|  | Martes                                   | 1  | 9:00                   | 19:00                 |
|  | Miércoles                                | 1  | 9:00                   | 19:00                 |
| Número de trabajadores contratados a la semana |  | 8  |                        |                       |

**Fuente:** Elaboración propia.

Con el objeto de facilitar la comprensión del modelo, los autores tienen a disposición de cualquier persona que lo solicite, una versión más detallada del modelo aplicado a esta campaña de marketing telefónico.

## 5. CONCLUSIONES

La planificación de personal en un centro de marketing telefónico requiere una gran flexibilidad, dadas las diferentes posibilidades de horarios que es posible establecer y los diferentes requerimientos horarios y semanales. Una vez conocido el número de operadores requerido para los diferentes periodos diarios y semanales a través de la simulación y la teoría de los fenómenos de espera, se plantea la necesidad de optimizar los turnos asignados a los operarios, minimizando los costes de personal. Frente a los modelos que han sido desarrollados con anterioridad, en los que una vez optimizados los turnos diarios, establecen de optimización semanal o mensual, en este trabajo se plantea un enfoque más completo que abarca conjuntamente las restricciones de los turnos diarios y semanales en un solo modelo de programación lineal entera, que a su vez presenta la ventaja frente a los anteriores de que permite horarios flexibles de los operarios a lo largo de la semana, con las únicas limitaciones establecidas en los convenios colectivos sobre el límite de la jornada semanal y diaria. La aplicación a una campaña de marketing telefónico concreta nos ha permitido comprobar la facilidad con que puede ser planteado y resuelto.

## BIBLIOGRAFIA

AGNIHOTRI, S. y TAYLOR, P. (1991): "Staffing a Centralized Appointment Scheduling Department in Lourdes Hospital". **Interfaces**. Vol 21, Nº 5, pp 1-11.

ANDREWS, B. y PARSONS, H. (1989): "L. L. Bean Chooses a Telephone Agent Scheduling Systems". **Interfaces**. Vol 19, Nº 6, pp. 1-9.

- (1993): "Establishing Telephone-Agent Staffing Levels through Economic Optimization. **Interfaces**. Vol 23, Nº 2, pp. 14-20.

DANTZIG, G. (1954): "A Comment on Edie's 'Traffic Delays at Toll Booths'". **Operations Research Journal**. Vol. 2, pp. 37-52.

GABALLA, A. y PEARCE, W. (1979): "Telephone Sales Manpower Planning at Qantas". **Interfaces**. Vol 9, Nº 3, pp. 1-9.

HARRIS, C., HOFFMAN, K. y SAUNDERS, P. (1987): "Modeling the IRS Telephone Taxpayer Information System". **Operations Research** Vol 35. No. 4. pp. 504-523.

HENDERSON, W. y BERRY, W. (1976): "Heuristic Methods for Telephone Operator Shift Scheduling: An Experimental Analysis". **Management Science**. Vol. 22, No. 12. pp 1372-1380.

HOFFMAN, K. y HARRIS, C. (1986): "Estimation of a Caller Retrial Rate for a Telephone Information System". **European Journal of Operational Research**. Vol 27, pp. 207-214.

MOK, S. y SHANTHIKUMAR, J. (1987): "A Transient Queueing Model for Bussines Office with Standby Servers". **European Journal of Operational Research**. Vol 28, pp 158-174.

QUINN, P., ANDREWS, B. y PARSONS, H. (1991): "Allocating Telecommunications Resources at L. L. Bean, Inc.". **Interfaces** Vol 21, N° 1, pp. 75-91.

SEGAL, M. (1974): "The Operator-Scheduling Problem: A Network-Flow Approach". **Operations Research**. Vol. 22. No 4. 359-367.



# INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS DE EFICIENCIA DEA

JESÚS LOZANO

Departamento de Administración de Empresas y Contabilidad  
Escuela Universitaria de Gestión y Administración Pública  
Universidad de Oviedo

## EFICIENCIA TÉCNICA Y EFICIENCIA RELATIVA

Farrell (1957) analizó los métodos de evaluación de la eficiencia productiva entre múltiples industrias (tipos de cultivo y países), considerando que la naturaleza compleja de las funciones productivas con múltiples inputs y outputs hace inadecuados criterios sencillos de clasificación o jerarquización. Considerando la eficiencia relativa outputs/inputs, y aún cuando exista disponibilidad de precios de mercado para evaluar la ponderación relativa de los outputs e inputs, resulta compleja e inestable la evaluación de los costes de oportunidad relativos en la utilización de varios inputs en países u organizaciones diferenciadas. Adicionalmente, una eficiencia basada en precios no ofrece tantas garantías como una puramente técnica para la competitividad futura. El contraargumento de que el poder de mercado que puede otorgar un monopolio normativo puede superar la existencia de ineficiencias técnicas, no proporciona sino una excepción temporal a la existencia de una deficiente competitividad que puede ponerse de manifiesto con la actualización normativa. En el caso de los monopolios privados, la existencia de una maximización del beneficio el mercado no implica que existan excepciones a la optimización de la función tecnológica de producción.

Criterios sencillos como la *productividad media* de un solo factor (por ejemplo, el trabajo) pueden conducir a situaciones erróneas (típicamente una sobrecapitalización). Los *índices de eficiencia* sobre factores de producción agregados (generalmente la rentabilidad) conllevan la utilización implícita o explícita de ponderaciones: precios computados de los factores o contribuciones técnicas. En el caso de utilizar precios, aún de mercado, puede no existir homogeneidad suficiente entre los utilizados en las distintas entidades, o bien resulta un análisis de eficiencia con escasa posibilidad de ser extrapolado al futuro. Si por contra, en el caso de utilizar datos técnicos (número de horas hombre o empleados) se utilizarán ponderaciones tomando como referencia una determinada combinación de factores predeterminada (una función de producción ideal), se evaluaría negativamente el alejamiento de esta predeterminación, es decir, no se reconoce la existencia de diversas combinaciones eficientes.

En el artículo original de la formulación del modelo Data Envelopment Analysis (DEA), Charnes, Cooper y Rhodes (1978) hacen referencia a la frecuente existencia de diferentes tecnologías en diversos centros de gestión autónoma (que denominan, como se hará en adelante, DMUs, *Decision Making Units*) que serán evaluados inadecuadamente de acuerdo con criterios univarian-

tes, o con criterios multivariantes para funciones tecnológicas de producción predeterminadas. Se debe reconocer la capacidad de obtener un comportamiento técnicamente eficiente para distintas combinaciones de múltiples inputs con múltiples outputs. La existencia de precios de mercado o de oportunidad variables entre distintas entidades, induce la necesidad de hacer abstracción de tales circunstancias en el análisis de la eficiencia productiva, puesto que tal heterogeneidad y variabilidad puede dar lugar a eficiencias o ineficiencias de carácter aleatorio o no gerenciabiles.

A consecuencia de ello se podría desglosar idealmente una eficiencia técnica, considerada en el sentido de realizar los procesos de producción de bienes y servicios sin derroche de recursos reales, de una eficiencia económica más general que resultaría de aplicar a una solución técnicamente eficiente condiciones favorables de contratación. En este sentido los estudios encaminados a determinar la existencia de economías o deseconomías de escala tecnológicas en la producción podrían aportar una valoración correcta de la eficiencia según el grado de aprovechamiento observado de las economías con la dimensión productiva (generalmente modelos de regresión, como podrían ser los modelos logarítmicos de mínimos cuadrados ordinarios). Sin embargo, estos modelos tienen un carácter fundamentalmente predictivo según la tendencia central, y aunque garantizan la estabilidad de las predicciones no ofrecen demasiada precisión para seleccionar las entidades más eficientes (Sherman, 1982, págs 28-29).

En un proceso con multitud de factores y productos, y superando los problemas acerca del conocimiento de la existencia de economías o deseconomías de escala en el uso de determinados factores de forma aislada y en interacción, se puede considerar un índice relativo de eficiencia la comparación de eficiencias paretianas en la producción. Así, una entidad se considera eficiente con una tecnología dada por la combinación de recursos con toda seguridad si y sólo si produce igual cantidad que otra con un menor empleo de algún recurso, o bien si produce más output empleando la misma cantidad de recursos. Con ello, se reconoce la posible existencia de distintas tecnologías eficientes en la evaluación comparativa de un conjunto de entidades, a diferencia de un enfoque basado en la comparación de costes de producción, característica que cobra más relevancia cuando se trata de evaluar DMUs con múltiples outputs. Con estas diferentes combinaciones consideradas eficientes se recogen tecnologías con una adecuada utilización subyacente de las denominadas economías de escala de consumo de recursos, producción de outputs o economías de alcance en la producción de múltiples outputs. El modelo no recoge explícitamente la existencia de economías de experiencia. Por otro lado, introduce como característica operativa la posibilidad de reducir el problema a la evaluación comparativa no paramétrica de organizaciones que operan efectivamente en el mercado y no a la relativización a prestaciones ideales.

## **El modelo DEA**

El modelo propuesto originalmente por Charnes, Cooper y Rhodes (1978) adopta la forma de un indicador productividad media de outputs ponderados sobre inputs ponderados, restringiendo de forma prefijada las ponderaciones a un límite máximo 'tecnológico' en que los outputs ponderados no superen a los inputs ponderados. Se trata con ello de obtener un índice que señale que entidades se sitúan en una posición de máximo aprovechamiento de la disponibilidad de los recursos, y que por lo tanto son puntos exteriores en las isocuantas de producción con respecto a otras entidades ineficientes, a las que envuelven (de ahí la denominación del análisis de la envoltura de



los datos), formando una frontera eficiente de producción exterior de un conjunto convexo de posibilidades. La formulación original,

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar } h_0 = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{r0}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{i0}} \\ & \text{sujeto a } \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} \leq 1; \quad j = 1, \dots, n \\ & \text{donde } u_r, v_i \geq 0; \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

recoge unos coeficientes  $u_r, v_i$  no negativos para cualquiera de los  $s$  outputs y  $m$  inputs que sustituyen a las ponderación de precios o coeficientes ideales de contribución productiva de cada input o output. Con datos históricos conocidos acerca de los outputs  $y_{rj}$  e inputs  $x_{ij}$  de las  $n$  entidades consideradas, los coeficientes que se obtienen de la propia resolución del problema de programación matemática, proporcionan un valor de la función objetivo entre 0 y 1 que refleja la eficiencia relativa técnica de producción entre las entidades estudiadas, sin requerir parámetros exógenos para la resolución.

## Computabilidad del DEA

La naturaleza fraccional, no lineal y no convexa del programa original puede hacerse operativa consiguiendo un programa lineal equivalente. Para ello se parte de un modelo recíproco al anterior que correspondería a una medida de ineficiencia, minimizando la relación inputs/outputs y donde se conserve la restricción tecnológica de que, relativizados por unos coeficientes, los outputs son iguales o inferiores a los inputs.

$$\begin{aligned} & \min \quad f_0 = \frac{\sum_{i=1}^m v_i x_{i0}}{\sum_{r=1}^s u_r y_{r0}} \\ & \text{s. a.} \quad \frac{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}}{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}} \geq 1; \quad j = 1, \dots, n \\ & u_r, v_i > 0; \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

O lo que es lo mismo,

$$\begin{aligned} \min \quad f_0 &= \frac{\sum_{i=1}^m v_i x_{i0}}{\sum_{r=1}^s u_r y_{r0}} \\ \text{s. a.} \quad \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} &\geq 0; \quad j = 1, \dots, n \\ u_r, \quad v_i &> 0; \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

que mediante las transformaciones (Charnes y Cooper, 1962) para algún  $t > 0$

$$\begin{aligned} w_i &= t \cdot v_i \\ \zeta_r &= t \cdot u_r \\ t^{-1} &= \sum_r u_r y_{r0} \end{aligned}$$

se convierte en un programa lineal ordinario de la forma

$$\begin{aligned} \min \quad g_0 &= \sum_{i=1}^m w_i x_{i0} \\ \text{s. a.} \quad \sum_{i=1}^m w_i x_{ij} - \sum_{r=1}^s \zeta_r y_{rj} &\geq 0; \quad j = 1, \dots, n \\ \sum_{r=1}^s \zeta_r y_{r0} &= 1 \\ \zeta_r, \quad w_i &> 0; \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

que cumple  $g_0^* = f_0^*$ . Teniendo en cuenta que  $h_0^* = 1/g_0^*$ , se identifica a las entidades eficientes por la obtención de  $h_0^* = 1$  y (estrictamente) la existencia de solución factible (solución con coeficientes nulos de las variables de holgura).

Adicionalmente, como extensiones más sencillas a este modelo básico (denominado por algunos autores CCR, según las iniciales de sus autores) se puede convertir el modelo a su formulación dual para hacer más eficiente la computación de problemas con pocas variables de inputs y outputs, pero con muchas entidades en estudio que se convierten en restricciones en el problema primal, y así agilizar los cálculos y proporcionar información acerca de los factores que resultan más

indicados para la actuación gerencial para mejorar el comportamiento. Existe la posibilidad teórica de aplicar los modelos sobre grupos de entidades tanto como de incorporar en la aplicación del modelo otros períodos de estudio acerca de las mismas entidades comparando la eficiencia intertemporal, para lo cual algún autor (Sengupta, 1993) ha desarrollado modelos que recogen coeficientes multiplicadores de la evolución dinámica entre períodos.

La operatividad de los modelos de un tamaño considerable (un número de entidades superior a una centena) puede verse dificultada por los requerimientos físicos, tales como la necesidad de procesamiento rápido, típicamente en paralelo, con variables de alta precisión y memoria suficiente para almacenar las matrices de trabajo, y requerimientos lógicos como usar nuevos métodos simplex de punto interior para agilizar los cálculos cuando las matrices contienen muchos elementos nulos (Thompson, Dharmaphala y Thrall, 1993, recomiendan sustituirlos por infinitésimos) y así como problemas de redondeo que ponen en peligro la factibilidad crecen en progresión geométrica con el número de entidades y variables. Para agilizar los cálculos y aumentar su fiabilidad se han desarrollado nuevas técnicas, por ejemplo, subdividiendo el problema y utilizando nuevos algoritmos para cada subgrupo de datos (Suchoshi y Chang, 1989).

## Acotación y clasificación de las ineficiencias

Un primer problema del modelo original CCR consiste en que la solución alcanzada establezca valores muy pequeños o virtualmente nulos a los pesos relativos de ciertos factores, lo que puede hacer que produciendo un índice de eficiencia  $h_0^* = 1$  se oculte la existencia de estructuras ineficientes con respecto a la frontera real por consumir alguna cantidad mayor o producir una menor en un factor individualmente poco ponderado. Banker, Charnes y Cooper (1984) proponen un modelo (conocido por BCC) en el que se establecen restricciones adicionales para que en vez de la no negatividad se exija la estricta positividad a las ponderaciones. Dicho efecto se computa introduciendo como límite inferior un infinitésimo que elimine esta posibilidad.

Igualmente, se propuso relajar la hipótesis de igualdad en la solución (1) de eficiencia alcanzada en toda entidad de la frontera eficiente, tanto entre entidades eficientes como en sus combinaciones lineales. Tal como se muestra, representando hipotéticamente una sección bidimensional, podría existir una sola entidad en la frontera eficiente que consigue la máxima eficiencia global outputs/inputs (E).

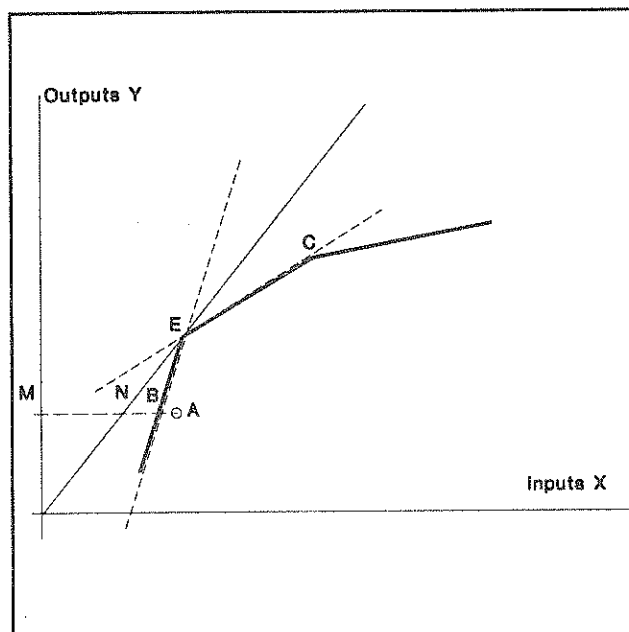


Gráfico 1

Igualmente, de esta forma es posible distinguir zonas de rendimientos crecientes a escala (EB) de zonas de rendimientos decrecientes (EC) dentro y fuera de la frontera eficiente, y se propone la integración de la eficiencia técnica y por escala en una eficiencia global proporcional a la productividad de la(s) entidad(es) más eficiente(s). Así por ejemplo, una entidad ineficiente A tendría una caracterización hipotética (enfrentando hiperplanos de inputs y outputs):

$$\text{Eficiencia global} = MN/MA$$

$$\text{Eficiencia de escala} = MN/MB$$

x

$$\text{Eficiencia técnica} = MB/MA$$

El modelo operativo reformulado adoptaría la forma

$$\begin{aligned} & \text{Max} \sum_{r=1}^s u_r \cdot y_{r0} - u_0 \\ \text{s. a.} & - \sum_{i=1}^m v_i \cdot x_{ij} + \sum_{r=1}^s u_r \cdot y_{rj} - u_0 \leq 0; j = 1, \dots, n \\ & \sum_{i=1}^m v_i \cdot x_{i0} = 1 \\ & u_r, v_i \geq \epsilon \forall r, i; \epsilon > 0 \end{aligned}$$

En el que se incorpora como test de la eficiencia de escala  $u_0^*$ , derivada de la primera restricción para las ponderaciones óptimas,

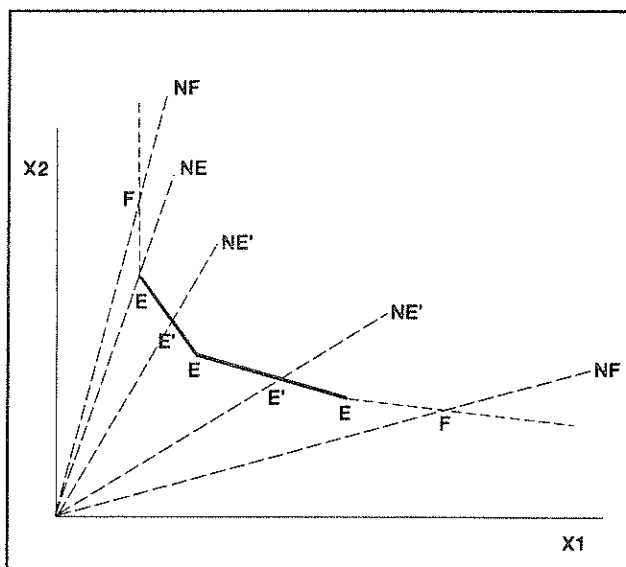
$$u_0^* = \sum_{r=1}^s u_r^* y_r - \sum_{i=1}^m v_i^* x_i$$

considerándose la existencia de economías de escala crecientes, constantes o decrecientes si  $u_0^*$  resulta menor, igual o mayor que 0 respectivamente, como se podría observar en el gráfico anterior, por comparación de las pendientes de los tramos de la frontera eficiente con la pendiente de la entidad de máxima eficiencia.

La crítica que se podría plantear sobre la utilización de este modelo es si es realmente relevante para el análisis habitual, en que sólo se introducen en el modelo variables con valores realmente escalables de forma gerencial, tengan o no economías o deseconomías de escala, no distraiendo el modelo de su propósito más común de evaluar la eficiencia no ya de las prestaciones en cuanto a la entidad, sino de su eficiencia directiva. Es decir, la primera alternativa implicaría utilizar estos modelos relacionándolo con decisiones tales como las de apertura o cierre de entidades, y debiendo ser éstas de tipo puramente económico. El modelo parece más adecuado para evaluar la eficiencia relativa, comparativa, no de distintos tipos de entidades sino de diferentes estilos directivos en entidades deben conservar cierta homogeneidad.

En el siguiente gráfico (tomado de Charnes, Cooper y Thrall, 1986, pág. 108) se muestra con línea gruesa una hipotética frontera eficiente en la producción de un output con dos inputs  $x_1$  y  $x_2$ , obtenida por la combinación hipotética de características de productividad entre las tres entidades caracterizadas como eficientes E, paretianamente más eficientes que otras NE con menos output

Gráfico 2



producido y mayor consumo de inputs. Los productores virtuales eficientes  $E'$  serían superiores a los productores  $NE'$  en incluso a cualquier entidad del segmento  $E'NE'$ , dado que aunque tenga un menor consumo de inputs que otra entidad  $E$ , producirá menos outputs que la combinación virtual  $E'$ , en la cual se supone rendimientos constantes a escala con referencia los productores eficientes de que se deriva.

## Clasificación de los modelos

La clasificación de la amplia variedad de modelos DEA distingue entre modelos de maximización de outputs (orientación a outputs) de los formulados minimizando inputs; los modelos primales y los duales (más eficientes pero que implican la programación con una variable irrestricta derivada de la restricción de igualdad en el primal), y los modelos de coeficientes irrestrictos (el original CCR) de los propuestos posteriormente con restricciones no sólo de infinitésimos para asegurar la estricta positividad sino también sobre límites máximos conocidos por la experiencia, lo que supone la parametrización del modelo.

Una familia de modelos especialmente interesante parece la que intenta discriminar entre la eficiencia de las entidades de la frontera eficiente, mediante la imposición de distancias mínimas acotadas entre los coeficientes de los outputs. Según Cook, Kress y Seiford (1992) el modelo original CCR podría formularse

$$\begin{aligned} \max \quad & u \cdot Y_0 \\ \text{s. a.} \quad & v \cdot X_0 = 1 \\ & u \cdot Y_j - v \cdot X_j \leq 1 \quad \forall j = 1, \dots, n \\ & u_{r1} - u_{r1} + 1 \geq \epsilon \quad l = 1, \dots, R - 1 \\ & u_{rl} \geq \epsilon, \quad v_i \geq \epsilon \quad \forall i, l \end{aligned}$$

Otras derivaciones extienden el modelo (Petersen, 1990) para incluir la posibilidad de que existan economías de escala locales y no sea posible reducir un input sin aumentar otro en una proporción superior a la que se encontraría en otro productor. Se considera a las economías de escala incompatibles con la convexidad de la frontera eficiente. Efectivamente, por ejemplo, si una entidad de alta tecnología  $A$  tiene 100 unidades de coste y utiliza 99 máquinas y 1 hombre, y, por contra, una entidad laboriosa  $B$  con el mismo coste utiliza 99 hombres y 1 máquina; parece que se esperaría en el modelo original CCR que una entidad pudiese utilizar 2 hombres y 98 máquinas sin aumentar el coste, aplicando los salarios típicos de la entidad  $B$  a un tipo de trabajo más próximo a  $A$ . Dicho supuesto parece poco factible. En contra de la proporcionalidad matemática que se supone en que cualquier hombre y cualquier máquina tengan un coste unitario, dicha característica implicaría en un entorno multidimensional lo que realmente se denominaría rendimientos a escala variables, para poder hacer coexistir ese comportamiento con el principio de rendimientos y valoraciones marginales decrecientes en productos y factores. En el ejemplo propuesto, es lógico suponer que el trabajo de la unidad  $A$  y la máquina de la unidad  $B$  valgan más que la unidad.

## Aplicaciones y posibles restricciones

Las características de este análisis de soportar datos de a) carácter cualitativa y cuantitativamente heterogéneos, de b) carácter puramente técnico, generalmente más fiables que los económicos, y c) no sólo hacer abstracción de los precios de oportunidad implícitos al consumo de recursos o producción de outputs sino efectuar una evaluación de los mismos a través de las ponderaciones resultantes, amplía el campo de aplicación de la técnica allí donde comúnmente no era posible realizar evaluaciones de eficiencia. El modelo básico DEA ha sido extendido con variaciones tales como fijar un output constante arbitrario para adaptarse a un output desconocido para varias entidades, varios outputs y un sólo input, mixtura de datos económicos y técnicos, análisis multiperíodo, etc.

Se puede considerar que esta técnica tiene un carácter genérico y útil para la toma de decisiones directivas, como se puede instrumentar complementando el análisis DEA con otros a posteriori de modelos de decisión multicriterio, medida de distancias multidimensionales, técnicas de regresión, análisis económico de las soluciones de la frontera eficiente, etc. para reorganizar los recursos (en inversiones nuevas o reasignándolos entre las DMUs ineficientes) de forma que el conjunto de DMUs se aproxime a la frontera eficiente, que en sentido dinámico resultaría invariante, a diferencia de un modelo de regresión. Más modestamente, este análisis ha aumentado el valor añadido de los datos empresariales en campos donde tradicionalmente resultaba difícil realizar estimaciones simples de los outputs, como empresas de servicios u organizaciones no lucrativas. Como ejemplo, sirva las múltiples aplicaciones realizadas a casos como el estudio de la eficiencia o evaluación de entidades sanitarias, sucursales bancarias, instituciones de enseñanza, evaluación del impacto del tipo de personal de organizaciones de caridad, dimensionado de líneas de ferries, cadenas de restaurantes de comida rápida, diferentes compañías de autobuses municipales tras una privatización, programas de mantenimiento de ferrocarriles o aviones, programación de transportes escolares, evaluación de ciudades chinas, evaluación de corredores por edad y sexo, o la comparación de modelos de ordenadores.

Entre los inconvenientes de la técnica conviene destacar la subjetividad inherente a la elección de variables. De otro modo también se puede considerar como positiva la flexibilidad del modelo al poder analizar la sensibilidad de resultados frente a la adición de nuevas variables hasta la inclusión de una generalidad. Para Banker (1993) el DEA proporciona un buen indicador del grado de ineficiencia tomando gran número de entidades en estudio, teniendo propiedades estadísticas. Según un estudio realizado mediante simulación sobre casos de inclusión de variables irrelevantes, de omisión de variables relevantes o de la elección de modelos bajo asunciones incorrectas, y para varios tamaños muestrales, se observó que los mayores errores finales se producían para muestras de pocas entidades y modelos sencillos con pocas variables, por lo que contrariamente al principio general de formulación de modelos estadísticos o econométricos, se debería proceder a una sobremodelización incluyendo variables con riesgo de irrelevancia. Por último, otra crítica se centraría en la carencia de tests que evalúen la robustez del análisis global, así como de las variables incluidas, si bien se han desarrollado varios métodos de control como el análisis de correlaciones canónicas o el análisis discriminante entre entidades eficientes y no eficientes.

## Bibliografía

BANKER, R.D. «Maximum Likelihood, Consistency and Data Envelopment Analysis: A Statistical Foundation», *Management Science*, vol. 39, n.º 10, Octubre, 1993, págs. 1.265-1.273.

BANKER, R.D; CHARNES, A. y W.W. COOPER. «Some models for estimating technical and scale inefficiencies in Data Envelopment Analysis», *Management Science*, vol. 30, n.º 9, Septiembre, 1984, págs. 1.078-1092.

CHARNES, A. y COOPER, W.W. «Programming with Linear Fractional Functionals», *Naval Research Logistic Quarterly*, vol. 9, 1962, págs. 181-185.

CHARNES, A; COOPER, W.W. y E. RHODES. «Measuring the efficiency of decision making units», *European Journal of Operational Research*, vol. 2, 1978, págs. 429-444.

CHARNES, A; COOPER, W.W. y R.M. THRALL. «Classifying and characterizing efficiencies and inefficiencies in Data Envelopment Analysis», *Operations Research Letters*, vol.5, n.º 3, 1986, págs. 105-110.

COOK, W.D; KRESS, M. y L.M SEIFORD. «Priorization models for frontier decision making units in DEA», *European Journal of Operational Research*, vol. 59, 1992, págs. 319-323.

FARRELL, M.J. «The Measurement of Productive Efficiency», *Journal of the Royal Statistical Society*, vol. 120, 1957, págs. 253-281.

SHERMAN, H.D. «Identifying Inefficiencies in Multiple Output-Multiple Input Organizations», *Papel de trabajo #1316-82*, Sloan School of Management, Massachusetts Institute of Technology, Febrero, 1982, págs. 1-39.



# PROBLEMAS DE RUTAS CON CARGA Y DESCARGA EN SISTEMAS LIFO: ALGORITMOS HEURISTICOS

JOAQUÍN A. PACHECO

E.U.E. Empresariales. Universidad de Burgos

CRISTINA R DELGADO SERNA

Desarrollos en Optimización y Decisión S.L.

## 1. INTRODUCCION

El Problema de Carga y Descarga (PDP) puede ser descrito de la forma siguiente: Sea un conjunto de clientes  $N = \{2, 3, \dots, n\}$ ; cada cliente  $i$  requiere que le sea transportada una mercancía desde un origen  $i^+$  a un destino  $i^-$ . Para ello se dispone de  $m$  vehículos que parten de una ciudad inicial 1, a la que regresan al final del trayecto. Se trata de diseñar rutas de vehículos con distancia total a recorrer mínima. Se va a denotar  $N^+ = \{i^+ / i = 2, \dots, n\}$ , el conjunto de puntos de carga y  $N^- = \{i^- / i = 2, \dots, n\}$ , el conjunto de puntos de descarga, y  $q(i)$ ,  $i = 2, \dots, n$ , la mercancía de cada cliente  $i$ . Al caso especial en el que las demandas requeridas son todas iguales se le denomina el *Dial-A-Ride-Problem* (DARP), que tiene lugar en el transporte de viajeros, transporte escolar, etc.

El PDP y el PDP con Ventanas de Tiempo (PDPTW) son problemas de rutas muy estudiados, especialmente a partir de la segunda mitad de la década de los ochenta. Una repaso a los principales métodos de solución, tanto exactos como heurísticos, a estos problemas se puede encontrar en el trabajo de Pacheco, (1994).

Ahora bien, considérese en el planteamiento del PDP con un vehículo la siguiente restricción: En cada momento sólo puede ser descargado la última mercancía que ha sido cargada, de entre las que se encuentren en el vehículo. Este problema, que se va a denominar como PDP con un vehículo con sistema de descarga LIFO (último en entrar primero en salir), aparece en muchas situaciones en el mundo del Transporte y la Industria: transporte de determinados gases industriales, distribución de pales en la industria del automóvil, o, en general, en aquellas actividades de reparto en las que se quiere un tiempo controlado para la descarga.

El problema así definido, sólo tiene referencias en los trabajos de Pacheco, (1.994), y Pacheco y otros, (1.994). En estos se propone una estrategia para desarrollar algoritmos exactos a este problema, consistente en, a partir de un algoritmo Branch & Bound para el TSP, introducir una serie de modificaciones que den lugar a un algoritmo exacto para el problema anterior. Sin embargo, se ha observado que para problemas de mayor tamaño a los utilizados en estos trabajos (10 o más clientes), el tiempo de computación en ordenadores personales deja de ser razonable, cuando se utilizan este tipo de algoritmos u otros algoritmos exactos (como los basados en métodos de programación dinámica).

En este trabajo, se propone un heurístico capaz de resolver problemas de gran tamaño en un tiempo de computación moderado, desviándose del óptimo solo en un pequeño número de casos y en una cantidad mínima. Esta técnica supone una extensión y adaptación a este problema del algo-

ritmo de Or para el TSP, (1976). El algoritmo de Or es una variante de los conocidos algoritmos r-óptimos desarrollados por Lin, (1965), para el TSP simétrico. En el caso del algoritmo de Or se toma  $r = 3$  y se reduce la búsqueda de los 3-intercambios a aquellos que supongan una recolocación de cadenas de 1, 2 o 3 elementos entre otros dos consecutivos en la ruta actual. La ventaja de este método es que el número de operaciones que se realiza es de  $q(m^2)$ , frente al algoritmo 3-óptimo original que utiliza  $q(m^3)$ , (siendo  $m$  el número de puntos que intervienen en el problema). Además, como se verá mas adelante, el algoritmo de Or se puede adaptar fácilmente a problemas asimétricos. La eficacia de este algoritmo ha sido contrastada recientemente en el trabajo de Nurmi, (1991). Adaptaciones de este algoritmo al TSP con ventanas de tiempo (TSPTW) se pueden encontrar en el trabajo de Salomon y otros, (1988).

El trabajo se estructura de la siguiente forma: en la sección 2 se explica la idea básica del algoritmo que se quiere desarrollar; en la sección 3 se estudian las condiciones para que un 3-intercambio, en este caso recolocación, sea factible; en la sección 4 se estudian las situaciones posibles dependiendo de los elementos que componen la cadena que se quiere recolocar; en la sección 5 se describe básicamente el algoritmo con los resultados descritos en los apartados anteriores; en la sección 6 se chequea la eficacia de este algoritmo a partir de la resolución de una serie de problemas simulados; en la sección 7 se expondrán las conclusiones que se extraen de los resultados obtenidos en la sección anterior.

Igual que en trabajos anteriores, -Pacheco, (1.994), y Pacheco y otros, (1.994),- se supondrá que la capacidad del vehículo es mayor que la carga total del conjunto de clientes; el caso general se estudiará posteriormente.

## 2. IDEA BASICA

Or, (1976), propone restringir la búsqueda de intercambios a los 3-intercambios en los que cadenas de uno, dos o tres clientes consecutivos son recolocadas entre otros dos clientes (ver figura 1). Esto hace reducir el número de 3-intercambios a considerar a una cantidad de orden  $q(n^2)$ . Nótese que con estos intercambios no se cambia el sentido de los diferentes tramos.

En nuestro caso seguiremos la misma idea, pero aumentaremos el límite del tamaño de la cadena a recolocar a  $n-1$ ; además debemos chequear la factibilidad de cada posible recolocación respecto a las restricciones del problema. En este caso el número de operaciones es de orden  $q(n^3)$ .

En el caso general de recolocación de cadenas de  $k$  elementos consecutivos, comenzando en la posición  $i$ , entre dos puntos que ocupan las posiciones  $j$  y  $j+1$ , como muestra la figura 2, supone suprimir los arcos  $(i-1,i)$ ,  $(i+k-1,i+k)$ ,  $(j,j+1)$  e incorporar los arcos  $(i-1,i+k)$ ,  $(j,i)$  y  $(i+k-1,j+1)$ .

Para cada número de elementos  $k$  de la cadena, los posibles valores que puede tomar  $i$  varían desde 2, hasta  $2 \cdot n - k$ . Para cada valor de  $i$  y cada valor de  $k$ , los posibles valores que puede tomar  $j$ , punto a partir del cual insertamos la cadena, son  $j = 1, \dots, i-2$ ; (recolocación hacia atrás), y  $j = i+k, \dots, 2 \cdot n - 1$ , (recolocación hacia adelante). Por comodidad, se añade a las rutas el punto  $2 \cdot n$  que se interpreta como la vuelta al origen 1.

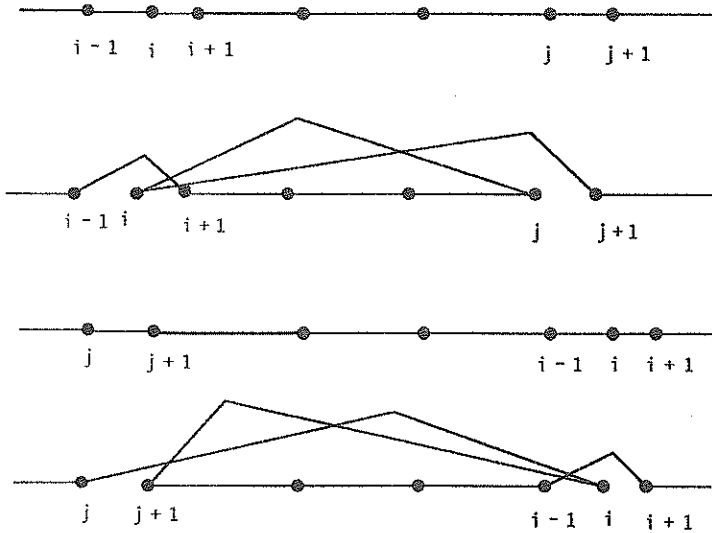


Figura 1.- Posible recolocación del elemento  $i$  hacia adelante y hacia atrás entre  $j$  y  $j+1$ .

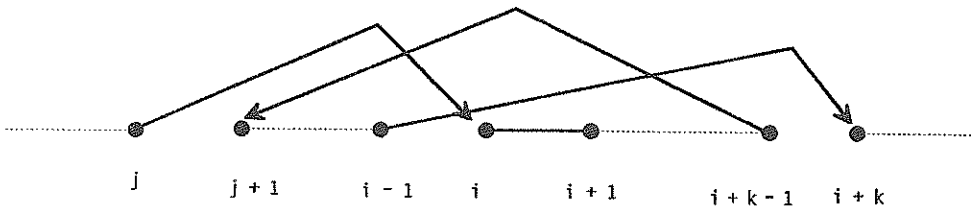


Figura 2.- Recolocación de una cadena de  $k$  elementos.

El algoritmo básicamente actúa de la forma siguiente: a partir de una ruta inicial examina todos los intercambios o recolocaciones posibles que sean factibles. Para cada uno de estos intercambios factibles calcula la variable *ganancia* definida como la suma de las distancias de los arcos que se suprimen menos la suma de las distancias de los arcos que se añaden. Se realiza el intercambio correspondiente al mayor valor de *ganancia*, y se vuelve a repetir el proceso con la nueva ruta. El algoritmo termina cuando el mayor valor de *ganancia* no sea positivo..

El chequeo de la factibilidad de cada intercambio, es decir de la nueva ruta a la que este da lugar, puede suponer un tiempo de computación excesivo. A continuación vamos a proponer un método que de forma rápida examine las recolocaciones factibles para cada cadena, es decir, para cada valor de  $i$  y de  $k$  determinar los valores de  $j$  factibles.

### 3. INTERCAMBIOS FACTIBLES

Para examinar la factibilidad de un intercambio se deben considerar las dos restricciones, o precedencias obligatorias, siguientes del problema:

1.- Para cada cliente  $i$  cada punto de carga  $i^+$  debe ser anterior a cada punto de descarga  $i^-$ .

2.- Sólo se puede descargar la última mercancía que ha sido recogida, es decir, cuando haya dos mercancías en el vehículo se ha de descargar antes la última entrar. En otras palabras no se pueden dar situaciones de este tipo en una ruta:

$$1 - \dots - i^+ - \dots - j^+ - \dots - i^- - \dots - j^- - \dots - 1.$$

Cuando se estudia la recolocación de una cadena concreta, (determinada por los valores de  $i$  y  $k$  definidas anteriormente), se ha de examinar en que lugares se puede insertar, es decir que valores de  $j$  van a dar lugar a rutas que cumplan las dos restricciones anteriores. Para estudiar los valores de  $j$  que cumplan la primera restricción, basta con fijarse por una parte en las posiciones de los puntos de carga correspondientes a los puntos de descarga que están en la cadena; y por otra parte en las posiciones de los puntos de descarga correspondientes a los puntos de carga que están en la cadena. Como se verá de forma explícita más adelante, dichas posiciones marcarán el mínimo y el máximo valor que puede tomar  $j$ .

El estudio de los valores que cumplan la segunda restricción es más complicado. Para ello considérese  $C$  una cadena de esta ruta; definimos el siguiente conjunto:

$M$  = Conjunto de clientes cuyos puntos de carga y descarga no pertenecen ninguno a  $C$ ;

para todo cliente  $r$ , cumpliendo que o bien  $r^+$  o bien  $r^-$ , pero solo uno, pertenece a  $C$  se definen:

$A(r)$  = Subconjunto de  $M$  de clientes  $s$  tales que  $s^-$  es anterior a  $r^+$  en la ruta actual;

$$s^+ - \dots - s^- - \dots - r^+ - \dots - r^-$$

$B(r)$  = Subconjunto de  $M$  de clientes  $s$  tales que  $s^+$  es anterior a  $r^+$  y  $s^-$  es posterior a  $r^-$  en la ruta actual;

$$s^+ - \dots - r^+ - \dots - r^- - \dots - s^-$$

$C(r)$  = Subconjunto de  $M$  de clientes  $s$  tales que  $s^+$  es posterior a  $r^+$  y  $s^-$  es anterior a  $r^-$  en la ruta actual;

$$r^+ - \dots - s^+ - \dots - s^- - \dots - r^-$$

$D(r)$  = Subconjunto de  $M$  de clientes  $s$  tales que  $s^+$  es posterior a  $r^-$  en la ruta actual

$$r^+ - \dots - r^- - \dots - s^+ - \dots - s^-.$$

$\forall t \in N^+ \cup N^-$  se define  $\text{orden}(t)$  como el número de orden o posición que ocupa el elemento  $t$  en la ruta actual. Se tiene el siguiente

**Lema 1.**

Sea  $j$  la variable que indica la posición donde se recoloca  $C$ , según se ha definido anteriormente:

a)  $\forall s \in A(r)$ ,  $C$  no puede ser recolocado entre  $s^+$  y  $s^-$ , es decir,  $j$  no puede tomar valores comprendidos entre  $\text{orden}(s^+)$  y  $\text{orden}(s^-)-1$ , ambos incluidos;

b) Sean  $m1 = \max \{\text{orden}(s^+) / s \in B(r)\}$  y  $m2 = \min \{\text{orden}(s^-) / s \in B(r)\}$ ,  $j$  no puede tomar valores comprendidos entre  $m1$  y  $m2-1$ , ambos incluidos;

c)  $\forall s \in C(r)$ ,  $j$  no puede tomar valores comprendidos entre  $\text{orden}(s^+)$  y  $\text{orden}(s^-)-1$ , ambos incluidos;

d)  $\forall s \in D(r)$ ,  $j$  no puede tomar valores comprendidos entre  $\text{orden}(s^+)$  y  $\text{orden}(s^-)-1$ , ambos incluidos.

**Demostración.-** Si  $j$  tomara alguno de los valores anteriormente señalados, se tendría, para algún cliente  $s$ , una de las dos posiciones relativas siguientes entre los puntos de carga y descarga de  $r$  y  $s$  en la nueva ruta obtenida:

$$s^+ - \dots - r^+ - \dots - s^- - \dots - r^-$$

o bien

$$r^+ - \dots - s^+ - \dots - r^- - \dots - s^-.$$

#### 4. SITUACIONES POSIBLES DEL CASO GENERAL

Sea  $r(t)$  el elemento de la ruta actual que ocupa la posición  $t$ ; siempre se tiene, según lo comentado anteriormente, que  $r(1) = r(2n) = 1$ . Sea la cadena  $C$  determinada por los valores de  $i$  y  $k$ :

$$r(i) - r(i+1) - \dots - r(i+k-1)$$

definimos los siguientes conjuntos de clientes:

$$A^+ = \{r/r \in C, r \notin C\} \text{ y } A^- = \{r/r \in C, r \notin C\}$$

se definen también:

$$\text{límite\_inferior} = \max \{ \text{orden}(j^+) / j \in A^- \}, \text{ si } \emptyset \Rightarrow \text{límite\_inferior} = 1;$$

$$\text{límite\_superior} = \min \{ \text{orden}(j^-) / j \in A^+ \}, \text{ si } \emptyset \Rightarrow \text{límite\_superior} = 2n;$$

sean además  $j_1$  el elemento de  $A^+$  verificando  $\text{orden}(j_1^-) = \text{límite\_superior}$  si  $A^+ \neq \emptyset$ ; y  $j_2$  el elemento de  $A^-$  verificando  $\text{orden}(j_2^+) = \text{límite\_inferior}$  si  $A^- \neq \emptyset$ ; se tiene el siguiente

### Lema 2.

Sea  $j$  la variable que indica la posición donde se recoloca  $C$ , según se ha definido anteriormente, se tiene que  $j$  sólo puede tomar los valores comprendidos entre  $\text{límite\_inferior}$  y  $\text{límite\_superior}-1$ , ambos inclusive.

**Demostración.-** Trivial, ya que si  $j$  tomara otros valores en la ruta resultante se violaría, para al menos un cliente, la restricción 1 del apartado 3, es decir, algún punto de descarga sería anterior a su correspondiente de carga.

Por otra parte, según los elementos de  $A^-$  y  $A^+$  se tienen los siguientes 4 casos:

$$1) A^+ = \emptyset, A^- = \emptyset$$

La cadena esta compuesta por pares completos de puntos de carga descarga, como por ejemplo,  $r^+r^-s^+s^-$  o bien  $r^+s^+s^-r^- \dots$ ; en este caso ninguna recolocación puede romper ninguna precedencia obligatoria señalada en la sección anterior.

$$2) A^+ = \emptyset, A^- = \emptyset: 1 - \dots - r(i) - r(i+1) - \dots - r(i+k-1) - \dots - j_1^- - \dots - 1$$

Los clientes que se van a considerar, según las posiciones relativas de sus correspondientes puntos de carga y descarga, para estudiar las posibles recolocaciones son las siguientes:

$$a) 1 - \dots - s^+ - \dots - s^- - \dots - r(i) - r(i+1) - \dots - r(i+k-1) - \dots - j_1^- - \dots - 1$$

Conjunto de clientes  $s$  verificando que  $\text{orden}(s^-) < i$ ; que va a coincidir con  $A(j_1)$ , (ver apartado anterior);

$$b) 1 - \dots - s^+ - \dots - r(i) - r(i+1) - \dots - r(i+k-1) - \dots - j_1^- - \dots - s^- - \dots - 1$$

Conjunto de clientes  $s$ , verificando que  $\text{orden}(s^+) < i$  y  $\text{orden}(s^-) > \text{orden}(j_1^-)$ ; es decir  $B(j_1)$ ;

$$c) 1 - \dots - r(i) - r(i+1) - \dots - r(i+k-1) - \dots - s^+ - \dots - s^- - \dots - j1^- - \dots - 1$$

Conjunto de clientes  $s$  verificando que  $\text{orden}(s^+) > i+k-1$  y  $\text{orden}(s^-) < \text{orden}(j1^-)$ , es decir  $C(j1)$ .

A efectos del estudio de recolocaciones factibles no se considera el conjunto de clientes  $s$  verificando que  $\text{orden}(s^+) > \text{orden}(j1^-)$ , (es decir  $D(j1)$ ), pues la cadena  $C$  no puede ser insertada en una posición posterior a la de  $j1^-$  (Lema 2).

$$3) A^- \neq \emptyset, A^+ = \emptyset: 1 - \dots - j2^+ - \dots - r(i) - r(i+1) - \dots - r(i+k-1) - \dots - 1$$

Los conjuntos de clientes a considerar son los siguientes:

$$a) 1 - \dots - s^+ - \dots - j2^+ - \dots - r(i) - r(i+1) - \dots - r(i+k-1) - \dots - s^- - \dots - 1$$

Conjunto de clientes  $s$  verificando que  $\text{orden}(s^+) < \text{orden}(j2^+)$  y  $\text{orden}(s^-) > i+k-1$ , es decir  $B(j2)$ ;

$$b) 1 - \dots - j2^+ - \dots - s^+ - \dots - s^- - \dots - r(i) - r(i+1) - \dots - r(i+k-1) - \dots - 1$$

Conjunto de clientes  $s$  verificando que  $\text{orden}(s^+) > \text{orden}(j2^+)$  y  $\text{orden}(s^-) < i$ , es decir  $C(j2)$ ;

$$c) 1 - \dots - j2^+ - \dots - r(i) - r(i+1) - \dots - r(i+k-1) - \dots - s^+ - \dots - s^- - \dots - 1$$

Conjunto de clientes  $s$  verificando que  $\text{orden}(s^+) > i+k-1$ , es decir  $D(j2)$ .

Al igual que en el caso anterior no se considera el conjunto  $A(j2)$ .

$$4) A^+, A^- \neq \emptyset: 1 - \dots - j2^+ - \dots - r(i) - r(i+1) - \dots - r(i+k-1) - \dots - j1^- - \dots - 1$$

Sólo se consideran los dos siguientes conjuntos:

$$a) 1 - \dots - j2^+ - \dots - s^+ - \dots - s^- - \dots - r(i) - r(i+1) - \dots - r(i+k-1) - \dots - j1^- - \dots - 1$$

Conjunto de clientes  $s$  verificando que  $\text{orden}(s^+) > \text{orden}(j2^+)$  y  $\text{orden}(s^-) < i$ , es decir  $C(j2)$ ;

$$b) 1 - \dots - j2^+ - \dots - r(i) - r(i+1) - \dots - r(i+k-1) - \dots - s^+ - \dots - s^- - \dots - j1^- - \dots - 1$$

Conjunto de clientes  $s$  verificando que  $\text{orden}(s^+) > i+k-1$  y  $\text{orden}(s^-) < \text{orden}(j1^-)$ , es decir  $C(j2)$ ;

Obviamente, no se van a considerar otros conjuntos de clientes.

## 5. BREVE DESCRIPCIÓN DEL ALGORITMO

Sea, siguiendo las definiciones tomadas hasta ahora,  $i$  la variable que indica la posición donde comienza la cadena  $C$ ,  $k$  el número de elementos que la componen, y  $j$  la posición donde va a ser recolocada; el algoritmo actúa de la forma siguiente:

1.- Partir de una ruta inicial como ruta actual.

2.- Para cada valor de  $k$ , ( $k = 1, \dots, n-1$ ) y de  $i$ , ( $i=1, \dots, 2n-k$ ), hacer:

- Determinar los conjuntos  $A^+$  y  $A^-$  y los valores de *límite\_inferior* y *límite\_superior* de la cadena  $C$  definida por  $k$  e  $i$ .

- Excluir de los posibles valores que puede tomar  $j$  los comprendidos entre 1 y *límite\_inferior*-1, y *límite\_superior* y  $2n-1$ .

- Según los conjuntos  $A^+$  y  $A^-$  obtenidos hacer lo siguiente:

si,  $A^+ \neq \emptyset$ ,  $A^- = \emptyset$  aplicar los apartados a), b) y c) del Lema 1 al elemento  $j_1$  correspondiente, para excluir de los posibles valores que puede tomar  $j$  aquellos que den rutas que violen la segunda restricción (ver apartados 3 y 4);

si,  $A^+ = \emptyset$ ,  $A^- \neq \emptyset$  aplicar los apartados b), c) y d) del Lema 1 al elemento  $j_2$  correspondiente, de forma análoga al caso anterior;

si,  $A^+ \neq \emptyset$ ,  $A^- = \emptyset$  aplicar el apartado c) del lema 1 a los elementos  $j_1$  y  $j_2$  correspondientes.

- Para cada valor de  $j$  ( $j = 1, \dots, i-2$ ; y  $j = i+k, \dots, 2n-1$ ) que no haya sido excluido anteriormente hacer:

Determinar el valor de la variable *ganancia* de la recolocación correspondiente, (ver apartado 2);

si *ganancia* supera el mayor conseguido hasta ese momento registrar los valores de  $i$ ,  $k$ , y  $j$ .

- Si el valor máximo de *ganancia* es positivo llevar a cabo la recolocación con los valores registrados, y volver al comienzo del paso 2 con la nueva ruta actual obtenida; en caso contrario finalizar el algoritmo.



## 6. RESULTADOS COMPUTACIONALES

Para examinar la eficacia del algoritmo anteriormente descrito se han realizado tres tipos de pruebas: el primero tiene como objeto comprobar la desviación del óptimo de la solución obtenida; el segundo determinar en que medida la incorporación de este heurístico en los algoritmos exactos descritos por Pacheco, (1.994), y Pacheco y otros, (1.994), para este problema hace reducir el tiempo de computación de estos; y el tercero comprobar la evolución de los tiempos de computación de este algoritmo en función del tamaño del problema.

Tanto la implementación de los algoritmos que se han utilizado, como la programación de los diferentes problemas que han servido de prueba se han hecho utilizando el compilador Borland Pascal (ver. 7.0). El equipo técnico usado es un ordenador personal tipo PC AT i 486dx2 a 50 Mhz.

### 6.1. Desviación del óptimo

Para estudiar la proximidad al óptimo de las soluciones obtenidas por este heurístico se han simulado matrices de distancias de la siguiente forma: se han asignado a cada punto del problema dos coordenadas x e y, cuyos valores son generados aleatoriamente con distribución uniforme entre 0 y 100. La distancia entre cada par de puntos se define como la distancia euclídea correspondiente. En ambos casos se han generado 20 matrices para cada tamaño del problema: 5, 6, 7, 8 y 9 clientes, (correspondientes a 11, 13, 15, 17 y 19 puntos).

A continuación, para cada tipo de matriz, se muestra un cuadro que resume los resultados obtenidos: En estos cuadros se muestra, para cada número de clientes, la desviación porcentual del óptimo, (media, máxima y mínima), así como el número de casos en los que se alcanzó.

En este caso para la ruta inicial se ha elegido aquella con menos distancias entre 10 rutas factibles generadas aleatoriamente y las obtenidas utilizando la adaptación a este problema de los algoritmos de inserción mas cercana y más lejana para el TSP, (en el trabajo de Golden y otros, (1.980), se hace una amplia recopilación y descripción de los principales algoritmos de inserción para el TSP, así como de otros algoritmos constructivos que pueden ser adaptados fácilmente a este problema). Los resultados son los siguientes:

| Número de clientes | Desviación porcentual del óptimo |       |        | Casos en los que se alcanza |
|--------------------|----------------------------------|-------|--------|-----------------------------|
|                    | Mínima                           | Media | Máxima |                             |
| 5                  | 0                                | 0     | 0      | 20                          |
| 6                  | 0                                | 0     | 0      | 20                          |
| 7                  | 0                                | 0     | 0      | 20                          |
| 8                  | 0                                | 0,015 | 0,0302 | 19                          |
| 9                  | 0                                | 0     | 0      | 20                          |

## 6.2. Reducción en el tiempo de computación de los exactos

Como se ha mencionado anteriormente, en los trabajos de Pacheco, (1994), y Pacheco y otros, (1994), se desarrolla una estrategia para el diseño de algoritmos exactos para este problema, a partir de métodos Branch & Bound para el TSP. En los algoritmos exactos para problemas de rutas se puede conseguir, en muchos casos, reducir el tiempo de computación mediante determinadas estrategias, como generar cotas superiores en cada vértice del árbol de búsqueda si el algoritmo es de tipo Branch & Bound, (ver Volgenant y Jonker, (1.982), o Nurmi, (1.991), más recientemente), obtener cotas inferiores mas ajustadas al óptimo mediante métodos de penalización lagrangiana (ver Held & Karp, (1.970) y (1.971), o métodos de Programación Dinámica, (ver Christodides y otros, (1.981), etc. En nuestro caso, vamos a reducir el tiempo de computación realizando dos modificaciones en los algoritmos exactos anteriormente señalados; estas son las siguientes:

- 1.- Partir como solución inicial la obtenida por el heurístico descrito en este trabajo.
- 2.- Cada vez que se llegue a una solución utilizar dicho heurístico para mejorarla.

El objeto de estas modificaciones es obtener rápidamente cotas superiores ajustadas al óptimo para evitar exploraciones innecesarias, y reducir el tiempo de computación. Para verificar estos ahorros de tiempo se han generado 20 matrices de distancias, como en el caso del apartado 6.1.1., para cada tamaño del problema: 5, 6, 7, 8 y 9 clientes. Para obtener una solución inicial se empleó como ruta inicial aquella con menos distancia total entre 50 rutas factibles generadas aleatoriamente. Los resultados son los siguientes:

| Número de clientes | Tiempo de computación en segundos |                      | Reducción porcentual |
|--------------------|-----------------------------------|----------------------|----------------------|
|                    | Algoritmo original                | Algoritmo modificado |                      |
| 5                  | 0,288                             | 0,215                | 25,347               |
| 6                  | 1,396                             | 0,630                | 54,871               |
| 7                  | 17,205                            | 11,362               | 33,961               |
| 8                  | 59,644                            | 44,558               | 25,293               |
| 9                  | 474,427                           | 238,822              | 49,661               |

## 6.3. Evolución de los tiempos de computación

Finalmente se ha realizado un tercer tipo de pruebas destinado a establecer la evolución de los tiempos de computación en ordenadores personales, del heurístico desarrollado en este trabajo, para problemas de mayor tamaño. Para ello se han simulado 20 matrices de distancia como en el apartado 6.1., (distancias euclídeas), para cada tamaño del problema: 10 clientes, 20, ..., hasta 120

clientes (241 puntos). Como ruta inicial se ha elegido aquella con menos distancias entre 10 rutas factibles generadas aleatoriamente y las obtenidas por los algoritmos de inserción:

| Número de clientes | Tiempo medio de computación en segundos |                      |          |
|--------------------|---|----------------------|----------|
|                    | Solución inicial                        | Heurístico propuesto | Total    |
| 10                 | 0,120                                   | 0,035                | 0,155    |
| 20                 | 1,282                                   | 0,321                | 1,603    |
| 30                 | 5,029                                   | 1,516                | 6,545    |
| 40                 | 14,891                                  | 3,212                | 18,103   |
| 50                 | 35,403                                  | 8,295                | 43,698   |
| 60                 | 71,609                                  | 18,775               | 90,384   |
| 70                 | 125,081                                 | 24,044               | 149,125  |
| 80                 | 210,159                                 | 39,886               | 250,045  |
| 90                 | 339,721                                 | 57,293               | 397,014  |
| 100                | 520,928                                 | 101,775              | 622,703  |
| 110                | 761,427                                 | 130,193              | 891,620  |
| 120                | 1074,992                                | 174,439              | 1249,431 |

## 7. CONCLUSIONES

A la vista de estos resultados se llegan a las siguientes conclusiones:

- El heurístico descrito ofrece soluciones muy poco desviadas del óptimo: la solución coincide con la óptima en 99 de los 100 casos; el único caso en el que no coincide se desvía el 0'302 %. Por consiguiente, sobretodo para este último tipo de matrices, la aproximación es realmente eficaz.

- El ofrecer soluciones cercanas al óptimo, (cuando no coinciden con él), permite reducir el tiempo de computación de los algoritmos exactos para este problema cuando se combinan con este heurístico, -(tal como se hace en el apartado 6.2)-; ya que se parte de una cota superior en el vértice inicial muy ajustada al óptimo, con lo que se rechazan más exploraciones innecesarias.

- El tiempo de computación que emplea es insignificante si se le compara con el que emplean los exactos existentes. Esto hace que el se puedan resolver problemas de mucho mayor tamaño. En el apartado 6.3. se resuelven problemas de hasta 241 puntos, pero la evolución de los tiempos de computación permite adivinar que se pondrían resolver problemas de mayor tamaño, en un tiempo

aceptable, con ordenadores o compiladores que soportaran matrices de distancia de mayor dimensión.

Concluir finalmente que el algoritmo heurístico propuesto resulta extremadamente eficaz al ofrecer soluciones muy cercanas al óptimo, -sobretudo con distancias euclídeas-, en un tiempo de computación mucho menor que los exactos, lo que permite poder resolver problemas de mayor tamaño.

## 8. REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFIA

1. CHRISTOFIDES, N., MINGOZZI, A. and TOHT, P. "State-Space Relaxation Procedures for the Computation of Bounds to Routing Problems". *Networks*, vol.11, nº 2, (1.981a), 145-164.
2. GOLDEN, B., BODIN, L. DOYLE, T. and STEWART, W.Jr. "Approximate Traveling Salesman Algorithms". *Operations Research*, vol.28, nº 3, parte II, (1.980), 694-711.
3. HELD, M., and KARP, R.M. "The Traveling Salesman Problem and Minimum Spanning Trees". *Ops.Res.* 18, (1.970), 1.138-1.162.
4. HELD, M., and KARP, R.M. "The Traveling Salesman Problem and Minimum Spanning Trees: Part II". *Mathematical Programming I*, (1.971), 6-25.
5. LIN, S. "Computer Solutions to the Traveling Salesman Problem". *Bell Syst.Tech.Jou.*, vol 44, (1.965), 2245-2269.
6. NURMI, K. "Traveling Salesman Problem Tools for Microcomputers". *Computers & Ops.Res.* Vol. 18, nº 8, (1.991), 741-749.
7. O'BRIEN, S.K. y NAMEROFF, S. Turbo-Pascal 7: Manual de Referencia. *Osborne McGraw-Hill*. Madrid, 1.993.
8. OR, I. "Traveling Salesman Type Combinatorial Problems and their Relations to the Logistics of Blood Banking". Ph.Thesis, Dpt. of Industrial Engineering and Management Sciences, Northwestern Univ. (1.976).
9. PACHECO, J. "Problemas de Rutas con Ventanas de Tiempo". *Tesis Doctoral leída en el Dpto de Estadística e I.Optva de la Facultad de Matemáticas de la U.Complutense de Madrid*. Mayo 1.994.
10. PACHECO, J., GARCIA, A. y ARAGON, A. "Problemas de Ruta con Carga y Descarga en Sistemas LIFO". *XXI Congreso de Estadística e I.Optva celebrado en Cálella en Abril de 1.994*.

11. SOLOMON, M., BAKER, E. and SCHAFFER, J. "Vehicle Routing and Scheduling Problems with Time Window Constraints". In *Vehicle Routing: Methods and Studies*, (Studies in Management Sciences and Systems, vol.16), eds: GOLDEN, B.L. and ASSAD, A.A., (1988a), Nort-Holland, 85-106.

12. VOLGENANT, T. and JONKER, R. "A Branch and Bound Algorithm for the Symmetric Traveling Salesman Problem based on the 1-tree Relaxation". *Eur.J.Ops.Res.* 9, (1982), 83-89.



# EVALUACION DEL RENDIMIENTO DE LOS SISTEMAS DE INFORMACION

JOSE MIGUEL RINCON  
Fac. C. Económicas y Empresariales  
Univ. País Vasco (UPV/EHU)

## EL SISTEMA DE INFORMACION

Para SENN el *Sistema de Información* en una empresa es como cualquier otro subsistema componente de su diseño y de su actividad: tiene una meta definida e interactúa con otros elementos de la compañía. La tarea de los sistemas de información consiste en procesar la entrada de información, mantener archivos de datos en relación con la actividad de la empresa y producir informes y otras salidas (SENN, 1984; pg. 15).

En este mismo sentido se puede dar una definición sintética del SI que recoja los requisitos expresados: “Conjunto integrado de personas y equipos que tienen por objeto proveer a una organización de la información necesaria para apoyar las operaciones, la administración y la toma de decisiones” (M. MONFORTE, 1994; pg. 19).

Para resumir las ideas anteriores y disponer de un concepto que se acomode bien a la idea de la empresa —o del ente de gestión— como un sistema económico y social podemos decir que el Sistema de Información es un aspecto de una organización determinada que proporciona, usa y distribuye información junto con los recursos organizativos asociados, tales como: recursos humanos, técnicos y financieros.

Actualmente es difícil que se considere la posibilidad de que un SI no se formalice informáticamente de forma que se establezca un complejo dispositivo de estudio de las condiciones de funcionamiento del ente que realiza las actividades de gestión económica y social —sea o no una empresa—; de análisis y diseño de sus flujos de información y de desarrollo de programas informáticos para que las aplicaciones y tareas de los subsistemas operacionales y decisoriales queden finalmente automatizados. Es decir se va a preparar un *software informático* que explotado sobre una *base tecnológica* -formada por ordenadores de todo tipo- recubrirá todos (o la mayor parte) de los circuitos informacionales de ese ente.

De esta forma —y para este propósito— es necesario considerar al SI como el conjunto de masas de información ordenadas y estructuradas, reglas de tratamiento y elaboración de las informaciones, recursos técnicos y humanos empleados en el tratamiento, normas y metodologías organizativas y formalizaciones documentales que en un *ente de gestión económica* y social sirven para realizar un uso óptimo de la información y facilitar el logro de sus objetivos.

El diseño y construcción de un SI requiere ajustarse a unos estrictos principios para su formación que obligan a tener en cuenta siempre los siguientes requisitos:

- 1 El conocimiento adecuado de las funciones de la empresa y la existencia de una buena metodología organizativa.
- 2 Concepción de la empresa como un sistema gestor global.
- 3 El conocimiento y dominio del entorno de la organización empresarial desde el punto de vista informacional.
- 4 El conocimiento y la formalización, en mayor o menor grado, de los flujos de información.
- 5 La informatización de los flujos de información.
- 6 La puesta de relieve de los tipos de información que están presentes en la empresa: acompañante, generada y decisoria.

Los componentes empresariales a tener en cuenta en la formación y mantenimiento de un SI son:

- la organización empresarial: sus métodos y normas;
- la política informacional sustentada por la empresa;
- los agentes utilizadores de los recursos y explotadores de las aplicaciones;
- la información formada tanto por los datos y resultados de la actividad informática, como por los mensajes referentes a la propia constitución del SI;
- la base técnica o recursos hard;
- la base lógica o soft;
- el diseño del propio SI.

Cuando en una empresa se toma la decisión de informatizar el SI la mayor parte de la información de los tratamientos y de las normas de gestión van a quedar automatizados en un nuevo subsistema denominado *Sistema de Información Automatizado (SIA)*.

Se puede decir que el SIA es un componente -un subconjunto- del SI que tiene como objetivo primordial formalizar todas las masas, flujos y procesos de información que pueden ser soportados en uno o varios ordenadores -que utilizarán un determinado software técnico y aplicativo- y dentro de una metodología informática bien establecida.



El SIA tiende a ser *integral e integrado* lo que quiere decir que *todos* los trabajos o aplicaciones del SGE estarán informatizadas e interrelacionadas, aunque es posible que en algún caso esta meta no pueda ser alcanzada.

Para llevar a cabo el diseño y la construcción del SIA es preciso pasar por una serie de estudios y acciones que van desde el conocimiento del *mundo real* en el que actúa el SGE hasta la explotación y mantenimiento de los programas del software de aplicación, pasando por la selección e instalación del hard. Todo esto debe concretarse en un *Plan Informático* que desarrolle la estrategia general del ente de gestión para informatizar su actividad económica, social e industrial y conseguir su finalidad con la máxima rentabilidad.

Esta estrategia puede dividirse en tres partes:

- 1 *Estrategia de definición* que sirve para establecer las demandas de información y para identificar los flujos informacionales.
- 2 *Estrategia de diseño* que define las masas de información (ficheros y BD's) y establece las relaciones entre los datos tanto dentro de cada fichero (endotratamiento), como entre ficheros (exotratamiento). Se definen aquí las aplicaciones o trabajos a informatizar, así como las interrelaciones entre las mismas con vistas a establecer un modelo integrado de tratamiento de la información.
- 3 *Estrategia de realización* que establece las condiciones de uso y alcances del SO, instala el software de aplicación, diseña y genera las BD's y elabora y prueba los programas de la instalación.

Dentro del Plan Informático se plantea un *Proyecto General* de informatización, que puede dividirse en varios subproyectos. Su finalidad es soportar las tareas y aplicaciones operacionales y decisoriales en ordenadores mediante el desarrollo y uso de un software.

El cumplimiento de la finalidad del Proyecto exige plantearse y llevar a cabo un *ciclo de vida* que se puede definir como el conjunto de estudios, análisis, acciones, programas y formalizaciones documentales que a lo largo de un eje de tiempo permiten diseñar, construir y explotar los proyectos informáticos de un SIA.

Actualmente es imposible realizar la informatización de un ente de gestión económica y social sin un proyecto que estudie desde el estado del mundo real en el que el ente actúa hasta la implementación de los productos del software en las plataformas hardware instaladas. Se trata de un verdadero proceso de *ingeniería* cuyo *rendimiento* deben ser controlado en el momento de su preparación e implementación, en su desarrollo y en su explotación. Naturalmente cuando llegue un momento en que no se cumpla el objetivo prioritario del proyecto de mejorar la situación de la empresa será necesario estudiar e implementar nuevos procedimientos y métodos para adaptarla a la realidad existente; debe en este caso plantearse y realizarse una *reingeniería* del proyecto (HAMMER y CHAMPY, 1993).

Estamos, consiguientemente, ante un proceso dialéctico (como la mayor parte de los económicos) que debe adaptarse a la realidad económica, social y política de cada periodo de tiempo. La empresa o ente de gestión se mueve dentro de un ambiente regido por unas variables y unos parámetros macro y microeconómicos que la obligaran a adaptar sus estructuras y ordenamientos metodológicos a los cambios; asimismo la propia política económica de la empresa originará cambios en sus actividades. Todos esos cambios suponen alteraciones de la información tanto en sus fuentes y destinos, como en los flujos de datos que interrelacionan los subsistemas empresariales. El sistema de información quedará alterado y el SIA establecido se resentirá de esas alteraciones y forzosamente deberá plantearse también cambios en profundidad: en principio *adaptativos* y posteriormente *perfectivos* siguiendo la terminología de BURTON SWANSON; los pequeños retoques *correctivos* han servido únicamente para mantener el sistema informático en un nivel adecuado de respuesta (BURTON SWANSON, 1988; pg.65).

EL ciclo de vida de un proyecto dentro del SIA se compone de dos fases, que a su vez se forman de varias etapas. La primera fase es la de la concepción del proyecto y tiene dos etapas que cubren el estudio del “mundo real” que sirve de entorno al sistema de gestión y el análisis de sus actividades; se llaman: factibilidad y diseño. Se trata de una *fase de diseño* del SI y del SIA. En la segunda fase, con sus etapas de análisis funcional, programación, implementación, explotación y mantenimiento; se desarrolla y construye el software y se prueba y se implanta en los ordenadores junto con las bases de datos. Podríamos llamarla fase de *desarrollo del software*.

El estudio del rendimiento del SIA debe ser planteado no sólo en la fase del *software*, sino también en la de *diseño*, puesto que en un porcentaje importante del costo aquella depende de ésta. La dificultad estriba en el hecho de que así como para el software se pueden utilizar métricas sobre datos que sean cuantificables, para el diseño la mayor parte de la información sobre su estado y funcionamiento es nominal y frecuentemente está poco estabilizada.

## LOS ENTORNOS DE DISEÑO Y DESARROLLO

Parece lógico suponer que el rendimiento de un SI y de su formalización informática deba ser controlado sin perder de vista el recinto organizativo, la metodología y la técnica de la empresa u organismo correspondiente. Esto es lo mismo que ocurre cuando se audita y evalúa el rendimiento económico de tal empresa. Es preciso tener en cuenta en que sector económico dicha empresa está inserta, cuales son sus mercados (ex-ante y ex-post) y su incidencia en ellos, cual es su ambiente financiero y fiscal; es decir, cual es su *entorno* o su conjunto de entornos.

También es cierto que cualquier economista dirá que el entorno de un sistema de gestión económica no es todo el universo económico y social existente (entorno potencial), sino el *subconjunto posible* de sus relaciones macro y microeconómicas y el espacio de intercambio de sus ‘inputs’ y de sus ‘outputs’; lo que podríamos definir como el espacio que está limitado por su especificidad.

Cualquier organismo biológico desarrolla su actividad en un *espacio acotado de su entorno* (‘environmental niche’ en la terminología americana) de tal forma que se le reconozca y evalúe

por la posición relativa que ocupa dentro del rango completo de las variables de ese espacio o entorno. Para desarrollar su actividad el organismo tendrá que intercambiar estímulos y respuestas con ese acotamiento de entorno y será un sistema abierto, de acuerdo con las ideas y teorías de Bertalanffy y los sistemistas (BERTALANFFY, 1973). En mi opinión no sólo va a intercambiar estímulos y respuestas -datos y resultados- para activar sus operaciones y conseguir su finalidad, sino también va a utilizar información para el diseño y construcción de su propia estructura sistémica; de aquí la importancia de delimitar correctamente este espacio acotado (RINCON, 1985).

En el caso del *Sistema de Información* -un subsistema dentro del sistema de gestión, de acuerdo con lo dicho en el punto anterior- y de su formalización en un SIA, el diseñador, conceptor y analista debe definir también un espacio acotado, que vamos a llamar *nicho de entorno* dentro del cual se va a mover el SI. En la formación de este nicho van a intervenir tres ambientes diferentes con grupos también diferentes de variables, en número, modo y cuantía, para cada uno de ellos.

El primer entorno es el de *organización* ( $E_1$ ) que proporciona las variables de metodología de la organización del ente económico que se informatiza, los objetivos del sistema, las normas de relación con los entornos exteriores, la estructura funcional y jerárquica de la organización, las posiciones del factor humano y la descripción de las tareas económicas y sociales necesarias para cumplir los objetivos (administrativas, financieras, productivas y contables).

El segundo entorno es el *tecnológico* ( $E_2$ ) cuyas variables se refieren a las alternativas tecnológicas con las cuales debe ser construido el SIA: capacidades de respuesta de tratamiento y Entrada/Salida del hardware, capacidades de almacenamiento para las bases de datos, acondicionamiento y desarrollo del software, conocimiento del mercado informático y planificación del futuro.

El tercer entorno es el *informativo* ( $E_3$ ) cuyas variables son las que sirven para definir, diseñar e implementar en las máquinas las masas de información (ficheros, bases de datos, mensajes y enlaces de comunicaciones), para definir las demandas de información (y sus niveles) de los usuarios (departamentos, secciones, agentes activos) y para absorber los datos económicos, estadísticos y sociales desde el exterior.

Estos entornos no son absolutamente compatibles en el sentido de su factibilidad de sus variables; lo que quiere decir que una parte del dominio de las variables de uno de los entornos no es sensible para el dominio de las variables de otro de ellos y por lo tanto sólo algunas de sus ocurrencias pueden ser acopladas a algunas ocurrencias del otro. De una manera corriente podemos decir que no toda la organización es informatizable en un momento dado; o que existe un determinado nivel de tecnología no apto para el grado de organización existente en la empresa.

Esta parcial incompatibilidad, no obstante, no se da entre todos los entornos de la misma manera, ni con la misma intensidad, sino que existe un *orden* de incompatibilidades que podemos expresar de la siguiente forma:

$$E_1 \longrightarrow E_2 + E_3; \quad E_2 \longrightarrow E_1; \quad E_3 \longrightarrow E_1$$

Lo que es factible desde el punto de la organización del sistema de gestión, no lo es desde el punto de vista de la tecnología junto con los requerimientos informacionales. Finalmente los requerimientos informacionales —especialmente de las demandas de información de los usuarios— pueden ser imposibles de encajar en la metodología organizativa.

En estas circunstancias el *nicho de entorno* (NE), que va a servir al Sistema de Información Automatizado (SIA), tiene que ser definido como una intersección de los tres entornos. El resultado de esa intersección es un rango de factibilidad que será el marco para la concepción, el diseño la implantación y utilización del SIA. Este “marco”, fijado por el NE, debe ser mantenido como algo instucional para el ente de gestión para que en cualquier momento del ciclo de vida del sistema pueda ser controlado su rendimiento; y para que en su momento, si fuera necesario pueda iniciarse su reingeniería.

En la figura 1 se muestran las participaciones de los tres entornos en la generación del nicho de entorno en donde se va a insertar el SIA.

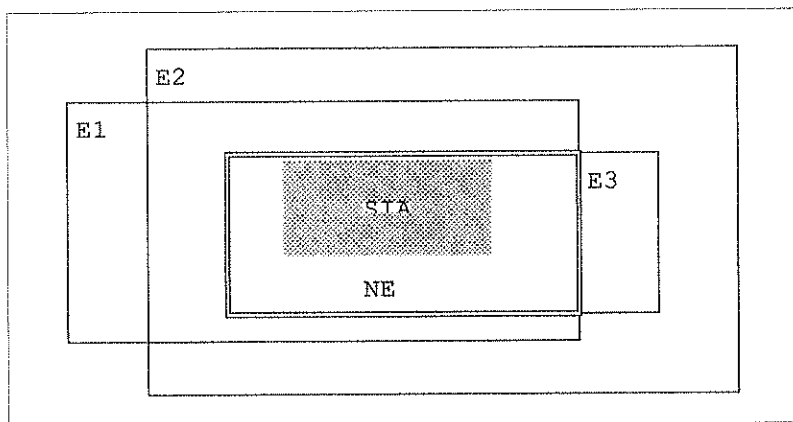


Figura1.

E1 = Entorno organizacional  
 E2 = Entorno Tecnológico  
 E3 = Entorno Informacional  
 NE = Nicho de entorno  
 SIA = Sistema de información automatizada

La definición y estabilización de este *nicho de entorno* es esencial para la construcción del sistema informático y en su dominio de variables tiene que situarse tanto la información *de adquisición*, la que se utiliza para definir, diseñar y desarrollar el SAI, como la *transaccional*, la que se emplea para explotar el software en un hardware determinado. La construcción del NE va a fijar las características definitivas del SIA y consiguientemente va a servir como medio inicial y primario para la medida de su calidad.

Los entornos de Organización e Información generalmente están muy próximos, siendo el de Información el más envolvente. Sin embargo existirá casi siempre una tendencia del NE a ocupar todo el espacio de intersección entre los otros tres. La informatización integrada del sistema de gestión procurará que el conjunto NE sea finalmente la suma lógica de los otros tres, como se expresa en la ecuación de la figura 2.

$$NE \supseteq \{E_1, E_2, E_3\} \rightarrow \bigcup_{i=1}^3 (E_i)$$

El *nicho de entorno* es, por lo tanto, una expresión de las factibilidades de todos los entornos descriptivos del sistema de gestión económica y social y dentro de él -y con sus variables- los técnicos de sistemas, analistas y usuarios deben concebir, diseñar, analizar y construir el SIA.

Dos características de este NE hay que tener muy en cuenta:

- 1 La *variable tiempo* es muy importante en el análisis y definición de los dominios de variables en cada entorno y consiguientemente en la obtención del NE, puesto que una situación definida en un momento dado puede cambiar a lo largo del eje dinámico temporal tanto en el desarrollo, como en la implementación del software y explotación de las aplicaciones. Ya hemos indicado que con el trascurso del tiempo la "tendencia a la totalidad" por parte del NE -indicada en el segundo término de la ecuación anterior- se hace patente.
- 2 Las variables de cada dominio son muy diferentes en cuanto a modo y grado de formalización y aquí radica una de las dificultades del diseño de los proyectos informáticos. Actualmente se están investigando herramientas para salvar estas dificultades: EURO-METODO, un proyecto de la UE ha avanzado mucho en este camino.

## DE LA CRISIS DE LA BASE TECNOLÓGICA A LA CRISIS DE LA BASE LÓGICA

En los últimos diez años la industria informática ha pasado por uno de sus peores momentos desde el punto de vista de cifra de negocios y consiguientemente de producción y licenciamiento de recursos humanos de todo tipo. Las razones básicas de esta crisis no cabe duda de que son las mismas que las de cualquier otro sector económico en la coyuntura actual. Sin embargo en Informática se han dado ciertas circunstancias estructurales referentes al tamaño, tipo e instalación de las máquinas que han afectado profundamente al sector. Esta crisis del hardware ha reordenado el sector no sólo también desde el punto de vista de la participación en el mercado de las empresas hasta entonces más características, sino por la aparición de grupos empresariales absolutamente inéditos.

El desencadenante de esta crisis ha sido la llegada de la microinformática y su potenciación exponencial en muy pocos años. Por una parte los grandes constructores de máquinas, con una enorme estructura de personal y potentes equipos de investigación y de mantenimiento de las plataformas de gran potencia y precio ('mainframes' y minis potentes) no han podido atender a la gran expansión de la base tecnológica, con la agilidad de empresas más pequeñas que al trabajar con productos standard y montados como mecanos han penetrado muy rápidamente en el mercado. Por otra parte la potencia de tratamiento y la capacidad de respuesta de los microordenadores y de las 'workstations' crecen todos los días y se ajustan cada vez mejor a las necesidades de los usuarios; el fenómeno del 'downsizing' ha pasado de ser una polémica -una falsa polémica, desde mi punto de vista- a la categoría de modelo y muchas empresas medianas y grandes están proyectando sus SIA's basándose en modelos del tipo cliente/servidor y corporativo/departamental con una amplísima base microinformática.

También hay que tener en cuenta la evolución -casi revolución- de los usuarios que han pasado de ser meros utilizadores de las máquinas y simples analizadores de resultados impresos a usuarios especializados que no sólo manejan productos del software de aplicación standard (software productivo), sino que incluso son capaces de programar y alterar una cierta gama de resultados, adaptándose dinámicamente a sus codiciones de acción gestonaria. Los agentes activos de las empresas y entes de gestión exigen diseños de proyectos y desarrollos software orientados a sus propios y a veces muy particulares problemas.

Lo que ha sucedido finalmente es que la construcción de software de todo tipo: standard o propietario, se ha disparado. Las compañías constructoras de software están sacando productos nuevos; y también nuevas funcionalidades y aplicaciones se ponen a disposición de las empresas. En este mismo orden de cosas también el diseño de los proyectos se ha hecho muy complejo.

Esto nos lleva a la conclusión de que vivimos el tiempo del software frente a la antigua preponderancia del hardware en el desarrollo y explotación de los proyectos informáticos. Por esta razón los problemas de rendimiento del software han crecido también exponencialmente y se empieza a vivir un ambiente de crisis en la búsqueda de mejores y más rentables soluciones para la programación y explotación de las viejas y nuevas aplicaciones y tareas de los sistemas de información.

"Hasta hace poco se prestaba muy poca atención en la literatura sobre sistemas de información a los sistemas ya instalados y operacionales. La atención se centraba en el diseño, desarrollo e implementación de nuevos proyectos. Actualmente, no obstante, con un gran número de SI's funcionando su 'cuidado y alimentación' están demandando esfuerzos importantes en materia de organización" (BURTON SWANSON, 1988; pg. 74).

Estas frases de 1988, siete años más tarde ya no constituyen una novedad, sino una gran preocupación entre los responsables de los SI de todo el mundo. El problema se llama ahora *aseguramiento de la calidad* y se busca establecer normas, métodos y métricas que permitan definir, controlar y corregir, en su caso, la calidad de los sistemas de información automatizados. Metodologías tales como BOOTSTRAP, SPICE, EUROMETHOD y otras están dando la señal de partida el rendimiento de los proyectos con herramientas adecuadas y rentables.

Ha habido, no obstante, una permanente señal de alarma encendida durante toda la década de los 80 en los sistemas informáticos. Se trata de la enorme cantidad de horas/hombre y de tiempo invertido en el mantenimiento del software de aplicación implementado; así como las inversiones “de parcheo” para hacer funcionar las aplicaciones mal diseñadas, o mal adaptadas a sus plataformas hard, o lo que es peor mal definidas para acomodarse a las demandas de los usuarios y consiguientemente mal explotadas.

Es verdad que la finalidad principal que guía a los investigadores que están construyendo y probando las herramientas antes citadas es más el obtener una *certificación de calidad* del estilo de la norma ISO9000; especialmente en los proyectos gubernamentales o de grandes empresas de servicios públicos. Pero también actualmente se está poniendo en juego el análisis del rendimiento de los SI y de los SIA, como una parte importante de las auditorías informáticas. El software es muy caro, la inversión atribuida al desarrollo del proyecto alcanza cifras importantes y el costo del mantenimiento ha ido creciendo de una manera alarmante. Todo lo cual hace presagiar reingenierías tormentosas; especialmente si va a coincidir el cambio del software, con el cambio del modelo del sistema informático y la inversión en nuevo hard.

Una de las razones de la crisis y del bajo rendimiento sobrevenido a un proyecto en marcha es precisamente el hecho —o la paradoja— de que ese proyecto se ha llevado a cabo. Conforme los subsistemas del ente económico y social y sus agentes activos —es decir los usuarios de todo tipo, colectivos o individuales— han basado sus actividades y aplicaciones en el hard, el soft y las comunicaciones han logrado mejorar sus circuitos de gestión y poco a poco el SI se ha ido empobreciendo relativamente a la mejora de la gestión económica. Relativamente se ha producido un decaimiento de los rendimientos del SI.

Entre el avance y la mejora de la calidad de la gestión por el uso, entre otras cosas, de productos informáticos los SI no son capaces de adaptarse con rapidez; se origina una *función de retardo* entre el sistema de gestión y el de información. Se produce una crisis que al replicarse por muchas empresas y organismos da lugar a la actual *crisis general del software*.

Se pueden producir varias situaciones:

- 1 El rendimiento general del SI ha descendido exclusivamente por el decalaje entre la nueva situación gestionaia y el SIA implantado.
- 2 La calidad del software no es correcta para las demandas informacionales de los usuarios.
- 3 La base tecnológica no se ajusta a los resultados finales (‘performances’) exigidos de velocidad y seguridad, bien sea por envejecimiento de las máquinas, bien por inadecuación del hard al diseño del sistema de información, bien por obsolescencia de las máquinas debido a los cambios en la tecnología.
- 4 El modelo de gestión no se ajusta a los nuevos parámetros microeconómicos del universo en el que se mueve la empresa u organismo económico.

Facilmente se deduce de la simple exposición de estas cuatro situaciones que las soluciones para recomponer el nivel de rendimiento inicial o para conseguir los resultados finales ('performances') en los casos de errores de diseño serán bastante diferentes unas de otras; y en algún caso excederá del ámbito del SI y de su formalización informática.

La crisis del software sea cualquiera la situación en la que nos encontremos supone en cualquier caso una *inadecuación* de los resultados obtenidos por el Proyecto que se ha puesto en funcionamiento y las demandas de información expuestas por los usuarios; cuando esa inadecuación llega a convertirse en ruptura quiere decir que la funcionalidad del software está en profundo desacuerdo con la usabilidad de sus prestaciones en las aplicaciones del sistema de gestión.

La evaluación del rendimiento es un control general del ciclo de vida de un proyecto informático y permitirá la detección de esa ruptura y la puesta en marcha de procesos de mantenimiento, de rediseño e incluso de reingeniería si fuera preciso.

## EVALUACION DEL RENDIMIENTO Y ASEGURAMIENTO DE LA CALIDAD DE UN SI

La pregunta primaria que podemos hacernos en el momento de evaluar un SIA es la de ¿por qué un proyecto informático es malo? Basandonos en las cuatro situaciones de crisis que antes hemos expuesto podemos encontrar las respuestas en el cuadro siguiente:

| RAZONES                     | FRECUENCIA |
|-----------------------------|------------|
| El diseño es malo           | 0%         |
| El software es malo         | 50%        |
| La base tecnológica es mala | 20%        |

Los porcentajes nos indican que la causa más frecuente de la disminución del rendimiento de un proyecto es la falta de adecuación de la *funcionalidad* de los programas desarrollados o adaptados de un software standard a la *usabilidad* de las aplicaciones por los usuarios. También podemos darnos cuenta que el rendimiento del hard no suele ser un problema demasiado grave; en cualquier caso la selección de los recursos técnicos se hace en el diseño, luego el bajo rendimiento de las máquinas se deberá casi siempre a su mala adaptabilidad al soft y viceversa.

Las tres razones enunciadas dan lugar a tres líneas de examen y control del rendimiento de los proyectos y en definitiva del SIA y del Sistema de Información requerido por la empresa. Las tres tienen el mismo *dominio de variables* que corresponden a las que dispone el *nicho de entorno*



(NE) que exponíamos en la figura 1; pero el control de su rendimiento se hace de distinta forma: Examinemos las dos primeras:

En lo que se refiere al *diseño* debemos adoptar el punto de vista de *análisis de posibilidad* que consiste en la adecuación de los vectores organizativos -económicos y sociales, de oportunidad y de rentabilidad económica- a la producción controlada de información. Los puntos a analizar serán los siguientes:

- 1 *Definición del nicho de entorno* de una manera adecuada y correcta con las herramientas proporcionadas por una buena metodología organizativa. Para poder controlar el rendimiento final es necesario establecer la taxonomía más amplia posible del dominio de variables del NE: definición, formalización lógica y cuantitativa (si es posible) de cada variable y su espectro de acción, descripciones de entornos operativos y sus niveles, descripción de los puestos activos, métodos de organización, normativa de procedimientos de tratamiento de la información, formas de captura y recuperación, demandas informacionales, métodos de comunicación, posición de los departamentos con respecto a la corporación (modelo informático), factibilidad financiera, factibilidad organizativa y otras de menor cuantía.
- 2 Existencia de una *documentación* concentrada y ordenada en dossiers por cada fase y etapa del ciclo de vida; cada dossier debe estar encadenado con el siguiente y en sentido contrario cada uno de ellos —a partir del 2º nivel— debe indicar el encadenamiento en ‘feed-back’ con el anterior. Hay que tener en cuenta que el control del proyecto se complica a partir de la segunda fase del ciclo de vida —la construcción del software—, puesto que las primeras etapas (fase de diseño) se pueden considerar como unitarias ya que buscan estudiar la globalidad integral del sistema. Mientras que en la segunda fase generalmente —salvo en empresas o departamentos muy pequeños— se hace “en cascada”; es decir varias aplicaciones a la vez con decalajes entre cada etapa a partir del análisis funcional. Los ‘feed-back’ en cascada son muy inestables desde el punto de vista de los deseos de asegurar la calidad del software que se está poniendo en marcha (RINCON, 1976; pgs. 97-99).
- 3 Formulación de los *flujos de información* de los circuitos gestionarios, económicos y sociales, de la empresa u organismo en forma de grafos orientados y ponderados. La comparación de estos grafos con los análisis funcionales de desarrollo del software proporciona un excelente grado de rendimiento y aseguramiento de la calidad del proyecto. Se trata, en resumidas cuentas, de poner en contacto (y me atrevería a decir en “estado de consenso”) a los dominios de variables de organización con los dominios de información y tecnología dentro del NE. La buena formalización de este concepto es importante; “el flujo de datos debe ser muy claro para que el campo de intervención de una entrada y el origen de cada salida sean acotadas sin dificultad” (THORIN, 1988; pg. 84).
- 4 *Implicación de los usuarios* en el proyecto. Tiene dos facetas: en el diseño proporciona un punto de vista correcto de las demandas de información; en la explotación es el término final de la adaptación del software a los resultados deseados.

- 5 El *valor de la información* es un término difícil de calcular y calibrar, puesto que tiene un montante fijado por el costo del diseño, del desarrollo y de la implementación, que podemos considerar como *valor económico* y tiene otra faceta ligada a su necesidad después de que su uso esté consolidado y que podemos llamar *valor de explotación*.
- 6 La *estabilidad de las soluciones* mide la sensibilidad de las soluciones implementadas con respecto a los cambios de situación que ocurren en las organizaciones económicas una vez que el SIA ha sido implementado y está en la fase de explotación. Cuanto más estable sea el SI con respecto a esos cambios mayor será su calidad y mejor será su rendimiento.
- 7 *Valoración de guías y métodos de relación del cliente y el proveedor*. Se trata de metodologías de ayuda a la concepción del sistema informático y de desarrollo del software, por ejemplo EUROMETODO que es una metodología desarrollada por un programa europeo 'ad hoc' y cuyos objetivos son facilitar la mutua comprensión entre los demandadores de informática (clientes, usuarios) y los ofertantes de servicios y productos informáticos (constructores, proveedores); así como la racionalización de sus interrelaciones en un mercado abierto internacional.
- 8 *Modelo informático* elegido por los sistemistas para el diseño del SIA y parámetros que lo sustentan.

Desde el punto de vista del *software* hay que tener en cuenta que en actualmente hay dos vías diferentes de implementar soft: los programas standard y preestablecidos y los programas desarrollados 'ad hoc' por los usuarios. En todos los casos la evaluación se hará en el ámbito de lo que se denomina *análisis de utilidad* que consiste en la adecuación de los *inputs informacionales* a sus correspondientes *outputs*.

- 1 En cuanto al *software standard* es cada vez más corriente construir las aplicaciones con este tipo de paquetes programáticos productivos que ya cubren un amplísimo espectro de soluciones para la mayor parte de las empresas de cualquier sector; únicamente las grandes corporaciones y los sectores económicos más especializados como banca, transportes aéreos, grandes empresas de servicios y algunos otros necesitan software especializado; y en cualquier caso la tendencia creciente a los modelos corporativos/departamentales y cliente/servidor hace que si bien la información corporativa requiere software especial, una parte importante de la gestión departamental se soporta sobre software ofimático y productivo (CASHIN, 1993). El aseguramiento de la calidad debe basarse, en este caso, en la decisión final de la selección del software: ¿por qué? ¿para qué y con qué panorama? ¿por qué tal tipo? ¿por qué tal marca? ¿por qué tal implementación? ¿cual es su futuro desde el punto de vista de su discontinuidad? ¿cual es el ritmo de sus versiones? ¿en que franja de mercado está situado su proveedor? ¿que soporte de mantenimiento tiene?
- 2 La *valoración 'ex-ante'* de este tipo de software es bastante fácil puesto que al ser productos de mercado ya existen pruebas alfa, beta, 'benchmarks' e incluso en los produc-

tos de más categoría las empresas constructoras y distribuidoras se ha preocupado de asegurar su calidad mediante certificaciones de tipo ISO9000. Esto es cada vez más corriente en los llamados productos ofimáticos (SGBD's, paquetes de análisis, de presentación, de diseño industrial, de autoedición, etc.).

- 3 El control del *rendimiento 'ex-post'* del *software standard* debe ser medido utilizando herramientas como las indicadas anteriormente; lo que ocurre es que estas herramientas son caras y se adaptan bien a las grandes corporaciones y no tanto a las pequeñas y los subsistemas departamentales. El rendimiento debe ser medido contrastando las demandas de las usuarios y los 'layouts' de resultados con los informes, pantallas y consultas obtenidas. Hay que tener en cuenta velocidades de pantalla, de superposición de ventanas, número de ventanas para resolver una situación, velocidad de las redes 'lan' y 'wan', de la acomodación de dispositivos complementarios a los programas y ergonomía de los programas.
- 4 En el caso del *software ad-hoc* el control de rendimiento *ex-ante* es similar a lo indicado en el punto 1 anterior, pero ahora las preguntas irán dirigidas a la empresa consultora que va a desarrollar los programas (¡no pensamos que actualmente haya muchas empresas que produzcan software con su propio personal!).
- 5 La investigación sobre el rendimiento *ex-post* posiblemente se centrará sobre la solución dada a las aplicaciones y muy especialmente sobre la *metodologías* empleadas, *herramientas case, prototipaje*, fidelidad de los juegos de prueba a las intenciones de las aplicaciones, ergonomía del modelo informático para el usuario final y respuesta de las comunicaciones (ergonomía de los dominios y palabras clave, las capacidades de recuperación del correo electrónico y otras similares). Indudablemente es un control necesario la adecuación de los *funcionales* a los desarrollos programáticos y sobre todo a la implementación de los productos soft.
- 6 En el caso del software la *documentación* más importante está formada por el dossier funcional y los grafos de tareas, cadenas y unidades de tratamiento, los diseños de las entidades de las BD's, los manuales de servicio, los manuales de producción los cuadernos de carga de explotación (incidencias, 'planning', 'timing') y los 'accounting' de operación. La calidad de los manuales de servicio y producción del soft standard son muy importantes para medir la calidad de los proyectos y del sistema (pantallas ayudadas con 'help' en línea, uso de hipertexto, ayudas de interface en modelos 'workflow' y trabajo en grupo y otras relacionadas con las comunicaciones).

## CONCLUSION

Quizá sea cierto que "la *crisis del software* ha llegado a ser una entrada en el vocabulario de nuestra disciplina [la Informática] y debemos ir acostumbrandonos a vivir con esa crisis" (KOCH, 1993; pg. 387). Pero en mi opinión se trata más que de una situación de desánimo de un

toque de alerta hacia el cuidado del software y para la fijación de un cuerpo de normas, metodologías y controles que nos permitan preparar buenos proyectos en un futuro muy próximo en el que la implantación de las herramientas informáticas y la difusión de la información se hace global a través de las comunicaciones (autopistas de la información, tareas workflow, interconexión información multiforma, etc.).

La crisis —y el reto correspondiente— consiste en diseñar (o mejorar lo que está ahora apareciendo) y poner al alcance de los sistemas de gestión y de información instrumentos de control de rendimiento y de aseguramiento de la calidad tanto del software como del diseño del propio sistema de información. La investigación en ese sentido debe ir acompañada, como siempre en Informática, por una toma de conciencia y un aumento del nivel de conocimiento por parte de los usuarios.

## BIBLIOGRAFÍA

BERTALANFFY, L. (1973) - *Théorie Générale des Systèmes*. DUNOS. Paris

BURTON SWANSON, E. (1988) - *Information System Implementation*. IRWIN. Homewood (Illinos)

CASHIN, J. (1993) - *Client/Server Technology* COMPUTER TECHNOLOGY RESEARCH. Charleston

HAMMER, M. y CHAMPY, J. (1993) - *Reengineering the Corporation*. HARPER COLLINS. Nueva York

IVES, B. y OLSON, M.H. (1984) - "User involvement and MIS succes: a review of Research". MANAGEMENT SCIENCE, no. 30

KOCH, G.R. (1993) - "Process assesment: the BOOTSTRAP approach". INFORMATION AND SOFTWARE TECHNOLOGY, vol. 35, no. 6/7

MONFORTE, M. (1994) - *Sistemas de Información para la Dirección*. PIRAMIDE. Madrid

RINCON, J.M. (1976) - *La Informática como instrumento de la Gestión*. ED. DEUSTO. Bilbao

RINCON, J.M. (1985) - *Diseño e informatización de Sistemas de Información Económica*. SERVICIO EDITORIAL DE LA UPV/EHU. Bilbao

SENN, J.A. (1984) - *Analysis and design of Information Systems*. Mc GRAW-HILL. Nueva York

THORIN, M. (1988) - *La auditoría informática*. MASSON. Barcelona

# ESTUDIO DEL PROCESO ESTOCASTICO LOGARITMICO-NORMAL UNIDIMENSIONAL CON FACTORES EXOGENOS COMO SOLUCION DE UNA ECUACION DE ITÔ

BUENDIA MOYA, FULGENCIO

GOMEZ GARCIA, JUAN

Departamento de Métodos Cuantitativos para la Economía.

Universidad de Murcia.

## 1. JUSTIFICACION

Los procesos estocásticos de difusión han sido aplicados profusamente en las dos últimas décadas y todavía en los últimos años, para analizar determinadas variables económicas. En particular los procesos de difusión log-normales unidimensionales han sido utilizados ampliamente por diversos autores entre los que destacamos a *Tintner y Sengupta*, que en su *Stochastic Economics (Academic Press, 1972)* consideran este tipo de procesos como gobernadores de multitud de fenómenos en los que se trata de estudiar el comportamiento de una variable económica. La forma exponencial de la tendencia o esperanza del proceso y la simplicidad para introducir factores exógenos hacen este tipo de procesos especialmente interesantes para efectuar predicciones.

Entre los trabajos en los que se utiliza el proceso log-normal en aplicaciones económicas, podemos citar:

- (1) TINTNER, G y BELLO, 1962. "Aplicación de un proceso de difusión logarítmico normal al crecimiento económico". Trabajos de Estadística, 19.
- (2) TINTNER, G y GOMEZ G.L., 1979 "Aplicación de los procesos de difusión a la planificación del desarrollo económico". Trabajos de Estadística e Investigación Operativa, Vol. 30.
- (3) TINTNER, G and NARAYANAN, 1966. "A multidimensional Stochastics Process for the Explanation of Economic Development". Métrica, 11.
- (4) TINTNER, G and PATEL, 1966. "A log-normal diffusion process applied to the development of Indian agriculture with some consideration on economic policy". J. Indian Soc. Agricultural Statistics, Vol 18.
- (5) TINTNER, G y THOMAS, 1963. "Un modele stochastique de developpement economique avec applications a l'industrie anglaise". Rev. Econ. Politique, 13.

(6) MORENO BAS, E. "Una aplicación de los procesos markovianos de difusión logarítmico-normales a los ingresos y gastos de las Administraciones Públicas". Hacienda Pública Española. 1974, 0028

(7) MURES QUINTANA, M<sup>a</sup> JESUS, 1991. "Procesos Estocásticos de difusión log-normal multivariante. Aplicación a la modelización del gasto público en España. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

(8) GUTIERREZ, R, ANGULO, J.M., GONZALEZ, A and PEREZ, R, 1991. "Inference in log-normal multidimensional diffusion processes with exogenous factors: applications to modelling in economics". Applied stochastic model and data analysis, vol 7.

En todos estos trabajos, ó se parte de la expresión de la función de densidad de transición del proceso, ó esta se plantea como solución de las ecuaciones de difusión de Kolmogorov, dados los coeficientes de tendencia y de difusión del proceso. Cuando se considera, como en (8), el proceso (en este caso multidimensional) como solución de una ecuación diferencial estocástica tan sólo se establece la existencia y unicidad de la solución.

Parece adecuado que un proceso tan utilizado por su probada adecuación a problemas económicos, se fundamente y complete teóricamente tanto como se pueda, y en este sentido, este trabajo trata de hacer un estudio del proceso log-normal (nos limitaremos aquí al caso unidimensional) con factores exógenos a partir de la solución de la ecuación diferencial estocástica que lo determina.

El mismo estudio para el caso multidimensional ha sido también desarrollado por nosotros.

## 2. PLANTEAMIENTO DE LA ECUACION DIFERENCIAL ESTOCASTICA (E.D.E.)

Sean  $G_1(t), \dots, G_k(t)$   $k$  funciones reales continuas y acotadas sobre  $[0, \infty)$ , que llamaremos factores exógenos (pues no dependen de los estados  $x$  del proceso). A partir de ellas construimos las funciones:

$$(1) \begin{cases} m(t, x) = (m_0 + m_1 G_1(t) + \dots + m_k G_k(t))x, & m_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, \dots, k \\ \sigma(t, x) = \sigma x, & \sigma \in \mathbb{R}, x \in (0, \infty) \end{cases}$$

y planteamos la E.D.E.:

$$(2) \quad \begin{aligned} dX(t) &= m(t, X(t))dt + \sigma X(t)dW(t) \\ X(t_0) &= x_0 \in \mathbb{R}^+ \quad t \in [0, \infty) \end{aligned}$$

dónde  $\{X(t), t \geq 0\}$  es un proceso con valores en  $R^+ = (0, \infty)$  y  $\{W(t), t \geq 0\}$  es un proceso de movimiento *Browniano standard*, esto es, con incrementos independientes y tal que el incremento  $W_t - W_s$  es Gaussiano con

$$E(W_t - W_s) = 0 \text{ y } \text{Var}(W_t - W_s) = t - s \quad t > s$$

(Ver por ejemplo A.G: Malliaris, pág. 36).

La E.D.E. (2) tiene sentido, pues los coeficientes  $m(t, x)$  y  $\sigma(t, x)$  cumplen ( Ver, por ejemplo, A.G. Malliaris, pág 93):

$$\forall T \in [0, \infty) \text{ y } \forall x \in (0, \infty) :$$

$$a) \int_0^T |m(t, x)| dt < \infty$$

$$b) \int_0^T |\sigma(t, x)|^2 dt < \infty$$

En efecto:

$$(3) \quad |m(t, x)| = \left| m_0 + \sum_{i=1}^k m_i G_i(t) \right| |x| \leq (k+1)M|x| < \infty, \text{ donde:}$$

$$M = \max\{|m_0|, |m_i G_i(t)|, i = 1, 2, \dots, k, t \in [0, T]\}, \text{ que existe por ser cada } G_i \text{ continua en } [0, T]$$

$$\text{Entonces: } \int_0^T |m(t, x)| dt < \infty \text{ Asimismo: } \int_0^T |\sigma(t, x)|^2 dt = \int_0^T \sigma^2 x^2 dt = \sigma^2 x^2 T < \infty$$

Además, las funciones  $m(t, x)$  y  $\sigma(t, x)$  cumplen las condiciones del teorema de existencia y unicidad de soluciones de una E.D.E. ( Ver Arnold, 1974, pág 153):

$$|m(t, x) - m(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|$$

$$|m(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq K\sqrt{1+x^2} \text{ para alguna cte. } K, \text{ pues}$$

$$|m(t, x) - m(t, y)| = \left| \left( m_0 + \sum_{i=1}^k m_i G_i(t) \right) (x - y) \right| \leq (k+1) \bar{M} |x - y|$$

con  $\bar{M} = \max\{|m_0|, \sup |m_i G_i(t)|, i = 1, 2, \dots, k, t \in [0, \infty)\}$  ya que  $\sup |m_i G_i(t)|$  existe gracias a la acotación de cada  $G_i(t)$ , y

$$|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| = \sigma|x - y|, \text{ obteniendo:}$$

$$|m(t, x) - m(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq \left( (k+1) \bar{M} + |\sigma| \right) |x - y| \leq K |x - y|$$

$$|m(t, x)| + |\sigma(t, x)| = \left| \left( m_0 + \sum_{i=1}^k m_i G_i(t) \right) x \right| + |\sigma| |x| \leq \left[ (k+1) \bar{M} + \sigma \right] |x| \leq K |x| \leq k \sqrt{1+x^2}$$

Como, por otro lado,  $m(t, x)$  y  $\sigma(t, x)$  son, evidentemente continuas respecto de  $t$ , obtenemos aplicando el mencionado teorema de existencia y unicidad que:

Existe un único proceso  $\{X(t) / t \geq 0\}$  solución de la E.D.E. (2), que es un proceso de difusión con coeficientes de tendencia y de difusión, respectivamente:

$$A_1(t, x) = m(t, x) = \left( m_0 + \sum_{i=1}^k G_i(t) \right) x \quad \text{y} \quad A_2(t, x) = \sigma^2 x^2 > 0$$

Este proceso es llamado logarítmico normal unidimensional con  $k$  factores exógenos  $LN(1, k)$ .

**Nota.**-Al escribir los procesos  $\{X(t, w), t \geq 0, w \in \Omega\}$  y  $\{W(t, w), t \geq 0, w \in \Omega\}$  hemos omitido por simplificación de escritura y como es habitual, la alusión a cada suceso  $W$ , de modo que hemos escrito simplemente  $X(t)$  y  $W(t)$  para designar las variables aleatorias que intervienen.

### 3. ESTUDIO DEL PROCESO

Si el coeficiente de tendencia de (2),  $m(t, x)$  lo expresamos

$$m(t, x) = \left( m_0 + \sum_{i=1}^k m_i G_i(t) \right) x = m(t) x \quad \text{con} \quad m(t) = m_0 + \sum_{i=1}^k m_i G_i(t) \quad (4)$$

entonces la E.D.E.(2) la escribimos:

$$dX(t) = m(t) X(t) dt + \sigma X(t) dw(t) \quad \sigma = \text{cte.}$$

$$X(t_0) = x_0 \in R^+ \quad t \geq 0 \quad (5)$$

Definimos la variable aleatoria  $Y(t) = \log[X(t)]$  (logaritmo neperiano) y aplicando el lema de Itô de diferenciación estocástica de funciones compuestas (ver, por ejemplo, E. Wong, pag 148-149)

$$\text{obtenemos: } (6) \quad dY(t) = \frac{dX(t)}{X(t)} - \frac{1}{2} \left[ \frac{dX(t)}{X(t)} \right]^2 \quad \text{que junto con (5) da:}$$



$$(7) \quad dY(t) = \left( m(t) - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW(t)$$

(aplicando las reglas de cálculo estocástico  $dt^2 = 0$ ,  $dW^2(t) = dt$ ,  $dW(t)dt = 0$ ).

ó bien:

$$(8) \quad dY(t) = \mu(t)dt + \sigma dW(t), \quad \sigma = \text{cte.}$$

$$Y(t_0) = y_0 = \log x_0 \in R, \quad t \geq 0 \quad \text{con}$$

$$(9) \quad \mu(t) = m(t) - \frac{1}{2} \sigma^2 = \left( m_0 - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) + \sum_{i=1}^k m_i G_i(t)$$

El proceso  $Y(t) = \log[X(t)]$  es también según el teorema de cambio de estado (Ver R.N. Bhattacharya, pág 382), un proceso de difusión, con coeficientes de tendencia y de difusión, respectivamente:

$$A_1(t, x) = \mu(t) = \left( m_0 - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) + \sum_{i=1}^k m_i G_i(t) \quad A_2(t, x) = \sigma^2 \quad (10)$$

(Llegamos a la misma conclusión aplicando a la ecuación (8) el teorema de existencia, unicidad y propiedad de difusión)

Expresamos ahora la E.D.E. (8) en su forma integral equivalente

$$(11) \quad Y(t) = Y(t_0) + \int_{t_0}^t dY(t) = Y(t_0) + \int_{t_0}^t \mu(t)dt + \int_{t_0}^t \sigma dW(t) \quad \text{o sea,}$$

$$(12) \quad Y(t) = Y(t_0) + \left( m_0 - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (t - t_0) + \sum_{i=1}^k m_i (G_i)'_{t_0} + \sigma [W(t) - W(t_0)]$$

$$\text{donde } (G_i)'_{t_0} = \int_{t_0}^t G_i(t)dt$$

Como  $W(t) - W(t_0)$  es un proceso Gaussiano con:

$$E(W(t) - W(t_0)) = 0 \quad \text{Var}(W(t) - W(t_0)) = (t - t_0)$$

resulta que  $Y(t)$ , dado  $Y(t_0)$  es un proceso Gaussiano con:

$$(13) \quad E[Y(t) / Y(t_0) = y_0] = E_{t_0}[Y(t)] = Y(t_0) + \left( m_0 - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (t - t_0) + \sum_{i=1}^k m_i (G_i)'_{t_0}$$

$$(14) \quad \text{Var}[Y(t) / Y(t_0) = y_0] = \text{Var}_{t_0}[Y(t)] = \sigma^2 (t - t_0)$$

El proceso  $\{Y(t), t \geq 0\}$  con  $Y(t)$  dada por (12) no es un proceso de movimiento Browniano, como sucedería sin introducir factores exógenos en el coeficiente de tendencia, pues para un incremento  $Y(t)-Y(s)$  se tiene de (12)

$$(15) \quad E[Y(t) - Y(s)] = \left( m_0 - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (t - s) + \sum_{i=1}^k m_i (G_i)'_s =$$

$$= \left[ m_0 - \frac{1}{2} \sigma^2 + \sum_{i=1}^k m_i G_i(\alpha_i) \right] (t - s) \quad \alpha_i \in (s, t) \quad (\text{Hemos aplicado el teorema de la media integral})$$

(Ver R.N. Bhattacharya, pág. 18)

Puesto que  $Y(t) - Y(t_0) = \log \frac{X(t)}{X(t_0)}$  está normalmente distribuida, dado  $Y(t_0) = y_0$ , se tiene que:

$$(16) \quad X(t) = x_0 \exp(Y(t) - Y(t_0)) = x_0 \exp \left[ \left( m_0 - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (t - t_0) + \sum_{i=1}^k m_i (G_i)'_{t_0} + \sigma (W(t) - W(t_0)) \right]$$

está, dado  $X(t_0) = x_0$ , lognormalmente distribuida.

Esta es la solución integral de la E.D.E. (2) y es por tanto la variable aleatoria del proceso logarítmico-normal unidimensional con los k factores exógenos  $G_1(t), G_2(t), \dots, G_k(t)$ .

Para hallar la función de densidad de transición  $p(x, t / x_0, t_0)$  de la variable log-normal  $X(t)$ , tenemos en cuenta, como hemos establecido antes, que  $Y(t) = \log X(t)$  está normalmente distribuida. Así que poniendo  $y = \log x$  y  $y_0 = \log x_0$  se tiene:

$\wp(X(t) \leq x / X(t_0) = x_0) = \wp(\log X(t) \leq \log x / \log X(t_0) = \log x_0)$ , ó sea si,  
 $P(x, t / x_0, t_0)$  es la función de transición:  $P(x, t / x_0, t_0) = P(y, t / y_0, t_0)$  de dónde

$$(17) \quad p(x, t / x_0, t_0) = \frac{1}{x} p(y, t / y_0, t_0) =$$

$$= \frac{1}{x \sqrt{2\pi\sigma^2(t-t_0)}} \exp \left\{ -\frac{\log x - \log x_0 - \left( m_0 - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (t - t_0) - \sum_{i=1}^k m_i (G_i)'_{t_0}}{2\sigma^2(t-t_0)} \right\}$$

Ahora, para hallar los momentos del proceso, dado  $X(t_0) = x_0$ , tendremos en cuenta la relación

$$\begin{aligned}
 (18) \quad E_{t_0}[X(t)^k] &= E_{t_0}[e^{Y(t)k}] = \\
 &= \exp \left[ k \left( \log x_0 + \left( m_0 - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (t - t_0) + \sum_{i=1}^k m_i (G_i)'_{t_0} + \frac{1}{2} k^2 \sigma^2 (t - t_0) \right) \right] = \\
 &= x_0^k \exp \left\{ k \left[ \left( m_0 - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (t - t_0) + \sum_{i=1}^k m_i (G_i)'_{t_0} \right] + \frac{1}{2} k^2 \sigma^2 (t - t_0) \right\} \quad K = 1, 2, 3, \dots
 \end{aligned}$$

Así para la tendencia o valor medio del proceso, condicionada por  $X(t_0) = x_0$ :

$$\begin{aligned}
 E_{t_0}[X(t)] &= x_0 \exp \left[ \left( m_0 - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (t - t_0) + \sum_{i=1}^k m_i (G_i)'_{t_0} + \frac{1}{2} \sigma^2 (t - t_0) \right] = \\
 &= x_0 \exp \left[ m_0 (t - t_0) + \sum_{i=1}^k m_i (G_i)'_{t_0} \right]
 \end{aligned}$$

Y para la varianza, dado  $X(t_0) = x_0$

$$\begin{aligned}
 Var_{t_0}[X(t)] &= E_{t_0}[X(t)^2] - E_{t_0}^2[X(t)] = \\
 &= x_0^2 \left\{ \exp \left[ (2m_0 + \sigma^2) (t - t_0) + 2 \sum_{i=1}^k m_i (G_i)'_{t_0} \right] - \exp \left[ 2m_0 (t - t_0) + 2 \sum_{i=1}^k m_i (G_i)'_{t_0} \right] \right\} = \\
 &= x_0^2 \exp 2 \left[ m_0 (t - t_0) + \sum_{i=1}^k m_i (G_i)'_{t_0} \right] \left\{ \exp [\sigma^2 (t - t_0)] - 1 \right\}
 \end{aligned}$$

Si se considera  $t_0 = 0$  y  $\varnothing (X(0) = x_0) = 1$ , se puede escribir

$$\begin{aligned}
 E_{t_0}[X(t)] &= x_0 e^{m_0 t + \sum_{i=1}^k m_i (G_i)'_{t_0}} \\
 Var_{t_0}[X(t)] &= x_0^2 e^{2 \left( m_0 t + \sum_{i=1}^k m_i (G_i)'_{t_0} \right)} \left[ e^{\sigma^2 t} - 1 \right]
 \end{aligned}$$

---

#### 4. BIBLIOGRAFIA Y ARTICULOS

AKTCHISON J., AND BROWN, J.A. (1969): "The lognormal distribution". Cambridge. University Press (1969).

ARNOLD, L: "Stochastic differential equations". Jhon-Wiley (1974)

BARUCHA-REID: "Elements of the theory of Markov processes and their aplicaciones" McGraw-Hill. 1960

R.N. BHATTACHARYA, E.C. WAYMIRE: "Stochastic processes with aplicaciones" Jhon Wiley. 1990.

GIHMAN AND SKOROHOD: "Stochastic Differential Equations". Springer-Verlay. 1972

GUTIERREZ, R., ANGULO J.M., GONZALEZ A. and PEREZ R. : (8) Citado

HERMOSO CARAZO, AURORA: "Test de Hipótesis sobre el coeficiente de tendencia de un proceso de difusión multidimensional. Aplicación al proceso logarítmico-Normal con factores exógenos". Tesis doctoral. Granada 1983.

A.G. MALLIARIS AND W.A. BROCK: "Stochastic Methods in Economics and Finance. North\_Holland. 1982.

MOLINA FERNANDEZ, M: "Estimación del coeficiente de tendencia de un proceso de difusión multidimensional. Aplicación al proceso logarítmico normal con factores exógenos. Tesis doctoral. Granada 1983.

MORENO BAS, E.: (6) Citado

MURES QUINTANA, Mª J.: (7) Citado

NOBOYUKI IKEDA, SHINZO WATANABE: "Stochastic Differential Equations and Difussion Processes". North\_Holland/Kodanska. 1989.

TINTNER G. y BELLO: (1) Citado

TINTNER G. y GOMEZ: (2) Citado

TINTNER G. and NARAYANAN: (3) Citado

TINTNER G. and PATEL: (4) Citado

TINTNER G. y THOMAS: (5) Citado

E. WONG: "Stochastic Processes in Information and Dynamical Systems". Mc.Graw-Hill. Book Company. 1971

# MODELOS DE REDES DE COLAS. UN ANALISIS INTRODUCTORIO<sup>1</sup>

ARANDA GALLEGO, JOAQUIN

PARRA FRUTOS, ISABEL

Dpto de Métodos Cuantitativos para la Economía

Facultad de CC. Económicas y Empresariales

Universidad de Murcia

## 1. INTRODUCCION

La teoría de colas o de líneas de espera ha tenido un desarrollo espectacular a partir de mediados de los años setenta. Dentro de ellas una parte importante del trabajo se ha desarrollado en la línea de los sistemas denominados redes de colas. Sistemas particularmente complejos que aunque iniciados a finales de los años cincuenta no fueron estudiados con intensidad prácticamente hasta el comienzo de los años ochenta. Su estudio reciente ha sido posible gracias al desarrollo de las herramientas informáticas, el análisis e implementación de algoritmos específicos y la simulación de comportamientos. Junto a ello la expansión de las redes de comunicación, el uso de sistemas de teletráfico, redes locales de ordenadores, procesadores en tiempo compartido, etc. han dado lugar a una aplicación de las redes de colas no considerada en su inicio y que ha contribuido igualmente a su desarrollo. Basta con decir que tan solo en el último decenio han aparecido publicados más de 4000 artículos y trabajos de investigación en teoría de colas, de los que aproximadamente la cuarta parte corresponden a modelos de redes.

En este trabajo presentamos un resumen introductorio de los principales modelos de redes que han aparecido en la literatura, dando una idea general de sus principales características y de las líneas de investigación que se han ido abriendo sucesivamente en el tiempo. Sin ser exhaustivos, lo que estaría fuera del contexto en el que se ha realizado este trabajo hemos pretendido dar con él una visión general que permita conocer las pautas y líneas que ha seguido y está siguiendo el desarrollo de la teoría de redes de colas. Para cualquier interesado en este tema damos también la referencia de la base de datos REDES que hemos elaborado y sobre la cual estamos trabajando en la actualidad y de la que esperamos obtener sucesivas investigaciones.

---

<sup>1</sup>Para la realización de esta comunicación hemos elaborado una base de datos propia, como ya mencionamos, a partir de las búsquedas que se han ido realizando en otras tales como: SilverPatter MathSci, ProQuest ABI/Inform y SilverPlatter Econlit. La búsqueda se hizo en base a las palabras clave queue\* y cola\*. Las referencias obtenidas, que fueron más de 4000, se depuraron para seleccionar aquellas específicas de redes de colas, que superan el millar. Con estas últimas hemos construido nuestra propia base de datos utilizando para ello el programa *Reference Manager V.5.06*. Éste nos permitía importar toda la información de forma automática, previa realización de unas simples transformaciones en un procesador de texto (en particular Word Perfect 5.1 y Word 2.0) de tal forma que la importación de las referencias fuera la adecuada.

---

## 2. MODELOS PREVIOS

Habitualmente se considera como norma general que el trabajo de Jackson (1957) "Networks of waiting lines" es el pionero en el tratamiento e introducción del concepto de "Red de colas". Efectivamente, es en él donde por primera vez se acuña el concepto realizando un trabajo completo y sistemático de una red de colas. Sin embargo, es preciso señalar que han existido diversos trabajos que pueden considerarse como precursores, realizados muchos años antes. Entre ellos, probablemente el más conocido era el modelo de Erlang, introducido para analizar el tráfico telefónico y, más concretamente la probabilidad de pérdida de una llamada, más comúnmente conocido como el problema de la congestión. Aunque no se puede hablar de una red propiamente dicha, si que es cierto que se considera a este modelo como un caso particular de una red de colas de un tipo particular.

El modelo de Erlang considera un sistema formado por dos estaciones, donde la primera funciona como una estación "fuente" que genera clientes (llamadas) que han de ser servidas en la segunda estación, a una tasa  $\lambda(n)$ , donde  $n$  es el número de clientes en la estación de servicio que, a su vez, completa servicios a una tasa  $\mu(n)$ . Con este esquema el modelo puro de Erlang con retraso aparece cuando  $\lambda(n)=\lambda$ , que equivale a un proceso de llegadas de Poisson de parámetro  $\lambda$ , mientras que el servicio equivale a una estación con  $s$  servidores con tiempo de servicio exponencial de tasa  $\mu$  y sala de espera infinita. El modelo puro de Erlang con pérdidas (loss) se diferencia del anterior en que supone una población finita  $N$  en la estación fuente (con lo que  $\lambda(n)=0$ ,  $n \geq N$ ), y tasa de servicio  $\mu(n)=n$ , mientras que el modelo mixto con retraso y pérdidas (loss delay) aparece cuando la segunda estación tiene un comportamiento similar al del modelo con retraso y la fuente se considera finita, con un tamaño  $N=s+m$ , siendo el tamaño de la sala de espera de la segunda estación.

La extensión inmediata de estos modelos fue realizada por Engset al considerar que la estación inicial puede representar un número finito de  $M$  fuentes, cada una de la cuales puede generar un solo cliente cada vez, de tal forma que cuando un cliente está siendo servido su fuente de procedencia no puede generar un siguiente cliente. Cuando éste acaba su servicio, se genera automáticamente un nuevo cliente. Cada fuente genera individuos a tasa  $\gamma$ , independientemente de los demás, con lo que la tasa de llegadas a la segunda estación es  $\lambda(n)=(\mu-n)\gamma$  si  $n < M$  ( $\lambda(M)=0$ ) cuando la estación de servicio tiene un número de servidores ilimitado (mayor que  $M$ ), o bien con tasa  $\lambda(n)=(M-n)\gamma$  si  $n \leq N$  cuando su capacidad es limitada  $N \leq M$  ( $\lambda(N)=0$ ). Con estas especificaciones y bajo consideraciones similares a las que se realizan en los modelos de Erlang, se obtienen los modelos equivalentes de Engset con retraso, con pérdidas y mixto.

En todos estos casos ya, exige el concepto de distribución estacionaria, que permite obtener las probabilidades de estado del sistema mediante una expresión que, años más tarde, recibirá el nombre de "forma de producto", expresión que, para el caso del modelo de Engset con  $N=\infty$  y  $\mu(n)=n\mu$  sería:

$$\pi(n) = A \left( \frac{M}{n} \right) \left( \frac{\gamma}{\mu} \right)^n$$

Una extensión simple, tanto de estos modelos como del concepto general de cola con

una sola estación de servicio, en el sistema de colas en tándem o en serie con dos o más estaciones de servicio. En este tipo de sistemas, su desarrollo inicial se realiza bajo la hipótesis de un flujo de llegadas de Poisson a la primera estación, con tasa  $\lambda$ , que se sirven en ella, por un solo servidor con tasa  $\mu_1$  (tiempo de servicio exponencial). Una vez que el cliente completa su servicio pasa de forma inmediata a la segunda estación, que posee un solo servidor, con tasa  $\mu_2$ . En este modelo ya se introduce la necesidad de ampliar el concepto de estado del sistema que, ahora, vendrá dado por una variable aleatoria bidimensional  $(n_1, n_2)$  que refleja el número de clientes que existen en cada una de las dos estaciones, siendo la expresión de las probabilidades de estado estacionarias de este sistema también tipo de forma de producto ya señalado:

$$\pi(n_1, n_2) = \pi(0, 0) \left( \frac{\lambda}{\mu_1} \right)^{n_1} \left( \frac{\lambda}{\mu_2} \right)^{n_2} = \pi_1(n_1) \pi_2(n_2)$$

donde puede observarse que la probabilidad conjunta puede factorizarse en función de las probabilidades de estado marginales (estacionarias) de cada estación, siendo este hecho lo que caracteriza a la expresión "forma de producto", por otra parte típica de aquellos comportamientos explicados por los procesos estocásticos de nacimiento y muerte.

Las extensiones de este modelo son evidentemente enormes, habiendo dado lugar a múltiples posibilidades, algunas de las cuales serán comentadas posteriormente, pero en todos los casos la referencia, el objetivo va a ser el intentar conocer hasta que punto se mantiene o se puede mantener esta característica forma de expresar las probabilidades de estado estacionarias y, como no, su existencia.

### 3. MODELOS BASICOS

Los sistemas de colas en serie han dado lugar a un conjunto de modelos que entran ya de lleno en lo que pueden denominarse con propiedad redes de colas. Aunque desde un punto de vista temporal el primer modelo específicamente de redes es el propuesto por Jackson (1957), es sin embargo conceptualmente más apropiado describir en primer lugar los sistemas cíclicos. Estos sistemas pueden considerarse la extensión natural de un modelo de colas en serie o más bien el modelo básico de dos colas en tándem. Esta clase de redes están constituidas por un conjunto de  $N$  estaciones de servicio donde cada una de ellas sirve a sus clientes con tasa  $\mu_i$ ,  $i=1, \dots, N$ . Una vez que un cliente termina su servicio en la estación  $i$ , pasa de forma instantánea a la estación  $i+1$ . Este tipo de tránsito continúa hasta la última estación de la red donde cada cliente que termina o bien abandona la red (si estamos en presencia de una cola abierta) o bien vuelve a la primera estación en el caso de una red cerrada. En este último caso, se considera que el número de clientes en la red es fijo ( $M$ ), no produciéndose por tanto entradas al sistema, mientras que en el caso abierto los clientes entran a la red por la primera estación de servicio con una tasa  $\lambda$ . Notemos que el caso de red cerrada equivaldría bajo ciertas condiciones a una red abierta de tamaño fijo con una estación fuente, como en el modelo de Erlang,

que generaría automáticamente una nueva llegada tras cada abandono de la red, pudiendo considerarse desde este punto de vista los modelos de Erlang y Engset como casos particulares de redes cíclicas o de modelos de colas en serie.

La solución de este tipo de modelos, con las hipótesis singulares apuntadas en relación con llegadas poissonianas, tiempos de servicio exponenciales e independencia de los flujos y comportamientos, conduce a una distribución estacionaria de las propiedades de estado de la red que es también de la forma de producto y que, en el caso abierto puede expresarse como

$$\pi(n_1, \dots, n_N) = \prod_{j=1}^N \pi_j(n_j)$$

mientras que en el caso cerrado quedará como

$$\pi(n_1, \dots, n_N) = C \prod_{j=1}^N \left( \frac{I}{\mu_j} \right)^{n_j}$$

surgiendo ahora el problema de la determinación de la constante de normalización. Lo que no siempre va a ser fácil ni posible siendo incluso hoy día un tema de investigación para diversos tipos de modelos y supuestos. A título orientativo, este problema fue abordado y resuelto por Koenisberg (1958) al estudiar el comportamiento de una red cerrada cíclica de capacidad M con N estaciones con un solo servidor y tiempos de servicio exponenciales de tasa  $\mu_i$ ,  $i=1, \dots, N$ , obteniendo para las probabilidades de estado estacionarias de la red la expresión

$$\pi(n_1, \dots, n_N) = \pi(M, 0, \dots, 0) \prod_{j=1}^N \left( \frac{\mu_1}{\mu_j} \right)^{n_j}$$

En este tipo de redes ya de por sí sencillas, aparece de forma natural un nuevo concepto que posteriormente va a ser esencial en el tratamiento de las redes y en los modelos con diversos tipos de clientes y con prioridades. Es el concepto de ruta o concepto de camino o sucesión de estancias por las que, sucesivamente, debe pasar cada cliente concreto. En el caso de las redes cíclicas las rutas son concretas y comunes, todos los clientes siguen la misma ruta que comienza por la primera estación y finaliza en la última. Sin embargo, este hecho no va a ser más que un caso particular en el desarrollo sucesivo de los modelos de redes de colas.

La primera extensión de caso cíclico, modificando las rutas fijas, fue realizado por Finch (1959), mediante el estudio de dos tipos concretos de modelos de colas cíclicas, en las que utilizo el concepto de feedback o retroalimentación. Son modelos de redes abiertas, con N estaciones de servicio situadas en serie, flujo de llegadas poissoniano de tasa  $\lambda$  a la primera estación y servicio individual de tasa  $\mu_i$ ,  $i=1, \dots, N$  en cada estación, en las que se considera un primitivo mecanismo de ruta. De este modo, el primer modelo considera la posibilidad de realización, solo, de una retroalimentación terminal, a una estación de servicio cualquiera, desde la cual el cliente vuelve a realizar el recorrido.



Es decir,

$$p_{ij}=P(\text{estación } i \rightarrow j)=\begin{cases} 1 & \text{si } j=i+1 \quad (i \neq M) \\ p_j & \text{si } i=M \end{cases}$$

En el segundo modelo la retroalimentación es individual, en el sentido de que tras de ser servidos en la estación  $j$ , el cliente puede volver a formar parte de la cola de espera de dicha estación con probabilidad  $p_j$ , o bien pasar a la estación siguiente,  $j+1$ , con probabilidad  $1-p_j$ . En ambos casos no se suponen problemas añadidos de dimensionamiento de la red ni de las colas de espera, pero si da pie a la introducción de un nuevo tema de investigación, la superposición de flujos de llegadas a una misma estación, formado ahora por el flujo natural de la red, derivado del orden cíclico de servicio, al que se añade el conformado por los clientes que retornan a una estación concreta según alguno de los esquemas de retroalimentación mencionados. Esta cuestión añadida, la existencia de rutas, sin embargo, no logran modificar la cuestión, hasta ahora general, de la forma particular que se obtiene para las probabilidades de estado estacionarias, cuya exposición sigue siendo de forma de producto y que (por ejemplo) para el modelo de retroalimentación individual toman la forma:

$$\pi(n_1, \dots, n_N) = \pi(0, 0, \dots, 0) \prod_{j=1}^N \left( \frac{\lambda}{\mu_j(1-p_j)} \right)^{n_j}$$

La aparición del modelo de Jackson (1957) no solo es importante por la novedad en cuanto a la introducción de los modelos de redes como tales, por primera vez en la literatura, sino por la inclusión en el tipo de redes que analiza de múltiples cuestiones, escasa o nulamente analizadas hasta entonces, incluyéndose ya en este trabajo el tratamiento de las rutas y la consideración de tipos específicos de clientes. Se trata de un modelo de red abierto, con  $N$  estaciones de servicio, donde una de las características esenciales es que cada individuo que llega a la red ha de recorrer un camino prefijado dentro de ella, de tal forma que cuando un cliente entra a la red, por la estación  $i$ ,  $i=1, \dots, N$ , sigue, a partir de ella, una ruta que puede pasar por todas o solo por algunas de las estaciones de la red. El trabajo de Jackson se dirigió esencialmente al tratamiento de una red abierta, aunque posteriormente se ha incluido bajo la denominación de redes de Jackson a modelos tanto abiertos como cerrados, con características similares. La descripción concreta del tipo originalmente propuesto sería la siguiente.

Una red de Jackson es un sistema abierto, formado por  $N$  estaciones de servicio, donde las entradas al sistema pueden producirse por cualquiera de las estaciones según un flujo de llegadas de Poisson con tasa  $\lambda_i$ ,  $i=1, \dots, N$ , correspondiendo cada estación a un modelo del tipo  $M/M/1$ , con tasa de servicio  $\mu_j$ . Los clientes que completan su servicio en la estación  $i$  pasan a la estación  $j$  con probabilidad  $p_{ij}$ , o bien abandonan la red con probabilidad  $p_i=1-\sum p_{ij}$ , lo que supone que en este modelo se está considerando un esquema de generación de rutas dado por:

$R=\{p_{ij} / i=0,1,\dots,N; j=1,2,\dots,N+1\}$  donde para cada  $i,j=1,\dots,N$ , se tiene que:

- 1)  $p_{0j}$  = Probabilidad de entrar por la estación  $j$ .
- 2)  $p_{iN+1}$  = Probabilidad de abandonar la red por la estación  $i$  = Probabilidad de que la estación  $i$  sea la última.

- 3)  $p_{ij}$  = Probabilidad de que la estación  $j$  siga inmediatamente a la  $i$ .
- 4)  $p_{0N+1}$  = Probabilidad de que una ruta sea vacía.
- 5) Para cada  $i, i=0,1,...,N$ , el conjunto  $\{p_{ij}, j=1,...,N\}$  es una distribución de probabilidad.

De este modo, se introduce el concepto de rutas aleatorias, de tal forma que la probabilidad de que se produzca la ruta  $(k_1,...,k_i)$  viene dada por  $p_{0k_1} \cdot p_{k_1k_2} \cdots p_{k_{i-1}k_i} \cdot p_{k_i,M+1}$ . Estas hipótesis introducen ya

una complejidad en el modelo realmente superior a las consideradas hasta el momento que, sin embargo conduce a que la determinación de las probabilidades de estado estacionarias no solo sea posible, sino que continúa adaptándose al tipo mencionado de forma de producto. Así, en este caso, su expresión queda como

$$\pi(n_1,...,n_N) = \prod_{j=1}^N \pi_j(n_j) \quad (1)$$

donde las  $\pi_j(n_j)$  son las probabilidades de estado estacionarias de cada cola de la red, descritas por un modelo del tipo  $M/M/s_j$ , en el que el flujo de llegadas corresponde a un proceso de Poisson de tasa  $\Gamma_j = \lambda_j + \sum p_{ij} \Gamma_i$ . El caso de una red cerrada, surge sin más que considerar que no pueden producirse ni entradas ni salidas de la red, lo que implica las modificaciones correspondientes en los diversos parámetros considerados, siendo ahora el número de clientes que circulan por la red  $M$ , fijo y llegándose también a una expresión del tipo de forma de producto, si bien con la aparición de una constante de normalización.

Aunque en su trabajo original Jackson no consideró una conceptualización de su modelo desde una perspectiva más abstracta, posteriormente se ha reformalizado en algún sentido, dentro de un esquema general de análisis, utilizando los procesos estocásticos markovianos. Esta formalización puede verse en diversos autores, como por ejemplo Kiessler y Disney (1988). Así, asociada a la red, se puede definir un espacio de estados  $E$ , formado por todos los vectores  $N$ -dimensionales, que corresponden a los sucesivos estados posibles de la red  $(n_1,...,n_N) \in \mathbb{N}^N$ . Por otra parte, para cada instante de tiempo  $t$  se define  $X_j(t)$ ,  $j=1,...,N$ , como el número de clientes en la estación  $j$  en el momento  $t$ . Entonces, la variable aleatoria  $N$ -dimensional  $X(t)=(X_1(t),...,X_N(t))$  es un vector aleatorio que toma valores en  $E$ , y el proceso estocástico  $\{X(t); t \geq 0\}$  es un proceso de Markov con espacio de estados  $E$ , cuya distribución estacionaria es la solución del modelo dada en (1), siendo la matriz de transición del proceso la matriz  $P$  de dimensión  $N \times N$  definida por las probabilidades  $p_{ij}$  de tránsito entre estaciones.

La extensión al caso cerrado de la red de Jackson fue realizada realmente por Gordon y Newell (1967), considerando un modelo cerrado de red, conformado por  $N$  estaciones del tipo  $M/s_j$  con tasa  $\mu_j$ ,  $j=1,...,N$ , y  $M$  clientes que circulan entre ellas con probabilidades de tránsito  $p_{ij}$ , similares a las del caso anterior. En este modelo se obtiene la solución estacionaria utilizando los métodos habituales ya en el tema (las ecuaciones de tráfico), llegando a la solución habitual de forma de producto, con la consiguiente aparición de la constante de normalización. La formalización en términos de procesos de Markov del modelo es similar al caso anterior sin más que realizar la consideración de que  $n_1 + ... + n_N = M$ . Con este trabajo, sin embargo, comienza ya a desarrollarse una nueva línea de investigación no por cierto fácil, como es la determinación de la constante de normalización, tema sobre el cual se han realizado numerosas aportaciones, a partir del trabajo pionero de Buzen (1973), debido a la

complicación importante que aparece cuando se toman en consideración redes de gran tamaño. En concreto, hasta 1985, con el trabajo de P.G. Harrison, no se da una forma cerrada para dicha constante y tan solo para el caso en que las estaciones solo posean un solo servidor en cada una de ellas.

El tránsito entre estaciones de una red, se ha supuesto tradicionalmente como inmediato. Sin embargo, son muchos los fenómenos reales en los que el cálculo del tiempo de permanencia de un individuo en una red debe tener necesariamente en cuenta el tiempo de desplazamiento. En esta línea surge el trabajo de Posner y Bernholtz (1968), que puede considerarse como una extensión natural del modelo de Gordon y Newell, con la inclusión del hecho de que el tiempo necesario para que una unidad pase de la estación  $i$  a la  $j$ , es una variable aleatoria con función de distribución  $G_{ij}$ . De este modo, y bajo el supuesto de que los tiempos de servicio de las sucesivas estaciones son variables aleatorias independientes y exponencialmente distribuidas, con tasa  $\mu_i(n_i)$ , se encuentra que la distribución estacionaria que proporcional las probabilidades de estado de la red, tiene una expresión factorizada, análoga a las ya conocidas del tipo de forma de producto. Sin embargo, estamos ante un tipo de red en la que desaparece la expresión, ya tradicional, introduciéndose en la elementos de la factorización, componentes relacionados no solo con el número de clientes en cada estación de la red, sino también con el número de clientes que se encuentran en camino de una estación a otra. La consideración de los tiempos de tránsito ha gozado tradicionalmente de un escaso interés, hasta la aparición de las redes de comunicaciones y el desarrollo de la informática, tráfico de datos y programas, que las ha vuelto a poner en consideración.

Tras estos modelos iniciales de redes, fueron surgiendo modelos cada vez más complejos, de entre los cuales es preciso destacar dos casos. El modelo de Reiser y Kobayashi (1975) y las redes de Kelly (1979). El primero de ellos es, sin duda, el trabajo más amplio y general sobre redes de colas existente hasta el momento de su aparición, con la única excepción de que la no consideración de los tiempos de tránsito. En este modelo, se estudia el caso de un sistema de  $N$  estaciones de servicio, con  $R$  tipos distintos de clientes y  $L$  subcadenas de Markov cerradas que caracterizan cada una de ellas a una subred dentro de la red global, con  $R \geq L \geq 1$ . Los clientes pueden pasar aleatoriamente de una otra estación tras completar el servicio en ellas, incluyéndose la posibilidad de que el cambio de estación vaya aparejado con un cambio en el tipo o clase de cliente. Las distintas subcadenas que componen el sistema pueden ser abiertas o cerradas y los procesos de llegadas a las mismas son flujos de Poisson independientes de tasa  $\lambda_s$ ,  $s=1, \dots, L$  que, además, pueden ser función del número de individuos en la subcadena. En las subcadenas cerradas el número de clientes es constante, no permitiéndose salidas hacia otras subcadenas. Las estaciones de servicio tienen distribución exponencial con tasa  $\mu_i(n_i)$ ,  $i=1, \dots, N$ , dependiente del número de individuos en ella, mientras que la disciplina de cola es la usual en todos los modelos que estamos considerando (FIFO), si bien los propios autores consideran varias disciplinas posibles. La solución estacionaria de la red existe y puede expresarse en forma de producto, apareciendo en ella el problema habitual de la determinación de la constante de normalización, al mismo tiempo que ya no se verifica que el resto de la expresión se corresponda con el producto de las probabilidades marginales estacionarias de cada estación de la red.

Las redes de Kelly constituyen una extensión de los modelos de Jackson y Gordon y Newell, a los que incluyen como casos particulares, como el propio Kelly demuestra en su trabajo, cuestión que se produce igualmente en el caso del modelo de Reiser y Kobayashi, como puede verse en Aranda (1982). La red abierta de Kelly se corresponde con una red formada por  $N$  estaciones de servicio

( $N < \infty$ ), con  $R$  tipos de clientes ( $R \leq \infty$ ), tal que cada estación de la red se comporta como un sistema  $M/s_j$ , con tasa de servicio  $\mu_j$ . Los clientes de tipos  $r$ ,  $r=1, \dots, R$ , entran a la red de acuerdo con un proceso de Poisson de tasa  $\lambda_m$  y cada tipo de cliente tiene asociada una ruta  $r_m$  que le lleva a visitar  $L \leq N$  estaciones de la red antes de abandonarla. Es decir, cada tipo de cliente tiene una ruta fija a través de la red. Si en un momento de tiempo  $t$  existen  $n_i$  clientes en la estación  $i$ ,  $i=1, \dots, N$ , se define  $X_i(t)$  como un vector de longitud  $n_i$  cuyo  $j$ -ésimo elemento es el par ordenado  $(r, j)$  que especifica el tipo de cliente que está en la posición  $j$  en la estación  $i$ . Con esta construcción, el proceso estocástico  $N$ -dimensional  $X(t) = \{X_1(t), \dots, X_N(t); t \geq 0\}$  es un proceso de Markov definido sobre un espacio de estados numerable y su distribución estacionaria puede obtenerse, siendo similar a la del tipo de forma de producto que aparece en el modelo abierto de Jackson.

La red cerrada de Kelly es similar a ésta, con las lógicas modificaciones, y la inclusión de la propiedad de que cada cliente al finalizar su ruta vuelve a reproducirla desde la estación inicial, permaneciendo fijo el número total de clientes de cada tipo en la red (y no permitiéndose cambios de tipo). Con estas especificaciones se obtiene igualmente la distribución estacionaria de la red para el proceso de estados análogo al del caso abierto, resultando ser similar a la obtenida para el modelo de Gordon y Newell.

Sin embargo, en la distribución estacionaria de este tipo de redes, se observa el mismo hecho que en el caso del modelo de Reiser y Kobayashi, lo que abre ya el paso a una nueva línea de trabajo en relación con la extensión y aplicación del concepto de forma de producto. Así, a lo largo de todos estos modelos asistimos a la presencia de una forma concreta para las probabilidades de estado estacionarias, forma que se corresponde con una factorización de  $N$  elementos, correspondientes a cada una de las estaciones de la red y que reviste esencialmente tres posibilidades. La primera de ellas, que el elemento  $i$ -ésimo del producto sea la probabilidad de estado estacionaria marginal de la estación  $i$ ,  $i=1, \dots, N$ . La segunda, que ocurra una situación similar, con la excepción de la constante de normalización (propia de las redes cerradas), y la tercer, una factorización en elementos que no se pueden identificar exactamente con las probabilidades marginales de estado, aunque sí con cada estación en concreto. Ante esta cuestión surgen naturalmente varias opciones y líneas de trabajo. Una de ellas correspondería a la investigación de las causas que motivan la existencia de una forma tan particular de tales probabilidades de estado; otra la investigación en técnicas y métodos para su determinación concreta y una tercera, el estudio del mantenimiento de dicho tipo de distribución o mejor dicho su insensibilidad frente a modificaciones en las características que definen la red.

## 4. ENFOQUES MAS RECIENTES

La presencia de la forma de producto es característica en los casos de sistemas que pueden resolverse mediante el principio de balance en sus diversas opciones (balance global, de estación o, en menor medida, en el caso del balance parcial), Van Dijk (1993), dando lugar, según los casos, a las tres opciones que hemos indicado, pero que todas ellas conducen en definitiva a un único enfoque. Este enfoque o punto de vista podría denominarse forma de producto general y consiste en la factorización de la distribución estacionaria en dos términos, uno que recoge la influencia solo del servicio, y un segundo término que viene dado por las rutas y flujos de llegadas, dependiente del estado. De este modo, la descomposición sería:

$$\pi(n_1, \dots, n_N) = R(n_1, \dots, n_N) \cdot S(n_1, \dots, n_N)$$

que en el caso de la red cerrada de Jackson, con tasa de servicio  $\mu_i(n_i)$  se corresponde con:

$$S(n_1, \dots, n_N) = \prod_{i=1}^N \left( \frac{1}{\prod_{k=1}^{n_i} \mu_i(k)} \right) ; \quad R(n_1, \dots, n_N) = \prod_{i=1}^N \lambda_i^{n_i}$$

Desde esta perspectiva, se abre un importante camino para el trabajo en la investigación sobre modelos e hipótesis que conducen a soluciones estacionarias que posean la forma de producto, camino que, por otra parte, ha sido seguido por numerosos autores con la búsqueda no solo de expresiones exactas para dicha probabilidad, sino de aproximaciones, algoritmos de cálculo o cotas para sus posibles valores.

Una de las hipótesis básicas que conduce a este tipo de expresión para las probabilidades de estado, es el requisito de que la distribución del tiempo de servicio en las diversas estaciones sea exponencial. Sin embargo, la relajación de este requisito se ha mostrado no solo útil sino posible, conduciendo al concepto de insensibilidad (o robustez) de la distribución estacionaria respecto de distintos supuestos considerados originalmente como básicos. Este tipo de comportamientos vienen usualmente asociados al concepto de reversibilidad de los procesos estocásticos que intervienen en el sistema, concepto que intuitivamente puede considerarse equivalente al hecho de que un proceso estocástico reversible sería aquel que situado en el tiempo  $t$  en un estado concreto, podría retroceder (estocásticamente) por el mismo camino si el tiempo fuera reversible. Este concepto fue utilizado inicialmente en el contexto de redes de colas por Kelly (1979) y puede verse detalladamente en Van Dijk (1993). En la misma línea aparece el estudio de los procesos cuasireversibles y su incidencia en la solución de la red, dado que las redes con nodos (estaciones) cuasireversibles no solo son tratables analíticamente sino que son muy versátiles con respecto a la representación de fenómenos reales (Kelly, 1982). En esta línea son de interés los trabajos de Baskett, Chandy, Muntz y Palacios (1975); el de Walrand (1983), donde no solo tenemos los resultados alcanzados hasta el momento en este tipo de redes sino que generaliza los resultados de Jackson sobre la forma producto, extendiéndolos a este tipo de redes; o Walrand (1988), surgiendo en muchos casos, a partir de esta línea, el uso de los procesos generalizados semimarkovianos (GSMP) en el estudio de los modelos de redes.

Naturalmente, los caminos que ha seguido el estudio de las redes de colas son muy variados, pero quizás habría que señalar tres de ellos, con la mención aparte de la línea de trabajo ya mencionada en relación con la forma de producto. El primero de ellos correspondería al análisis de los modelos desde el punto de vista de sus sucesivas modificaciones en lo que concierne a características de las redes: disciplinas de servicio, tipo de clientes, llegadas o servicios en masa, bloqueos, capacidad finita en alguna o todas las estaciones, etc.

La segunda línea podría resumirse como la línea de las técnicas y métodos de solución, línea de trabajo que se fundamenta en trabajos y resultados como el conocido teorema de Norton introducido por Chandy, Herzog y Woo (1975), en virtud del cual, bajo ciertas condiciones, es posible reemplazar un subconjunto de una red por una sola estación sin que se modifique la distribución

---

invariante del resto de la red. El método de descomposición, en virtud del cual se intenta analizar el resultado de una red descomponiéndola en subsistemas de nuevo tamaño que sean fácilmente tratables. La técnica del análisis del valor medio introducida por Reiser y Lavenberg (1980), que en lugar de tomar en consideración el enfoque habitual de las probabilidades de estado, trabaja con la búsqueda de otros indicadores (valores medios) directamente que, en muchos casos no precisan del conocimiento exacto de la distribución estacionaria. Y en definitiva muchos otros resultados complementarios que van desde los referentes a los procesos de salidas o abandonos, como el conocido teorema de Burke y sus sucesivas extensiones a casos muy diferenciados, o cuestiones relacionadas con los tiempos de permanencia (sojourn times) en las redes que han dado lugar a toda una literatura propia sobre la que han realizado numerosas aportaciones autores clásicos en la teoría de redes de colas, como Walrand y Varaiya (1980, 1981), Melamed (1982), Kelly y Pollett (1983), Kelly (1984), Disney y König (1985), Lemoine (1987), Cohen y Kelly (1990) o Kook y Serfozo (1993) que incluyen el viejo tratamiento de los tiempos de tránsito de Posner y Bernholtz.

La tercera línea podría corresponder a la implicación entre modelos de redes de colas y procesos estocásticos, línea que entronca con las dos que acabamos de mencionar y que es difícilmente separable de ellas, pero que ha alcanzado un alto nivel de desarrollo, proporcionando importantes avances a la teoría y sirviéndose de buena parte de los tipos de procesos más usuales, procesos que van desde los markovianos típicos hasta los procesos de renovación, martingalas o los procesos de movimiento browniano que están siendo introducidos cada vez más en el análisis de redes, Harrison (1987). En todo caso, el estudio de la evolución de las redes de colas y sus tendencias en los últimos años pasa por conocer un importante grupo de trabajos de investigación que pueden ser los siguientes: Disney (1981), que revisa los últimos veinte años de redes de colas; Koenisberg (1982), donde se analiza la evolución del rendimiento de sistemas de ordenadores; Balsamo e Iazeolla (1985), que sintetiza los resultados sobre la forma de producto de las distribuciones estacionarias; el ya mencionado Disney y König (1985) dedicado principalmente a los tiempos de permanencia y procesos de longitud de cola; Prabhu (1987) que recoge una completa bibliografía sobre libros y artículos de recopilación en colas, con una orientación similar a la del trabajo de Perros (1989), que recopila los trabajos sobre redes de colas con capacidad finita; o el trabajo de Kiessler y Disney (1988) que plantea las principales cuestiones que abordan en el análisis de redes.

Finalmente, es preciso mencionar un enorme campo que se ha abierto con la conexión de las redes de colas y dos grandes temas, los sistemas de producción (manufacturing systems) y las redes de comunicación, campos donde con toda probabilidad se están dando hoy día los avances más importantes. Con respecto a los sistemas de producción puede consultarse la obra de Papadopoulos, Heavey y Brown (1993), en tanto que para el caso de los sistemas de comunicación pueden verse los sucesivos trabajos de Van Dijk, como el ya citado de 1993, y el grupo de Cambridge dirigido por F.P.Kelly.

## 5. BIBLIOGRAFIA

- ARANDA GALLEG0, J. (1982): "Algunas relaciones entre modelos Markovianos de redes de colas". Trabajos de Estadística y de Investigación Operativa Vol.33, nº3, pp: 3-29.
- BALSAMO, S.; IAZEOLLA, G. (1985): "Product-form Synthesis of queueing networks". IEEE Trans. Software Engrg., Vol.11, nº2, 194-199.
- BASKETT, F.; CHANDY, K.M.; MUNTZ, R.R.; PALACIOS, F. (1975): "Open, closed, and mixed networks of queues with different classes of customers". J.A.C.M., Vol.22, pp: 248-260.
- BUZEN, J.P. (1973): "Computational algorithm for closed networks with exponential servers", Comm. Assoc. Comput. Mach., Vol.16, pp: 527-531.
- COHEN, J.E.; KELLY, F.P. (1990): "A paradox of congestion in a queueing network". J. Appl. Probab., Vol.27, nº3, pp: 730-734.
- CHANDY, K.M.; HERZOG, U.; WOO, L.S. (1975): "Parametric analysis of queueing networks", IBM J. of Research and Development, Vol.19, pp: 43-49.
- DISNEY, R.L.; KONIG, D. (1985): "Queueing networks: a survey of their random processes". SIAM Review, Vol.27, nº3, pp: 335-403.
- DISNEY, R.L. (1981): "Queueing Networks". Collection: Operations Research (Duluth, Minn., 1979), pp: 53-83. Serie Proc. Sympos. Appl. Math., 25, Amer. Math. Soc.; Providence, R.I., 1981.
- FINCH, P.D. (1959): "Cyclic queues with feedback". J. Roy. Stat. Soc. B 21, pp: 153-157.
- GORDON, W.J.; NEWELL, G.F. (1967): "Closed queueing systems with restricted queue lengths". Operations Research Vol.15 pp: 254-277.
- HARRISON, J.M. (1987): "Brownian models of open queueing networks with homogeneous customer populations". Stochastics, Vol.22, nº2, pp: 77-115.
- HARRISON, P.G. (1985): "On Normalizing Constants in Queueing Networks". Operations Research Society of America, Vol.33, nº2, pp: 464-468.
- JACKSON, J.R. (1957): "Networks of waiting lines". Operations Research Vol.5 pp:518-521
- KELLY, F.P. (1979): Reversibility and Stochastic Networks. Wiley, New York.
- KELLY, F.P.; POLLETT, P.K. (1983): "Sojourn times in closed queueing networks". Adv. in Appl. Probab., Vol.15, nº3, pp: 638-656.
- KELLY, F.P. (1984): The dependence of sojourn times in closed queueing networks. Collection: Mathematical computer performance and reliability (Pisa, 1983), 111 121 North Holland, Amsterdam New York.
- KELLY, F.P. (1982): "Networks of quasi-reversible nodes". Applied Probability Computer Science, the interface: Proc. of the ORSA-TIMS Boca Raton Symposium (eds. R. Disney and T. Ott.), Birkhauser, Boston, Cambridge, Mass.
- KIESSLER, C.; DISNEY, R.L. (1988): "Further remarks on queueing networks theory". European Journal of Operational Research, Vol.36, pp: 285-296.
- KOENIGSBERG, E. (1982): "Twenty-five years of cyclic queues and closed queue networks: a review". J. Oper. Res. Soc., Vol.33, pp: 605-619.

---

KOENISBERG, E. (1958): "Cyclic queues". *Oper. Res. Quat.* Vol.9 pp: 22-35.

KOOK, K.H.; SERFOZO, R.F. (1993): "Travel and sojourn times in stochastic networks". *Ann. Appl. Probab.*, Vol.3, n°1, pp:228-252.

LEMOINE, A.J. (1987): "On sojourn time in Jackson networks of queues". *J. Appl. Probab.*, Vol 24, n°2, pp: 495-510.

MELAMED, B. (1982): "Sojourn times in queueing networks", *Math. Oper. Res.* Vol.7, pp: 233-244.

PAPADOPOULUS, H.T.; HEAVEY, C.; BROWNE, J. (1993): *Queueing Theory in Manufacturing Systems Analysis and Design*. Chapman & Hall.

PERROS, H.G. (1989): "A bibliography of papers on queueing networks with finite capacity queues", *Performance Evaluation*, Vol.10, pp: 255-260.

POSNER, M.; BERNHOLTZ, B. (1968): "Closed finite queueing systems with time lags". *Operations Research* Vol.16, pp: 962-976.

POSNER, M.; BERNHOLTZ, B. (1968): "Closed finite queueing systems with time lags and with several classes of units". *Operations Research* Vol.16 pp: 977-985.

PRABHU, N.U. (1987): "A bibliography of books and survey papers on queueing systems: theory and applications". *Queueing Systems. Theory and Applications.*, Vol.2, n°4, pp:393-398.

REISER, M; KOBAYASHI, H. (1975): "Queueing networks with multiple close chains: Theory and computational algorithm". *IBM J. Res. Dev.* Vol.19 pp: 283-294.

REISER, M.; LAVENBERG, S.S. (1980): "Mean Value Analysis of Closed Multichain Queueing Networks". *Journal of the Association for Computing Machinery*, Vol.17, pp: 313-322.

VAN DIJK, N.M. (1993): *Queueing Networks and Product Forms. A Systems Approach*. John Wiley & Sons.

WALRAND, J. (1988): *An Introduction to Queueing Networks*. Prentice-Hall International Editions.

WALRAND, J.; VARAIYA, P. (1981) "Flows in queueing networks: a martingale approach". *Math. Oper. Res.*, Vol.6, pp: 387-404.

WALRAND, J.; VARAIYA, P. (1980): "Interconnection of Markov chains and quasi-reversible queueing networks". *Stoc. Proc. Appl.*, Vol.10, pp: 209-219.

WALRAND, J. (1983): "A probabilistic look at networks of quasi-reversible queues". *IEEE Trans. Info. Theory*, IT-29, pp: 825-831.

WALRAND, J.; VARAIYA, P. (1980): "Sojourn times and the overtaking condition in Jacksonian networks". *Adv. Appl. Prob.*, Vol.12, pp: 1000-1018.



# UN MODELO JERARQUICO PARA EL ANALISIS BAYESIANO DE DATOS DE SUPERVIVENCIA GAMMA CON COVARIABLES

EDUARDO BEAMONTE CÓRDOBA  
Universidad de Valencia

## 1. INTRODUCCIÓN

El análisis estadístico de datos de supervivencia ha experimentado un gran desarrollo en los últimos años en diferentes áreas de conocimiento, pero en especial en las Ciencias de la Salud, en las Ciencias Económicas y Sociales y en Ingeniería.

Se define el *tiempo de supervivencia* como el tiempo transcurrido entre dos fenómenos bien definidos y el principal problema en su tratamiento estadístico es la aparición de los llamados *tiempos censurados* cuando alguno de los dos fenómenos no se observa.

La utilización de un modelo paramétrico para el análisis de datos censurados es realmente complicada, pues exige una considerable capacidad de cálculo para su puesta en práctica. Es por esta razón que se continúan utilizando técnicas no paramétricas (como las *curvas de Kaplan-Meier* o el *método actuarial*) o semiparamétricas (*regresión de Cox*). En la actualidad, el notable incremento de la capacidad de cálculo numérico introducido por los equipos informáticos hace posible el análisis de tiempos de supervivencia utilizando modelos completamente paramétricos.

En un trabajo anterior (Bermúdez y Beamonte, 1993) propusimos un modelo Gamma, con parámetros comunes a todos los individuos, para datos de supervivencia que podían estar progresivamente censurados por la derecha (del correspondiente tiempo de supervivencia sólo se conoce que es mayor que el dato observado, denominado *tiempo de censura*, con un mecanismo de censura independiente del mecanismo de muerte), analizándolo desde una perspectiva bayesiana.

En este trabajo generalizamos el modelo anterior para disminuir su rigidez y poder incorporar covariables. Así, suponemos que el tiempo de supervivencia de cada individuo se distribuye según el siguiente modelo jerárquico:

$$t \sim \text{Ga}(t \mid \alpha, \beta) \\ (\log \alpha, \log \beta)' \sim N_2((\log \alpha, \log \beta)' \mid Bx, H),$$

siendo  $t$  el tiempo de supervivencia y  $x$  el vector de covariables de dicho individuo, que habitualmente incorporará un primer elemento constante e igual a 1, como toda matriz de diseño en los

modelos lineales generalizados. Es decir, cada tiempo de supervivencia es  $Ga(a, \beta)$ , pero los parámetros  $a$  y  $\beta$  son características propias del individuo, que están relacionados con su vector de covariables a través de un mecanismo aleatorio que, a su vez, depende de ciertos hiperparámetros  $B$  y  $H$  comunes a todos los individuos.  $B$  es la matriz de coeficientes y  $H$  la matriz de precisión de la distribución Normal bivariante.

En este trabajo estamos especialmente interesados en la comparación de dos grupos de individuos. Para ello basta con incluir una única covariable dicotómica, aparte de la covariable constante; así,  $x'=(1, 1)$  si el individuo pertenece al primer grupo y  $x'=(1, 0)$  en otro caso. El objetivo primordial será hacer inferencias sobre los hiperparámetros relacionados con esa covariable dicotómica.

La notable complicación de la distribución final (independientemente de la inicial utilizada y acentuada por la presencia habitual de datos censurados) estimula a realizar su estudio a través de una muestra generada a partir de la misma. En esa línea fue pionero el trabajo de Gelfand y Smith (1990).

En el apartado 2 se expone el muestreo de Gibbs, uno de los métodos iterativos para la obtención de una muestra de la distribución final más utilizados en los últimos tiempos. En el apartado 3 se analiza el modelo propuesto, detallando la aplicación del muestreo de Gibbs en el estudio de la distribución final. Este procedimiento se utiliza en el apartado 4 para el análisis de dos bancos de datos que incluyen una covariable dicotómica; uno de ellos simulados y el otro basado en datos reales.

Finalmente, el apartado 5 recoge los comentarios y conclusiones finales.

## 2. EL MUESTREO DE GIBBS

El muestreo de Gibbs (Geman y Geman, 1984; Gelfand y Smith, 1990; Casella y George, 1992; Smith y Roberts, 1993) es, sin duda, el método iterativo que más se ha utilizado para la obtención de muestras de la distribución final.

Básicamente, consiste en construir una función de transición que defina una cadena de Markov irreducible y para la que la distribución final sea estacionaria. En concreto, sea  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)'$  el vector paramétrico y sean  $\pi(\theta_1 | \theta_2, \dots, \theta_k)$ ,  $\pi(\theta_2 | \theta_1, \theta_3, \dots, \theta_k)$ , ...,  $\pi(\theta_k | \theta_1, \dots, \theta_{k-1})$  las distribuciones condicionales completas obtenidas a partir de la distribución final  $\pi(\theta)$ . Partiendo de un punto inicial  $\theta^{(0)} = (\theta_1^{(0)}, \dots, \theta_k^{(0)})'$  se genera  $\theta_1^{(1)}$  a partir de  $\pi(\theta_1 | \theta_2^{(0)}, \dots, \theta_k^{(0)})$ ,  $\theta_2^{(1)}$  a partir de  $\pi(\theta_2 | \theta_1^{(1)}, \theta_3^{(0)}, \dots, \theta_k^{(0)})$ , y así hasta  $\theta_k^{(1)}$ , generado a partir de  $\pi(\theta_k | \theta_1^{(1)}, \dots, \theta_{k-1}^{(1)})$ , con lo que se obtiene  $\theta^{(1)} = (\theta_1^{(1)}, \dots, \theta_k^{(1)})'$ . Bajo condiciones muy generales, la sucesión  $\{\theta^{(i)}\}$  así construida es una realización de una cadena de Markov con la distribución final  $\pi(\theta)$  como distribución estacionaria (Gelfand y Smith, 1990).

Este proceso exige que sea fácil muestrear a partir de las distribuciones condicionales completas, pero eso suele ser trivial (utilizando métodos de aceptación-rechazo, por ejemplo) si el vec-

tor paramétrico  $\theta$  se descompone de forma que tales condicionales sean univariantes. Por otra parte, no es necesario *visitar* cada condicional en el orden natural arriba utilizado, el resultado es igualmente válido cualquiera que sea el orden con tal de que cada condicional sea visitada con una frecuencia infinita (Geman y Geman, 1984). Por ello, el algoritmo Data Augmentated propuesto por Tanner y Wong (1987), en su versión Monte Carlo, esto es cuando sólo se dispone de las distribuciones condicionales completas y se calculan las demás condicionales por Monte Carlo, no es más que un caso particular de muestreo de Gibbs pero con un esquema de visitas a las condicionales distinto (Gelfand y Smith, 1990).

Hasta ahora no existen resultados teóricos, de fácil utilización en aplicaciones concretas, sobre cuándo se puede considerar estacionaria la cadena de Markov. En especial, sigue siendo un tema de investigación atractivo la búsqueda de métodos que sugieran automáticamente el número de etapas iniciales a desechar de la cadena, e incluso si es más eficiente utilizar una o varias cadenas independientes para monitorizar esa convergencia, ver, por ejemplo, Gelman y Rubin (1992b), Smith y Roberts (1993) y referencias allí citadas.

### 3. ANÁLISIS DEL MODELO JERÁRQUICO GAMMA

Denotamos por  $\{t_1, \dots, t_r\}$  a los tiempos de supervivencia correspondientes a los datos no censurados y por  $\{T_{r+1}, \dots, T_n\}$  a los tiempos de censura correspondientes a los datos censurados. El vector paramétrico completo objeto del muestreo de Gibbs es el formado por los propios parámetros del modelo,  $(\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n)$ , los hiperparámetros,  $(B \text{ y } H)$ , y los tiempos de supervivencia no observados,  $(t_{r+1}, \dots, t_n)$ . La distribución final viene dada por:

$$f(\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n, B, H, t_{r+1}, \dots, t_n \mid t_1, \dots, t_r, T_{r+1}, \dots, T_n, X),$$

siendo  $X_{n \times k}$  la matriz de covariables; esto es, una matriz cuya fila  $i$ -ésima coincide con el vector de covariables del  $i$ -ésimo individuo.

A partir de esa distribución podemos obtener la distribución marginal de interés:

$$f(B, H \mid t_1, \dots, t_r, T_{r+1}, \dots, T_n, X).$$

Para utilizar el muestreo de Gibbs es necesario obtener las distribuciones condicionales completas. La correspondiente a un tiempo censurado no observado es:

$$\begin{aligned} f(t_i \mid t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n, T_{r+1}, \dots, T_n, X, \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n, B, H) = \\ = f(t_i \mid T_i, \alpha_i, \beta_i), i=r+1, \dots, n, (1) \end{aligned}$$

siendo  $f(t_i \mid T_i, \alpha_i, \beta_i)$  una distribución Gamma truncada. Específicamente, Bermúdez y Beamonte (1993),  $f(t_i \mid T_i, \alpha_i, \beta_i) \propto \text{Ga}(t_i \mid \alpha_i, \beta_i)$  si  $t_i > T_i$ .

La distribución condicional completa de los hiperparámetros es:

$$f(B, H | t_1, \dots, t_n, T_{r+1}, \dots, T_n, X, \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n) = f(B, H | X, \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n) \propto \\ \propto f(B, H) f(\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n | X, B, H), (2)$$

que se reduce a un problema habitual de regresión bivalente normal homocedástica: si se utiliza una distribución inicial  $f(B, H)$  perteneciente a la familia Normal-Wishart, la distribución final también es Normal-Wishart cuya expresión puede consultarse, por ejemplo, en Broemeling (1985, capítulo 8, pp. 378-379).

La distribución condicional completa del parámetro  $a_i$ ,  $i=1, \dots, n$ , es:

$$f(\alpha_i | \alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n, t_1, \dots, t_n, T_{r+1}, \dots, T_n, X, B, H) = \\ = f(\alpha_i | t_i, \beta_i, x_i, B, H) | f(t_i | \alpha_i, \beta_i) f(\alpha_i - \beta_i, x_i, B, H) = \\ = \text{Ga}(t_i | \alpha_i, \beta_i) N(\log \alpha_i | \beta_i, x_i, B, H) \propto \frac{\beta_i^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i)} t_i^{\alpha_i} N(\log \alpha_i | \mu'_1, s_1^{-2}), (3)$$

con  $\mu'_1 = \mu_1 + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (\ln \beta_i - \mu_2) y \sigma_1'^2 = \frac{1}{h_{11}}$  os momentos de la distribución Normal condicionada

obtenida a partir de la Normal bivalente con vector de medias  $\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = Bx_i$  y matriz de preci-

sión  $H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix} = \Sigma^{-1}$ , con  $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$  y  $\sigma_{12} = \rho \sigma_1 \sigma_2$ .

Análogamente, la distribución completa del parámetro  $\beta_i$ ,  $i=1, \dots, n$ , es:

$$f(\beta_i | t_i, \alpha_i, x_i, B, H) \propto \beta_i^{\alpha_i} \exp(-\beta_i t_i) N(\log \beta_i | \mu'_2, s_2^{-2}), (4)$$

siendo  $\mu'_2 = \mu_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (\ln \alpha_i - \mu_1) y \sigma_2'^2 = \frac{1}{h_{22}}$  la media y varianza de la distribución Normal condicionada correspondiente.

Una vez construidas las distribuciones condicionales completas, y partiendo de un punto inicial  $\alpha_1^{(0)}, \beta_1^{(0)}, \dots, \alpha_n^{(0)}, \beta_n^{(0)}, B^{(0)}, H^{(0)}$ , el algoritmo de Gibbs puede implementarse de la siguiente forma:

Completamos los tiempos censurados,  $T_{r+1}, \dots, T_n$ , generando los tiempos de supervivencia no observados ( $t_{r+1}^{(0)}, \dots, t_n^{(0)}$ ) a partir de (1) con  $(\alpha_i, \beta_i)' = (a_i^{(0)}, \beta_i^{(0)})'$ ,  $i=r+1, \dots, n$ . A continuación, generamos  $a_1^{(1)}$  a partir de (3), con  $t_j = t_j^{(0)}$ ,  $j=r+1, \dots, n$ ,  $\beta_1 = \beta_1^{(0)}$ ,  $B=B^{(0)}$  y  $H=H^0$ , mediante el método de aceptación-rechazo (ver, por ejemplo, Devroye, 1986, p. 40), utilizando como función importante la densidad log-normal  $N(\log \alpha \mid \mu', s_1'^2)$ . De forma similar, generamos  $\beta_1^{(1)}$  a partir de (4), con  $t_j = t_j^{(0)}$ ,  $j=r+1, \dots, n$ ,  $a_1 = a_1^{(1)}$ ,  $B=B^{(0)}$  y  $H=H^0$ , utilizando como función importante la densidad log-normal  $N(\log \beta \mid \mu', s_2'^2)$ . Del mismo modo, generamos  $a_2^{(1)}$  a partir de (3), con  $t_j = t_j^{(0)}$ ,  $j=r+1, \dots, n$ ,  $\beta_2 = \beta_2^{(0)}$ ,  $B=B^{(0)}$  y  $H=H^0$ , generamos  $\beta_2^{(1)}$  a partir de (4), con  $t_j = t_j^{(0)}$ ,  $j=r+1, \dots, n$ ,  $a_2 = a_2^{(1)}$ ,  $B=B^{(0)}$  y  $H=H^0$ , y así sucesivamente. Finalmente, generamos los hiperparámetros  $B^{(1)}$  y  $H^{(1)}$ , a partir de la distribución Normal-Wishart (2), con  $(\alpha_i, \beta_i)' = (\alpha_i^{(1)}, \beta_i^{(1)})'$ ,  $i=1, \dots, n$ .

Repetimos el bucle hasta alcanzar estacionariedad en las cadenas de Markov y, posteriormente, hasta construir una muestra de la distribución final. A partir de esa muestra de la distribución final puede estudiarse cualquier característica deseada.

Este esquema teórico del algoritmo de Gibbs es válido para cualquier vector de covariables  $x$ . No obstante, a partir de ahora vamos a centrarnos en el caso particular de un vector de covariables dicotómico.

El tiempo medio de supervivencia de un individuo de la primera población es:

$$\begin{aligned}\mu_1 &= E(t) = E(E(t \mid \alpha, \beta)) = E(a/\beta) = E(\exp \{\log \alpha - \log \beta\}) = \\ &= \exp \{b_{11} + b_{12} - b_{21} - b_{22} + 1/2 [\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + s_2^2]\},\end{aligned}$$

y podemos construir una muestra de la distribución final de  $\mu_1$  a partir de la muestra  $\{B^{(0)}, H^{(0)}\}$ . Similarmente, el cociente de los tiempos medios de supervivencia de las dos poblaciones es:

$$\tau = \mu_1/\mu_2 = \exp \{b_{12} - b_{22}\}.$$

Si la distribución de  $\tau$  está 'cerca' del 1, las dos poblaciones no serán diferentes en tiempos medios de supervivencia. De hecho, la hipótesis de igualdad de tiempos medios de supervivencia puede formularse como:  $b_{12} = b_{22}$ .

El estudio de la distribución bivalente  $\{b_{12}, b_{22}\}$  permite contrastar la hipótesis de igualdad de poblaciones, pues las dos poblaciones serán iguales si y sólo si  $b_{12} = b_{22} = 0$ .

Por último, la distribución predictiva podemos aproximarla, por Monte-Carlo, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}f(t \mid x, t_1, \dots, t_n, T_{r+1}, \dots, T_n, X) &= \iint Ga(t \mid \alpha, \beta) \cdot \\ &\cdot f(\alpha, \beta \mid x, t_1, \dots, t_n, T_{r+1}, \dots, T_n, X) d\alpha d\beta \approx \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Ga(t \mid \alpha_{(i)}, \beta_{(i)}),\end{aligned}$$

con  $\{(\alpha_{(j)}, \beta_{(j)}), j=1, \dots, m\}$ , una muestra obtenida a partir de:

$$f(\log \alpha, \log \beta \mid x, t_1, \dots, t_n, T_{r+1}, \dots, T_n, X) = \int N(\log a, \log \beta)' \mid Bx, H) \cdot \\ \cdot f(B, H \mid t_1, \dots, t_n, T_{r+1}, \dots, T_n, X) dB dH \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N N((\log \alpha, \log \beta)' \mid B^{(i)}x, H^{(i)}),$$

siendo  $\{(B^{(i)}, H^{(i)}), i=1, \dots, N\}$  la muestra obtenida mediante Gibbs sampling.

En todas las implementaciones de este algoritmo hemos construido el punto inicial de la siguiente manera: utilizamos la media y la varianza de los tiempos de supervivencia no censurados de cada uno de los grupos para obtener los pares paramétricos iniciales  $(\alpha_i^{(0)}, \beta_i^{(0)})'$ ,  $i=1, \dots, n$ , (iguales para individuos del mismo grupo) y una matriz  $B^{(0)}$  inicial. Fijamos la matriz  $H^{(0)}=20 \mathbf{I}$  (valor inicial que nos ha proporcionado buenos resultados en todas nuestras pruebas).

El método propuesto para la elección del punto inicial tan sólo pretende obtener una aproximación a los verdaderos valores; de hecho, el objetivo es partir de un punto inicial no demasiado alejado de aquéllos. Es un método sencillo y razonable que ha funcionado bien con todos los bancos de datos analizados. Es bien sabido que el algoritmo de Gibbs converge a los verdaderos valores paramétricos cualquiera que sea el punto inicial para su implementación, no obstante, tratamos de acelerar la convergencia con el método propuesto para su elección.

## 4. EJEMPLOS NUMÉRICOS

Aplicamos el análisis anterior a dos bancos de datos; el primero está constituido por datos simulados a partir del modelo jerárquico Gamma propuesto en este trabajo, con un porcentaje de censura progresiva por la derecha de aproximadamente un 15% (muestra de una colección de bancos de datos simulados analizados). El segundo banco está formado por datos reales que ya han sido estudiados en la literatura utilizando diversos métodos de análisis.

Asimismo, en ambos ejemplos hemos utilizado una distribución inicial Normal-Wishart poco informativa para los hiperparámetros:

$$f(B, H) = NW(B, H \mid M, A, T, \alpha) = N(B^v \mid M^v, H \otimes A) W(H \mid T^{-1}, \alpha),$$

con  $M=0_{2 \times 2}$ ,  $A=I_2$ ,  $T=(0.01) I_2$  y  $\alpha=2$ .

### 4.1. Análisis de un banco de datos simulado

Construimos un banco de 200 datos simulados (28 de ellos censurados) a partir del modelo jerárquico Gamma con hiperparámetros  $B = \begin{bmatrix} 4.6 & 0.2 \\ 2.3 & 0.0 \end{bmatrix}$  y  $H = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}$

Tras realizar 20000 pasos en la cadena de Markov (19 minutos en una estación Sun SPARCclassic), partiendo de un punto inicial construido según el método propuesto en el apartado anterior, monitorizamos la evolución de las medias de los tiempos de supervivencia en cada uno de los grupos, representándolas cada 10 pasos en la figura 1. En dichas gráficas se observa estabilidad desde casi el principio, además de muy poca variabilidad en ambos grupos.

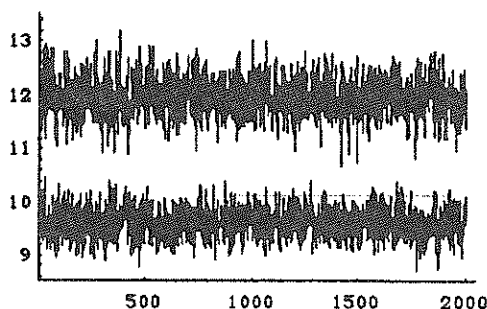


Figura 1. Evolución de las medias de los tiempos de supervivencia en cada uno de los grupos del banco de datos simulados.

El estudio de la densidad predictiva lo realizamos desechando los 15000 primeros pasos de la cadena de Markov y, posteriormente, cogiendo uno de cada 10 hasta obtener una muestra de tamaño 500. Así, por Monte Carlo obtuvimos las medias y varianzas de las densidades predictivas para cada uno de los grupos. Se muestran en la tabla 1.

|          | Grupo 1 | Grupo 2 |
|----------|---------|---------|
| Media    | 12.3769 | 9.9653  |
| Varianza | 11.2328 | 7.7097  |

Tabla 1. Media y varianza de la predictiva en cada un de los grupos del banco de datos simulados

Las gráficas, para cada uno de los grupos, de las densidades predictivas (en trazo continuo) y de las densidades con las que realmente hemos simulado los datos (en trazo discontinuo), se recogen en la figura 2.

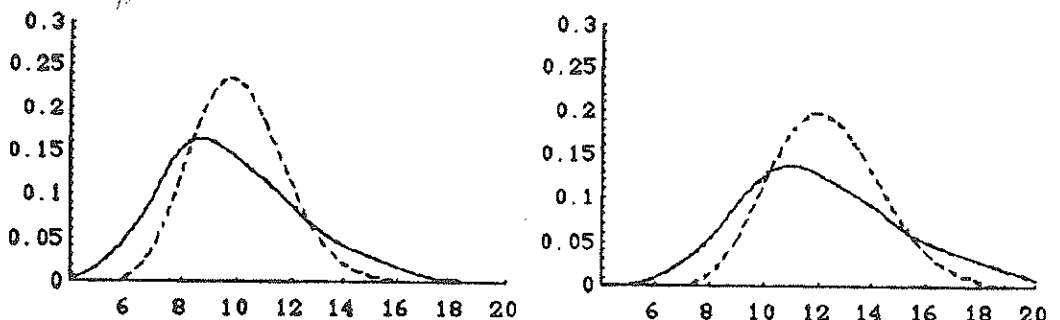


Figura 2. Densidad predictiva y densidad correcta de cada uno de los grupos del banco de datos simulados.

Por último, hemos representado la nube de puntos de la distribución bivalente  $\{b_{12}, b_{22}\}$  y el histograma de  $\tau = \exp \{b_{12} - b_{22}\}$ . Estas gráficas se muestran en la figura 3 y permiten comparar los dos grupos como ya comentamos en el apartado anterior. Observamos que la nube de puntos se encuentra por debajo de la diagonal y no se acerca al cero, por lo que podemos deducir la diferencia entre los dos grupos.

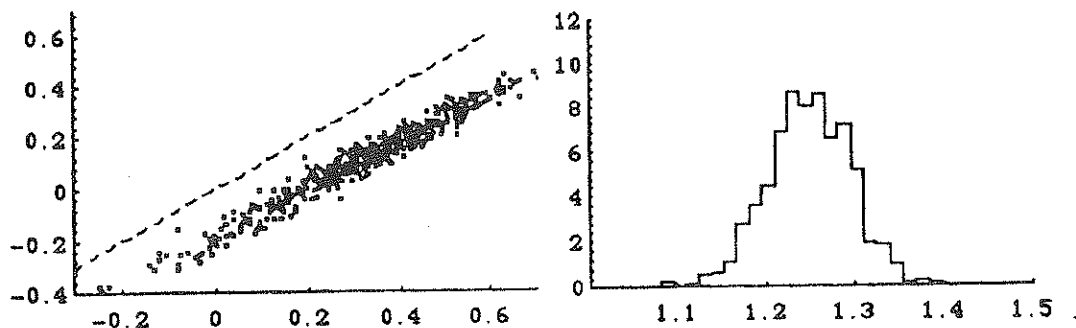


Figura 3. Nube de puntos  $\{b_{12}, b_{22}\}$  e histograma de  $\tau$  del bando de datos simulados.

## 4.2. Análisis de datos de leucemia

El banco de datos sometido a análisis consiste en 42 tiempos de remisión de la leucemia, medidos en semanas, en dos grupos con el mismo número de pacientes (Freireich, E.S. et al., 1963). Al primero de ellos se le somete a tratamiento con 6-mercaptopurina (6-MP), mientras que al segundo se le administra un placebo. Se recogen los datos en la tabla 2, donde el asterístico indica observación censurada.

|         |   |   |   |    |   |    |    |     |     |    |    |     |     |     |    |    |     |     |     |     |     |
|---------|---|---|---|----|---|----|----|-----|-----|----|----|-----|-----|-----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 6-MP    | 6 | 6 | 6 | 6° | 7 | 9° | 10 | 10° | 11° | 13 | 16 | 17° | 19° | 20° | 22 | 23 | 25° | 32° | 32° | 34° | 35° |
| Placebo | 1 | 1 | 2 | 2  | 3 | 4  | 4  | 5   | 5   | 8  | 8  | 8   | 8   | 11  | 11 | 12 | 12  | 15  | 17  | 22  | 23  |

Tabla 2. Tiempos de remisión (en semanas) de leucemia en dos grupos de pacientes

Estos datos han sido profusamente analizados por diferentes autores para estudiar nuevos métodos y tests de comparación de dos distribuciones de supervivencia. Así, Lawless (1982), previa constatación gráfica de que los tiempos de remisión en cada uno de los grupos podían provenir de distribuciones Weibull, obtuvo los estimadores máximo verosímiles de los parámetros y concluyó que ambos grupos eran distintos en tiempos medios de supervivencia utilizando intervalos de confianza. Asimismo, Lee (1992) utilizó el test F de Cox para distribuciones exponenciales para demostrar que los grupos no podían ser considerados iguales.

Al igual que en el subapartado anterior, construimos el punto de partida del algoritmo de Gibbs y monitorizamos la evolución de las medias de los tiempos de supervivencia en cada uno de



los grupos, representándolas cada 20 pasos en la figura 4. También se observa estabilidad desde casi el principio, aunque mayor variabilidad en el primer grupo.

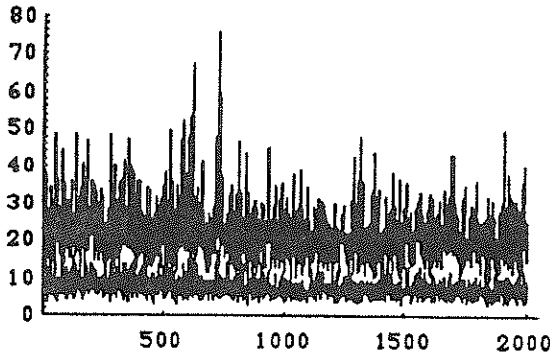


Figura 4. Evolución de las medias de los tiempos de supervivencia en cada uno de los grupos del banco de datos de leucemia.

La evolución de los hiperparámetros B es bastante similar, mostrando estabilidad casi desde el principio de la cadena de Markov. De un modo totalmente análogo a la gráfica anterior, se muestra en la figura 5 la evolución de  $b_{12}$  y  $b_{22}$ , que son los dos parámetros que permiten diferenciar los grupos.

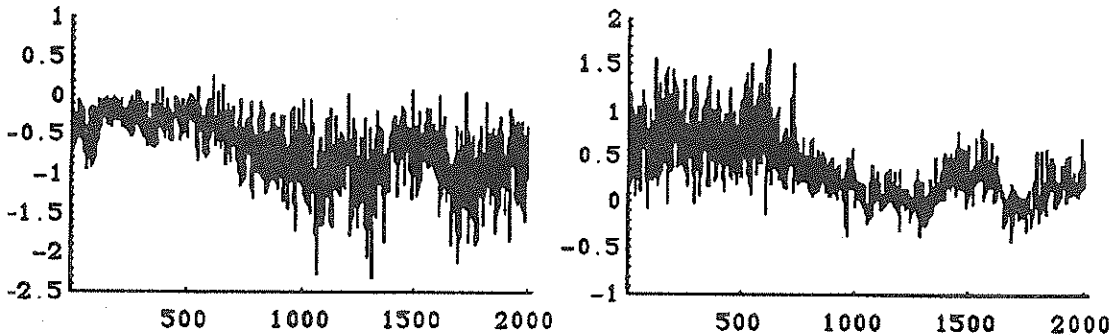


Figura 5. Evolución de los hiperparámetros de  $b_{12}$  y  $b_{22}$  en el banco de datos de leucemia.

El estudio de la densidad predictiva lo realizamos desechando los 20000 primeros pasos de la cadena de Markov y, posteriormente, cogiendo uno de cada 20 hasta obtener una muestra de tamaño 500. Así, por Monte Carlo obtuvimos las medias y varianzas de las densidades predictivas para cada uno de los grupos. Se muestran en la tabla 3.

|          | Grupo 1   | Grupo 2  |
|----------|-----------|----------|
| Media    | 36.6264   | 13.3486  |
| Varianza | 2550.9143 | 692.7137 |

Tabla 3. Media y varianza de la predictiva en cada uno de los grupos en el banco de datos de leucemia.

Representamos, en la figura 6, las gráficas de las densidades predictivas para cada uno de los dos grupos.

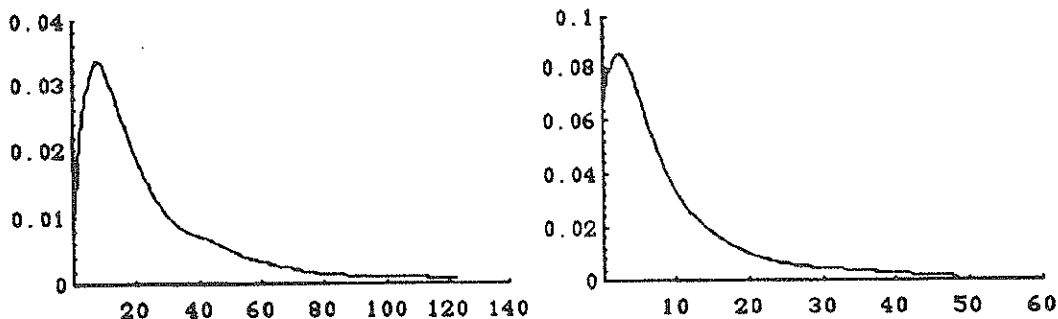


Figura 6. Densidad predictiva de cada uno de los grupos en el banco de datos de leucemia

Finalmente, en la figura 7 representamos la nube de puntos de la distribución bivalente  $\{b_{12}, b_{22}\}$  y el histograma de  $\tau = \exp \{b_{12} - b_{22}\}$  para ambos grupos. Observamos que la nube de puntos se encuentra por encima de la diagonal y no se acerca al cero, por lo que podemos deducir la diferencia entre los dos grupos.

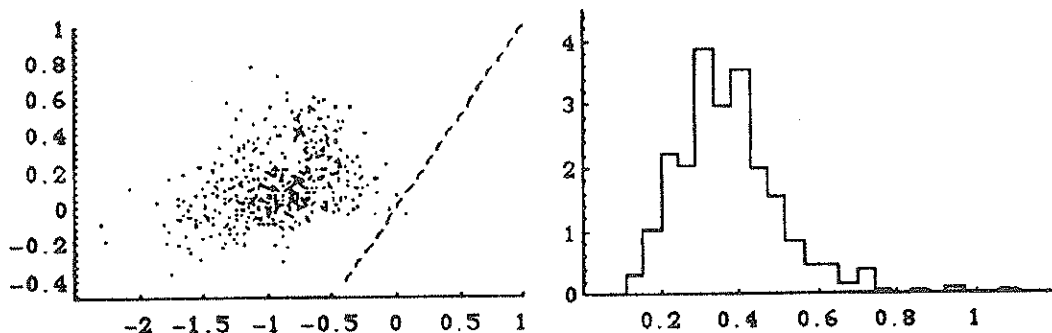


Figura 7. Nube de puntos de  $\{b_{12}, b_{22}\}$  e histograma de  $\tau$  en el banco de datos de leucemia.

## 4. COMENTARIOS FINALES

El análisis de los dos ejemplos numéricos estudiados en el apartado anterior muestra claramente que existen diferencias entre los dos grupos de individuos. La respuesta bayesiana adecuada al problema de comparación de tiempos medios de supervivencia en las dos poblaciones vendría dada por el cálculo de algún intervalo de confianza (Wei y Tanner, 1990) sobre la distribución final del parámetro  $\tau = \exp \{b_{12} - b_{22}\}$ . Como ya se comentó en el apartado 3, si existe igualdad de tiempos medios en las dos poblaciones  $t=1$ . Similarmente, si existe igualdad entre las dos poblaciones,  $b_{12}=b_{22}=0$ ; por tanto, para responder a la pregunta de igualdad de proporciones habría que construir alguna región de confianza de la distribución final conjunta de  $(b_{12}, b_{22})$ .

Por otro lado, en este trabajo hemos exigido que la distribución inicial sobre los hiperparámetros  $B$  y  $H$  pertenezca a la familia conjugada. Esto no supone una restricción importante: si se desea utilizar otra inicial el método de aceptación-rechazo permite obtener una muestra de la distribución final deseada a partir de una muestra construida según el procedimiento descrito en el apartado 3, empleando una distribución inicial Normal-Wishart que no sea muy distinta de la inicial que se desea utilizar.

## REFERENCIAS

- Bermúdez, J.D. y Beamonte, E. (1993). Análisis bayesiano de datos de supervivencia Gamma utilizando muestreo de Gibbs. *Estadística Española*, 35, pp. 629-644.
- Broemeling, L.D. (1985). *Bayesian analysis of linear models*. New York: Marcel Dekker.
- Casella, G. y George, E.I. (1992). *Explaining the Gibbs sampler*. *The Amer. Statistician*, 46, pp. 167-174.
- Devroye, L. (1986). *Non-uniform random variate generation*. New York: Springer-Verlag.
- Freireich, E.J., Gehan, E.A., Frei, E. et al. (1963). *The effect of 6-Mercaptopurine on the duration of steroid-induced remissions in acute leukemia: a model for evaluation of other potential useful therapy*. *Blood*, 21, pp. 699-716.
- Gelfand, A.E. and Smith, A.F.M. (1990). Sampling-based approaches to calculating marginal densities. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 85, pp. 398-409.
- Gelman, A. and Rubin, D.B. (1992). Inference from iterative simulation (with discussion). *Statistical Science*, 7, pp. 457-511.
- Geman, S. and Geman, D. (1984). *Stochastic relaxation, Gibbs distributions, and the Bayesian restoration of images*. *I.E.E.E. Transactions on Pattern analysis and Machine Intelligence*, 6, pp. 721-741.

---

Geyer, C.J.. (1992). Practical Markov chain Monte Carlo (with discussion). *Statistical Science*, 7, pp. 473-511.

Lawless, J.F. (1982). *Statistical models and methods for lifetime data*. New York: John Wiley & Sons.

Lee, E.T. (1992). *Statistical methods for survival data analysis*, 2nd. edition. New York: John Wiley & Sons.

Smith, A.F.M. and Roberts, G.O. (1993). *Bayesian computation via the Gibbs sampler and related Markov chain Monte Carlo methods*. *J. Roy. Statist. Soc. B*, 55, pp. 3-23.

Tanner, M.A. y Wong, W.H. (1987). The calculation of posterior distributions by data augmentation. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 82, pp. 528-550.

Wei, G.C.G. and Tanner, M.A. (1990). Calculating the content and boundary of the highest posterior density region via data augmentation. *Biometrika*, 77, pp. 649-652.

# FUNCIÓN GENERADORA DE UNA CURVA DE LORENZ

CALLEJÓN CÉSPEDES, JOSÉ  
Facultad de CC. Económicas y Empresariales  
Universidad de Granada

## 1. INTRODUCCIÓN

Uno de los sistemas de distribuciones continuas univariantes más estudiados por sus aplicaciones es el de Pearson (1895). Responde a la conocida ecuación diferencial lineal de primer orden y homogénea:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x - a}{b_0 + b_1x + b_2x^2} \quad (1)$$

En la literatura especializada se encuentran otros sistemas que extienden y generalizan las distribuciones de (1). Dos ejemplos significativos son: la extensión de L.K. Roy, (1971), [6] y la generalización de Herrerías, (1975), [4].

La primera se obtiene cambiando el segundo miembro de (1), que pasa a ser de la siguiente forma:

$$\frac{Df(x)}{f(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2}{x(b_0 + b_1x + b_2x^2)}$$

y la segunda se obtiene cambiando el primer miembro, al utilizar el operador aleph, derivada generalizada, en vez del operador derivada ordinaria

$$a_x^\varphi[y(x)] = \frac{y'(x) - \varphi(x)y(x)}{f(x)}$$

(Obsérvese que el operador derivada ordinaria  $D$ , es  $a_1^0$ ).

Los sistemas obtenidos a partir de la generalización de Herrerías responden a la ecuación diferencial:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x - a}{b_0 + b_1x + b_2x^2} + \varphi(x) \quad (2)$$

*Esta expresión, (2), es la inspiradora del concepto de función generadora para una distribución univariante continua.*

Manteniendo el primer miembro de la ecuación (2), se sustituye el segundo por una función  $g(x)$  a la que sólo se le exigen las condiciones necesarias y suficientes para que  $f(x)$  sea una función de densidad de una variable aleatoria, sobre un recinto determinado. [1]

Si  $f(x)$  es la función de densidad de una variable aleatoria y  $[a,b]$  es su dominio de definición, entonces la función generadora, viene dada por:

$$g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{d \ln f(x)}{dx} \quad (3)$$

para los puntos donde  $f'(x)$  existe y  $f(x)$  no es cero.

Por otra parte, una función  $g$ , real de variable real, definida sobre el intervalo  $(a,b)$ , es función generadora de la distribución continua de probabilidad dada por

$$f(x) = \begin{cases} K e^{-\int_a^x g(x) dx} & \text{si } a < x < b \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

si y sólo si

$$\int_a^b e^{-\int_a^x g(x) dx} dx < +\infty$$

( $a$  puede llegar a ser  $-\infty$  y  $b$  a  $+\infty$ )  $-\infty$  y  $b + \infty$ )

La probabilidad así definida depende de la función  $g$ , del recinto sobre el que va a estar definida  $f$  y de las condiciones que se le impongan a la densidad resultante, tales como la continuidad o en su defecto el conocimiento de la magnitud de los saltos finitos.

Una definición similar de función generadora se puede desarrollar dentro del campo económico y mas concretamente el estudio de las funciones reales de variable real que pueden ser utilizadas como modelizadoras de las curvas de Lorenz.

Conviene recordar los estudios que sobre este particular se han realizado recientemente.

A partir de la distribución de probabilidad de una variable aleatoria finita no negativa y de tipo continuo,  $X$ , la curva de Lorenz correspondiente viene dada por

$$L(p) = \frac{\int_0^{F^{-1}(p)} t dF(t)}{E(x)}, \quad 0 \leq p \leq 1 \quad (4)$$

siendo  $F(x)$  la función de distribución y  $E(x)$  el valor esperado de dicha variable, (Casas -Núñez, [3]).

Casas, Herrerías y Núñez, [2], presentan dos formas de obtención de funciones que modelizan la curva de Lorenz, una mediante combinaciones lineales convexas de formas funcionales utilizadas en la estimación de dicha curva por otros autores y otra, utilizando la ecuación diferencial que genera la familia de distribuciones continuas univariantes de Pearson. Se estudian la formas potencial y exponencial, ambas satisfacen la ecuación diferencial de Pearson, y otra forma funcional que no satisface la mencionada ecuación.

Puesto que la ecuación diferencial que define la familia de Pearson dio la idea de generalizar el segundo miembro, obteniendo de esta forma el concepto de función generadora de una distribución continua univariante de probabilidad, cabe suponer que una función

$$g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad (5)$$

que cumpla determinados requisitos, dará lugar a modelizaciones de la curva de Lorenz.

Casas-Herrerías y Núñez [2] inician el estudio de la relación entre una función que verifica la ecuación diferencial que define la familia de Pearson y la curva de Lorenz

Lafuente en su tesis doctoral, [5], estudia ocho casos concretos de la función  $g(x)$  que, agrupados según su forma más general, se citan a continuación. Todos ellos verifican las condiciones para la generación de una curva de Lorenz. Lafuente obtiene las correspondientes soluciones utilizando la ecuación diferencial (5).

$$1) g(x) = ax + b \ln x + c + \frac{d}{x}, \quad a, c \geq 0; b \leq 0; d > 0$$

definida  $\forall x > 0$  y sus casos particulares

$$g(x) = \frac{d}{x}, \quad d > 0$$

$$g(x) = c + \frac{1}{x}, \quad c > 0$$

$$g(x) = \ln A + \frac{1}{x}, \quad A > 1$$

$$g(x) = 2x + \frac{d}{x}, \quad d \geq 0$$

$$2) \quad g(x) = \frac{c}{x} + \frac{a(1-x)^{a-1}}{b(1-(1-x)^a)}, \quad \begin{matrix} 0 \leq a \leq 1 \\ 0 < b \leq 1 \\ c \geq 0 \end{matrix} \quad \text{definida } \forall x > 0$$

(a y c no son cero a la vez),

y sus casos particulares

$$g(x) = \frac{c}{x} + \frac{a(1-x)^{a-1}}{b(1-(1-x)^a)}, \quad \begin{matrix} 0 \leq a \leq 1 \\ 0 \leq b \leq 1 \\ 0 \leq a \leq 1 \end{matrix}$$

$$g(x) = \frac{c}{x} + \frac{a(1-x)^{a-1}}{1-(1-x)^a} \quad c \geq 0$$

$$3) \quad g(x) = \frac{ke^{kx}}{e^{kx} - 1} \quad k > 0 \text{ definida } \forall x > 0$$

## 2. FUNCIÓN GENERADORA DE UNA CURVA DE LORENZ

Si una modelización de una curva de Lorenz,  $f(x)$ , verifica (5) entonces ha de ser de la forma

$$f(x) = Ce^{\int g(x) dx}$$

sujeta a las condiciones:

- a)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$
- b)  $f(1) = 1$  que permitirá determinar la constante  $C$
- c)  $f$  creciente en  $[0,1]$  es decir  $f'(x) > 0 \quad \forall x \in [0,1]$
- d)  $f$  cóncava en  $[0,1]$  es decir  $f''(x) > 0 \quad \forall x \in [0,1]$

La siguiente proposición estudia las condiciones necesarias y suficientes que ha de cumplir la función  $g$  para que la solución obtenida a de la ecuación (5) verifique las condiciones de contorno especificadas: a), b), c) y d).

### PROPOSICIÓN

*Sea  $g(x)$  una función real de variable real.*

$$\text{Llamamos} \quad G(x) = \int_0^x g(x) \quad dx$$

$$\text{Para que} \quad f(x) = e^{G(x) - G(1)}$$

*sea una curva de Lorenz es condición necesaria y suficiente que se verifiquen las relaciones:*



$$1) \lim_{x \rightarrow 0} G(x) = -\infty$$

$$2) g(x) > 0 \quad \forall x \in [0,1]$$

$$3) (g(x))^2 + g'(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0,1]$$

En efecto, si  $f(x)$  es una función que modeliza una curva de Lorenz, entonces es posible definir

$$g(x) = \frac{d}{dx} \ln f(x) = G'(x)$$

de donde se deduce que:

$$a) f(0) \text{ implica que } \lim_{x \rightarrow 0} G(x) = -\infty$$

$$b) \text{ Por definición } f'(x) > 0; f'(x) = f(x) g(x) \text{ y puesto que } f(x) \text{ es positiva, ha de ser } g(x) > 0$$

$$c) \text{ Por definición } f''(x) \geq 0; f''(x) = f(x) [(g(x))^2 + g'(x)] \text{ y puesto que } f(x) \text{ es positiva, ha de ser } (g(x))^2 + g'(x) \geq 0$$

Recíprocamente, dada una función  $g(x)$  que verifica las propiedades 1) 2) y 3), por la definición (6),  $f(x)$  es una función definida positiva para  $x > 0$ , y por otra parte

$$a') \text{ Si } \lim_{x \rightarrow 0} G(x) = -\infty \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$b') \text{ Si } g(x) > 0 \quad \forall x \in [0,1] \text{ la derivada de } f(x),$$

$$f'(x) = f(x) G'(x) = f(x) g(x)$$

puesto que  $f(x)$  es positiva,  $f'(x)$  también es positiva; luego la función  $f$  en el intervalo  $[0,1]$  es creciente.

$$c') \text{ Si } (g(x))^2 + g'(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0,1] \text{ entonces la segunda derivada de } f(x)$$

$$f''(x) = f(x) [(g(x))^2 + g'(x)]$$

también es positiva, y por tanto  $f(x)$  en el intervalo  $[0,1]$  es cóncava

Obsérvese que a'), b') y c'), junto a la necesaria existencia de  $G(1)$ , pues sin ello no sería posible la definición (6) se obtiene una función que modeliza una curva de Lorenz. (la definición (6) asegura que la función pasa por el punto (1,1).

En los ejemplos que siguen se estudia una función que permite obtener curvas de Lorenz y otra para la que no es posible tal construcción.

### 3. EJEMPLOS

#### 1) La función

$$g(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \dots + \frac{a_n}{x^n}$$

$$\text{con } a_0 > 0, a_1 > \frac{n}{2}, a_2, a_3, \dots, a_n > 0$$

sí verifica las condiciones necesarias y suficientes para la modelización de una curva de Lorenz, pues en este caso

$$G(x) = a_0 x + a_1 \ln x - \frac{a_2}{x} - \frac{a_3}{2x^2} - \dots - \frac{a_n}{(n-1)x^{n-1}}$$

$$G(1) = a_0 - a_2 - \frac{a_3}{2} - \dots - \frac{a_n}{n-1}$$

y se verifica que

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} G(x) = -\infty$$

$$\text{b) } g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0,1]$$

$$\begin{aligned} \text{c) } (g(x))^2 + g'(x) &= a_0^2 + \frac{2a_0a_1}{x} + \frac{a_1(a_1-1) + 2a_0a_2}{x^2} + \\ &+ \frac{2a_0a_3 + 2a_2(a_1-1)}{x^3} + \frac{a_2^2 + 2a_0a_4 + a_3(2a_1-3)}{x^4} + \\ &+ \frac{2a_0a_5 + 2a_2a_3 + 2a_4(a_1-2)}{x^5} + \dots + \frac{a_n^2}{x^n} \end{aligned}$$

y puesto que  $a_0 > 0, a_1 > n, a_2, a_3, \dots, a_n > 0$

la suma  $(g(x))^2 + g'(x)$  es positiva  $\forall x \in [0,1]$

Por tanto, se puede generar una curva de Lorenz, cuya forma funcional es:

$$f(x) = e^{G(x) - G(1)} =$$

$$x^{a_1} e^{a_0(x-1) + a_2\left(1-\frac{1}{x}\right) + \frac{a_3}{2}\left(1-\frac{1}{x^2}\right) + \dots + \frac{a_n}{n-1}\left(1-\frac{1}{x^{n-1}}\right)}$$

2) Por el contrario, si  $g(x)$  es una función polinómica, a partir de ella no se puede generar una curva de Lorenz, pues en tal caso su integral,  $G(x)$ , también es un polinomio, lo que hace imposible que  $\lim_{x \rightarrow 0} G(x) = -\infty$ .

#### 4. CONDICIONES PARA QUE UNA FUNCIÓN QUE VERIFICA LA ECUACIÓN DE PEARSON SEA FUNCIÓN GENERADORA DE UNA CURVA DE LORENZ.

Casas, Herrerías y Núñez, [2], manifiestan el deseo de conocer si todas las curvas que satisfacen la ecuación diferencial que define la familia de Pearson cumplen la condición necesaria de las curvas de Lorenz.

La proposición anterior permite estudiar las condiciones que deben cumplir los coeficientes de la función que verifica la ecuación diferencial de Pearson para que sea función generadora de una curva de Lorenz.

Estas condiciones se recogen en el en el siguiente cuadro y cuyas demostraciones se encuentran en [1]

|                                 |  |   |
|---------------------------------|--|---|
| $b_1 = b_2 = 0$<br>$b_0 \neq 0$ | $g(x) = \frac{x-a}{b_0}$   | _____   |
| $b_2 = 0$<br>$b_1 \neq 0$       | $g(x) = \frac{x-a}{b_0 + b_1 x}$   | $b_0 = 0$<br>$b_1 > 0$<br>$a \leq -b_1$   |
| $b_2 \neq 0$                    | $g(x) = \frac{x-a}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}$<br><br>El denominador posee dos raíces reales distintas | $x-a$ $b_0 = 0$<br>$b_1 > 0$<br>$a \leq -b_1$<br>$0 < b_2 \leq 1 + \frac{a(a+b_1)}{1-2a}$ |
| $b_2 \neq 0$                    | $g(x) = \frac{x-a}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}$<br><br>El denominador posee una raíz real doble         | $b_0 = 0$<br>$b_1 = 0$<br>$a < 0$<br>$0 < b_2 \leq 1 + \frac{a^2}{1-2a}$                  |
| $b_2 \neq 0$                    | $g(x) = \frac{x-a}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}$<br>El denominador o posee raíces reales                 | _____   |

---

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] CALLEJÓN, J. (1995). *Un nuevo método para generar distribuciones de probabilidad. Problemas asociados y Aplicaciones*. Universidad de Granada.
- [2] CASAS, J.M., HERRERÍAS, R. Y NÚÑEZ, J. (1990). *Familias de formas funcionales para estimar la curva de Lorenz*. IV Reunión Anual ASEPELT-ESPAÑA. Murcia.
- [3] CASAS, J.M. Y NÚÑEZ, J. (1991). *Sobre la medición de la desigualdad y conceptos afines*. Actas de la V Reunión Anual ASEPELT-ESPAÑA. Las Palmas.
- [4] HERRERÍAS, R. (1975). *Sobre las estructuras estadísticas de Pearson y exponenciales, problemas asociados*. Publicaciones de la Facultad de Ciencias de Granada.
- [5] LAFUENTE, M. (1994). *Medidas de cuantificación de la Desigualdad: La Desigualdad de la Renta en España según la E.P.F. 1990-91*. Tesis Doctoral. Universidad de Murcia.
- [6] ROY, L.K. (1971) "An extension of the Pearson systems of frequency curves". *Trabajos de Estadística e I.O.* Vol XXII. Cuad. 1 y 2, pág. 113-123.

# DEPURACION E IMPUTACION DE DATOS: APLICACION EMPIRICA AL CENSO DE POBLACION Y VIVIENDA DE 1991 EN LA PROVINCIA DE HUELVA

CAMÚÑEZ RUIZ, J.A. \*,  
PÉREZ HIDALGO, M.D. \*  
Y SILVA PEREZ M.C. \*

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales  
Universidad de Sevilla

## INTRODUCCION

Tratamos en este trabajo uno de los problemas clásicos de la estadística en el muestreo: la ausencia y errores de respuesta. Tenemos una muestra de población de la provincia de Huelva en la que se han estudiado las variables "edad" y "sexo" a partir de los datos proporcionados por el Censo de Población y Vivienda de 1.991 y nuestro objetivo es construir la correspondiente pirámide de población. La información ha sido suministrada por el Instituto de Estadística de Andalucía y corresponde a un colectivo de 7662 individuos. Los datos utilizados son los que fueron introducidos en el ordenador a partir de las encuestas realizadas a este colectivo para el Censo de 1991. O sea, son datos sin ningún tipo de tratamiento, sin depurar. Un primer contacto con los datos muestra la existencia de datos ausentes y datos erróneos, donde estos últimos están provocados, bien por la persona encuestada o bien por el operador que los introdujo en el ordenador.

En esa muestra aparecen individuos que contestan a las preguntas sobre la edad y sobre el sexo, individuos que sólo contestan a las preguntas sobre la edad y no sobre el sexo, individuos que contestan a las preguntas sobre el sexo y no sobre la edad e individuos que no contestan a ninguna de las dos preguntas. A su vez dentro de las respuestas dadas aparecen algunas contradicciones y errores.

Nos proponemos los siguientes objetivos:

- 1.- Detección y depuración de los datos erróneos o ausentes.
- 2.- Imputación de los datos erróneos o ausentes.

---

(\*) El presente trabajo se enmarca dentro de un proyecto sacado a concurso público por el Instituto de Estadística de Andalucía, bajo el título *Imputación Automática de Datos*, y que fue ganado por un grupo de investigación, formado a tal efecto, de profesores de los departamentos de Economía Aplicada I y Estadística Operativa de la Universidad de Sevilla. Grupo dirigido por los doctores D. Jesús Basulto Santos y D. Francisco Ramón Fernández García.

---

## DETECCION DE DATOS ERRONEOS O AUSENTES

Para la detección de los datos erróneos o ausentes es necesario definir previamente las situaciones erróneas o sospechosas. Esas definiciones se pueden establecer por medio de los llamados edits que especifican restricciones a los valores individuales de la variable (son conocidos como edits de validación).

Para las variables que estamos tratando, “sexo” y “edad” se han establecido los siguientes edits que han sido programados y aplicados a los datos iniciales del censo:

Sexo:

Indica el sexo del individuo.

Valores permitidos: 1 ó 6.

Errores:

- Se responde un valor no permitido.
- No se contesta Sexo.

Edad:

Se obtiene a partir de las variables del censo Día, Mes y Año que nos indica el día, mes y año de nacimiento del individuo.

Valores permitidos: del 1 al 31 para Día, del 1 al 12 para Mes, y desde 1870 hasta 1991 para Año. Errores:

- Se responde un valor no permitido.
- No se contesta Día, Mes o Año.

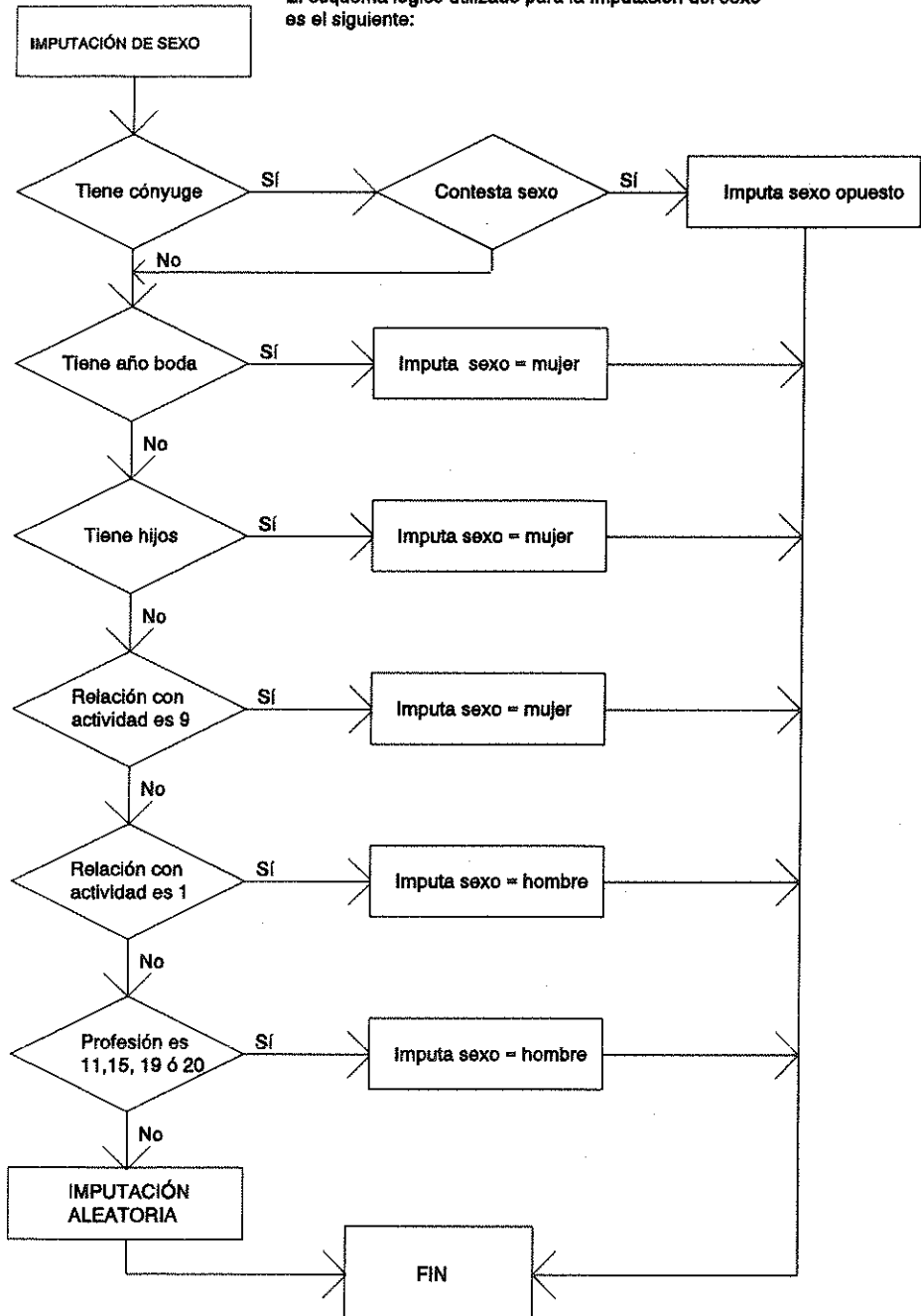
Aplicados estos edits se han seleccionado los hogares donde se han detectado los errores o la ausencia de respuesta. El objetivo es depurar esos errores e imputar los datos ausentes. Para ello vamos a distinguir entre imputación determinista y aleatoria. La primera es previa a la segunda.

## DEPURACION E IMPUTACION DETERMINISTA

La depuración e imputación determinista consiste en asignar la respuesta correcta a aquel individuo en cuya contestación se ha detectado error o ausencia de respuesta (respuesta en blanco), a partir de las respuestas que ha dado el mismo individuo a las otras cuestiones del censo o a partir de las respuestas dadas por el resto de los individuos del hogar. Esto nos obliga a construir los llamados árboles de esquemas lógicos para cada una de las variables que hemos elegido para depurar e imputar. A modo de ejemplo presentamos a continuación el esquema seguido para la imputación del sexo.

**CASO DEL SEXO**

El esquema lógico utilizado para la imputación del sexo es el siguiente:



Este esquema ha sido programado y aplicado a todos los hogares que presentaban individuos con errores en sexo o que presentan la respuesta correspondiente a sexo en blanco. Con ello se han conseguido depurar algunos errores e imputar algunas respuestas en blanco. Sin embargo, no siempre es posible realizar este tipo de imputación usando estos esquemas o relaciones lógicas y es necesario acudir a imputaciones aleatorias.

## IMPUTACION ALEATORIA

Después de haber efectuado las imputaciones deterministas tenemos la siguiente información respecto de las variables edad y sexo de esta población (se han agrupado los individuos en tramos de cinco años para la edad):

| $X_{ij}$ | J         | 1       | 2       | $X_{i\cdot}$ |
|----------|-----------|---------|---------|--------------|
| i        | Edad/sexo | Hombres | Mujeres | Totales      |
| 1        | 0-4       | 271     | 242     | 513          |
| 2        | 5-9       | 305     | 285     | 590          |
| 3        | 10-14     | 361     | 326     | 687          |
| 4        | 15-19     | 348     | 362     | 710          |
| 5        | 20-24     | 360     | 361     | 721          |
| 6        | 25-29     | 323     | 276     | 599          |
| 7        | 30-34     | 268     | 249     | 517          |
| 8        | 35-39     | 213     | 228     | 441          |
| 9        | 40-44     | 204     | 212     | 416          |
| 10       | 45-49     | 208     | 205     | 413          |
| 11       | 50-54     | 185     | 188     | 373          |
| 12       | 55-59     | 193     | 201     | 394          |
| 13       | 60-64     | 173     | 166     | 339          |
| 14       | 65-69     | 140     | 157     | 297          |
| 15       | 70-74     | 83      | 128     | 211          |
| 16       | 75-79     | 57      | 124     | 181          |
| 17       | 80-84     | 35      | 91      | 126          |
| 18       | 85 y más  | 17      | 45      | 62           |
| TOTAL    |           | 3744    | 3846    | 7590         |

| $Y_{ij}$ |   |   |              |
|----------|---|---|--------------|
| i/j      | 1 | 2 | $Y_{i\cdot}$ |
| 1        |   |   | 20           |
| 2        |   |   | 20           |
| 3        |   |   | 19           |
| 4        |   |   | 18           |
| 5        |   |   | 18           |
| 6        |   |   | 19           |
| 7        |   |   | 14           |
| 8        |   |   | 15           |
| 9        |   | ? | 15           |
| 10       |   |   | 12           |
| 11       |   |   | 9            |
| 12       |   |   | 8            |
| 13       |   |   | 8            |
| 14       |   |   | 7            |
| 15       |   |   | 8            |
| 16       |   |   | 7            |
| 17       |   |   | 6            |
| 18       |   |   | 5            |
| TOTALES  |   |   | 228          |

| $Z_{ij}$      | Hombres | Mujeres |    |
|---------------|---------|---------|----|
| $Z_{\cdot j}$ | 46      | 40      | 86 |

| $U_{ij}$ | i |    |
|----------|---|----|
| j        | ? | 43 |



Existe un conjunto de métodos que abordan el problema de la falta de datos a partir de modelos probabilísticos. La situación que se nos presenta la modelizamos mediante una multinomial en la que vamos a hallar las estimaciones máximo-verosímiles de sus parámetros. Al haber falta de respuesta para obtener esas estimaciones usaremos el algoritmo EM que facilita el cálculo de las estimaciones máximo verosímiles y además realiza las imputaciones de los datos ausentes. En cada iteración el algoritmo combina el cálculo de una esperanza matemática (Paso E) con la obtención de los máximos de la función de verosimilitud (Paso M).

La información proporcionada por la muestra, una vez realizadas las imputaciones deterministas, la podemos clasificar en función del conocimiento que tenemos de los datos, en cuatro grupos:

1.- Una parte de esa muestra (de tamaño  $n_x$ ) está perfectamente identificada respecto de las dos variables categóricas, es decir, disponemos de la edad y el sexo de todos los individuos aquí considerados (representamos por  $x_{ij}$  el número de individuos correspondiente a cada categoría).

2.- De otra parte de esa muestra (de tamaño  $n_y$ ) conocemos su distribución según la edad pero no según el sexo, es decir, están incluidos individuos de los cuales sólo se conoce la edad. Vamos a representar por  $y_i$ , el total de individuos dentro la correspondiente categoría de edad.

3.- De otra parte de la muestra conocemos su distribución según la segunda variable. Por lo tanto, conocemos el sexo de estos individuos pero no la edad. Denotamos por  $z_j$  el número total de individuos correspondientes a cada uno de los dos sexos.

4.- Del resto de los elementos de la muestra,  $n_u$ , sólo conocemos ese número de elementos, es decir desconocemos su distribución respecto a ambas variables.

Lógicamente, si  $n$  es el tamaño muestral, se verifica que  $n = n_x + n_y + n_z + n_u$

La situación que estamos estudiando podría ser recogida mediante un modelo probabilístico Multinomial de  $18 \times 2$  componentes. Sea

$$T = (T_{1,1}, T_{1,2}, T_{2,1}, T_{2,2}, \dots, T_{18,1}, T_{18,2}) \sim M(n, \pi_{1,1}, \pi_{1,2}, \dots, \pi_{18,1}, \pi_{18,2})$$

siendo  $T_{ij} = x_{ij} + y_{ij} + z_{ij} + u_{ij}$

donde se va a obtener las estimaciones máximo-verosímiles de las  $\pi_{ij}$  aplicando el algoritmo EM. A partir de dichas estimaciones, imputaremos los datos desconocidos y completaremos las tablas anteriores. En este caso la función de probabilidad conjunta de la muestra sería:

$$P(T_{1,1}, \dots, T_{18,2}) = \frac{n!}{t_{1,1}! \dots t_{18,2}!} \pi_{1,1}^{t_{1,1}} \cdot \pi_{1,2}^{t_{1,2}} \dots \pi_{18,2}^{t_{18,2}}$$

Tomando logaritmo neperiano tenemos la función de verosimilitud L:

$$L = \ln n! - \sum_{i=1}^{18} \sum_{j=1}^2 \ln t_{i,j}! + \sum_{i=1}^{18} \sum_{j=1}^2 (x_{i,j} + y_{i,j} + z_{i,j} + u_{i,j}) \pi_{ij}$$

Tomando unos valores iniciales para las probabilidades, que representaremos por  $\pi_{ij}^{(0)}$  y teniendo en cuenta que son conocidos  $x_{ij}$ ,  $y_i$ ,  $z_j$ , y  $n_u$  resulta :

PASO E:

$$\begin{aligned} E[L(\pi_{ij} / x_{ij}, y_i, z_j, n_u, \pi_{ij}^{(0)})] &= \ln n! - \sum_{i=1}^{18} \sum_{j=1}^2 \ln t_{i,j}! + \\ &+ \sum_{i=1}^{18} \sum_{j=1}^2 (x_{i,j} + E[y_{i,j} / y_i, \pi_{ij}^{(0)}] + [z_{i,j} / z_j, \pi_{ij}^{(0)}] + E[u_{i,j} / n_u, \pi_{ij}^{(0)}]) \ln \pi_{ij} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que en un modelo multinomial sus distribuciones marginales siguen modelos binomiales, resulta que:

$$\begin{aligned} y_{ij} &\sim B\left(y_i, \frac{\pi_{ij}}{\sum_{j=1}^2 \pi_{ij}}\right) \Rightarrow E[y_{ij} / y_i, \pi_{ij}^{(0)}] = y_i \cdot \frac{\pi_{ij}^{(0)}}{\pi_{i\cdot}^{(0)}} \\ z_{ij} &\sim B\left(z_{\cdot j}, \frac{\pi_{ij}}{\sum_{i=1}^{18} \pi_{ij}}\right) \Rightarrow E[z_{ij} / z_{\cdot j}, \pi_{ij}^{(0)}] = z_{\cdot j} \cdot \frac{\pi_{ij}^{(0)}}{\pi_{\cdot j}^{(0)}} \\ u_{ij} &\sim B(n_u, \pi_{ij}) \Rightarrow E[u_{ij} / n_u, \pi_{ij}^{(0)}] = n_u \pi_{ij} \end{aligned}$$

Sustituyendo en la igualdad anterior obtenemos:

$$\begin{aligned} E[L(\pi_{ij} / x_{ij}, y_i, z_j, n_u, \pi_{ij}^{(0)})] &= \ln n! - \sum_{i=1}^{18} \sum_{j=1}^2 \ln t_{i,j}! + \\ &+ \sum_{i=1}^{18} \sum_{j=1}^2 \left( x_{i,j} + y_i \cdot \frac{\pi_{ij}^{(0)}}{\pi_{i\cdot}^{(0)}} + z_{\cdot j} \cdot \frac{\pi_{ij}^{(0)}}{\pi_{\cdot j}^{(0)}} + n_u \pi_{ij}^{(0)} \right) \ln \pi_{ij} \end{aligned}$$

PASO M:

Maximizando la expresión anterior se obtienen como máximos globales:

$$\pi_{ij}^{(1)} = \frac{x_{i \cdot j} + y_{i \cdot} \frac{\pi_{ij}^{(0)}}{\pi_{i \cdot}^{(0)}} + z_{\cdot j} \frac{\pi_{ij}^{(0)}}{\pi_{\cdot j}^{(0)}} + n_u \pi_{ij}^{(0)}}{\sum_{i=j}^{18} \sum_{j=1}^2 \left( x_{i \cdot j} + y_{i \cdot} \frac{\pi_{ij}^{(0)}}{\pi_{i \cdot}^{(0)}} + z_{\cdot j} \frac{\pi_{ij}^{(0)}}{\pi_{\cdot j}^{(0)}} + n_u \pi_{ij}^{(0)} \right)}$$

Ahora bien, se puede comprobar que el denominador coincide con n. Entonces:

$$\pi_{ij}^{(1)} = \frac{x_{i \cdot j} + y_{i \cdot} \frac{\pi_{ij}^{(0)}}{\pi_{i \cdot}^{(0)}} + z_{\cdot j} \frac{\pi_{ij}^{(0)}}{\pi_{\cdot j}^{(0)}} + n_u \pi_{ij}^{(0)}}{n}$$

En general:

$$\pi_{ij}^{(t+1)} = \frac{x_{i \cdot j} + y_{i \cdot} \frac{\pi_{ij}^{(t)}}{\pi_{i \cdot}^{(t)}} + z_{\cdot j} \frac{\pi_{ij}^{(t)}}{\pi_{\cdot j}^{(t)}} + n_u \pi_{ij}^{(t)}}{n}$$

Se ha programado la fórmula que genera el algoritmo partiendo de unos valores iniciales  $\pi_{ij}^{(0)}$  (que pueden ser cualquiera que cumplan las condiciones de probabilidad). Dicho algoritmo, después de varias iteraciones, converge a unos valores de probabilidad  $\pi_{ij}$  (que son las estimaciones máximo-verosímiles). Aplicando el algoritmo a nuestros datos obtenemos como estimaciones:

| $\pi_{ij}$      | Hombres   | Mujeres   | $\pi_{i \cdot}$ |
|-----------------|-----------|-----------|-----------------|
| 1               | 0.035414  | 0.031894  | 0.067308        |
| 2               | 0.040041  | 0.037355  | 0.077396        |
| 3               | 0.047434  | 0.042841  | 0.090275        |
| 4               | 0.049721  | 0.047587  | 0.097308        |
| 5               | 0.047301  | 0.047483  | 0.094784        |
| 6               | 0.042553  | 0.036307  | 0.078860        |
| 7               | 0.035113  | 0.032359  | 0.067705        |
| 8               | 0.027796  | 0.030214  | 0.058010        |
| 9               | 0.026619  | 0.027807  | 0.0544227       |
| 10              | 0.027244  | 0.026919  | 0.054163        |
| 11              | 0.024245  | 0.024607  | 0.048852        |
| 12              | 0.025234  | 0.026405  | 0.051639        |
| 13              | 0.022733  | 0.021739  | 0.044472        |
| 14              | 0.018241  | 0.020652  | 0.038894        |
| 15              | 0.010779  | 0.016827  | 0.027607        |
| 16              | 0.007329  | 0.016425  | 0.023754        |
| 17              | 0.004329  | 0.012125  | 0.016454        |
| 18              | 0.002171  | 0.005923  | 0.008094        |
| $\pi_{\cdot j}$ | 0.0494298 | 0.0505702 | 1.000000        |

Es curioso comprobar que si tomamos como  $\pi_{ij}^{(0)}$  las frecuencias relativas de la tabla de los datos completos, entonces en la primera iteración se alcanzan las probabilidades. En los otros casos, se ha comprobado empíricamente que bastan unas pocas iteraciones para conseguir la convergencia. A partir de estas estimaciones se han efectuado las imputaciones correspondientes usando las expresiones (1), (2) y (3), obteniéndose:

| $Y_{ij}$ | 1     | 2    | Hombres | Mujeres |
|----------|-------|------|---------|---------|
| 1        | 10.52 | 9.48 | 11      | 9       |
| 2        | 10.35 | 9.65 | 10      | 10      |
| 3        | 9.98  | 9.02 | 10      | 9       |
| 4        | 9.20  | 8.80 | 9       | 9       |
| 5        | 8.98  | 9.02 | 9       | 9       |
| 6        | 10.25 | 8.75 | 10      | 9       |
| 7        | 7.26  | 6.74 | 7       | 7       |
| 8        | 7.18  | 7.81 | 7       | 8       |
| 9        | 7.34  | 7.66 | 7       | 8       |
| 10       | 6.04  | 5.96 | 6       | 6       |
| 11       | 4.47  | 4.53 | 4       | 5       |
| 12       | 3.90  | 4.09 | 4       | 4       |
| 13       | 4.09  | 3.91 | 4       | 4       |
| 14       | 3.29  | 3.72 | 3       | 4       |
| 15       | 3.12  | 4.90 | 3       | 5       |
| 16       | 2.16  | 4.80 | 2       | 5       |
| 17       | 1.58  | 4.42 | 2       | 4       |
| 18       | 1.34  | 3.66 | 1       | 4       |

| $Z_{ij}$ | 1    | 2    | Hombres | Mujeres |
|----------|------|------|---------|---------|
| 1        | 3.29 | 2.52 | 3       | 3       |
| 2        | 3.72 | 2.95 | 4       | 3       |
| 3        | 4.41 | 3.38 | 4       | 3       |
| 4        | 4.62 | 3.76 | 5       | 4       |
| 5        | 4.40 | 3.75 | 4       | 4       |
| 6        | 3.96 | 2.87 | 4       | 3       |
| 7        | 3.26 | 2.57 | 3       | 3       |
| 8        | 2.58 | 2.38 | 3       | 2       |
| 9        | 2.47 | 2.19 | 3       | 2       |
| 10       | 2.53 | 2.12 | 3       | 2       |
| 11       | 2.25 | 1.94 | 2       | 2       |
| 12       | 2.34 | 2.08 | 2       | 2       |
| 13       | 2.11 | 1.71 | 2       | 2       |
| 14       | 1.69 | 1.63 | 2       | 2       |
| 15       | 1.00 | 1.33 | 1       | 1       |
| 16       | 0.68 | 1.29 | 1       | 1       |
| 17       | 0.40 | 0.95 | 0       | 1       |
| 18       | 0.20 | 0.46 | 0       | 0       |

| $U_{ij}$ | 1    | 2    | Hombres | Mujeres |
|----------|------|------|---------|---------|
| 1        | 1.52 | 1.37 | 2       | 1       |
| 2        | 1.72 | 1.60 | 2       | 2       |
| 3        | 2.03 | 1.84 | 2       | 2       |
| 4        | 2.13 | 2.04 | 2       | 2       |
| 5        | 2.03 | 2.04 | 2       | 2       |
| 6        | 1.82 | 1.56 | 2       | 1       |
| 7        | 1.51 | 1.40 | 2       | 1       |
| 8        | 1.19 | 1.29 | 1       | 1       |
| 9        | 1.14 | 1.19 | 1       | 1       |
| 10       | 1.17 | 1.15 | 1       | 1       |
| 11       | 1.04 | 1.05 | 1       | 1       |
| 12       | 1.08 | 1.13 | 1       | 1       |
| 13       | 0.97 | 0.93 | 1       | 1       |
| 14       | 0.78 | 0.88 | 1       | 1       |
| 15       | 0.46 | 0.72 | 1       | 1       |
| 16       | 0.31 | 0.70 | 0       | 1       |
| 17       | 0.18 | 0.52 | 0       | 1       |
| 18       | 0.09 | 0.34 | 0       | 0       |

Uniendo los valores observados e imputados, nos queda el siguiente resultado con el cual ya podríamos construir la pirámide de población:

|       | Hombres | Mujeres | Total |
|-------|---------|---------|-------|
| 1     | 271     | 244     | 516   |
| 2     | 307     | 287     | 594   |
| 3     | 363     | 328     | 691   |
| 4     | 381     | 365     | 746   |
| 5     | 362     | 364     | 726   |
| 6     | 326     | 278     | 604   |
| 7     | 269     | 250     | 519   |
| 8     | 213     | 231     | 444   |
| 9     | 204     | 213     | 417   |
| 10    | 209     | 206     | 415   |
| 11    | 185     | 189     | 374   |
| 12    | 193     | 202     | 395   |
| 13    | 174     | 167     | 341   |
| 14    | 140     | 159     | 299   |
| 15    | 83      | 129     | 212   |
| 16    | 56      | 126     | 182   |
| 17    | 33      | 93      | 126   |
| 18    | 16      | 45      | 61    |
| Total | 3786    | 3876    | 7662  |

---

## BIBLIOGRAFIA:

(1) Dempster, A.P., Laird, N.M. and Rubin, D.B. (1977), "Maximum Likelihood From Incomplete Data Via the EM Algorithm". *Journal of the Royal Statistical Society, Ser B* 39.

(2) Fellegi, I.P. and Holt, D. (1976), "A Systematic Approach to Automatic Edit and Imputation". *Journal of the American Statistical Association*, vol 71 n° 353.

(3) Little R.J.A. and Smith P.J. (1987), "Editing and Imputation for Quantitative Survey Data". *Journal of the American Statistical Association*, vol 82 n° 397.

(4) Little R.J.A. and Rubin D.B. (1987), "Statistical Analysis with Missing Data" New York: John Wiley & Sons.

(5) Park T. and Brown M.B. (1994), "Models for Categorical Data With Nonignorable Nonresponse". *Journal of the American Statistical Association*, vol 89 n° 425.

(6) Srivastava M.S. and Carter E.M. (1986), "The Maximum Likelihood Method for Non-Response in Sample Surveys". *Survey Methodology*, vol 12 n° 1, Statistics Canada.

(7) Villan Criado, I. y Bravo Cabria, M.S. (1990), "Procedimiento de Depuración de Datos Estadísticos". *Seminario Internacional de Estadística en Euskadi. Instituto Vasco de Estadística*.

# NUEVOS MÉTODOS DE ANÁLISIS FINANCIERO

JOSÉ LUIS CUENCA TADEO  
M<sup>a</sup> CARMEN REYES MOLERO

Profesores Asistentes de la Universidad  
San Pablo-CEU  
Dpto. Matemáticas y Estadística.

## 1. INTRODUCCIÓN

Nos planteamos en este trabajo revisar someramente cuales son los métodos de análisis que la economía financiera utiliza y poner de manifiesto algunas limitaciones de dicho método, y que con anterioridad a nosotros han puesto de manifiesto importantes autores, a lo que llamamos en éste papel técnicas clásicas de estudio económico financiero. Una alternativa a este método clásico de análisis lo aportan los métodos estadísticos que tienen como principio el análisis de datos. Dentro de las nuevas técnicas del análisis económico-financiero la estadística multivariante permiten orientar el estudio de las magnitudes y “ratios” desde una visión totalizadora y global, que los análisis clásicos y univariantes no pueden alcanzar. La consideración simultanea del conjunto de variables que se estudian imposibilita la perdida de información que el tratamiento univariante clásico o univariante no pueden considerar por las sinergias internas de una distribución de datos.

## 2. EL MÉTODO CLÁSICO DEL ANÁLISIS ECONÓMICO-FINANCIERO

El análisis financiero clásico “busca la concordancia entre las masas patrimoniales de activo y pasivo en cuantía y plazo, se basan en una estructura financiera normativa orientada al mercado de valores, conforme a unas supuestas «reglas de oro»<sup>1</sup>. El análisis clásico se realiza mediante la técnica de las “ratios”. La información analizada es aportada básicamente por el balance que es un estado estático.

El análisis tradicional utiliza fundamentalmente las “ratios” que son el cociente entre dos magnitudes económicas que se corresponden con variables cuantificables, ligados por una relación característica de la situación actual o potencial: actividad, rendimiento o rentabilidad de la empresa.

En la actualidad, el análisis económico-financiero se caracteriza por la coexistencia de las dos modalidades siguientes: “una clásica, basada fundamentalmente en las capacidades explicativas

<sup>1</sup> CUERVO, A. Y RIVERO, P. “El análisis económico financiero de la empresa”. *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, Vol : XV, n°49 (enero-abril 1986), págs. 31-33.

---

de los analistas, de base esencialmente contable y que pretende diagnosticar la situación empresarial mediante las relaciones univariantes definidas por las “ratios” ; y otra de base esencialmente estadística, en la que las “ratios” constituyen tan solo un conjunto de datos de partida sobre los que aplicar, por procedimientos informáticos, técnicas estadísticas de análisis multivariante en la búsqueda y contrastación de modelos de comportamiento financiero, con capacidad explicativa y predictiva de las decisiones financieras empresariales”<sup>2</sup>.

La metodología del análisis económico-financiero que se realiza a partir de las “ratios”, puede concretarse en tres métodos de análisis:

1º análisis de series históricas, cuando unas “ratios” o conjunto de “ratios” se estudian en su evolución temporal, para una misma empresa o agregados de empresas.

2º análisis de corte transversal, cuando se comparan “ratios” en momentos discretos del tiempo, fundamentalmente entre empresas o agregados.

3º análisis mixtos (panel), que consideran conjuntamente las dos modalidades anteriores (histórica y transversal).

En todo caso, se hace necesario considerar los problemas estadísticos de correlación entre las “ratios” ya que al contar con componentes comunes, muchas de las variables están correlacionadas positiva o negativamente por lo que varían en la misma dirección, o en sentido contrario. Por ejemplo, para los datos agrupados del sector eléctrico español de los años 1980 a 1992, hemos podido constatar que la “ratio” activo inmovilizado neto con relación al activo total neto está fuertemente correlacionada con las “ratio” deudas a corto plazo con relación al activo circulante (correlación +0,9754) y con la “ratio” activo inmovilizado neto a capitales permanentes (correlación + 0,9723); y negativamente con las “ratios” tesorería más realizable con relación a las deudas a corto plazo (correlación -0,9734) y con la “ratio” existencias al activo neto total (-0,8028).

Otro problema que presenta la utilización de las “ratios” es que tienen en cuenta sólo una variable y que las “ratios” medias son valores representativos de conjuntos no homogéneos que pueden presentar una dispersión importante. Así en el siguiente cuadro nº 1, para las empresas agregadas del sector eléctrico español entre los años indicados, las magnitudes de inversión presentaban los coeficientes de variación de Pearson<sup>4</sup> que en él se indican.

---

<sup>2</sup> MAROTO ACÍN, J. A. : “El equilibrio económico financiero de la Empresa”. introducción del libro: “Introducción a las finanzas” de FERNÁNDEZ ALVAREZ, A. I. Ed. Civitas (1994), Madrid , págs.27.

<sup>3</sup>Ibidem pág. 28.

<sup>4</sup> CUENCA TADEO, J.L. (1995): *Regulación económica y resultados en el sector eléctrico español. Un análisis económico-financiero de la aplicación del Marco Estable*. Universidad Complutense de Madrid, Dpto.de Economía Financiera y Actuarial U.C.M. Tesis Doctoral dirigida por el Prof. Dr. Dº J.A. Maroto Acín, pág: 322.



**Cuadro nº 1.**

|                                       |         |
|---------------------------------------|---------|
| Resto inmoviliz. material producción  | 15,35%  |
| Resto inmoviliz. en curso             | 15,73%  |
| Amortiz. acumul resto Inmovil.        | 20,02%  |
| Trasporte y Distribución              | 22,73%  |
| Inmovil. en curso Transporte y Distr. | 24,96%  |
| Deudores                              | 27,33%  |
| Existencias                           | 29,21%  |
| Amortiz. Acumul. Transp. y Distr.     | 29,56%  |
| Total activo sin ctas. orden          | *30,48% |
| Amot. Acumul. producción              | 30,79%  |
| Inmv. material Producción             | 34,36%  |
| Inmov. en curso centrales nucleares   | 35,91%  |
| Situaciones financieras transitorias  | 36,08%  |
| Inm. en curso producción              | 37,44%  |
| Cuentas financieras                   | 40,22%  |
| Ajustes por periodificación           | 40,26%  |
| Inv. curso Térmicas clásicas          | 41,19%  |
| Amortización Acumul, otras instalac   | 43,24%  |
| Otras instala. eléctricas             | 44,83 % |
| Inmov. financiero                     | 46,86%  |
| Inv. en curso en C. Hidráulicas       | 57,68%  |
| Gastos amortizables                   | 68,92%  |
| Inmovilizado inmaterial               | 73,77%  |
| Inver. Curso otras instal. eléctricas | 82,69%  |

La información aportada por las "ratios" calculadas a partir del balance, debe ser contrastada por la que nos enseñan los estados de flujos económicos y financieros tales como: la cuenta de resultados, el estado de origen y aplicación de fondos y el estado de tesorería ("cash-flow").

Los estados contables no son suficientes para la interpretación de la situación patrimonial, económica y financiera de la empresa. Se precisa de una metodología que permita poner de manifiesto los aspectos ocultos al primer análisis. Los procedimientos tradicionales analizan la situación a través de la comparación entre datos reales y previstos, y tratan de determinar la situación financiera actual de la empresa. Se persigue con ello una doble finalidad<sup>5</sup>.

1.- Analizar si los medios de la empresa son los más adecuados para mantener el desarrollo económico estable.

<sup>5</sup> FERNÁNDEZ ALVAREZ, A. I. "El diagnostico financiero de la empresa. Nuevas tendencias en el análisis". *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, vol. XV nº49, (enero-abril 1986), págs. 113-132.

---

2.- Analizar si la empresa tiene capacidad para hacer frente a sus obligaciones a sus vencimientos.

Con ambos objetivos se pretende analizar el equilibrio a corto y largo plazo de la empresa. Los procedimientos clásicos de análisis financiero analizan las correlaciones entre las distintas masas patrimoniales de la empresa, para ver si las cantidades y plazos de las mismas están adecuadamente equilibrados, o adquieren valores que se consideran deseables en el conjunto del sector o actividad que la empresa desarrolla.

Este tipo de análisis que hasta hoy parece irremplazable, se manifiesta no obstante insuficiente para ayudar en la toma de decisiones. Las últimas décadas de la realidad empresarial ponen de manifiesto que los ritmos con que se operan los cambios son cada día más rápidos, afectando de manera inusitada a mercados, productos y a todo el entorno en que las empresas desarrollan su actividad. En estas nuevas circunstancias la comparación convencional entre “ratios” en relación con el sector en que la empresa desarrolla su quehacer, no es suficiente para obtener conclusiones significativas, pues la propia formulación de las “ratios”, así como la correlación existente entre las mismas pueden ocasionar serios problemas estadísticos. Estos problemas son de varios tipos: conceptuales, técnicos y metodológicos.

Dentro de los problemas conceptuales, cabe apuntar los siguientes: elección de aquellas “ratios” consideradas más significativas, las relaciones de sustitución entre los mismos, la utilización de datos históricos, las inconsistencias en la aplicación de los principios con los que se elaboran las informaciones, las diferencias surgidas en la aplicación de los principios y las normas de valoración contable.

Dentro de los problemas de carácter técnico, cabe recoger: la dificultad de enfrentar el valor de las “ratios” con una norma, dado que ésta no existe; y la necesidad de considerar varios factores simultáneamente, que el análisis clásico no considera.

En consecuencia aparecen una serie de limitaciones de carácter metodológico que podemos resumir en :

- 1.- Existencia de correlaciones estadísticas entre las “ratios”.
- 2.- La dispersión de las “ratios” no son homogéneas.
- 3.- Es necesario plantear cuestiones previas antes de aplicar las técnicas tradicionales.

En resumen, las técnicas tradicionales del análisis financiero se manifiestan limitadas por su incapacidad para satisfacer las necesidades de los distintos integrantes de la empresa. Incapacidad para definir métodos flexibles que permitan adaptaciones rápidas a las necesidades y objetivos y por la dificultad para tratar problemas complejos que requieran el examen simultáneo de varias variables<sup>6</sup>

---

<sup>6</sup> Ibidem, pág. 116.

### 3. EL ANÁLISIS DE DATOS EN LA ECONOMÍA FINANCIERA

En los últimos años se ha realizado análisis financiero mediante las técnicas del análisis de datos que es una forma de abordar los problemas estadísticos<sup>7</sup>. El investigador de la economía financiera encuentra en el mismo una nueva forma de enfrentarse a los datos (variables y “ratios”) y constituyen un conjunto de técnicas estadísticas para tratar problemas de varias dimensiones<sup>8</sup>.

Cuando se analizan datos se dispone de una gran cantidad de observaciones cuantitativas o cualitativas formadas por encuestas, archivos, censos, o conjuntos de datos que es necesario estudiar. Cuando los datos que se analizan son los de las empresas desde la orientación económico financiera, se parte de informaciones recogidas en los estados financieros estáticos o dinámicos de la empresa, que constituyen un punto en un espacio de dimensión  $R^n$ . El investigador no puede observar directamente los datos y pensar fácilmente en el conjunto y estudiar las relaciones o las causas simples que los determinan.

Para realizar el acercamiento a los datos, éstos se tabulan y codifican, siguiendo dos etapas, que podemos denominar, fase previa y fase de análisis de datos. En la fase previa, se especifican los objetivos e hipótesis del estudio, determinamos el procedimiento de selección de las unidades informadoras, se eligen las unidades informadoras, se establece el tamaño de la muestra y se define la periodicidad de la información. El tipo de análisis depende del tipo de resultados que persigamos y de la naturaleza de las variables. Así, si queremos obtener una representación factorial de un conjunto de variables cuantitativas podemos analizarlas mediante el procedimiento de los componentes principales. En muchas ocasiones se podrán utilizar varios métodos, con ellos los resultados serán diferentes y habrá que elegir adecuadamente entre los métodos posibles antes de emprender el estudio correspondiente teniendo presente las peculiaridades de cada método.

El objetivo del análisis financiero es el realizar un diagnóstico de las empresas partiendo de la información contenida en los documentos contables en los que ésta refleja sus actividades. Para ello, es posible utilizar los datos anuales que publican las empresas convenientemente auditados a efecto de garantizar la “validez” y homogeneidad de sus datos, o utilizar los de Organismos que se encargan de su recogida, tales como la Central de Balances del Banco de España, la Intervención General del Estado o las memorias del INI, INH y Dirección General de Patrimonio del Estado, en el caso en que se planteen estudios de datos agregados, ya sean de empresas privadas y/o públicas.

### 4. NUEVAS TENDENCIAS EN EL ANÁLISIS FINANCIERO

El método más adecuado para analizar financieramente las empresas debería llevar a cabo un doble examen<sup>9</sup>:

<sup>7</sup> ABASCAL, H. Y GRANDE, I. (1989): *Métodos multivariantes para la investigación comercial. Teoría, aplicaciones y programación BASIC*, pág. 20-23. Editorial Ariel.

<sup>8</sup> CUENCA TADEO, J.L. (1995): op.cit.

a) El análisis de relaciones univariantes (“ratios” de estructura, flujos financieros y rentabilidad).

b) El análisis mediante técnicas multivariantes.

El análisis de relaciones univariantes estudia de forma individualizada y secuencial las “ratios”, y mediante sus interrelaciones, se analizan los componentes y variaciones explicativos de los mismos. El análisis mediante técnicas multivariantes analiza, de forma simultánea, estos indicadores para detectar relaciones de intercambio y posibles vinculaciones subyacentes entre variables, que no aparecen de forma explícita en un análisis univariante y constituyen lo que se considera análisis económico financiero moderno<sup>10</sup>.

El desarrollo científico del análisis financiero, requiere de la utilización de modelos contrastables con la realidad, a fin de determinar su calidad predictiva. En este sentido las técnicas multivariantes tienen una especial significación por facilitar un triple objetivo<sup>11</sup>:

- Resumen la información para hacerla más tratable por el investigador.
- Encuentra los hechos que están implícitos en ella.
- Plantean problemas complejos que deben ser estudiadas de forma simultánea.

Estas técnicas permitirán dentro del área económico-financiera, resolver algunos de los problemas susceptibles de ser planteados, que podrían ser enunciados como sigue<sup>12</sup>:

- Estudiar las interrelaciones existentes entre un determinado conjunto de variables (“ratios” financieros, magnitudes, . .) obteniendo nuevas categorías o factores que agrupen las variables iniciales.

- Señalar la existencia de factores determinantes en las relaciones entre un conjunto de datos sin una pérdida considerable de información.

- Separar y analizar distintos grupos de variables o individuos que definen un determinado fenómeno, diferenciando grupos homogéneos de comportamiento.

- Formar grupos, con base en el comportamiento de los mismos, en función de los valores adoptados por determinadas características definidoras de los citados grupos.

<sup>9</sup> CUERVO, A. : “La empresa pública, estructura financiera, rentabilidad y costes financieros”. *Papeles de Economía Española*, nº 38, (1989) pág. 177.

<sup>10</sup> MAROTO ACÍN, J. A. (1994), op. cit pág. 4.

<sup>11</sup> AGUILAR DÍAZ, I y FERNÁNDEZ ALVAREZ, A. I: “Aplicación de Métodos Multivariantes al Análisis Financiero” *Esic Market*, (octubre-diciembre 1988), pág. 25.

<sup>12</sup> *ibidem*, pág. 25-26.

- Buscar sistemáticamente estimadores, predictores de un fenómeno sometido a estudio.
- Localizar la estructura interna de una serie de atributos (la clasificación de empresas por dimensión).
- Identificar las variables más relevantes para el análisis posterior, a partir de una serie más amplia de variables de origen.
- Estudiar de forma conjunta una serie de variables en relación a otra serie de variables; por ejemplo estudiar en profundidad las interrelaciones del activo y del pasivo en el estado de equilibrio financiero.

La forma en como concretar la utilización de las herramientas que estamos analizando, parte de la consideración de los problemas en tres fases: en la primera se efectúa el análisis financiero univariante, en que se recoge información y se determinan las "ratios" de estudio. En la segunda fase se aplican las técnicas multivariantes, para lo que se determina la técnica aplicable y se obtienen los resultados. Finalmente, se determina la eficiencia del modelo y se generaliza y se determinan la estabilidad del mismo. En el siguiente cuadro nº 2 detallamos lo aquí indicado.

Mediante la utilización de las técnicas cuantitativas es posible determinar perfiles financieros de las empresas de acuerdo con categorías de riesgo. De entre las distintas técnicas aplicables, podemos destacar las dos siguientes:

1. - Medidas de descomposición.
2. - Modelos estadísticos de clasificación.

El análisis por descomposición permite determinar cómo están distribuidos los elementos de una estructura, analizando los cambios operados a lo largo del tiempo. Se basan en el análisis de la cantidad de información contenida en un mensaje recibido. El principio en que basa es sencillo: la cantidad de información de un mensaje depende de la probabilidad de que se produzca. La eficiencia y utilidad de esta técnica aumenta con la complejidad y el volumen de datos a tratar. Es especialmente adecuado para el cribado de información, con lo que facilita centrar el estudio sobre los aspectos más relevantes.

Los estados financieros son bloques de información dispuestos de una determinada forma, agrupados según criterios de clasificación. El importe que representan respecto del total puede expresarse en porcentajes, constituyendo por tanto una distribución de probabilidad.

Por comparación de éstos en dos períodos  $t$  y  $t+1$ , es posible conocer si los bloques de información se mantienen o, fluctúan ostensiblemente, pudiendo compararlos con el del sector y en consecuencia saber si se acercan o se alejan del óptimo (no forzosamente absoluto, puede ser local) y con ello es posible determinar los puntos débiles de los estados financieros.

## Cuadro nº 2

### El análisis financiero con aplicación de métodos multivariantes

#### **1ª ETAPA : Análisis financiero univariante.**

Recogida y tratamiento de la información.  
Selección de la batería de “ratios”.

#### **2ª ETAPA : Análisis financiero multivariante.**

Selección de la técnica.  
Obtención de resultados.

#### **3ª ETAPA : Análisis e interpretación de resultados.**

Determinación de la eficiencia del modelo.  
Generalización y estabilidad del modelo.

La existencia de limitaciones en la aplicación de las técnicas de los “ratios”, por su carácter univariante, aconseja la utilización de modelos matemáticos que permitan combinar varios indicadores. Estos modelos han permitido obviar problemas relativos a la selección y a la ponderación de los indicadores, y a las comparaciones entre empresas. Estos modelos, son conocidos como “modelos de predicción del fracaso empresarial”, porque permiten determinar anticipadamente los elementos de riesgos potenciales, basándose en una serie de atributos. Estos modelos se construyen a través de técnicas estadísticas multivariantes.

Dependiendo de la necesidad de predecir o describir y de la posibilidad de disponer de datos cuantitativos o cualitativos, las distintas técnicas aplicables podemos agruparlas en :

- Técnicas descriptivas.
- Técnicas predictivas.

Las técnicas descriptivas pueden ser aplicadas sobre variables métricas, o no métricas. Aplicadas sobre variables métricas pueden dar lugar a los tipos de análisis siguientes:

1. - **Análisis factorial clásico**, que persigue el determinar el conjunto de factores comunes. Permite este tipo de análisis descubrir el comportamiento de un conjunto de operaciones o empresas y poner de manifiesto las relaciones existentes entre las variables características.

Dadas  $n$  variables  $X_1, \dots, X_n$ , observadas sobre una determinada población, se pretenden encontrar las  $n$  relaciones lineales que igualan cada una de las variables con los  $n$  factores característicos y las  $n$  coordenadas. Se pretende, mediante la determinación de los  $n$  factores comunes, predecir el comportamiento de las variables observadas.

**2. - Análisis de componentes principales**, este método reduce la dimensión de la variable  $X$  de orden  $p$  a un equivalente de orden  $r$ , construyendo una nueva variable  $U=(U_1, \dots, U_r)$ ,  $r < p$ . Este segundo vector tiene por componentes los  $U_i$  que son combinación lineal de las  $p$  variables  $X$ , de forma que este segundo vector  $U_i$  debe explicar una parte significativa de la dispersión total que contenían los datos originales. Persigue sintetizar la información original minimizando la pérdida de capacidad explicativa en cuanto a la varianza total de las series de datos.

**3. - Análisis de agrupamientos** ("Cluster analysis"), el objetivo de esta técnica es agrupar individuos con características similares para formar grupos homogéneos.

**4. - Análisis multidimensional, métrico o no métrico**, son métodos para obtener una ordenación de las variables. Al igual que con otras técnicas de agrupamiento de datos, se les reconoce más como algoritmos de cálculo que como métodos en sentido estricto. En estas técnicas se necesita un amplio conocimiento del problema objeto de análisis, para interpretar sus resultados. Estos métodos de análisis ("multidimensional scaling", MDS) comprende un conjunto de métodos geométricos de representación dimensional. El principal objetivo de éstos es descubrir estructuras subyacentes basándose en datos cuantitativos, o en datos cualitativos. El análisis de escalas multidimensionales ha sido utilizado principalmente en marketing y más recientemente en algunos estudios financieros, en temas de auditoría<sup>13</sup> y contables<sup>14</sup>.

En el grupo de las variables no métricas, la técnica más utilizada es el "multidimensional scaling", esta técnica pretende encontrar una representación gráfica de la percepción de un grupo de individuos sobre un conjunto de objetos. Estas técnicas se utilizan como complemento de otras técnicas multivariantes.

Cuando se pretende encontrar una regla de clasificación en grupos previamente establecidos se utilizan **técnicas predictivas** entre las que se encuentran el **análisis discriminante**. Este tipo de análisis permite proyectar la nube inicial de puntos, de forma que las proyecciones de los puntos de determinada clase se sitúen lo más cerca posible entre ellos, y lo más alejado de otras clases, a fin de evitar errores de clasificación.

Las técnicas hasta ahora desarrolladas, tienen en común la relación entre las variables explicativas y las categorías. Con ello se dificulta la interpretación de los resultados. Por esto se plantea la conveniencia de recurrir a otros instrumentos o procedimientos de clasificación, como los algoritmos de partición repetitiva.

Los algoritmos de partición repetitiva son una técnica de clasificación no paramétrica, basada en un modelo de repetición. El modelo adopta la forma de un árbol de clasificación binario que permite asignar un objeto en un grupo seleccionado previamente.

<sup>13</sup> LIBBY, R. : "Bankers and Auditors Perceptions of Failure: Some Behavioral Evidence ". *Journal of Accounting Research*, (spring ), págs. 99-122.

<sup>14</sup> FRANK, W. G. : "An Empirical Analysis of International Accounting Principles". *Journal of Accounting Research*, ( autumn ), págs. 593-605.

---

Cualquiera de las técnicas arriba indicadas u otras de clasificación persiguen el análisis de los factores que están dificultando el funcionamiento de la empresa, cuando se dedican a pronosticar la probabilidad de fracaso. Permiten el análisis objetivo y sintético de los elementos característicos de la empresa. En segundo lugar, permiten evaluar la situación de la empresa en el contexto sectorial en que se encuentra. La obtención de índices globales del sector permite clasificar las empresas por niveles de riesgo.

El objetivo que persiguen las técnicas cuantitativas en su nivel más elemental, es sintetizar la información disponible, que viene expresada en un conjunto de datos, efectuada de manera que permita conservar la máxima información posible contenida en los datos que sea relevante a los efectos del problema que se considera. Las técnicas orientadas a resumir conjuntos de datos referidos a variables n-dimensionales, las denominamos multivariantes.

Cuando el investigador analiza un fenómeno de cierto colectivo, intenta recoger información de este colectivo, de un número grande de variables, para no perder información que puede ser relevante; con ello encontrará una gran cantidad de información, difícil de manejar y analizar, que frecuentemente es parcialmente redundante, por existir relaciones interdependientes entre algunas variables que hacen que la información que aporta una de ellas ya haya sido aportada por las demás.

Los métodos multivariantes están orientados a la síntesis de grandes masas de datos, eliminando las informaciones redundantes que contienen y manteniendo la máxima información que interese para los objetivos del estudio planteado.

Los diversos objetivos que el investigador puede plantearse darán lugar a diferentes métodos para resumir la información entre ellos están los siguientes métodos:

**1º Análisis de componentes principales.**

**2º Análisis de factores.**

**3º Correlación canónica.**

**4º Análisis discriminante.**

**5º Análisis de conglomerados, o “cluster”.**

Como resumen de lo hasta aquí estudiado, hemos clasificado en el siguiente cuadro (nº 3) los métodos multivariantes que se utilizan con mayor profusión y en el siguiente apartado desarrollamos más ampliamente las características del Análisis de componentes principales (ACP).



**Cuadro nº 3****Clasificación de los métodos multivariantes.****1. - DESCRIPTIVOS****1a ) Análisis, reducción y representación**

Variables métricas

**A. FACTORIAL CLÁSICO.****A. COMPONENTES PRINCIPALES (ACP).****1b ) Estructuración**

1b1) Variables métricas

**A. CLUSTER.****A. MULTIDIMENSIONAL. (métrico)**

1b2) Variables no métricas

**A. MULTIDIMENSIONAL. (no métrico)****2. - EXPLICATIVOS****2a) Una variable dependiente**

Métrica

No métrica

**REGRESIÓN MÚLTIPLE****A. DISCRIMINANTE****A. PREFERENCIAS****2b) Varias variables dependientes**

Métricas

No métricas

**A. CANÓNICO****A. MÚLTIPLE VARIANZA****5. EL ANÁLISIS DE COMPONENTES PRINCIPALES (ACP)**

Supongamos que disponemos de datos de  $n$  empresas, o muestras, referidos a  $p$  características diferentes de los mismos, es decir, disponemos de una serie de  $n$  vectores  $p$ -dimensionales de datos, la variable estadística  $p$ -dimensional  $X = (X_1, \dots, X_p)$ .

El método de las **componentes principales** reduce la dimensión de la variable  $X$  de  $p$  a  $r$ , construyendo una nueva variable  $U = (U_1, \dots, U_r)$ ,  $r < p$ . En este segundo vector las componentes  $U_i$  son combinación lineal de las  $p$  variables  $X$ , de forma que este segundo vector  $U_i$  debe explicar una parte significativa de la dispersión total que contenían los datos originales.

Se persigue sintetizar al máximo la información original con el criterio de minimizar la pérdida de capacidad explicativa en cuanto a la varianza total de las series de datos. Se considera que los datos están centrados en torno a un cierto valor  $\bar{x}_j$ , sin que ello suponga una pérdida de genera-

lidad. En la matriz de datos cada fila representa la información que define a una empresa y se verifica que el valor medio de la variable  $X_i$  es igual a cero, para  $i = \{1, \dots, p\}$ . A partir de la matriz de datos centrada, podemos construir la matriz de covarianzas  $S$ , que es simétrica y está formada por el conjunto de elementos,  $S_{11}, S_{12}, \dots, S_{pp}$ , siendo la covarianza el valor determinado por la siguiente igualdad:

$$S_{ij} = 1/N \sum X_{ij} \cdot X_{jk}, \quad i=\{1, \dots, p\}, \quad j=\{1, \dots, p\}.$$

Cuando  $i = j$ , tendremos los términos de la diagonal principal, que se corresponden con las varianzas de cada una de las  $p$  variables explicativas de la empresa. La suma de las varianzas, es la traza de la matriz y nos indica estadísticamente, cual es el grado de dispersión total de los datos.

El análisis discriminante sigue un proceso, por el que se determinan los valores de las nuevas variables,  $U_1, U_2, \dots, U_r$ , formando combinaciones lineales respecto del vector de variables inicial  $X_p$  y el vector de coordenadas  $\beta (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)$ .

Así, para determinar  $U_1$ , el vector  $\beta$ , que tiene de modulo la unidad y se busca de forma tal que atribuya a  $U_1$  la mayor varianza posible.

$$U_1 = \sum \beta_{1j} X_j$$

Se demuestra por diversos autores, que el vector  $\beta_1$  es uno de los autovectores de matriz de covarianzas  $S$ , precisamente el máximo autovalor de los  $\lambda_i$  de  $S$  y la proporción de la varianza total explicada por la nueva variable  $U_1$  determinada, viene dada por el siguiente cociente:

$\lambda_1 / (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p)$  siendo  $\lambda_1$  el autovalor mayor de los que determina la matriz  $S$  de covarianzas.

El objetivo del método consiste en reducir la dimensión evitando redundancias en la información, para ello la segunda variable económica,  $U_2$ , se determina también como una combinación lineal de las variables  $X_p$  y el vector de coordenadas, en este caso  $\beta_2 (\beta_{21}, \beta_{22}, \dots, \beta_{2p})$ , que determina la siguiente igualdad

$$U_2 = \sum \beta_{2j} X_j$$

$U_2$  tiene que explicar la mayor proporción de la varianza total de los datos originales que no haya sido ya explicada por  $U_1$ . Se busca, por tanto, un vector de módulo unitario que haga máxima la varianza de  $U_2$ , con la condición adicional de que esta nueva variable esté incorrelacionada con  $U_1$ .

La solución que se busca es también un autovector de la matriz de covarianzas,  $S$ . La condición adicional impide que sea el asociado al autovector  $\lambda_1$ . Elegiremos pues un  $\lambda_2$ , de forma que el máximo de entre los autovalores,  $(\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_p)$ .

Las variables  $U_1$  y  $U_2$ , conjuntamente, explican una proporción igual a

$$(\lambda_1 + \lambda_2) / (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p)$$

de la varianza total. Los sucesivos cálculos de  $U_3, \dots, U_p$ , permiten determinar las  $r$  variables canónicas que permiten acercarnos a explicar la proporción de varianza deseada. Como hemos visto en el proceso de determinación de las dos variables estudiadas  $U_1$  y  $U_2$ , la elección de los autovalores se efectúa de manera decreciente, cogiendo siempre el mayor por ser el que explica una mayor parte del fenómeno que estudiamos, con ello llegamos a reducir considerablemente la dimensión matemática y estadística, de las empresas que estudiamos.

En este proceso conseguimos que unas pocas variables canónicas expliquen una proporción muy elevada de la varianza, reduciendo la dimensión conseguida, de manera considerable.

Un ejemplo pionero fue el realizado por Stone quien sintetizó series de datos de los años 1922-1938 referentes a diecisiete variables económicas consideradas como determinantes de la renta nacional, y llegó a determinar que tres variables canónicas explicaban el 97,45 % de la varianza total, con lo que se podía sustituir a las diecisiete variables iniciales en problemas de análisis o predicción económica.

El ACP tiene como característica, el que se utiliza para describir una matriz en la que las variables figuran en columnas y los individuos o empresas, en filas. Éstos individuos vienen determinados por una serie de datos que pueden ser marcas, consumidores de un producto, volumen de ingresos de las empresas, "stock de inversiones", rentabilidades, etc.

Esta matriz puede ser disimétrica, es de orden  $m \times n$ , indicativo de que el número de empresas y el de variables que se miden suelen ser muy dispares. Las variables son heterogéneas, y ello se refleja en las medias aritméticas de cada variable y en sus desviaciones. Así, hay variables que miden los ingresos en pesetas y otras, como las "ratios" de financiación, son porcentajes del total del pasivo, por todo ello, las diferencias de las medidas descriptivas serán significativas. Esto justifica el por qué antes de aplicar el ACP se debe realizar una transformación de la matriz, que posteriormente veremos.

Las variables que toman valores altos tienen un peso importante en la determinación de los ejes; para evitar el posible error que aportaría un tratamiento no corregido de los datos, se realiza una transformación consistente en centrar los mismos, para ello a los datos iniciales se les resta la media de la variable. Con esto se consigue que los elementos  $x_{ij} = r_i - \bar{r}_j$ . Esto es equivalente a una traslación del origen al centro de gravedad de la distribución de datos, la media de la nube de datos. La suma de las desviaciones de los valores de las  $x_{ij}$ , así obtenidos, respecto de su media es cero<sup>15</sup>

Al buscar un subespacio de dimensión, lo más reducida posible, que represente bien a la nube de puntos iniciales, no se consigue una buena representación, se produce una deformación al

<sup>15</sup> Algunas de las propiedades que verifica la media aritmética pueden verse en: MARTÍN PLIEGO, F.J. (1994): *Introducción a la estadística económica y empresarial (teoría y práctica)*, págs. 40-43, Ediciones AC. Madrid.

proyectar los puntos de las empresas. Si las dispersiones de las variables son muy diferentes, entonces será necesario realizar una transformación en los datos de partida tipificándolos, para lo que dividimos por su desviación<sup>16</sup>.

Una vez realizada la transformación de la tabla de datos tipificando, se analiza mediante el análisis general la nueva tabla X. El análisis consiste en obtener los vectores propios de la matriz de correlación  $C = X'X$ .

Las proyecciones de las empresas sobre los ejes dirigidos por estos autovectores son los componentes principales. El factor así resultante es una variable artificial que resulta de la combinación lineal de las variables iniciales y se le denomina componente principal.

La transformación anteriormente comentada, provoca en la tabla de datos efectos diferentes a los que se producen sobre el espacio de  $R^n$ . Mientras en  $R^n$  se traslada el origen al centro de gravedad y las empresas alrededor del origen se modifican, en  $R^n$  la transformación produce una deformación de la nube de puntos.

El cambio de escala de las variables coloca los puntos a una distancia unitaria respecto del origen. Con esto, los m puntos están situados en una bola de radio 1 con centro en el origen.

La distancia entre dos puntos variables en el espacio  $R^n$  puede interpretarse en términos de correlación:

- Si la correlación es muy positiva, aproximadamente igual a 1, la distancia es aproximadamente 0.
- Si la correlación es muy negativa, aproximadamente -1, entonces la distancia es máxima.
- Cuando los puntos están incorrelacionados, aproximadamente 0, la distancia entre los puntos es intermedia.

En la interpretación de un ACP conviene seguir cierto orden :

- 1) Interpretar los factores en función de su correlación con las variables.
- 2) Interpretar la nube de variables  $R_n$ .
- 3) Interpretar la nube de empresas  $R_p$ .
- 4) Interpretar la representación simultánea.

<sup>16</sup> La tipificación de las variables  $x_{ij}$ , se realiza efectuando la división por el termino  $S_j \sqrt{n}$ , es decir:

$$x_{ij} = \frac{r_{ij} - \bar{r}_j}{S_j \sqrt{n}}, \text{ siendo } s_j^2 = \sum (r_{ij} - \bar{r}_j)^2 / n$$

Es interesante interpretar las componentes principales. Una componente es una variable que no se puede medir directamente, sino que se construye a través de los datos de partida, de las variables de entrada. Las variables iniciales pueden tener redundancias y estar midiendo en parte la misma característica.

El factor es un agrupamiento de variables y se interpreta a partir de su correlación con las variables iniciales. La correlación es la proyección de la variable sobre el factor. Cuanto mayor sea la coordenada de una variable sobre un eje, mayor peso tiene en la explicación del eje.

Frecuentemente se interpreta un eje por oposición con las variables correlacionadas con él, por ejemplo si las empresas son establecimientos comerciales y las variables más correlacionadas con el factor son antigüedad del inmueble, edad del comerciante y años del local dedicados a esa actividad, el factor se puede interpretar como un factor de antigüedad. En ocasiones la interpretación de los componentes principales es difícil.

Sobre los planos factoriales los puntos que representan a las variables están situados en un círculo de radio 1 desde el origen. Los puntos variables están mejor representados en el plano cuando están próximos a la frontera del círculo. La nube de variables no está centrada en el origen, dependerá de la correlación entre las variables para que éstas puedan estar situadas al mismo lado del origen, o en otras posiciones.

Interpretada la nube de variables, se puede pasar a la de empresas, representados por sus coordenadas sobre los factores. La nube de empresas estará centrada en el origen por la transformación que hemos realizado en los datos iniciales. La contribución de un punto, empresa  $i$ -ésima a la formación de un eje, es mayor cuanto más alta sea su proyección sobre el eje.

La calidad de representación de un punto sobre el plano, no depende sólo de su distancia al origen como ocurría con las variables, puesto que en el espacio  $R^m$  no todos los puntos están a la misma distancia del origen.

Dos empresas son semejante cuando están próximas. Si se observa un grupo de empresas y están bien representadas, habrán dado respuestas semejantes al conjunto de preguntas efectuadas, o habrán tomado valores próximos para todas las variables medidas. Los ejes factoriales se obtienen a partir de la información suministrada por todas las empresas y uno puede estar mal representado sobre este plano; por eso es necesario comprobar siempre su calidad de representación.

Si el número de empresas es muy grande se dificulta la visión que la nube de puntos manifiesta ya que el gráfico estará repleto de puntos, con lo que se dificultará descubrir lo esencial. En estos casos es útil proyectar como individuos suplementarios los centros de gravedad de los grupos de empresas caracterizados por una variable nominal u ordinal. Así, al proyectar los centros de gravedad de grupos constituidos por distintos niveles de renta, obtenemos un escalonamiento de estados a lo largo del primer eje, que podría indicar que la renta está muy relacionada con el primer factor.

La disposición de las variables permite interpretar la nube de empresas. Aunque debe tenerse precaución al interpretarla, esta representación simultánea sugiere las variables que son responsables de las proximidades entre los empresas.

Debemos recalcar que no se pueden calcular las distancias entre una empresa y una variable: no tiene sentido ya que sus proyecciones no están medidas en la misma escala. Sí se pueden estudiar las posiciones relativas de los empresas respecto de una variable.

Se puede decir que el eje I opone las empresas que toman valores altos para las variables correlacionadas positivamente con el factor y bajos para las variables correlacionadas negativamente -las situadas a la derecha- a los empresas para las que ocurre lo contrario, las situadas a la izquierda.

Algunos programas en la representación simultánea no sitúan las variables mediante sus coordenadas, sino por la proyección de los ejes variables de partida en  $R^m$  y se interpreta el vector que une el origen con el punto como la dirección de alargamiento. Un punto individuo, bien representado, alejado en la dirección de la variable indica que ese individuo toma un valor más alto que la media en esa variable. Lo hasta aquí expuesto lo resumimos en el próximo cuadro nº 4.

**Cuadro nº 4**  
**Pasos del Análisis de Componentes Principales**

- 1º Lectura de los datos.
- 2º Descripción elemental de las variables: medias y desviaciones.
- 3º Tipificado de la matriz de datos. Cálculo de la matriz de correlación C.
- 4º Diagonalización de la matriz de correlación C.
- 5º Cálculo de las componentes principales o factores.
- 6º Cálculo de la inercia explicada, contribuciones y correlaciones.
- 7º Obtención de las representaciones gráficas.

## 6. CONCLUSIÓN

El análisis mediante las “ratios” constituye un método sistemático y expresivo de la situación estática, de la estructura, actividad y rendimiento de las empresas. El valor de las “ratios” se estima en sí mismo y se compara con los demás “ratios” para una empresa o un conjunto de empresas en los análisis sectoriales. La información aportada por las “ratios” calculados a partir del balance, debe ser contrastada por la que nos enseñan los estados de flujos económicos y financieros.

El análisis financiero mediante “ratios” presenta algunos problemas de carácter técnico, entre los que cabe recoger los siguientes: la existencia de correlaciones estadísticas entre las

“ratios”, la distinta dispersión de las distribuciones que se considera comparable y cuestiones previas como el tamaño de la empresa.

Las técnicas tradicionales del análisis financiero se manifiestan limitadas por su incapacidad para definir métodos flexibles que permitan adaptaciones rápidas a las necesidades y objetivos del análisis y por la dificultad para tratar problemas complejos que requieran el examen simultáneo de varias variables.

El análisis de flujos detecta las modificaciones que afectan a la empresa tales como la variación del volumen de ingresos, de existencias, las políticas de cobros y de pagos y facilita la comprensión de la lógica de las políticas seguidas a partir de los flujogramas y las evoluciones previsibles. Se pueden por tanto ver las consecuencias de los cambios en la rentabilidad, los costes financieros, los rendimientos y el crecimiento. Por el contrario, el análisis en términos estáticos es menos sensible a los cambios del entorno y a las variables de la empresa.

El análisis de datos es una forma de abordar los problemas estadísticos. El investigador de la economía financiera encuentra en él una nueva forma de enfrentarse a las variables y “ratios”, constituida por un conjunto de técnicas estadísticas para tratar problemas en varias dimensiones.

El método más adecuado para analizar financieramente las empresas debería llevar a cabo un doble examen: el de las relaciones univariantes (“ratios” de estructura, flujos financieros rentabilidad, liquidez y solvencia ) y el análisis mediante técnicas multivariantes.

El análisis univariante estudia de forma individualizada y secuencial las “ratios”, y mediante sus interrelaciones se analizan los componentes y variaciones explicativos de los mismos. El análisis mediante técnicas multivariantes analiza, de forma simultánea, estos indicadores para detectar relaciones de intercambio y posibles vinculaciones subyacentes entre variables, que no aparecen de forma explícita en un análisis univariante.

Las técnicas multivariantes tienen una especial significación, porque resumen la información para hacerla más tratable por el investigador, encuentra los hechos que están implícitos en ella además de posibilitar el enfoque predictivo y plantean problemas complejos que deben ser estudiados de forma simultánea.

Las técnicas multivariantes permiten, en el área económico-financiera, resolver problemas tales como: estudiar las interrelaciones existentes entre un determinado conjunto de variables (“ratios” financieros, magnitudes,... ) obteniendo nuevas categorías o factores que agrupen las variables iniciales; señalar la existencia de los factores determinantes en las relaciones entre un conjunto de datos sin una pérdida considerable de información; separar y analizar distintos grupos de variables o individuos que definen un determinado fenómeno, diferenciación de grupos; formar grupos, con base en el comportamiento de los mismos, en función de los valores adoptados por determinadas características definitorias de los citados grupos; buscar sistemáticamente estimadores, predictores de un fenómeno sometido a estudio; localizar la estructura interna de una serie de atributos (la clasificación de empresas por dimensión); identificar las variables más relevantes para el análisis a

---

posterior, a partir de una serie más amplia de variables de origen, ó estudiar de forma conjunta una serie de variables en relación a otra serie de variables.

Mediante la utilización de las técnicas cuantitativas es posible determinar perfiles financieros de las empresas de acuerdo con categorías de riesgo. De entre las distintas técnicas aplicables, podemos destacar las medidas de descomposición y los modelos estadísticos de clasificación. El análisis por descomposición permite determinar cómo están distribuidos los elementos de una estructura, analizando los cambios operados a lo largo del tiempo. La eficiencia y utilidad de esta técnica aumenta con la complejidad y el volumen de datos a tratar. Es especialmente adecuado para cribar la información, con lo que facilita centrar el estudio sobre los aspectos más relevantes.



# DESAGREGACIÓN TEMPORAL DE LA RENTA BRUTA DISPONIBLE REAL DE LAS FAMILIAS

ANA DEL SUR MORA  
TOMAS DEL BARRIO CASTRO  
Ernet Pons Fanals  
Universitat de Barcelona

## 1. INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo se presenta la trimestralización en base a la información de indicadores de alta frecuencia de la Renta Bruta Disponible Real de las Familias (es decir, de la Renta Bruta Disponible de las Familias deflactada por el deflactor del Consumo Privado Nacional), en el apartado 2º se explica el esquema utilizado para la obtención de la estimación de la macromagnitud con frecuencia trimestral. En el 3º y 4º apartado se explica de forma breve el método de distribución utilizado y el método de extracción de señales respectivamente, reservando el 5º apartado para presentar los resultados obtenidos.

La elección de la macromagnitud objeto de este trabajo, ha estado motivada por dos razones. En primer lugar la ausencia de información en la Contabilidad Nacional Trimestral para la óptica de Rentas en general y sobre una variable tan importante para el seguimiento de la capacidad adquisitiva de las familias como la Renta Bruta Disponible en particular. Y en segundo lugar, por la importancia que, tradicionalmente, se ha dado a la anterior macromagnitud a la hora de explicar el comportamiento del Consumo Privado Nacional. Por lo que la obtención de una estimación de la evolución trimestral de la macromagnitud puede permitir por un lado realizar un seguimiento de la capacidad adquisitiva de las familias a corto plazo y por otro disponer de los valores de la anterior variable para estimar una función de Consumo Privado Nacional a nivel trimestral.

Los indicadores utilizados para la trimestralización de la macromagnitud han sido seleccionados a partir de una batería más amplia, en la que se incluían los siguientes<sup>1</sup>:

- M1 deflactado por el I.P.C.
- M2 deflactado por el I.P.C.
- M3 deflactado por el I.P.C.
- ALP deflactado por el I.P.C.

<sup>1</sup> Los criterios utilizados para la selección de la batería de indicadores iniciales han sido:

- La disponibilidad de series largas (al menos desde 1971).
- La relación del indicador con la macromagnitud.
- La disponibilidad de series relativamente homogéneas.
- Prontitud en la disponibilidad de los datos.

- 
- ALP2 deflactado por el I.P.C.
  - ALP Restringido deflactado por el I.P.C.
  - Crédito interno a las familias deflactado por el I.P.C.
  - Pagos ordinarios por persona y mes deflactado por el I.P.C.
  - Pagos totales por persona y mes deflactado por el I.P.C.
  - Crecimiento del número de desempleados registrados en el I.N.E.M.
  - Crecimiento del I.P.C.

De la anterior batería se seleccionó la combinación de indicadores que mejor explicaba la evolución tanto de los niveles como de los ritmos de crecimiento de la macromagnitud. Esta combinación resultó ser la siguiente:

- M1 deflactado por el I.P.C.
- ALP deflactado por el I.P.C.
- Pagos ordinarios por persona y mes deflactado por el I.P.C.
- Crecimiento del I.P.C.

## 2. ESQUEMA UTILIZADO PARA LA OBTENCIÓN DEL ÍNDICE SINTÉTICO

El esquema seguido para la obtención de la Renta Bruta Disponible Real de las Familias, es muy similar al utilizado por el I.N.E. para la elaboración de la Contabilidad Nacional Trimestral. La idea en la que se basa es muy simple, si para una determinada Macromagnitud (para la que solamente se disponen de datos a nivel anual) existe un conjunto de indicadores representativos de su evolución (a nivel trimestral y o mensual), es posible estimar una relación entre la primera y los segundos (a nivel anual), que permita obtener una estimación de la evolución trimestral de la anterior macromagnitud. El método utilizado que permite estimar la relación y distribuir el valor de la macromagnitud entre los distintos trimestres de cada año fue propuesto por Chow y Lin. Este método de distribución se explica en el 3º apartado, y es el mismo que utiliza el I.N.E..

Para cada uno de los indicadores parciales se obtienen su componente ciclo-tendencia, que será el que se utilizará de cara a obtener de la evolución de la macromagnitud con frecuencia trimestral, la utilización de los componentes ciclo-tendencia queda justificada por las siguientes razones:

- El hipotético componente estacional de la macromagnitud es incontrastable.
- De existir el anterior no tendría por que coincidir temporalmente con el presentado por los indicadores parciales utilizados.
- En el caso de utilizar los indicadores parciales sin haber sido ajustados de los componentes estacional e irregular, el componente estacional e irregular asignado a la macromagnitud sería el resultado de las estacionalidades e irregularidades de los indicadores que pueden presentar comportamientos a lo largo del tiempo dispares.

El método de extracción de señales que ha sido utilizado se describe en el 4º apartado.

Los indicadores parciales son modelizados mediante la metodología Box-Jenkins para la obtención de predicciones para en 1º lugar suplir el coste informativo de la aplicación de filtros para la obtención de los componentes ciclo-tendencia de los indicadores parciales y en 2º lugar para suplir los desfases en la disponibilidad de los últimos datos de los indicadores y para realizar predicciones sobre la posible evolución de la macromagnitud a corto plazo.

Resumiendo el esquema propuesto es el siguiente:

- Selección de indicadores de alta frecuencia representativos de la macromagnitud.
- Estimación mediante métodos econométricos de la relación a nivel anual entre la macromagnitud y los indicadores parciales.
- Obtención de predicciones univariantes para cada indicador parcial.
- Obtención de los componentes ciclo-tendencia de cada uno de los indicadores parciales.
- Obtención de la estimación de la evolución de la macromagnitud a nivel trimestral a partir del método de distribución.

### 3. MÉTODO DE DISTRIBUCIÓN DE CHOW-LIN

Mediante este método se obtiene una estimación de frecuencia superior a la que esta disponible sobre la variable observada en base a la información de indicadores de alta frecuencia representativos de la evolución de la anterior. En nuestro caso se trataría de obtener una estimación trimestral de una macromagnitud a partir de la información suministrada por una batería de indicadores representativos de la evolución descrita por la primera. Es decir:

$$Y_T = f(X_T, X_A, Y_A)$$

Donde:

- $Y_T$  : Estimación de la macromagnitud de frecuencia trimestral ( $4N*1$ ).
- $X_T$  : Matriz de los indicadores representativos de la macromagnitud con frecuencia trimestral ( $4N*P$ ).
- $X_A$  : Matriz de los indicadores representativos de la macromagnitud con frecuencia anual ( $N*P$ ).
- $Y_A$  : Macromagnitud con frecuencia anual ( $N*1$ ).

Es decir:

$$Y_{(4N \times 1)} = X_{(4N \times p)} \beta_{(p \times 1)} + u_{(4N \times 1)}$$

donde  $u$  se comporta como ruido blanco con media 0 y matriz de varianzas covarianzas  $V$ .

$$X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_p\}$$

La relación existente entre  $Y_A$  y  $Y_T$  es:

$$Y_A = B' Y_T$$

Donde la matriz  $B'$  puede adoptar las dos siguientes formas:

$$B'_{(N \times 4N)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

para el caso de distribución

$$B'_{(N \times 4N)} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

para el caso de interpolación

La variable  $Y_T$  no es observable, por lo que se habrá de estimar, así como  $\beta$ . Si premultiplicamos (1) por la matriz  $B'$ , tenemos:

$$Y_A = B' Y_T = B' X_T \beta + B' u_T = X_A \beta + u_A$$

Donde:

$$E(u_A u_A') = V_A = B' V_T B$$

Los autores de este método demuestran que el mejor estimador lineal insesgado de  $Y_T$  tiene la siguiente expresión:

$$\hat{Y}_T = X_T \beta + V^{-1} B (B' V^{-1} B)^{-1} (Y_A - B' X_T \beta)$$

$$\hat{\beta} = X_T' B (B' V^{-1} B)^{-1} B' X_T^{-1} X_T' B (B' V^{-1} B)^{-1} Y_A$$

Donde como se dijo anteriormente  $V$  es la matriz de varianzas covarianzas del término de perturbación del modelo que relaciona la macromagnitud no observable (es decir, con frecuencia trimestral) y los indicadores también con frecuencia trimestral. El problema radica en que la anterior matriz de varianzas covarianzas es desconocida y por otro lado al ser la variable  $Y_T$  no observable, no es posible estimar la matriz  $V$ . Por lo que es necesario realizar supuestos a priori sobre el comportamiento de la matriz para poder obtener una estimación de la serie trimestral no observable  $Y_T$ .

La matriz  $V$  se puede interpretar como la transformación que hay que aplicar a los datos trimestrales de la expresión (1), para que el término de perturbación de la anterior se comporte como ruido blanco.

Si suponemos que el término de perturbación  $u$  se comporta como ruido blanco la matriz  $V$  que utilizaremos será la matriz identidad ( $V=I$ ). Quedando la expresión reducida a:

$$\hat{Y}_t = X_t \beta + \frac{1}{4} (Y_A - B/X_T B)$$

$$B = (X_T B B' X_T)^{-1} X_T B Y_A$$

Por otro lado si se supone que la macromagnitud no observable y los indicadores son integrados de orden 1, entonces para obtener la estimación óptima de  $Y_T$ , hay que utilizar una matriz  $V=D'D$ , donde  $D$  tiene la siguiente forma:

$$D' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Estas dos variantes del método anterior son las que se han aplicado para obtención de las estimaciones de la Renta Nacional Real Bruta de la Familias que se presentan en el presente trabajo.

#### 4. MÉTODO DE EXTRACCIÓN DE LA SEÑAL CICLO-TENDENCIA DE LOS INDICADORES

El método de extracción de señales utilizado para la obtención de los componentes ciclo-tendencia de los indicadores es un filtro muy similar al utilizado por el I.N.E. en la elaboración de la Contabilidad Nacional Trimestral (Filtro de líneas aéreas modificadas), por otro lado ambos han sido propuestos por el mismo autor. La diferencia fundamental entre ambos filtros estriba en que

<sup>2</sup> Siendo el modelo de líneas aéreas el siguiente proceso generador de datos:

$$\nabla^{12} \nabla^4 Y_t = (1 - \theta_1 B) (1 - \theta_2 B^{12}) u_t$$

donde

$$\nabla = (1 - B)$$

$$\text{IMA } (1,1) \circ \text{SIMA } (1,1) \text{ } S=12$$

mientras que para el filtro de líneas aéreas<sup>2</sup> modificadas los parámetros  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , se obtienen a partir de la estimación del modelo de líneas aéreas para el indicador parcial, y a partir de los anterior se obtienen los valores de  $a_1$  y  $a_2$  a partir de las siguientes relaciones:

$$C = - \left[ \left( \frac{\theta_1}{1 - \theta_1} \right) + \left( s^2 \frac{\theta_2}{1 - \theta_2} \right) \right]$$

$$\alpha_1 = -2 \frac{\sqrt{2 - 4C}}{4C - 1}$$

$$\alpha_2 = 1 + \alpha_1$$

Mientras que para el caso del filtro utilizado los parámetros  $\theta_1, \theta_2$  y por lo tanto  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  vienen dados.

El filtro utilizado consta de dos partes una primera que se corresponde con una función de transferencia de la siguiente forma:

$$V(B) = k \frac{(1 - \alpha_1 B - \alpha_2 B^2) (1 + B + B^2 + B^3 + B^4 + \dots + B^{12})}{(1 - \theta_1 B) (1 - \theta_2 B^{12})}$$

donde:

$$\alpha_1 = -0.039 \text{ y } \alpha_2 = 0.961$$

$$\theta_1 = -0.1915 \text{ y } \theta_2 = 0.6228$$

$$K = 0.480104$$

La segunda parte es un filtro autorregresivo de orden 2 y potencia mitad en 20 meses AR(2)20, que responde a la siguiente expresión:

$$\Omega(B) = \frac{\Omega_0 F^d}{(1 + \Omega_1 B + \Omega_2 B^2)}$$

donde:

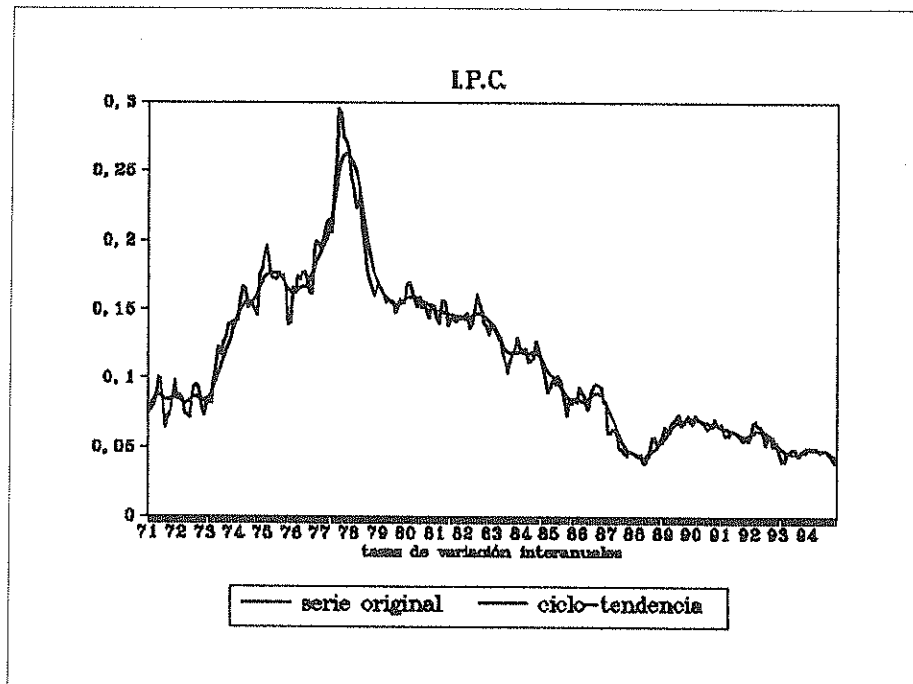
$$\Omega_0 = 0.07839 \quad \Omega_1 = -1.56291 \quad \Omega_2 = 0.641306 \text{ y } d = 3 \text{ ó } 4$$

El coste informativo del primer filtro se da al principio de la serie y es suplido con predicciones hacia atrás, mientras que el segundo presenta un coste informativo entre 3 y 4 observaciones al final de la serie que también es suplido mediante predicciones, que se obtienen a partir del modelo ARIMA estimado para cada serie o indicador.

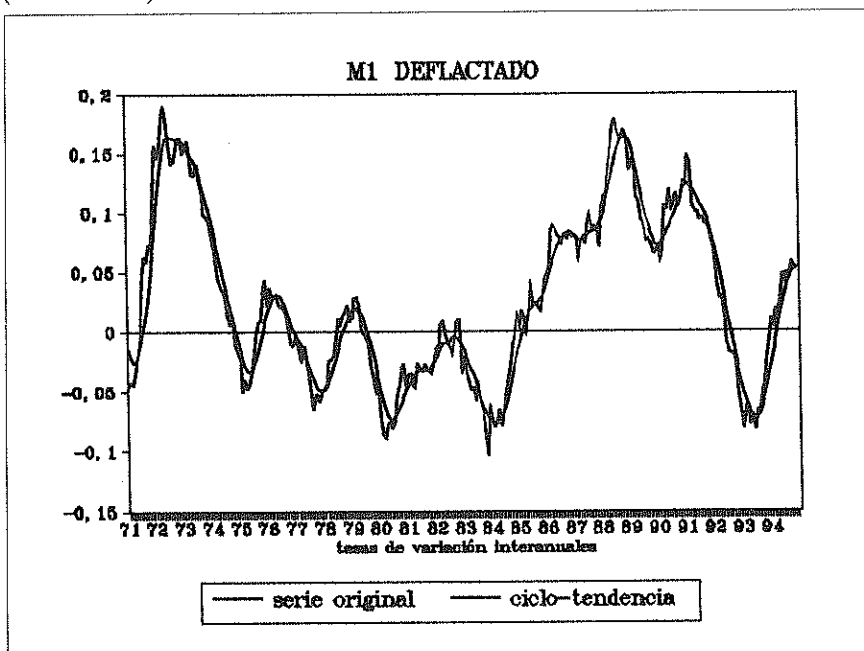
Ambos filtros son aplicados en cascada, es decir, en primer lugar se aplica el filtro de función de transferencia  $V(B)$  y en segundo lugar el AR(2)20  $\Omega(B)$ .

En los gráficos 1,2,3 y 4, se muestran la evolución de los ritmos de crecimiento interanuales de la series originales y de las señales ciclo-tendencia de los indicadores parciales utilizados.

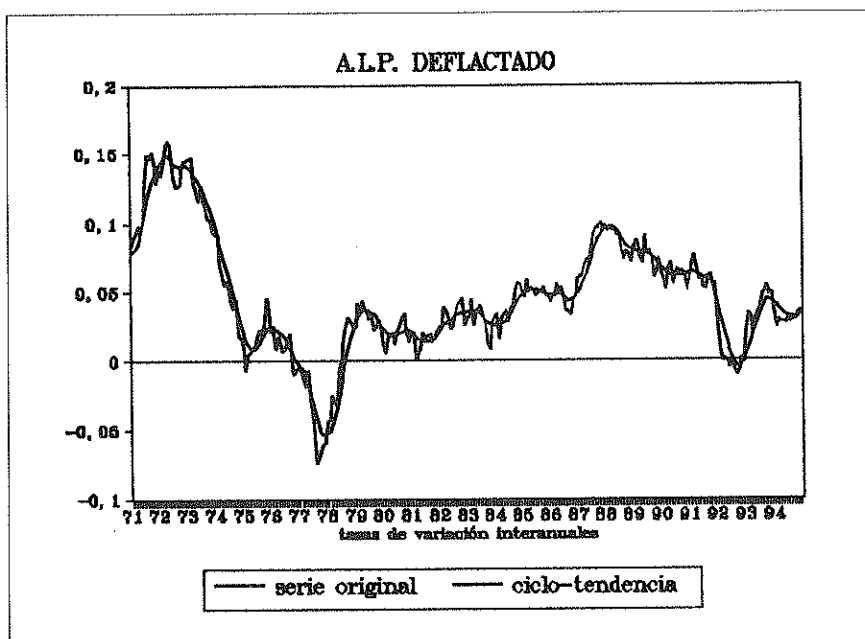
(GRAFICO 1)



(GRAFICO 2)

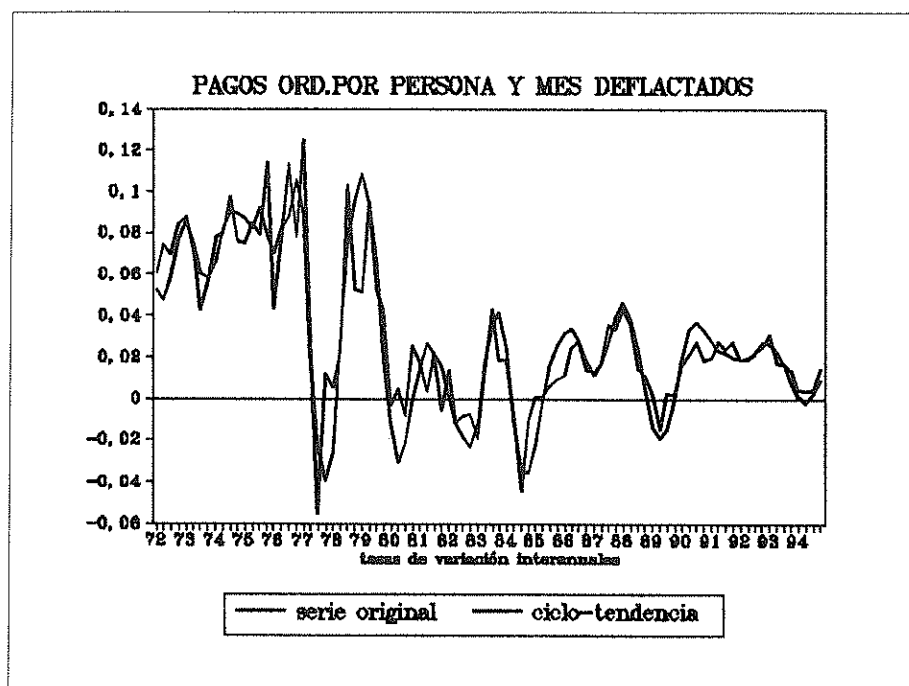


(GRAFICO 3)





(GRAFICO 4)



En los gráficos anteriores se puede apreciar como los ritmos de crecimiento de las señales obtenidas presentan una evolución cíclica muy suavizada, similar a la que se observa al representar los ritmos de crecimiento interanuales de las series proporcionadas en la Contabilidad Nacional Trimestral.

## 5. RESULTADOS OBTENIDOS

Es este apartado se presentan los resultados que se han alcanzado al trimestralizar la Renta Disponible Nacional Bruta Real de las Familias utilizando las dos variantes del método Chow-Lin presentadas en el 3º apartado. Es decir, utilizando como matriz V de varianzas y covarianzas del término de la perturbación aleatoria:

- la matriz identidad.
- $V=D'D$ , en este caso como se dijo anteriormente se supone que tanto la macromagnitud como los indicadores parciales son integrados de orden uno en la parte regular.

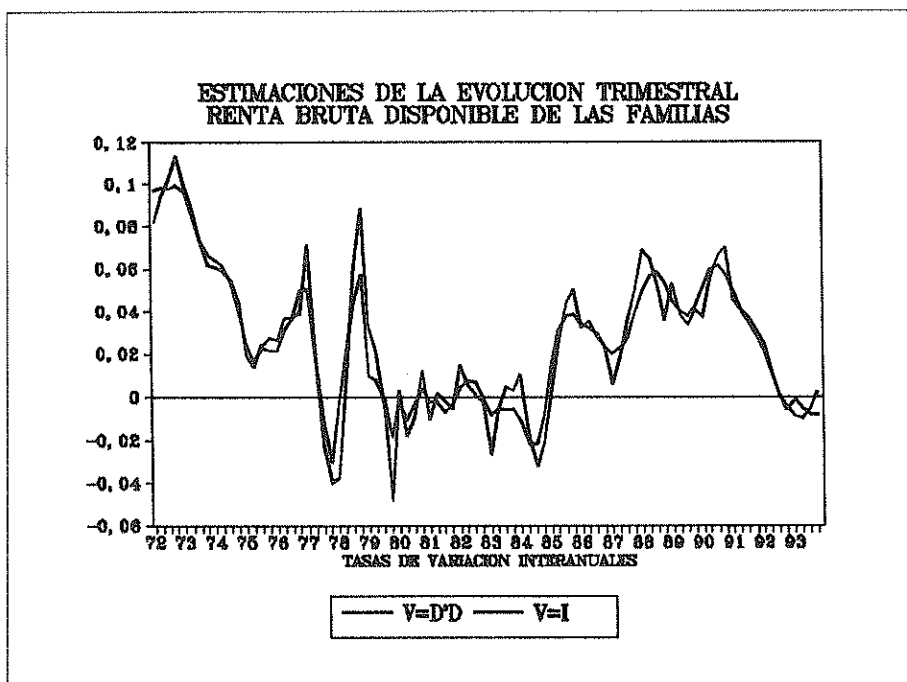
A priori la segunda opción parece mas razonable sobre todo si se tiene en cuenta que tanto Renta Nacional Bruta Disponible, M1, ALP y los Pagos Ordinarios:

- Se han deflactado y por lo general las variables económicas expresadas en términos reales suelen ser integradas de orden 1 ( $I(1)$ ).
- Que los modelos ARIMA estimados para las tres últimas series presentaban un orden de diferenciación en la parte regular igual a 1.
- Que se han utilizado las señales correspondientes a los componentes ciclo-tendencia de los indicadores.

Con lo que respecta al I.P.C., el modelo ARIMA estimado presentaba un orden de diferenciación en la parte regular igual a 2, pero para este caso se ha utilizado la variable expresada en incrementos. Utilizándose también el componente ciclo-tendencia.

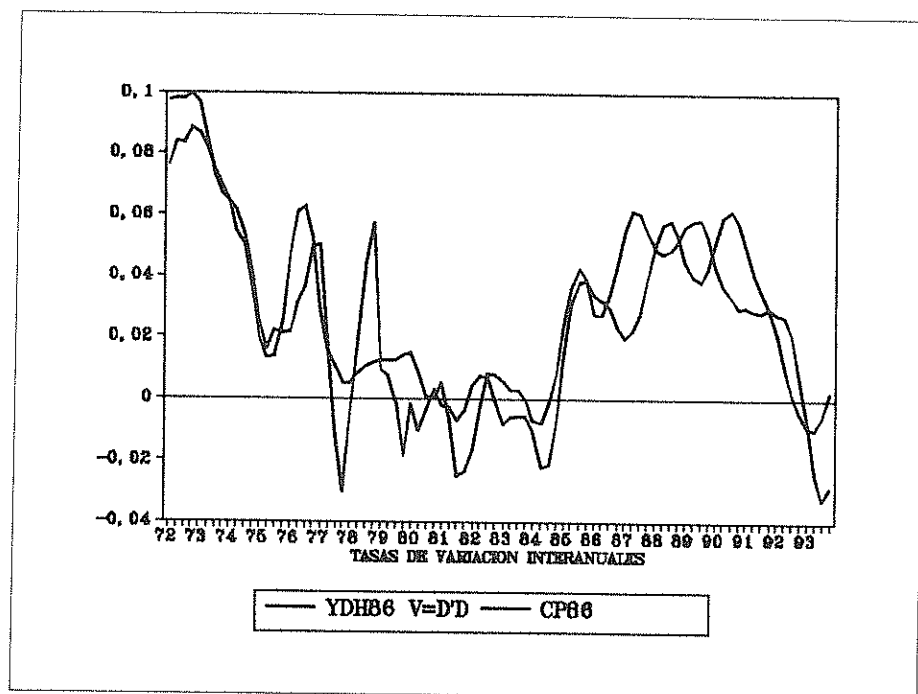
En el gráfico 5 se muestra la evolución de las tasas de variación de las estimaciones obtenidas por ambos métodos, en este gráfico se aprecia como la estimación obtenida mediante el método que supone que las variables utilizadas son  $I(1)$ , presentan una evolución mucho mas suaves y con oscilaciones de menor amplitud y por lo tanto bastante similar a los que muestran las series de Contabilidad Nacional Trimestral. Aunque ambas estimaciones presentan una evolución bastante pareja.

(GRAFICO 5)



En el gráfico 6 se compara la evolución de los ritmos de crecimiento de la estimación obtenida de la Renta Nacional Bruta Disponible Real de las Familias y los presentados por el Consumo Privado Nacional Real de la Contabilidad Trimestral del I.N.E.

(GRAFICO 6)



En el gráfico se aprecia con la evolución descrita por ambas variables es bastante similar, aunque a partir de 1987 se produce un desfase de un año entre la evolución descrita por ambas series. Al ser el desfase de un año, este no puede ser debido al método de distribución utilizado, de todas maneras se ha comprobado que este desfase también lo presentan las macromagnitudes de Contabilidad Nacional a partir de las cuales se obtienen las series anteriores a través de un proceso de distribución más o menos complejo.

La mejora de la trimestralización obtenida en este trabajo pasaría por:

- 1.- La utilización de un número mayor de indicadores representativos de la evolución de la macromagnitud, de los que no se ha podido disponer para la realización del presente trabajo.
- 2.- La utilización de la técnica de análisis factorial para resumir la información de los indicadores parciales en un número mas reducido de factores ortogonales entre si, y de esta forma evitar problemas de multicolinealidad entre los regresores.

---

3.-Y la utilización del mismo método de extracción de señales que el utilizado por el I.N.E., y de esta forma utilizar un filtro con parámetros estimados a partir de la información recogida en los indicadores parciales.

## BIBLIOGRAFÍA

Aznar a., Trívez F.J. (1993) *Métodos de predicción en economía I y II*. Ariel Economía. Barcelona.

Chow G., Lin A.L. (1971) "Best linear unbiased distribution and extrapolation of economic time series by related series". *The review of economics and statistics*. Vol. 53, pages 471-476.

I.N.E. (1993) *Contabilidad Nacional Trimestral de España, metodología y series*.

Melis Maynar F. (1990) "La estimación del ritmo de variación en series económicas" *Estadística Española* Vol. 33 Nº 126 pages 7-58.

Melis Maynar F. (1989) "Sobre la hipótesis de componentes y la extracción de la señal de coyuntura sin previa desestacionalización" *Revista Española de Economía* Vol 6 Nº 1 y 2.

Liu L., Hudak, G. (1992) *Forecasting and time series analysis using the SCA statistical system*. Scientific computing associates. Vol. 1.

Sanz R. (1981) *Métodos de desagregación temporal de series económicas*. Banco de España. Servicios de Estudios. Estudios Económicos nº 22.

SAS Inst. i. (1988) *SAS/IML User's Guide 6.03 Edition*.

# UN MODELO DE CLASES DE CONTAMINACIONES EN TEORIA DE LA CREDIBILIDAD

EMILIO GÓMEZ DÉNIZ  
FRANCISCO JOSÉ VÁZQUEZ POLO  
NICANOR GUERRA QUINTANA  
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria.

## 1. INTRODUCCIÓN

Este trabajo se encuadra en el marco de los *seguros generales* utilizando el sistema de *tarificación a posteriori* dentro del modelo de *Teoría del Riesgo Colectivo* y considerando el proceso *estacionario*, lo que significa no dependiente del tiempo físico.

Desde el punto de vista matemático los seguros generales tienen por objeto aquellos seguros distintos de los de vida; en el marco legal español: accidentes, enfermedades, aeronaves, etc. Utilizar el sistema de tarificación a posteriori implica adoptar una concepción bayesiana por la que se van actualizando las tarifas a medida que se incorpora nueva información (proceso bayesiano de aprendizaje). Por último, situarnos en el modelo colectivo de riesgo conlleva el hecho de que interviene como un todo la colectividad de los asegurados, frente al modelo individual que se fija en el riesgo correspondiente a cada póliza o asegurado.

En este trabajo consideraremos que el proceso de aprendizaje por parte del actuario le va a servir para identificar una distribución a priori del parámetro de la distribución de reclamaciones (por ejemplo gamma). Asumiendo que el número de reclamaciones es poissoniano podemos desarrollar el cálculo de la prima a posteriori.

Sin embargo, es poco frecuente (ver Klugman(1992)), encontrarse con un estudio de la variación en el valor de esta prima cuando el conocimiento de la distribución a priori no es completo. En particular estudiaremos cómo se comporta la prima a posteriori cuando se admite cualquier distribución a priori "parecida" a una inicial gamma en la que el actuario tiene cierta seguridad. Hoy día el análisis bayesiano robusto permite hacer un estudio como el que proponemos, en el que el término "parecido" aquí lo asumimos en el sentido de clases de contaminaciones.

## 2. APROXIMACIÓN AL CÁLCULO DE PRIMA UTILIZANDO FUNCIONES DE PÉRDIDAS

Adoptamos la metodología utilizada por Heilmann(1989) para el que la prima  $P$  se obtiene minimizando la pérdida esperada en que la compañía aseguradora incurre cuando elige como prima  $P$  y se produce el resultado aleatorio  $X$ , esto es  $P$  es el valor que minimiza

$$\int_x L(x, P) f(x/\theta) dx$$

siendo  $f(x/\theta)$  la función de densidad del número de reclamaciones o bien de la cantidad monetaria de reclamaciones y  $L(x, P)$  la pérdida que suponen  $x$  y  $P$ <sup>1</sup>.

Cuando se usan pérdidas cuadráticas,  $L(x, P) = (x - P)^2$ , obtenemos el principio de prima neta,  $P(\theta) = E[X]$ . Debido a factores de naturaleza objetiva y subjetiva que influyen en el riesgo, el parámetro  $\theta$  podemos considerarlo aleatorio, lo que equivale a admitir que la cartera se compone de sub-carteras homogéneas. Si consideramos que el proceso de aprendizaje del actuario le permite asignar una distribución a priori  $\pi_0(\theta)$  al parámetro  $\theta$ , la prima a posteriori se define por ser el número real,  $P^*(\theta)$ , que minimiza

$$\int_{\Theta} L[P(\theta), P^*(\theta)] \pi_0(\theta/x) d\theta$$

en donde  $\pi_0(\theta/x)$  es la distribución a posteriori de  $\Gamma$ .

Bajo pérdidas cuadráticas se obtiene como expresión para la prima a posteriori

$$P^*(\theta) = \int [\pi_0(\theta/x) \int x f(x/\theta) dx] d\theta \quad (1)$$

Por ejemplo, como resulta habitual en la literatura actuarial consideremos que la distribución del número de reclamaciones  $f(x/\theta)$  es Poisson con parámetro  $\theta$ ,  $\theta \in (0, \infty)$ ; la distribución a priori del parámetro  $\theta$ , es gamma con parámetros  $a$  y  $b$ . En este caso, la distribución posterior de  $\theta$ , dada una muestra  $x_1, x_2, \dots, x_n$  es  $Ga(a+n, b+nx)$

La prima a posteriori es, de (1):

$$P^*(\theta) = \frac{b + n\bar{x}}{a + n}$$

### 3. CÁLCULO DE LA PRIMA EN UN MODELO DE CLASES DE CONTAMINACIÓN.

Parece evidente que la distribución a priori sobre  $\theta$  debe reflejar de manera adecuada sus creencias iniciales sobre  $\theta$ ; ahora bien el actuario más bien se sentirá más o menos cómodo con una determinada densidad pero desde luego estaría dispuesto a admitir cualquier otra densidad que le proporcione la misma confortabilidad, en cuanto que refleje con la misma adecuación sus impresiones sobre  $\theta$ . Lo que planteamos es un análisis usual en el que no se considere una única densidad, sino que se admitan todas las densidades que tengan determinadas características defendibles por el actuario ( como pueden ser el carácter unimodal ) y que representen adecuadamente sus creencias. Una de las técnicas habituales en el sentido anterior es denominada *clases de contaminación*.

<sup>1</sup> Obviamente la integral será sustituida por suma cuando la variable aleatoria  $X$  sea discreta.

nes (Sivaganesan y Berger(1989), entre otros). Brevemente, la metodología consiste en considerar que la distribución a priori de  $\theta$  pertenece a la clase

$$\Gamma = \{\pi(\theta) = (1 - \varepsilon)\pi_0(\theta) + \varepsilon q(\theta) / q \in D; \varepsilon \in [0, 1]\}$$

Esto significa que se asume cierta confianza sobre  $\pi_0$ , tanta como  $(1 - \varepsilon) \times 100\%$  pero que se está dispuesto a admitir cualquier otra densidad “parecida” a  $\pi_0$  pero algo perturbada (mediante  $q$ , usualmente llamada *contaminación*). En concreto, si la densidad a priori es unimodal (por ejemplo gamma con parámetros  $a$  y  $b$ ) parece evidente que cualquier otra densidad a priori que el actuario considere también debería de serlo, puesto que la unimodalidad es una propiedad fácilmente perceptible. Es por ello que tomaremos  $D$  de la siguiente forma:

$$D = \{\text{Dens. unimodales y con la misma moda, } \theta_0, \text{ que } \pi_0\} \quad (3)$$

El caso en el que estamos interesados es el siguiente. Puesto que la prima a posteriori sabemos que es una media a posteriori; aquella  $P^*$  que minimiza

$$\rho(x) = \int L(P, P^*) \pi_0(\theta / x) d\theta$$

Nuestro interés se centra en admitir no una única densidad a priori sino toda una clase y sobre esta clase soporte de densidades calcular cuál sería la menor y la mayor prima que debería cargarse por parte del actuario. Para el cálculo de ello es fundamental el hecho de ver que estos extremos se alcanzan sobre una subclase de  $\Gamma$ , que es:

$$\Gamma_1 = \{(1 - \varepsilon)\pi_0 + \varepsilon q(\theta) / q \sim \text{Unif}(\theta_0, \theta_0 + z) \text{ o } \text{Unif}(\theta_0 - z, \theta_0), z > 0\}$$

Para ello nos basaremos en el siguiente resultado.

### Teorema (Sivaganesan y Berger(1989))

Sea  $\rho^\pi(x)$  el valor esperado posterior de  $g(\theta)$  con respecto a la priori  $\pi$ . Entonces, para  $\Gamma$  y  $\Gamma_1$  como las anteriores,

$$\sup_{\pi \in \Gamma} \rho^\pi(x) = \sup_{\pi \in \Gamma_1} \rho^\pi(x) = \sup_z \frac{A_0 + H^g(z)}{A + H_0(z)}$$

$$\inf_{\pi \in \Gamma} \rho^\pi(x) = \inf_{\pi \in \Gamma_1} \rho^\pi(x) = \inf_z \frac{A_0 + H^g(z)}{A + H_0(z)}$$

donde  $A = (1 - \varepsilon)m(x/\pi_0)/\varepsilon$ ,  $A_0 = A\rho^\pi(x)$ ,  $m(x/\pi_0)$  es la densidad predictiva de  $x$  dada  $\pi_0$  mientras que  $H^g(z)$  y  $H_0(z)$  vienen dadas por:

$$H^g(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} \int_{\theta_0}^{\theta_0+z} g(\theta) f(x/\theta) d\theta & , \text{ si } z \neq 0 \\ g(\theta_0) f(x/\theta_0) & , \text{ si } z=0 \end{cases}$$

En nuestro caso  $g(\theta)=\theta$ , y cuando  $g=1$ , la función  $H^g$  se denota  $H_\theta$ .

#### 4. MODELO POISSON-GAMMA

Supongamos ahora que  $\pi_\theta(\theta)$ , la distribución a priori del parámetro  $\theta$ , pertenezca a la clase dada por (2), siendo  $D$  de la forma dada por (3). En este caso  $\pi(\theta)$  es de la forma dada por (4); esto es:

$$\pi(\theta) = (1-\varepsilon) \frac{a^b}{\Gamma(b)} \theta^{b-1} e^{-a\theta} + \varepsilon \frac{1}{\beta - \alpha}$$

donde  $(\alpha, \beta) = (\theta_0, \theta_0+z)$  o bien  $(\alpha, \beta) = (\theta_0-z, \theta_0)$ , dependiendo de cada problema particular. La distribución posterior es:

$$\begin{aligned} \pi(\theta / \mathbf{X}) & \propto f(\mathbf{x} / \theta) \pi(\theta) = \\ & = \theta^{\sum_{i=1}^n x_i} e^{-n\theta} \left[ (1-\varepsilon) \frac{a^b}{\Gamma(b)} \theta^{b-1} e^{-a\theta} + \varepsilon \frac{1}{\beta - \alpha} \right] = \\ & = (1-\varepsilon) \text{Ga} \left[ a+n, b+n\bar{x} \right] + \varepsilon \frac{\theta^{\sum_{i=1}^n x_i} e^{-n\theta}}{\int_{\alpha}^{\beta} \theta^{\sum_{i=1}^n x_i} e^{-n\theta} d\theta} \end{aligned}$$

El valor inferior y superior para la prima a posteriori en el modelo contaminado resulta:

$$\begin{aligned} P_{\text{CONT}}^{*\text{inf}}(\theta) &= (1-\varepsilon) \frac{b+n\bar{x}}{a+n} + \varepsilon \frac{\int_{\theta_0}^{\theta_0+z_{\text{inf}}} \theta^{\sum x_i+1} e^{-n\theta} d\theta}{\int_{\theta_0}^{\theta_0+z_{\text{inf}}} \theta^{\sum x_i} e^{-n\theta} d\theta} \\ P_{\text{CONT}}^{*\text{sup}}(\theta) &= (1-\varepsilon) \frac{b+n\bar{x}}{a+n} + \varepsilon \frac{\int_{\theta_0}^{\theta_0+z_{\text{sup}}} \theta^{\sum x_i+1} e^{-n\theta} d\theta}{\int_{\theta_0}^{\theta_0+z_{\text{sup}}} \theta^{\sum x_i} e^{-n\theta} d\theta} \end{aligned}$$



## 5. EJEMPLO NUMÉRICO

Consideremos una compañía aseguradora que en un determinado período observa que en una clase homogénea de seguro de automóviles el número de siniestros tiene una distribución de Poisson con parámetro  $\theta$ . El actuario, de experiencias anteriores, conoce que la media de reclamaciones,  $\theta$ , tiene una única frecuencia máxima (confía en un valor de 2), y por ello le asigna una distribución a priori gamma con parámetros 2 y 5. El actuario toma una muestra de  $n = 50$  contratos para los que observa las siguientes reclamaciones por contrato:

$$\{7, 8, 3, 3, 4, 6, 2, 9, 0, 7, 8, 7, 6, 5, 8, 3, 4, 0, 5, 6, 10, 7, 3, 0, 1, 2, 3, 1, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 6, 0, 6, 9, 7, 7, 4, 5, 2, 4, 5, 4, 6, 9, 3\}^2$$

La prima de credibilidad a posteriori es  $P^*(\theta) = 4.5$  reclamaciones. Los intervalos para la prima de credibilidad a posteriori y el rango de los mismos resultan:

**Cuadro 1. Variación de las primas en un modelo de clases a priori**

| Tamaño muestral | Grado de cont. | $Z_{\text{inf}}$ | $Z_{\text{sup.}}$ | Valor inferior para la prima | Valor superior para la prima | Rango de variación |
|-----------------|----------------|------------------|-------------------|------------------------------|------------------------------|--------------------|
| <b>n=50</b>     | 5%             | 2.52             | 3.60              | 4.49054                      | 4.50495                      | 0.01441            |
|                 | 10%            | 2.49             | 3.65              | 4.47905                      | 4.50993                      | 0.03088            |
|                 | 15%            | 2.46             | 3.67              | 4.46544                      | 4.51492                      | 0.04948            |
|                 | 20%            | 2.46             | 3.67              | 4.45393                      | 4.51989                      | 0.06596            |
|                 | 25%            | 2.42             | 3.74              | 4.43525                      | 4.52493                      | 0.08968            |
|                 | 30%            | 2.41             | 3.74              | 4.42011                      | 4.52992                      | 0.10981            |
|                 | 35%            | 2.4              | 3.8               | 4.40422                      | 4.53495                      | 0.13073            |

En el supuesto de que el coste medio por siniestro sea independiente del número de siniestros y que ascienda a 25000 U.M. LA PRIMA, SIN RECARGO DE SEGURIDAD, SERÁ:

$$a^* = 25000 \times 4.5 = 112500 \text{ u.m.}$$

Los intervalos de variación de la prima pura a posteriori serán:

<sup>2</sup> Se ha supuesto que el número de reclamaciones por contrato no puede ser superior a 10.

**Cuadro 2. Variación de la prima pura a cargar en un modelo de clases a priori.**

| <b>Tamaño muestral</b> | <b>Grado de cont.</b> | <b>Valor inferior a cargar</b> | <b>Valor superior a cargar</b> | <b>Rango de variación</b> |
|------------------------|-----------------------|--------------------------------|--------------------------------|---------------------------|
| <b>n=50</b>            | 5%                    | 112263.5                       | 112623.75                      | 360.5                     |
|                        | 10%                   | 111976.25                      | 112748.25                      | 772                       |
|                        | 15%                   | 111636                         | 112873                         | 1237                      |
|                        | 20%                   | 111348.25                      | 112997.25                      | 1649                      |
|                        | 25%                   | 110881.25                      | 113123.25                      | 2242                      |
|                        | 30%                   | 110502.75                      | 113248                         | 2745.25                   |
|                        | 35%                   | 110105.5                       | 113373.75                      | 3268.25                   |

## 6. COMENTARIOS FINALES

A la vista de los resultados podemos decir que los rangos para el nivel de credibilidad en el modelo utilizado se muestran bastante robustos. Robustez que depende sensiblemente del grado de creencia que sobre la densidad a priori tenga el actuario. Cuanto más pequeño es  $\epsilon$ , es decir cuanto más creencia tenga el actuario en su modelo a priori mayor robustez se garantiza. Cuanto más inseguro sobre su asignación a priori se muestre el actuario (cuanto mayor sea  $\epsilon$ ), más inestable será el modelo, luego con mayor precaución deberá tomar sus decisiones finales 1o.

## BIBLIOGRAFÍA

[1] BERGER, James O.: "Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis". Ed. Springer-Verlag. Second Edition, 1985.

[2] EICHENAUER, Jürgen; LEHN, Jürgen and RETRIG, Stefan: "A gamma-minimax result in credibility theory". Insurance: Mathematics and Economics North Holland 7, 1988, pp. 49-57.

[3] HEILMANN, Wolf-Rüdiger: "Risk management and insurance". Paper presented to the International Conference on "Structure Failure, Product Liability and Theoretical Insurance (SPT-3) in Vienna, 1989, pp. 10-12.

[4] HEILMANN, Wolf-Rüdiger: "Decision theoretic foundations of credibility theory". Insurance: Mathematics and Economics North Holland 8, 1989, pp. 77-95.

[5] KLUGMAN, Stuart A.: "Bayesian Statistics in Actuarial Science". Kluwer Academic Publisher, 1992.

[6] NIETO DE ALBA, Ubaldo y VEGAS ASENSIO, Jesús: “ Matemática Actuarial “.Fundación Mapfre Estudios. Instituto de Ciencias del Seguro. Colección Universitaria,1993.

[7] SIVAGANESAN, J. and BERGER, J. : “Ranges of posterior measures for priors with unimodal contaminations”. Technical Report # 86-41. January 1987.

[8] STRAUB, Erwin: “Non life-insurance mathematics”. Springer-Verlag. Association of Swiss Actuaries 1988. Academic Publisher,1992.



## NUEVA TECNICA NO JERARQUICA DE CLASIFICACION DE DATOS

HERNANDEZ LOPEZ, MONTSERRAT

LOPEZ MARTIN, LUIS JAVIER

Facultad de C. Económicas y Empresariales  
Universidad de La Laguna

### INTRODUCCION

Las técnicas de clasificación (Cluster Analysis) tienen como objetivo agrupar objetos en clases o clusters, internamente lo más homogéneos posible, de tal forma que los objetos pertenecientes a un cluster están más próximos entre sí que los pertenecientes a grupos diferentes.

En función de si se permite o no el solapamiento entre las clases resultantes, las técnicas de clasificación se dividen entre las no jerárquicas y jerárquicas, respectivamente. Dicho de otra forma, si existen al menos dos clases cuya intersección no es el conjunto vacío, se estará ante una técnica de clasificación no jerárquica; si la intersección de todas las clases entre sí generan conjuntos vacíos se hablará de técnicas de clasificación jerárquicas.

Así como las clases jerárquicas se forman a partir de un coeficiente de desemejanza que cumple la propiedad ultramétrica, las no jerárquicas pueden formarse a partir de cualquier coeficiente de desemejanza, aunque por consideraciones prácticas de interpretación de resultados, haya que transformar algunas de ellas mediante la utilización de los métodos subdominantes (Sánchez, M. (1978)).

Distintos métodos han seguido la vía de la jerarquización tales como el Método del Enlace Simple, del Enlace Completo, del Enlace Medio dentro de las clases, del Enlace Medio entre las clases, del Centroide y de Ward, entre otros - distinguiéndose en función de los procedimientos usados para definir la desemejanza entre los pares de objetos y en la forma de calcular la matriz de desemejanza entre los objetos. No tantos intentos se han realizado desde la perspectiva de la no jerarquización o métodos de recubrimiento, cuyo objetivo básico es recubrir el conjunto de objetos con una familia de clusters maximales.

Al analizar la Encuesta sobre El coste de la insularidad en Canarias, realizada por nosotros en 1992, en la que se recogían 157 variables, y considerarlas en el total de encuestas realizadas (400), nos encontramos con una matriz de información de unos 60000 datos. Esta ingente cantidad de datos, unido al interés del estudio por buscar analogías y diferencias entre los tipos de empresa definidos, nos condujo a que la técnica utilizada fuera la del Análisis Cluster.

El análisis descriptivo e inferencial de los datos que se realizó en una primera etapa, antes de realizar la aplicación del algoritmo propuesto en esta investigación, nos llevó a considerar inte-

resante el estudio de las 39 variables y el grupo de objetos definidos en el Anexo. En cuanto al grupo de objetos, conviene mencionar que se clasificaron las empresas según el sector de actividad económica al que pertenecieran (Agricultura, Industria, Construcción, Comercio, Turismo, y Otros Servicios) y según su tamaño, medido éste por el número de empleados (menos de 10 empleados, de 10 a 20 empleados, de 20 a 100 empleados y más de 100 empleados). Lógicamente, al cruzar los 6 sectores y los 4 tamaños definidos, el conjunto de tipos de empresa a estudiar sería de 24, pero en este caso sólo hemos considerado 19 porque no existían observaciones correspondientes a los 5 tipos de empresa excluidos (Construcción de menos de 10 empleados, de 10 a 20 empleados y de más de 100 empleados; Turismo de menos de 10 empleados y Otros Servicios de 10 a 20 empleados).

En este artículo, se presenta un algoritmo que busca los objetos más representativos de las clases resultantes, en la línea de la técnica ISODATA o del Método de las k-medias de Mac Queen, con el aspecto novedoso de enmarcarse bajo la no jerarquización.

Como posibles problemas abiertos en esta línea, está la construcción de algoritmos que sean computacionalmente rápidos y permitan hallar todos los clusters maximales del grafo de proximidad  $G_E = (V, E)$ , definido en el conjunto de objetos  $O$ , por una desemejanza  $D$  a un nivel prefijado  $E$ . Los métodos algorítmicos de recubrimiento están muy condicionados por los objetivos del estudio, las características intrínsecas de las medidas o atributos observados en los objetos, y por la desemejanza elegida para relacionar los objetos.

Antes de entrar en los objetivos del trabajo, mencionamos algunos conceptos básicos en clasificación como son los de "clase" o "cluster" y el de los "clusters que forman una partición":

**Definición 1.** Dados un conjunto de objetos  $O$ , una medida de desemejanza  $D$  y un nivel de desemejanza  $\epsilon > 0$  arbitrario, una clase o cluster sobre  $O$ , es un subconjunto maximal  $C$  de  $O$  tal que

$$\forall o_i, o_j \in C, D(o_i, o_j) \leq \epsilon$$

**Definición 2.** Dado un conjunto de  $k$  objetos  $\{o_1^*, o_2^*, \dots, o_k^*\}$ , reales o ficticios, representantes de sus clases, se pueden definir  $k$  clusters que forman una partición de  $O$ , cada uno caracterizado por un objeto  $o_i^*$ , como

$$C(o_i^*) = \{ o_j \in O / D(o_j, o_i^*) \leq D(o_j, o_s^*), \forall s, 1 \leq s \leq k \}$$

## OBJETIVOS

Construir un algoritmo, computacionalmente rápido, que permita encontrar los objetos representativos de clusters maximales, resultantes de establecer una medida de desemejanza apropiada entre los objetos establecidos (19) y que estén caracterizados por los valores que toman las 39 variables definidas.

## METODOLOGIA

Ante todo lo anterior, uno de los problemas que necesitó solución fue la elección de la medida de desemejanza apropiada entre los objetos de estudio. Al estar incluidas tanto variables cualitativas como cuantitativas, se pensó que una medida idónea era la distancia de Hamming.

**Definición 3.** Para todo par de objetos  $(o_i, o_j) \in O \times O$ , la distancia de Hamming se define como el "número de variables que toman valores distintos en los dos objetos" y se denota como  $D(o_i, o_j)$ . Clusters a nivel de desemejanza 0 agrupan objetos que toman los mismos valores respecto de todas las variables.

En el análisis exploratorio de los datos, se consideró de interés construir una graduación de clusters a desemejanzas  $0, 1, 2, \dots, l$ , con  $l$  pequeño, para ver el engrosamiento de los grupos o clusters en cada etapa y examinar las variables que son poco útiles cuando se pretenden obtener buenas clasificaciones.

Por convenio, cuando la desemejanza de un objeto  $o_j$  es igual con respecto a varios objetos  $o_i$ , se asignan al cluster del objeto con menor subíndice.

## ALGORITMO QUE CONSTRUYE OBJETOS REPRESENTATIVOS DE LOS CLUSTERS

Las técnicas algorítmicas más usuales de este apartado son de dos tipos, según se conozca o no el número de clusters que se desean hallar. Cuando este número es conocido, por ejemplo  $k$ , las técnicas más habituales son las del tipo  $k$ -medias.

Las técnicas del tipo  $k$ -medias (ver Anderberg (1973), Hartigan (1975), Sánchez García (1978)) parten inicialmente de  $k$  clusters (o de  $k$ -objetos representativos de los  $k$ -clusters), para iterativamente calcular, en forma progresiva, los  $k$ -objetos más representativos de los clusters (o los  $k$ -clusters que mejor configuran los  $k$ -objetos representativos) y los  $k$ -clusters que determinan los  $k$ -objetos (o los  $k$ -objetos más representativos de los clusters) hasta obtener la convergencia de este proceso.

Si denotamos por  $C_i$  un cluster genérico, el objeto más representativo de  $C_i$  es  $o_i^*$  si  $o_i^*$  minimiza la suma de las desemejanzas a los objetos de  $C_i$ .

Conocidos los  $k$ -objetos más representativos de los clusters,  $o_1^*, o_2^*, \dots, o_k^*$ , la clase o cluster  $C_j$  se forma como

$$C_j = C_j(o_j^*) = \{ o_i / D(o_i, o_j^*) \leq D(o_i, o_s^*) \} \quad 1 \leq s \leq k$$

La convergencia se alcanza cuando se obtienen los mismos clusters en dos iteraciones consecutivas.

---

El problema que plantean este tipo de técnicas es el carácter de mínimo local de la solución, hecho que obliga a ampliar la técnica hasta obtener una convergencia más general, de tipo global.

Cuando no se conoce de antemano el número de clases o clusters, el proceso de buscar representantes es más complejo. Expondremos seguidamente una técnica de clasificación cuyos fundamentos son similares a la tradicional técnica ISODATA (ver Anderberg (1973), Sánchez García (1978)), aunque presenta, como contenido original, la posibilidad de que un elemento pueda pertenecer a más de una clase, es decir, la posibilidad de que exista solapamiento.

El algoritmo es, paso a paso, como sigue:

Paso 1: Se parte de los  $n$  objetos, como representativos de los  $n$  clusters iniciales y se elige  $\epsilon > 0$ ,  $p_1 = (\epsilon+1)/\epsilon$ ,  $p_2 = \epsilon/(\epsilon-1)$  y  $k \geq 2$ .

Paso 2: A cada objeto  $o_j$ , se le asigna el cluster  $C_{ij} = C_i(o_j)$  que es el conjunto de los  $o_i$  tal que  $D(o_j, o_i) \leq \epsilon$ , prescindiendo de los grupos que no sean maximales.

Paso 3: Si el número de clusters hallados en el paso 2 es  $n$ , se hace  $\epsilon = p_1 E$  regresando al paso 2. Si el número es menor que  $n/k$  se toma como valor de  $E$ ,  $(1/p_2)\epsilon$  y se vuelve el paso 2; en otro caso, ir al paso 4.

Paso 4: Asignar a cada cluster  $C_{ij}$ , el objeto  $o_j^*$  que sea más representativo, es decir, el objeto  $o_j^*$  que minimice la suma de las desemejanzas de los restantes elementos del cluster a dicho objeto.

Paso 5: Asignar cada objeto  $o_j$  a todos los clusters que tengan por objetos representativos  $o_j^*$ , siempre que se verifique que  $D(o_j, o_j^*) \leq \epsilon$ .

Paso 6: Fundir en un único cluster todos aquéllos que no se hayan fundido previamente, y para los que la desemejanza entre sus objetos representativos es menor o igual que  $\epsilon$ . Si no se produce fusión alguna, el algoritmo termina; en caso contrario, ir al paso 7.

Paso 7: Hallar los objetos más representativos de los nuevos clusters, y asignar cada objeto a los clusters cuyo objeto más representativo permanezca a una desemejanza menor o igual que  $E$ . Los objetos que no cumplen esta condición quedan sin asignar, formando cada uno de ellos un nuevo cluster. En el caso de que ningún objeto quede sin asignar, el algoritmo para; en otro caso, se vuelve al paso 5.

La convergencia del algoritmo es consecuencia de que los clusters que se han fundido alguna vez, no pueden volver a hacerlo, y por tanto, los elementos de estos clusters no pueden disminuir.



## RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Se muestran aquí las conclusiones más relevantes de la aplicación del algoritmo, propuesto anteriormente, a las respuestas dadas por los empresarios al cuestionario sobre el Coste de la Insularidad.

Antes de comenzar, es preciso hacer algunas observaciones sobre las limitaciones del conjunto de datos que sirvió de muestra para la aplicación del algoritmo.

El cuestionario se realizó a empresarios de todas las islas, y a partir de sus respuestas individuales, se obtuvieron los valores que, para cada una de las variables consideradas, tomaban los 19 elementos.

Según Sánchez Padrón (1981) “hay que considerar, por otro lado, los problemas con que se encuentra cualquier clase de aproximación global a la economía canaria. A las dificultades propias del marco sectorial clásico, sin contenido conceptual específico, para facilitar dicho tipo de visión sobre cualquier sistema económico, hay que añadir que una de las características más significativas de la estructura económica canaria es su extraversión y su limitada integración económica o desarticulación. (...). Las consecuencias de esta desarticulación son esenciales. En una economía auto-centrada estructurada, el progreso que aparece en un punto cualquiera se propaga al resto del sistema a través de múltiples mecanismos multiplicadores. En la economía extravertida, sin embargo, el efecto multiplicador se ve limitado y transferido al exterior. En nuestro caso la desarticulación y el funcionamiento de los circuitos autónomos se evidencia claramente cuando consideramos las formas sui-génerez en que se manifiesta la crisis económica en Canarias: una paradójica coexistencia de buenos índices de producción agrícola e incrementos en las entradas de turistas e importaciones, con altos índices de paro y descenso en la actividad del sector de construcción”.

Por lo tanto, las conclusiones derivadas del análisis deben tomarse con cierta cautela.

Del análisis realizado se pueden extraer dos tipos de resultados: Los derivados de la observación directa de la matriz de valores de las variables y los obtenidos a partir de la matriz de distancias y de la aplicación del algoritmo sobre esta matriz.

En cuanto a los primeros, se pueden destacar a su vez, los referidos a los aspectos sobre los que más influye la insularidad (con la aclaración de que las respuestas expuestas se dieron en más de un 20% de los casos), y los referidos a los demás aspectos, observados por sectores.

### a) Aspectos sobre los que más influye la insularidad

1. En general, y con la única excepción de las “Empresas dedicadas a la Industria con menos de 10 empleados”, el coste de transporte es citado como el aspecto que más se ve influido por la insularidad.
2. Sólo las “Empresas dedicadas a Otros Servicios de menos de 10 empleados” y las “Empresas dedicadas al Turismo de 20 a 100 empleados” mencionaron los costes de los viajes, como primer factor.

- 
3. El tamaño de mercado fue apuntado, también en primer lugar, por los siguientes tipos de empresas: “Empresas dedicadas a la Industria de menos de 10 empleados”, “Empresas dedicadas a la Industria de 20 a 100 empleados”, “Empresas dedicadas al Comercio de 10 a 20 empleados, de 20 a 100 empleados y de más de 100 empleados” y “Empresas dedicadas a Otros Servicios de menos de 10 empleados y de 20 a 100 empleados”.
  4. La organización de mercado, como primer aspecto, fue citada, únicamente, por las “Empresas dedicadas a Otros Servicios de menos de 10 empleados”.
  5. Un sólo tipo, las “Empresas dedicadas a la Industria con menos de 10 empleados”, citó, en primer lugar, al desarrollo social y cultural.

b) Aspectos comunes por sectores

1. Empresas dedicadas a la Agricultura

- 1.1 De este sector, dicen tener problemas con el transporte, las empresas agrícolas de 10 a 20 empleados y las de más de 100 empleados.
- 1.2 El porcentaje medio de las compras que realizan las empresas agrícolas procedentes del exterior de la isla en la que se ubican no supera, en ningún caso, el 50 %.
- 1.3 Todas las empresas de este sector apuntan que la insularidad impide la inversión industrial y sus proyectos.

2. Empresas dedicadas a la Industria

- 2.1 Las empresas industriales de más de 20 empleados (entre 20 y 100 y más de 100) dicen tener problemas con el transporte.
- 2.2 Los porcentajes medio de compras realizadas en la Península y en la propia isla se encuentran entre 10 y 50 %. En cuanto a las ventas, no supera el 50 % de las mismas lo destinado a otra isla mientras que menos del 10 % se envía al extranjero.
- 2.3 El porcentaje medio de los costes de transporte por venta de mercancía es superior al 75 %.
- 2.4 Todas las empresas industriales consideran que la insularidad repercute desfavorablemente sobre los proyectos de inversión industrial.

3. Empresas dedicadas a la Construcción

- 3.1 Consideran que tienen problemas con el transporte.

3.2 Todos los porcentajes medios de las compras realizadas, independientemente del lugar, se sitúan entre el 10 y el 50 %.

3.3 Afirman, en un 75 %, que la insularidad actúa de forma negativa sobre los proyectos de inversión turística y sobre la infraestructura existente.

#### 4. Empresas dedicadas al Comercio

4.1 Sólo las que tienen de 20 a 100 empleados responden afirmativamente a la pregunta de si tienen problemas con el transporte.

4.2 El porcentaje medio de las compras realizadas en otra isla es menor al 10 % y el realizado en la Península se sitúa entre el 10 y el 50 %. En cuanto a las ventas, el porcentaje medio de éstas procedentes de la Península también se localiza, en todas las empresas consideradas, entre el 10 y el 50 %.

4.3 El porcentaje medio de los costes de transporte por compra de mercancía lo estiman en un 50 %.

4.4 Todas las empresas de este sector creen que la insularidad obstaculiza los proyectos de inversión industrial, con altos porcentajes.

#### 5. Empresas dedicadas al Turismo

5.1 Sólo las empresas turísticas de 20 a 100 empleados dicen no tener problemas con el transporte.

5.2 También las empresas de 20 a 100 empleados son las que destinan más del 90 % de las ventas a la Península.

5.3 Con un mayor porcentaje, las empresas de más de 100 empleados creen que la insularidad frena la infraestructura existente; las empresas de 20 a 100 empleados arrojan ese mayor porcentaje sobre los proyectos de inversión turística.

#### 6. Empresas dedicadas a Otros Servicios

6.1 Todas las empresas de este sector consideran que tienen problemas con el transporte.

6.2 Más del 90 % de las compras realizadas por las empresas de más de 100 empleados proceden del extranjero. Entre el 50 y el 90 % de las ventas de las empresas de menos de 10 empleados y de más 100 empleados, se destinan a la propia isla.

---

6.3 El porcentaje medio de los costes de transporte por compra de mercancía se encuentra entre el 25 y el 75 %.

6.4 En lo referido a los aspectos sobre los que repercute negativamente la insularidad, las empresas de menos de 10 empleados señalan los proyectos de inversión industrial y la infraestructura existente, las empresas de 20 a 100 empleados se decantan con un mayor porcentaje por los proyectos de inversión turística, y las de más de 100 empleados citan, generalmente, a la infraestructura existente.

En cuanto al segundo grupo de resultados y según la matriz de distancias expuesta en el Anexo, cabe destacar los siguientes:

- a) Las empresas más comunes entre sí son las dedicadas a la Agricultura de menos de 10 empleados y las dedicadas al Turismo de 10 a 20 empleados (distancia 8) y las más diferentes las dedicadas al Turismo de 20 a 100 empleados y las dedicadas a Otros Servicios de menos de 10 empleados (distancia 26).

En cuanto a las más comunes, y teniendo en cuenta la matriz de datos, las características que hacen que esos dos tipos de empresa se asemejen son los porcentajes de compras y ventas por destino. Es decir, ambas compran del 10 al 50 % en la Península y en el extranjero, y destinan del 50 al 90 % de sus ventas a la propia isla, del 10 al 50 % a otra isla y menos del 10 % a la Península y al extranjero. Estos idénticos porcentajes de compras y ventas de inputs y outputs pueden explicar, en alguna medida, su similitud en términos de distancia.

Respecto a las más diferentes, esos mismos porcentajes son completamente distintos, con lo que no se ven influidos por la insularidad de igual modo, empezando por el hecho de que las de Turismo no dicen tener problemas con el transporte mientras que las de Otros Servicios sí se ven afectados por ese tipo de problemas.

- b) Las empresas que tienen más variables en común con todas son las dedicadas a la Agricultura de menos de 10 empleados con una suma total de desemejanzas respecto al resto de 242, mientras que las menos afín con el resto son las dedicadas a Otros Servicios de menos de 10 empleados, con una suma total de desemejanzas de 356.
- c) El algoritmo que construye objetos representativos de los clusters se ejecutó para las medidas de desemejanzas comprendidas entre la mínima (8) y la máxima (26). Para elegir la medida de desemejanza más apropiada, un primer criterio sería estudiar los resultados obtenidos con la desemejanza media (16.251), la mediana (16) y la moda (17).

De acuerdo con dichos resultados, y como al nivel  $E = 18$ , todos los objetos se fundían en una sola clase, la clasificación que proponemos fue la inmediatamente anterior, es decir al nivel de desemejanza de  $E = 17$  y que es la siguiente:

Cluster 1: {1,2,3,5,6,7,9,10,11,12,13,14,19}

Representante: 1

Cluster 2: {15}

Representante: 15

Cluster 3: {16}

Representante: 16

Cluster 4: {4,6,8,10}

Representante: 4

Cluster 5: {17}

Representante: 17

Cluster 6: {18}

Representante: 18

Cabe destacar, en primer lugar, que las Empresas dedicadas al Turismo de más de 20 empleados (objetos 15 y 16), las Empresas dedicadas a Otros Servicios de menos de 10 empleados, menos afín de todos los tipos de empresas (objeto 17) y las Empresas dedicadas a Otros Servicios de 20 a 100 empleados (elemento 18) no se han unido a ningún otro tipo de empresas.

En segundo lugar, es de mencionar que se forman dos clusters con más de un elemento: los clusters número 1 y número 4 con las Empresas dedicadas a la Agricultura de menos de 10 empleados (objeto 1) y las Empresas dedicadas a la Agricultura de más de 100 empleados (objeto 4) como sus objetos representativos, respectivamente. En el caso del cluster número 1, se observa que sólo las Empresas dedicadas a la Agricultura de más de 100 empleados (objeto 4), las Empresas dedicadas a la Industria de menos de 10 empleados (objeto 8), las Empresas dedicadas al Turismo de 20 a 100 empleados (objeto 15), las Empresas dedicadas al Turismo de más de 100 empleados (objeto 16), las Empresas dedicadas a Otros Servicios de menos de 10 empleados (objeto 17) y las Empresas dedicadas a Otros Servicios de 20 a 100 empleados (objeto 18), de los 19 tipos en estudio, no se han unido a las Empresas dedicadas a la Agricultura de menos de 10 empleados (objeto 1), ya que o están formando una única clase (objetos 15, 16, 17 y 18) o se han unido al otro cluster resultante número 4 (objetos 4 y 8).

## REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- ANDERBERG, M.R. (1973) "Cluster analysis for applications". Academic Press. New York.
- BAILEY, K.D. (1994) "Typologies and taxonomies. An introduction to classification techniques". Sage Publications, Inc. London.
- HARTIGAN, J.A. (1975) "Clustering algorithms". J. Wiley and Sons. New York.
- JARDINE, N. y SIBSON, R. (1971) "Mathematical taxonomy". J. Wiley and Sons. New York.

SANCHEZ GARCIA, M. (1978) "Métodos estadísticos aplicados al tratamiento de datos". CCVC. Madrid.

SANCHEZ PADRON, M. (1981) "Canarias ante el cambio", pp. 295-314. Instituto de Desarrollo Regional. Universidad de La Laguna.

## ANEXO

### Matriz de distancias

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 0  | 11 | 10 | 20 | 10 | 11 | 14 | 17 | 12 | 9  | 12 | 10 | 13 | 8  | 18 | 18 | 17 | 19 | 13 |
| 11 | 0  | 11 | 18 | 15 | 14 | 16 | 14 | 13 | 16 | 15 | 13 | 18 | 11 | 19 | 13 | 19 | 22 | 17 |
| 10 | 11 | 0  | 19 | 14 | 16 | 15 | 15 | 9  | 12 | 29 | 12 | 13 | 11 | 21 | 14 | 19 | 18 | 18 |
| 20 | 18 | 19 | 0  | 22 | 16 | 20 | 16 | 20 | 16 | 20 | 20 | 17 | 17 | 19 | 19 | 20 | 21 | 19 |
| 10 | 15 | 14 | 22 | 0  | 17 | 12 | 13 | 12 | 15 | 14 | 10 | 11 | 16 | 20 | 22 | 17 | 19 | 21 |
| 11 | 14 | 16 | 16 | 17 | 0  | 21 | 17 | 15 | 16 | 12 | 17 | 14 | 12 | 20 | 15 | 22 | 17 | 16 |
| 14 | 16 | 15 | 20 | 12 | 21 | 0  | 10 | 16 | 17 | 15 | 12 | 15 | 18 | 23 | 19 | 17 | 15 | 17 |
| 17 | 14 | 15 | 16 | 13 | 17 | 10 | 0  | 11 | 18 | 16 | 15 | 16 | 14 | 23 | 19 | 17 | 15 | 17 |
| 12 | 13 | 9  | 20 | 12 | 15 | 16 | 11 | 9  | 14 | 18 | 13 | 12 | 12 | 20 | 13 | 19 | 13 | 17 |
| 9  | 16 | 12 | 16 | 15 | 16 | 17 | 18 | 14 | 0  | 17 | 11 | 12 | 13 | 19 | 19 | 18 | 20 | 11 |
| 12 | 15 | 20 | 20 | 14 | 12 | 15 | 16 | 18 | 17 | 0  | 14 | 15 | 17 | 19 | 20 | 17 | 19 | 16 |
| 10 | 13 | 12 | 20 | 10 | 17 | 12 | 15 | 13 | 11 | 14 | 0  | 9  | 14 | 16 | 22 | 17 | 17 | 15 |
| 13 | 18 | 13 | 17 | 11 | 14 | 15 | 16 | 12 | 12 | 15 | 9  | 0  | 13 | 21 | 21 | 22 | 12 | 14 |
| 8  | 11 | 11 | 17 | 16 | 12 | 18 | 14 | 12 | 13 | 17 | 14 | 13 | 0  | 20 | 17 | 21 | 16 | 9  |
| 18 | 19 | 21 | 19 | 20 | 20 | 23 | 23 | 20 | 19 | 19 | 16 | 21 | 20 | 0  | 20 | 26 | 21 | 20 |
| 18 | 13 | 14 | 19 | 22 | 15 | 20 | 19 | 13 | 19 | 20 | 22 | 21 | 17 | 20 | 0  | 22 | 18 | 31 |
| 17 | 19 | 19 | 20 | 17 | 22 | 15 | 17 | 19 | 18 | 17 | 17 | 22 | 21 | 26 | 22 | 0  | 24 | 24 |
| 19 | 22 | 18 | 21 | 19 | 17 | 16 | 15 | 13 | 20 | 19 | 17 | 12 | 16 | 21 | 18 | 24 | 0  | 17 |
| 13 | 17 | 18 | 19 | 21 | 16 | 17 | 17 | 17 | 11 | 16 | 15 | 14 | 9  | 20 | 21 | 24 | 17 | 0  |

### DEFINICION DE LOS OBJETOS

- 1 Empresas dedicadas a la Agricultura de menos de 10 empleados
- 2 Empresas dedicadas a la Agricultura de 10 a 20 empleados
- 3 Empresas dedicadas a la Agricultura de 20 a 100 empleados
- 4 Empresas dedicadas a la Agricultura de más de 100 empleados

- 5 Empresas dedicadas a la Industria de 10 a 20 empleados
- 6 Empresas dedicadas a la Industria de 20 a 100 empleados
- 7 Empresas dedicadas a la Industria de más de 100 empleados
- 8 Empresas dedicadas a la Industria de menos de 10 empleados
- 9 Empresas dedicadas a la Construcción de 20 a 100 empleados
- 10 Empresas dedicadas al Comercio de menos de 10 empleados
- 11 Empresas dedicadas al Comercio de 10 a 20 empleados
- 12 Empresas dedicadas al Comercio de 20 a 100 empleados
- 13 Empresas dedicadas al Comercio de más de 100 empleados
- 14 Empresas dedicadas al Turismo de 10 a 20 empleados
- 15 Empresas dedicadas al Turismo de 20 a 100 empleados
- 16 Empresas dedicadas al Turismo de más de 100 empleados
- 17 Empresas dedicadas a Otros Servicios de menos de 10 empleados
- 18 Empresas dedicadas a Otros Servicios de 20 a 100 empleados
- 19 Empresas dedicadas a Otros Servicios de más de 100 empleados

## DEFINICION DE LAS VARIABLES

X1 Problemas con el transporte

Recorrido: 0,1

X2 Porcentaje de compras procedentes de la propia isla

X3 Porcentaje de compras procedentes de otra isla

X4 Porcentaje de compras procedentes de la Península

X5 Porcentaje de compras procedentes del extranjero

X6 Porcentaje de ventas destinadas a la propia isla

X7 Porcentaje de ventas destinadas a otra isla

X8 Porcentaje de ventas destinadas a la Península

X9 Porcentaje de ventas destinadas al extranjero

Recorrido X2 - X9: 1,2,3,4

X10 Costes de transporte por compra de mercancía

X11 Costes de transporte por venta de mercancía

X12 Repercusión desfavorable de la insularidad en proyectos de inversión industrial

X13 Repercusión desfavorable de la insularidad en proyectos de inversión turística

X14 Repercusión desfavorable de la insularidad en la infraestructura existente

Recorrido X10 - X14: 1,2,3. 1 si el elemento toma un valor anterior al percentil 25,

---

2 si estaba en el intervalo intercuartílico, y 3 si superaba el tercer cuartil.

X15-X19 Priorización, de mayor a menor, dando valores desde 1 (X15) al más importante hasta 5 (X19) al menos importante del coste del transporte de mercancías

X20-X24 Priorización, de mayor a menor, dando valores desde 1 (X20) al más importante hasta 5 (X24) al menos importante del coste de los viajes

X25-X29 Priorización, de mayor a menor, dando valores desde 1 (X25) al más importante hasta 5 (X29) al menos importante del tamaño de mercado

X30-X34 Priorización, de mayor a menor, dando valores desde 1 (X30) al más importante hasta 5 (X34) al menos importante de la organización del mercado

X35-X39 Priorización, de mayor a menor, dando valores desde 1 (X35) al más importante hasta 5 (X39) al menos importante del desarrollo social y cultural

Recorrido X15 - X39: 0,1



# UN NUEVO USO DE LAS TRES ESTIMACIONES SUBJETIVAS DEL PERT

HERRERÍAS PLEGUEZUELO, Rafael

Facultad de C.C.E.E. y E.E.

Universidad de Granada

## 1. INTRODUCCIÓN

Aunque en la década de los 80 se producen un gran número de generalizaciones de las distribuciones beta de primera y segunda especie (véase McDonald y Xu (1995)), el modelo beta que sigue siendo utilizado en la técnica PERT es uno de los más simples, sólo tiene cuatro parámetros, lo que le proporciona una gran flexibilidad modeladora pudiendo adoptar una amplia variedad de asimetrías y curtosis. Sin embargo, para su determinación, la citada técnica sólo requiere tres informaciones: la estimación pesimista, la optimista y la más probable. Evidentemente, la tarea inferencial es imposible a menos que, de forma soterrada, se impongan algunas hipótesis adicionales.

Estas hipótesis adicionales, a parte de anular la flexibilidad modeladora de la distribución beta, han ocasionado grandes dificultades a la hora de simular la duración de una red PERT, y lo que es más grave, se permiten violentar la opinión del experto en cuanto al valor más probable (Véanse Grubbs (1962), Thomas (1967) y Herrerías (1989)).

El gran éxito del PERT tiempos en sus aplicaciones prácticas acalló estas críticas hasta mediados de los 80 en que, coincidiendo con una nueva aplicación de esta técnica a los flujos de caja de un proyecto de inversión, Sasieni (1986) lanza una pregunta abierta a la comunidad científica. Ello provoca la aparición de numerosos trabajos que pueden agruparse en dos grandes líneas: la de los modelos alternativos, en donde cabe citar los trabajos de Golenko-Ginzburg (1988), Herrerías (1989) y Berny (1989), y la de obtención de información adicional, en la que se encuentran los trabajos de Moitra (1990), de Chae y Kim (1990), y de Pérez Rodríguez (1995).

En este artículo no se propone directamente un modelo alternativo, ni tampoco se intenta obtener información adicional, tan sólo se propone una hipótesis, avalada por el comportamiento racional ante la incertidumbre, que permite individualizar una única distribución beta, para cada período o tarea, a partir de las tres informaciones disponibles.

## 2. EL MODELO PROBABILISTICO DEL PERT

En la distribución beta de primera especie, los parámetros  $p$  y  $q$  son estrictamente mayores que 1, se sabe (Véase Dumas de Raully (1968)) que sus características estocásticas más relevantes son:

$$m = \frac{p-1}{p+q-2}b + \frac{q-1}{p+q-2}a \quad (1)$$

$$\mu = \frac{p}{p+q}b + \frac{q}{p+q}a \quad (2)$$

$$\sigma^2 = \frac{pq(b-a)^2}{(p+q+1)(p+q)^2} \quad (3)$$

El problema consiste en, conocidos  $a$ ,  $b$ , y  $m$ , (las tres estimaciones periciales), determinar la media,  $\mu$ , y la varianza  $\sigma^2$ , en función de ellas.

Utilizando como parámetro  $K=p+q-2$  (1)

$$p = 1 + K \frac{m-a}{b-a}$$

$$q = 1 + K \frac{b-m}{b-a}$$

y sustituyendo (4) en (2) resulta:

$$\mu = \frac{a + Km + b}{K + 2}$$

Análogamente, sustituyendo (4) en (3) se obtiene:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{\left(1 + K \frac{m-a}{b-a}\right) \left(1 + K \frac{b-m}{b-a}\right) (b-a)^2}{(K+2)^2 (K+3)} = \frac{[b-a + K(m-a)][b-a + K(b-m)]}{(K+2)^2 (K+3)} = \\ &= \frac{[a + Km + b - (K+2)a][(K+2)b - (b-m)K - a]}{(K+2)^2 (K+3)} = \\ &= \frac{\left(\frac{a + bKm + b}{K+2} - a\right) \left(b - \frac{a + Km + b}{K+2}\right)}{K+3} = \frac{(\mu - a)(b - \mu)}{K+3} \end{aligned}$$

que constituye una nueva expresión de la varianza de la distribución beta en función de la media.

### 3.DETERMINACIÓN DE LA MEDIA

Notando por  $c$  al centro del intervalo  $(a,b)$ , no es difícil comprobar que, a partir de (1), la moda de la distribución puede escribirse como:

$$m = c + \frac{p - q}{p + q - 2} R$$

y a partir de (2) puede comprobarse que:

$$\mu = c + \frac{p - q}{p + q} R$$

siendo  $R=(b-a)/2$ , el radio del intervalo.

A partir de estas dos expresiones, es muy cómodo el estudio de la posición relativa de los puntos  $m$ ,  $c$ , y  $\mu$ :

- a) si  $p=q$  coinciden media, moda y centro del intervalo; la distribución es simétrica;
- b) si  $p>q$ , tanto la media como la moda están a la derecha del centro, y analizando los denominadores de (7) y (8), es obvio que  $c<\mu<m$ ; la distribución es asimétrica a la izquierda;
- c) si  $p<q$ , la media y la moda están a la izquierda del centro, y de nuevo aquella es la más cercana al centro; la distribución presenta una asimetría a la derecha.

En resumen, sin considerar explícitamente los parámetros  $p$  y  $q$ , puede afirmarse que la media,  $\mu$ , siempre estará en el subintervalo determinado por la moda y por el centro del intervalo  $(a,b)$ . Obsérvese que con las tres estimaciones clásicas los puntos  $m$  y  $c$  quedan perfectamente determinados, y la única información disponible sobre la media es que ha de encontrarse dentro del subintervalo por ellos determinado. Destacar un punto cualquiera dentro de ese subintervalo es una arbitrariedad, y puestos a destacar uno, cualquier individuo racional optaría por tomar como estimación de  $\mu$  al punto medio del subintervalo, i.e:

$$\mu = \frac{c + m}{2} = \frac{\frac{a + b}{2} + m}{2} = \frac{a + 2m + b}{4}$$

Nótese que la filosofía del PERT clásico consiste en destacar doblemente el valor de  $m$  frente al de  $c$ , es decir:

$$\mu = \frac{c + m}{3} = \frac{\frac{a + b}{2} + 2m}{3} = \frac{a + 4m + b}{6}$$

#### 4. DETERMINACIÓN DE LA VARIANZA

Comparando las fórmulas (5) y (9), es obvio que la decisión de adoptar como media de la distribución beta al punto medio del subintervalo determinado por c y m, equivale a adoptar  $K=2$ . Llevarlo este valor del parámetro K a la fórmula (6), la varianza ha de calcularse mediante:

$$\sigma^2 = \frac{(b - \mu)(\mu - a)}{5}$$

#### 5.- CONCLUSIONES

El modus operandi en el PERT clásico consiste en recabar del experto las tres estimaciones subjetivas a, b y m, y después aplicar las siguientes fórmulas:

$$\mu = \frac{a + 4m + b}{6} \quad \sigma^2 = \frac{(b - a)^2}{36}$$

para el cálculo de la media y la varianza respectivamente.

$$\mu = \frac{a + 2m + b}{4} \quad \sigma^2 = \frac{(b - \mu)(\mu - a)}{5}$$

En este artículo se propone una operatoria similar, consistente en recabar las mismas tres estimaciones periciales, para después aplicarles estas otras fórmulas:

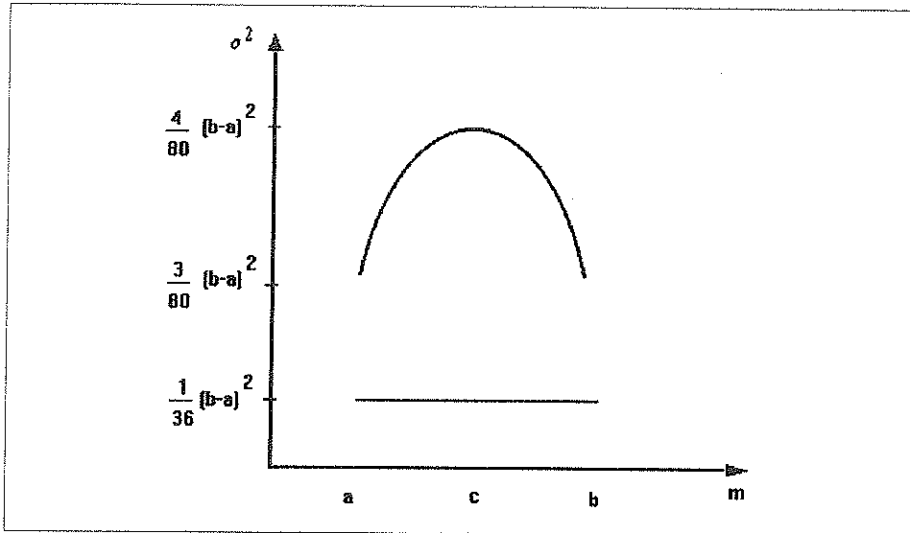
$$\mu = \frac{a + 2m + b}{4} \quad \sigma^2 = \frac{(b - \mu)(\mu - a)}{5}$$

para el cálculo de media y varianza.

Antes de pasar a enumerar las ventajas de la alternativa aquí propuesta es conveniente analizar el comportamiento de la varianza, dada en (10), en función de m. Es fácil comprobar que (10) es equivalente a

$$\sigma^2 = \frac{3(b - a)^2 + 4(m - a)(b - m)}{80} \quad a < m < b$$

en cuya representación gráfica, que aparece en la Figura 1, puede observarse que la varianza proporcionada por (10) siempre es superior a la proporcionada por el PERT clásico.



(FIGURA 1)

Las ventajas de la alternativa presentada en (11) SON :

- a) es totalmente respetuosa con la estimación subjetiva del valor más probable proporcionada por el experto;
- b) la varianza que proporciona es, para todo  $m$  comprendido entre  $a$  y  $b$ , superior a la proporcionada por el PERT clásico;
- c) comparándola con el resultado obtenido en Pérez Rodríguez (1995), la alternativa presentada es modesta, en el sentido de que cuando no existe información adicional supone que el grado de apuntamiento es medio y no alto como hace el PERT clásico;
- d) la diferencia entre las medias determinadas por el PERT clásico y la alternativa presentada, es del orden de  $(c-m)/6$ ; y
- e) la diferencia entre las varianzas determinadas por la alternativa presentada en este trabajo y la del PERT clásico es

$$\frac{7R^2}{180} + \frac{(m-a)(b-m)}{20}$$

Como comentario final señalaremos que con el PERT se aminora falazmente la incertidumbre y se permite aplicar unas fórmulas que no se corresponden con la incertidumbre existente, que es superior.

---

## 6. BIBLIOGRAFÍA

BERNY, J. (1989).- A New Distribution Function for Risk Analysis.- J. Opl. Res. Soc., Vol. 40, nº 12, pp 1121-1127

CHAE, K.C. y KIM, S. (1990).- Estimating the Mean and Variance of PERT Activity Time Using Likelihood-Ratio of the Mode and the Midpoint.- I.I.E. Transaction, Vol.22, nº3, pp 198-203.

DUMAS DE RAULY, D. (1968).- L'Estimation Statistique.- Ed. Gauthier-Villars.

GOLENKO-GINZBURG, D. (1988).- On the Distribution of Activity Time in PERT.- J.Opl.Res.Soc., Vol.39, nº8, pp 767-771.

GRUBBS, F.E. (1962).- Attempts to Validate Certain PERT Statistics or "Picking on PERT".- Opns. Res. 10, pp 912-915

HERRERÍAS, R. (1989).- Utilización de Modelos Probabilísticos Alternativos para el Método PERT. Aplicación al Análisis de Inversiones.- Estudios de Economía Aplicada. Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Valladolid, pp. 89-112.

MCDONALD, J.B. y XU, Y.J. (1995).- A Generalization of the Beta Distribution with Applications.- Journal of Econometrics, 66, pp 133-152.

MOITRA, S.D. (1990).- Skewness and the Beta Distribution.- J.Opl. Res. Soc., Vol 41, nº 10, pp 953-961.

PÉREZ RODRÍGUEZ, E. (1995).- Ajuste de un Modelo Beta con Información Adicional sobre su Apuntamiento.- Trabajo presentado a la IX Reunión de Asepelt-España, pendiente de publicación.

SASIENI, M.W. (1986).- A Note on PERT Times.- Management Sci. 32, pp 1652-1653.

THOMAS, G. (1967).- Introduction de L'aleatoire dans les problèmes d'ordonnancement. Méthode de Simulation.- Les Méthodes de Simulation. Monographies de Recherche Operationnelle, nº7, Ed. Dunod, pp 107-124.

# ESTIMACION DE LA CURVA DE LORENZ A TRAVES DE UNA NUEVA FORMA FUNCIONAL

MATILDE LAFUENTE LECHUGA

Universidad de Murcia

ANTONIO SÁNCHEZ MARTÍNEZ

## 1. INTRODUCCIÓN

Como es bien conocido, para analizar una distribución de renta se introdujo a principios de siglo un método gráfico que se denomina curva de Lorenz, y que ilustra la concentración de dicha distribución.

Esta curva ha sido caracterizada por Kakwani y Podder (1973) a partir de una serie de propiedades, lo que nos permite obtener una gama coherente de formas funcionales para poder estimarla a partir de una distribución de frecuencias observadas.

Son diversas las formas funcionales propuestas en la literatura afín a este tema, entre las que cabe destacar:

a)  $L(p) = p^b e^{-\gamma(1-p)}$ ,  $\gamma > 0$ ,  $b > 0$  debida a Kakwani y Podder (1973).

b)  $L(p) = [1 - (1-p)^a]^{1/l}$ ,  $0 \leq a \leq 1$ ,  $0 \leq l \leq 1$  sugerida por Rasche, Gaffney, Koo y Obst (1980).

Gupta (1984) propone como forma funcional:

c)  $L(p) = pA^{p-1}$ , con  $A > 0$

Casas y Núñez (1991), establecen

d)  $L(p) = p^b$ , con  $b \geq 1$

como una nueva familia generadora de funciones que pueden utilizarse para estimar curvas de Lorenz.

Ortega, Martín, Fernández, Ladoux y García (1991) trabajan con la forma funcional

e)  $L(p) = p^a [1 - (1-p)^b]$ ,  $a \geq 0$ ,  $0 \leq b \leq 1$

En un trabajo más reciente, Chotikapanich, D. (1993) utiliza la expresión

$$L(p) = \frac{e^{kp} - 1}{e^k - 1}, k > 0$$

En este trabajo nosotros proponemos una nueva forma funcional para estimar la curva de Lorenz, la cual da un muy buen ajuste al trabajar con los datos de ingresos por unidad de consumo recogidos en la última Encuesta de Presupuestos Familiares, elaborada por el Instituto Nacional de Estadística, referida al período que va de abril de 1990 a marzo de 1991.

Una de las medidas de desigualdad que se han usado más frecuentemente para analizar las disparidades de renta es el índice de Gini, el cual está estrechamente relacionado con la curva de Lorenz, razón por la que hemos deducido, en este trabajo, la formulación que adopta esta medida ante la forma funcional propuesta.

## 2. METODOLOGÍA

Una función  $y=L(p)$  representa una curva de Lorenz (Kakwani y Podder (1973)) si satisface las siguientes propiedades:

- i)  $L(0)=0$
- ii)  $L(1)=1$
- iii)  $L'(p) \geq 0$  para  $0 \leq p \leq 1$
- iv)  $L''(p) \geq 0$  para  $0 \leq p \leq 1$
- v)  $L(p) \leq p$  para  $0 < p < 1$

Gupta (1984) generaliza este resultado añadiendo otra propiedad:

$$\text{vi) } 0 \leq \int_0^1 L(p) dp \leq 1/2$$

La forma funcional de la curva de Lorenz que proponemos en este trabajo adopta la siguientes expresión:

$$L(p) = p^b e^{2-1} \quad 0 \leq p \leq 1, b \geq 1 \quad (1)$$

*Proposición:* La forma funcional definida por (1) es una curva de Lorenz, y su índice de Gini es:

$$G = 1 - \frac{1}{e} B\left(1, \frac{b+1}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{b+1}{2}; \frac{b+3}{2}; 1\right)$$

donde B representa la función beta y F la serie hipergeométrica.



- Demostración -

Veamos que (1) verifica las propiedades establecidas anteriormente para ser una curva de Lorenz.

Las condiciones i) y ii) se verifican trivialmente:

$$\text{iii)} \quad L'(p) = bp^{b-1} e^{p^2-1} + p^b 2p e^{p^2-1} = p^{b-1} e^{p^2-1} [b + 2p^2]$$

$$\text{iv)} \quad L''(p) = bp^{b-1} e^{p^2-1} [4p^2 + b(b-1)p^{-2} + 4b + 2] \geq 0$$

$$\text{V)} \quad L(p) = p^b e^{p^2-1} \leq p e^{p^2-1} \leq p \quad \text{co} \leq p \leq 1$$

vi) (Como para  $0 \leq p \leq 1$  ocurre que:

$$p^b e^{p^2-1} \leq p e^{p^2-1}$$

aplicando la propiedad de monotonía de la integración tenemos:

$$\int_0^1 p^b e^{p^2-1} dp \leq \int_0^1 p e^{p^2-1} dp = \left[ \frac{e^{p^2-1}}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{1}{e} \right] \leq \frac{1}{2}$$

Calculemos ahora el índice de desigualdad de Gini:

$$G = 1 - 2 \int_0^1 p^b e^{p^2-1} dp = 1 - \frac{2}{e} \int_0^1 p^b e^{p^2-1} dp$$

Calculemos esta última integral:

$$\int_0^1 p^b e^{p^2} dp = \int_0^1 t^{\frac{b}{2}} e^t \frac{dt}{2t^{1/2}} = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{b-1}{2}} e^t dt$$

al realizar el cambio de variable  $p_2 = t$ , y haciendo uso de la fórmula 3383.1 de Gradshteyn, I.S. y I.M. Ryzhiz (1979) (página 318), queda

$$\frac{1}{2} B\left(1, \frac{b+1}{2}\right) - {}_1F_1\left(\frac{b+1}{2}; \frac{b+3}{2}; 1\right)$$

Luego llegamos a que

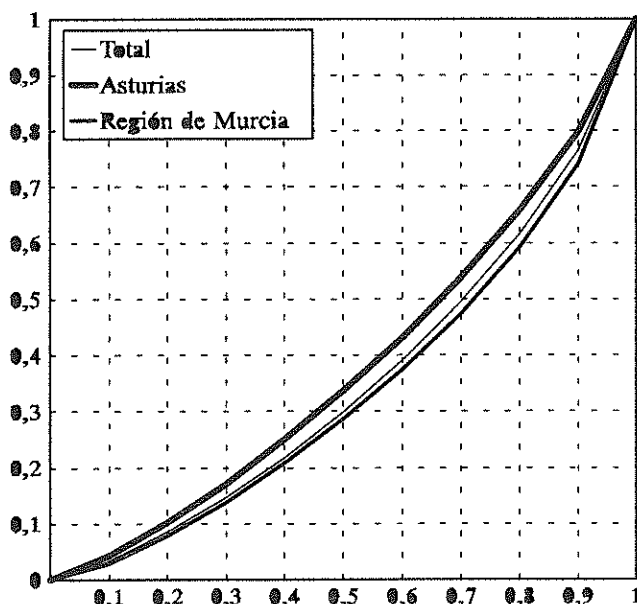
$$G = 1 - \frac{1}{e} B\left(1, \frac{b+1}{2}\right) - {}_1F_1\left(\frac{b+1}{2}; \frac{b+3}{2}; 1\right)$$

### 3. ESTUDIO EMPÍRICO

Haciendo uso de la última Encuesta de Presupuestos Familiares que ha elaborado el Instituto Nacional de Estadística, cuyo período de referencia, como ya se ha señalado, es el comprendido entre abril de 1990 y marzo de 1991, y tomando como variable para realizar nuestro estudio el ingreso por unidad de consumo, hemos calculado la curva de Lorenz para el total de la población española y para cada una de las Comunidades Autónomas que forman el Estado Español. Esta información aparece recogida en la Tabla 1, donde para cada una de las diez decilas se ha ido calculando la proporción acumulada de ingresos.

Como puede observarse, si exceptuamos Ceuta y Melilla, categoría que presenta una curva de Lorenz muy por debajo de las del resto, las Comunidades Autónomas con comportamiento extremo desde el punto de vista de la desigualdad son Asturias y la Región de Murcia. Asturias es la que presenta una curva de Lorenz que domina a todas las demás, mientras que de acuerdo al criterio de dominancia de Lorenz<sup>(1)</sup> la Región de Murcia es la Comunidad Autónoma que presenta un mayor grado de desigualdad. En el Gráfico 1 hemos representado las curvas de Lorenz del total de la muestra, de Asturias y de la Región de Murcia.

(GRAFICO 1. Curvas de Lorenz)



<sup>1</sup> Dadas dos distribuciones de renta  $x$  e  $y$ , denotando por  $L(x,p)$  y  $L(y,p)$  a sus curvas de Lorenz respectivas, se dice que la distribución  $x$  domina a la distribución  $y$  en el sentido de Lorenz ( $x \succeq_L y$ ) si y solo si  $L(x,p) \geq L(y,p)$ ,  $0 \leq p \leq 1$ , con desigualdad estricta para al menos algún  $p$ .

Para el resto de Comunidades Autónomas en multitud de ocasiones se producen cortes en la curvas de Lorenz, con lo que cual habría que recurrir a la noción de dominancia en el sentido de Lorenz generalizado<sup>(2)</sup>. Este es el caso, entre otros, de Andalucía y Extremadura, o bien de Cataluña y la Comunidad Valenciana. De acuerdo a este criterio generalizado se puede decidir que la Comunidad Valenciana presenta una mayor desigualdad que Cataluña, pero en el caso de Andalucía y Extremadura sus curvas generalizadas siguen cruzándose.

Utilizando la forma funcional de la curva de Lorenz propuesta en este trabajo

$$L(p) = p^b e^{p^2 - 1}$$

Se ha estimado el parámetro  $b$  (linealizando esta expresión y aplicando el método de los mínimos cuadrados) para cada uno de los casos analizados, es decir, para todas las Comunidades Autónomas y para el conjunto de la población española. Los resultados los recoge la Tabla 2 para cada una de las diez decilas. Como puede apreciarse al comparar las Tablas 1 y 2 los resultados son muy semejantes, lo que hemos constatado al calcular el coeficiente de determinación (Tabla 3), muy cercano a uno en todas y cada una de las categorías examinadas.

**TABLA 1. VALORES DE LA CURVA DE LORENZ**

| Comunidades<br>Autónomas | Decila 1 | Decila 2 | Decila 3 | Decila 4 | Decila 5 | Decila 6 | Decila 7 | Decila 8 | Decila 9 | Decila 10 |
|--------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------|
| TOTAL                    | 0,033    | 0,085    | 0,147    | 0,218    | 0,299    | 0,391    | 0,496    | 0,616    | 0,764    | 1,000     |
| Andalucía                | 0,031    | 0,080    | 0,141    | 0,212    | 0,293    | 0,385    | 0,488    | 0,608    | 0,755    | 1,000     |
| Aragón                   | 0,039    | 0,095    | 0,160    | 0,235    | 0,321    | 0,415    | 0,518    | 0,636    | 0,778    | 1,000     |
| Asturias                 | 0,044    | 0,103    | 0,172    | 0,251    | 0,336    | 0,431    | 0,538    | 0,659    | 0,797    | 1,000     |
| Baleares                 | 0,034    | 0,089    | 0,154    | 0,227    | 0,310    | 0,403    | 0,509    | 0,632    | 0,779    | 1,000     |
| Canarias                 | 0,030    | 0,081    | 0,141    | 0,212    | 0,293    | 0,385    | 0,491    | 0,613    | 0,765    | 1,000     |
| Cantabria                | 0,036    | 0,090    | 0,155    | 0,228    | 0,311    | 0,404    | 0,510    | 0,631    | 0,778    | 1,000     |
| Castilla y León          | 0,036    | 0,089    | 0,152    | 0,224    | 0,305    | 0,396    | 0,498    | 0,617    | 0,765    | 1,000     |
| Castilla la Mancha       | 0,038    | 0,090    | 0,153    | 0,225    | 0,306    | 0,396    | 0,500    | 0,620    | 0,768    | 1,000     |
| Cataluña                 | 0,039    | 0,093    | 0,157    | 0,230    | 0,314    | 0,407    | 0,513    | 0,635    | 0,779    | 1,000     |
| Com. Valenciana          | 0,039    | 0,094    | 0,160    | 0,235    | 0,318    | 0,411    | 0,515    | 0,634    | 0,777    | 1,000     |
| Extremadura              | 0,033    | 0,083    | 0,144    | 0,214    | 0,294    | 0,383    | 0,485    | 0,605    | 0,756    | 1,000     |
| Galicia                  | 0,038    | 0,092    | 0,155    | 0,228    | 0,311    | 0,403    | 0,507    | 0,626    | 0,768    | 1,000     |
| Madrid                   | 0,037    | 0,090    | 0,153    | 0,224    | 0,305    | 0,394    | 0,494    | 0,610    | 0,754    | 1,000     |
| Región de Murcia         | 0,030    | 0,078    | 0,138    | 0,208    | 0,286    | 0,375    | 0,475    | 0,593    | 0,742    | 1,000     |
| Navarra                  | 0,041    | 0,098    | 0,165    | 0,243    | 0,329    | 0,423    | 0,529    | 0,651    | 0,798    | 1,000     |
| País Vasco               | 0,037    | 0,091    | 0,156    | 0,229    | 0,313    | 0,407    | 0,511    | 0,632    | 0,776    | 1,000     |
| La Rioja                 | 0,037    | 0,091    | 0,155    | 0,227    | 0,308    | 0,397    | 0,498    | 0,614    | 0,758    | 1,000     |
| Ceuta y Melilla          | 0,021    | 0,067    | 0,123    | 0,187    | 0,262    | 0,349    | 0,452    | 0,580    | 0,733    | 1,000     |

<sup>2</sup> Si  $x$  representa a una distribución de renta con media  $\mu$ , la curva de Lorenz generalizada se construye aumentando a escala la curva de Lorenz por la renta media de la distribución, es decir:

$$LG(x, p) = \mu L(x, p)$$

y entonces, dada otra distribución y se dice que  $x \succeq_{LG} y$  si y solo si  $LG(x, p) \geq LG(y, p)$ , con desigualdad estricta para el menos algún  $p \in [0, 1]$ .

**TABLA 2. VALORES ESTIMADOS DE LA CURVA DE LORENZ**

| <b>Comunidades<br/>Autónomas</b> | <b>Decila 1</b> | <b>Decila 2</b> | <b>Decila 3</b> | <b>Decila 4</b> | <b>Decila 5</b> | <b>Decila 6</b> | <b>Decila 7</b> | <b>Decila 8</b> | <b>Decila 9</b> | <b>Decila 10</b> |
|----------------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|
| TOTAL                            | 0,043           | 0,085           | 0,130           | 0,183           | 0,247           | 0,327           | 0,430           | 0,566           | 0,749           | 1,000            |
| Andalucía                        | 0,040           | 0,081           | 0,125           | 0,178           | 0,241           | 0,322           | 0,425           | 0,562           | 0,747           | 1,000            |
| Aragón                           | 0,051           | 0,096           | 0,143           | 0,196           | 0,260           | 0,340           | 0,442           | 0,576           | 0,755           | 1,000            |
| Asturias                         | 0,058           | 0,105           | 0,153           | 0,207           | 0,270           | 0,350           | 0,451           | 0,583           | 0,760           | 1,000            |
| Baleares                         | 0,046           | 0,088           | 0,134           | 0,187           | 0,251           | 0,331           | 0,434           | 0,569           | 0,751           | 1,000            |
| Canarias                         | 0,040           | 0,080           | 0,125           | 0,177           | 0,241           | 0,321           | 0,424           | 0,562           | 0,746           | 1,000            |
| Cantabria                        | 0,047           | 0,091           | 0,137           | 0,190           | 0,254           | 0,334           | 0,436           | 0,571           | 0,752           | 1,000            |
| Castilla y León                  | 0,046           | 0,089           | 0,135           | 0,188           | 0,252           | 0,332           | 0,435           | 0,570           | 0,752           | 1,000            |
| Castilla la Mancha               | 0,048           | 0,091           | 0,138           | 0,191           | 0,255           | 0,335           | 0,437           | 0,572           | 0,753           | 1,000            |
| Cataluña                         | 0,050           | 0,094           | 0,141           | 0,194           | 0,258           | 0,338           | 0,440           | 0,574           | 0,754           | 1,000            |
| Com. Valenciana                  | 0,051           | 0,095           | 0,142           | 0,196           | 0,259           | 0,339           | 0,441           | 0,575           | 0,755           | 1,000            |
| Extremadura                      | 0,042           | 0,083           | 0,129           | 0,181           | 0,245           | 0,325           | 0,428           | 0,565           | 0,748           | 1,000            |
| Galicia                          | 0,049           | 0,093           | 0,139           | 0,192           | 0,256           | 0,336           | 0,438           | 0,573           | 0,754           | 1,000            |
| Madrid                           | 0,047           | 0,090           | 0,137           | 0,190           | 0,254           | 0,333           | 0,436           | 0,571           | 0,752           | 1,000            |
| Región de Murcia                 | 0,038           | 0,078           | 0,123           | 0,175           | 0,238           | 0,318           | 0,422           | 0,560           | 0,745           | 1,000            |
| Navarra                          | 0,054           | 0,100           | 0,147           | 0,201           | 0,264           | 0,344           | 0,446           | 0,579           | 0,757           | 1,000            |
| País Vasco                       | 0,048           | 0,092           | 0,138           | 0,192           | 0,256           | 0,335           | 0,438           | 0,572           | 0,753           | 1,000            |
| La Rioja                         | 0,048           | 0,091           | 0,138           | 0,191           | 0,255           | 0,334           | 0,437           | 0,572           | 0,753           | 1,000            |
| Ceuta y Melilla                  | 0,029           | 0,064           | 0,105           | 0,155           | 0,218           | 0,298           | 0,403           | 0,544           | 0,735           | 1,000            |

**TABLA 3. VALORES DE LOS COEFICIENTES DE DETERMINACIÓN**

| <b>Comunidades Autónomas</b> | <b>Coefficiente de determinación</b> |
|------------------------------|--------------------------------------|
| TOTAL.....                   | 0,9910                               |
| Andalucía.....               | 0,9913                               |
| Aragón.....                  | 0,9875                               |
| Asturias.....                | 0,9841                               |
| Baleares.....                | 0,9887                               |
| Canarias.....                | 0,9913                               |
| Cantabria.....               | 0,9891                               |
| Castilla y León.....         | 0,9912                               |
| Castilla la Mancha.....      | 0,9915                               |
| Cataluña.....                | 0,9891                               |
| Comunidad Valenciana.....    | 0,9884                               |
| Extremadura.....             | 0,9927                               |
| Galicia.....                 | 0,9898                               |

| Comunidades Autónomas  | Coefficiente de determinación |
|------------------------|-------------------------------|
| Madrid .....           | 0,9915                        |
| Región de Murcia ..... | 0,9927                        |
| Navarra .....          | 0,9857                        |
| País Vasc .....        | 0,9887                        |
| La Rioja .....         | 0,9910                        |
| Ceuta y Melilla .....  | 0,9943                        |

## BIBLIOGRAFÍA

- BISHOP, J.A., J.P. FORMBY y P.D. THISTLE (1991): "Rank dominance and international comparisons of income distributions". *European Economic Review*, 35; 1399-1409.
- CASAS, J.M., R. HERRERIAS y J.J. NUÑEZ (1990): "Familias de formas funcionales para estimar la curva de Lorenz". *Actas de la IV Reunión de ASEPELT*.
- CHAKRAVARTY, S.R. (1990): "Ethical social index numbers". Springer-Verlag Berlin. Heidelberg.
- CHOTIKAPANICH, D. (1993): "A comparison of alternative functional forms for the Lorenz curve". *Economics Letters*, 41 (2); 129-138.
- GINI, C. (1921): "Measurement of inequality of incomes". *Economic Journal*, 31; 124-126.
- GUPTA, M.R. (1984): "Functional form for estimating the Lorenz curve". *Econometrica*, 52 (5); 1313-1314.
- INSTITUTO NACIONAL DE ESTADÍSTICA (1992): "Encuesta de Presupuestos Familiares. 1990/91. Metodología".
- KAKWANI, N.C. (1980): "Functional forms for estimating the Lorenz curve: a reply". *Econometrica*, 48 (4); 1063-1064.
- KAKWANI, N.C. y N. PODDER (1973): "On the estimation of Lorenz curves from grouped observations". *International Economic Review*, 14 (2); 278-291.
- LAFUENTE LECHUGA, M. (1994): "Medidas de cuantificación de la desigualdad: La desigualdad de la renta en España según la E.P.F. 90-91". Tesis Doctoral. Universidad de Murcia.
- ORTEGA, P., G. MARTIN, A. FERNANDEZ, M. LADOUX y A. GARCIA (1991): "A new functional form for estimating Lorenz curves". *Review of income and wealth*, 37, 4.

---

- RASCHE, R.H., A.Y. GAFFNEY, C. KOO y N. OBST (1980): "Functional forms for estimating the Lorenz curve". *Econometrica*, 48 (4); 1061-1062.

- RUIZ-CASTILLO, J. (1986): "Problemas conceptuales en la medición de la desigualdad". *Hacienda Pública Española*, 101; 17-31.

- THISTLE, P.D. (1989): "Ranking distributions with generalized Lorenz curves". *Southern Economic Journal*, 56; 1-12.

# ESTIMADORES DE REGRESION Y RAZON PARA PROPORCIONES

SANTIAGO MURGUI IZQUIERDO  
CRISTINA AYBAR ARIAS

Facultad de Económicas y Empresariales  
Departamento de Economía Aplicada  
Universidad de Valencia

## 1. INTRODUCCION

La inferencia estadística en el ámbito de las poblaciones finitas, debe abordar en muchas ocasiones el problema de estimar una proporción. Los estimadores tradicionalmente utilizados son los asociados a diseños muestrales, principalmente estratificados y polietápicos. En la literatura sobre muestreo estadístico, no se encuentran estimadores para proporciones capaces de incorporar información de una variable auxiliar.

Los estimadores de “regresión” y “razón” son habitualmente propuestos cuando se pretende estimar características poblacionales asociadas a una variable de tipo continuo  $Y$ , y para el mismo universo se dispone de información referente a una variable auxiliar  $X$ , también continua. En este contexto la construcción de estimadores por criterios mínimo-cuadráticos y bajo modelos lineales es ya conocida.

En este trabajo se comprueba que las mismas expresiones que definen los estimadores de “regresión” y “razón”, también son apropiadas cuando las variables principal y auxiliar son discretas y la característica poblacional a estimar es una proporción. En tales circunstancias los modelos lineales no son apropiados. En su lugar, se propone un modelo para las probabilidades. La aplicación sobre el mismo del método de la máxima-verosimilitud conduce a los estimadores citados, encontrándose una posible justificación a la coincidencia entre los estimadores obtenidos con el modelo propuesto y los tradicionalmente asociados con el modelo lineal.

Los resultados obtenidos se desarrollan en tres apartados. Tras la introducción, en el segundo apartado se define un modelo de superpoblación y se construye un estimador para la proporción poblacional basado en los estimadores máximo-verosímiles de los parámetros. En el último apartado, se modifica el modelo para adecuarlo a otras situaciones reales, proponiéndose un estimador alternativo.

## 2. ESTIMADOR DE REGRESION PARA UNA PROPORCION

Considérese un universo  $U=(u_1, u_2, \dots, u_N)$  integrado por  $N$  unidades. Sea  $X$  una variable auxiliar que toma los valores 0 y 1, para la que se suponen conocidas sus observaciones  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$  sobre las unidades del colectivo  $U$ . Sea  $Y$  la variable de interés, que también toma los valores 0 y 1, para la que no se conoce el vector de observaciones  $(y_1, y_2, \dots, y_N)$ .

Se pretende estimar la proporción poblacional de unidades sobre las que  $Y$  toma el valor 1, definida  $\sum_{i=1}^N y_i/n$ . Para ello se va a utilizar la información que se obtiene al observar dicha variable sobre las  $n$  unidades de una muestra  $s=(u_1, u_2, \dots, u_n)$  seleccionada en el colectivo  $U$ .

Si se considera que la población de observaciones  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$  aporta información relevante acerca de la población desconocida  $(y_1, y_2, \dots, y_N)$  es conveniente definir el proceso inferencial introduciendo un mecanismo capaz de incorporar la información disponible.

Para describir la relación existente entre las observaciones de las variables  $Y$  y  $X$ , puede recurrirse a un modelo estocástico. En este apartado se supone que el modelo adecuado es el que especifican las siguientes hipótesis:

$$\begin{aligned} H_1: P(Y_i=1 | x_i=0) &= \alpha && \text{con } 0 < \alpha < 1 && i=1, 2, \dots, N \\ H_2: P(Y_i=1 | x_i=1) &= \alpha' && \text{con } 0 < \alpha' < 1 && i=1, 2, \dots, N \\ H_3: C[Y_i, Y_j | x_1, x_2, \dots, x_N] &= 0 && i \neq j \end{aligned}$$

Donde  $P(Y_i/x_i)$  expresa una probabilidad condicionada y  $C$  la covarianza.

Las dos primeras hipótesis pueden expresarse mediante una única relación

$$P(Y_i=1/x_i) = \alpha(1-x_i) + \alpha'x_i \quad \text{para } i=1, 2, \dots, N.$$

Al objeto de facilitar la interpretación del modelo, como ejemplo puede considerarse una situación en la que  $X$  e  $Y$  expresan una misma variable medida en dos ocasiones distintas de tiempo. En la primera ocasión se suponen conocidos los resultados de una investigación exhaustiva, planteándose la revisión del censo en una segunda ocasión mediante una investigación por muestreo. Las dos primeras hipótesis del modelo expresan que la intención de mantenerse en la opción adoptada (0 ó 1) en la primera ocasión, es la misma para todas las unidades. Igualmente, se admite constante la intención de modificar la opción adoptada en un primer momento. Expresándolo en otros términos, las hipótesis  $H_1$  y  $H_2$  indican que la probabilidad de que en la segunda ocasión una unidad adopte una opción determinada, viene explicada exclusivamente por la opción que tal unidad adoptó en la ocasión precedente.

En la práctica el modelo es menos restrictivo de lo que pudiera parecer inicialmente. En el supuesto de que no se considerara válido para todo el universo en su conjunto, siempre será posible



proceder a su segmentación, incrementando de esta forma la adecuación de un modelo específico para cada grupo definido.

Identifíquese por  $\Pi_1 = P(X_i=1)$  con  $i=1,2,\dots,N$  a la proporción poblacional conocida de ob-

servaciones  $x_i$  con valor 1, determinada por  $\frac{1}{N} \sum x_i$ . Análogamente puede identificarse por

$\Pi_2 = P(Y_i=1)$  con  $i=1,2,\dots,N$  a la proporción poblacional de unidades con valor unitario de  $Y$ . La verosimilitud de los parámetros del modelo proporcionada por la información muestral es en estas condiciones

$$l(\alpha' \Pi_1) \sum_s x_i y_i (\alpha(1 - \Pi_1)) \sum_s y_i - \sum_s x_i y_i ((1 - \alpha') \Pi_1) \sum_s x_i - \sum_s x_i y_i ((1 - \alpha)(1 - \Pi_1))^{n - \sum_s x_i - \sum_s y_i + \sum_s x_i y_i}$$

Es fácil comprobar que los estimadores máximo verosímiles de  $\alpha$  y  $\alpha'$  son, respectivamente

$$a = \frac{1}{n(1 - p_1)} \sum_s (1 - x_i) y_i$$

$$a' = \frac{1}{np_1} \sum_s x_i y_i$$

Donde  $p_1 = \frac{1}{n} \sum_s x_i$  es la proporción muestral de observaciones con valor 1 para la variable  $X$ . Siendo ambos estimadores insesgados.

Teniendo en cuenta la relación  $\Pi_2 = \alpha(1 - \Pi_1) + \alpha' \Pi_1$  se deduce que el estimador máximo-verosímil de la proporción buscada es

$$\hat{\Pi}_2 = a(1 - \pi_1) + a' \pi_1 = p_2 + \frac{s_{12}}{s_1^2} (\pi_1 - p_1)$$

siendo  $p_2 = \frac{1}{n} \sum_s y_i$  la proporción muestral de observaciones con valor 1 para la variable  $Y$  y

$$s_1^2 = p_1(1 - p_1) = \frac{1}{n} \sum_s (x_i - p_1)^2$$

$$s_{12} = \frac{1}{n} \sum_s x_i y_i - p_1 p_2 = \frac{1}{n} \sum_s (x_i - p_1)(y_i - p_2)$$

la varianza y covarianza muestrales, respectivamente.

La insesgadez de los estimadores  $a$  y  $a'$  garantiza que  $\hat{\pi}_2$  también será un estimador insesgado con respecto a  $\Pi_2$ . Así mismo, se comprueba que su varianza está determinada por

$$V[\hat{\Pi}_2] = (\alpha - \alpha^2)E\left[\frac{(1 - \Pi_1)^2}{n(1 - p_1)}\right] + (\alpha' - \alpha'^2)E\left[\frac{\pi_1^2}{np_1}\right]$$

A partir de las hipótesis que especifican el modelo se demuestra que un estimador insesgado para  $\alpha_2$  es

$\frac{a^2 n(1 - p_1) - a'^2 np_1 - a'}{n(1 - p_1) - 1}$  y análogamente  $\frac{a'^2 np_1 - a'}{np_1 - 1}$  es un estimador insesgado con respecto a  $\alpha'_2$ . De estos resultados se deduce que el estadístico muestral

$$e(\hat{\pi}_2) = (a - a^2) \frac{(1 - \pi_1)^2}{n(1 - p_1) - 1} + (a' - a'^2) \frac{\pi_1^2}{np_1 - 1}$$

es un estimador insesgado de la varianza  $V[\hat{\pi}_2]$

El carácter dicotómico de las variables  $X$  e  $Y$  y las hipótesis  $H_1$  y  $H_2$ , permiten escribir la siguiente relación para la media condicionada de cada  $Y_i$

$$E[Y_i/x_i] = P(Y_i=1/x_i) = \alpha(1-x_i) + \alpha'x_i$$

Denotando por  $\beta$  a la diferencia  $(\alpha' - \alpha)$  las relaciones anteriores, para  $i=1,2,\dots,N$  adoptan la forma  $E[Y_i/x_i] = \alpha + \beta x_i$ .

El modelo propuesto para variables dicotómicas supone por lo tanto una relación lineal entre  $x_i$  y la media de cada  $Y_i$ . Ello ha conducido a proponer un estimador  $\hat{\pi}_2$  con una estructura idéntica a los denominados "estimadores de regresión" que surgen en la literatura estadística asociados con los modelos lineales definidos sobre variables continuas.

En general, los modelos lineales no son adecuados cuando las variables son, como en este caso, de tipo dicotómico. Sin embargo, se ha comprobado que el modelo propuesto presenta unas relaciones lineales para las medias idénticas a las que se derivan de un modelo lineal de la forma  $Y_i = \alpha + \beta x_i + u_i$  con  $E[u_i] = 0$ . Esto ha inducido a expresiones idénticas para los estimadores de  $\Pi_2 = P(Y_i=1) = E[Y_i]$  en ambos casos. Es necesario destacar que por su construcción el estimador  $\hat{\pi}_2$  está acotado entre 0 y 1, tal como corresponde a una proporción.

Todos los resultados se han establecido sin necesidad de especificar el procedimiento utilizado en la selección de la muestra. Esta característica se presenta siempre que se propone un modelo de superpoblación. La determinación del diseño muestral ha sido abordada por Royall y Herson

(1973) y Murgui (1983) entre otros. En la práctica del muestreo, aunque no es estrictamente necesario, suele utilizarse un diseño aleatorio para que actúe de protección frente a los posibles errores que se cometan en la especificación del modelo.

El estimador  $\hat{\pi}_2$ , así como el estimador de su varianza, no requieren conocer totalmente la población  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ . Únicamente es necesario disponer de la proporción poblacional  $\Pi_1$ . Esto permite ampliar el campo de aplicación a aquellas situaciones reales en las que se dispone de los resultados censales globales pero el acceso al censo completo es limitado. En el caso en que se disponga de este último, puede plantearse una cuestión adicional. Si se denota por  $U_0$  al colectivo de unidades en las que  $X=0$  y por  $U_1$ , al colectivo de unidades para las que  $X=1$ , puede plantearse la determinación de una distribución óptima de la muestra entre ambos colectivos.

Sea  $n_1$  el número de unidades muestrales a seleccionar en el colectivo  $U_1$  se comprueba que la expresión de  $V[\hat{\pi}_2]$  alcanza su valor mínimo cuando se verifica la siguiente relación:

$$\frac{n_1}{n - n_1} = \frac{\pi_1 \sqrt{\alpha' - \alpha'^2}}{(1 - \pi_1) \sqrt{\alpha - \alpha^2}} = \frac{N_1 \sqrt{\alpha' - \alpha'^2}}{(N - N_1) \sqrt{\alpha - \alpha^2}}$$

Donde  $N_1$  expresa el número de unidades en el colectivo  $U_1$ . Despreciando los términos paramétricos, se deduce que una aproximación a la solución óptima se consigue distribuyendo la muestra de manera proporcional al tamaño de los colectivos citados.

La clasificación de las unidades atendiendo al valor de la variable  $X$ , sugiere la posibilidad de plantear la estimación en un contexto totalmente diferente al que se ha expuesto. Un diseño aleatorio estratificado consistiría en seleccionar una muestra aleatoria  $s_0$  en el colectivo  $U_0$  y otra muestra aleatoria  $s_1$  en el  $U_1$ . El problema inferencial podría entonces resolverse recurriendo a la aleatorización que introduce el diseño, prescindiendo del modelo de superpoblación propuesto.

En el contexto de un diseño aleatorio estratificado, la expresión

$$\Pi_1 p_{21} + (1 - \Pi_1) p_{20}$$

donde:

$$p_{21} = \sum_{s_1} \frac{y_i}{n_i}$$

$$p_{20} = \sum_{s_0} \frac{y_i}{(n - n_1)}$$

es un estimador insesgado para la proporción poblacional  $\Pi_2$ .

Se comprueba que la expresión que define el estimador de "regresión"  $\hat{\pi}_2$ , propuesto en base al modelo de superpoblación, coincide con la que define el estimador insesgado con referencia

al diseño aleatorio estratificado. No obstante, las características y propiedades de los procesos inferenciales requieren interpretaciones distintas.

### 3. ESTIMADOR DE RAZON PARA UNA PROPORCION

Considérese ahora que el modelo más adecuado para describir la relación existente entre las observaciones de la variable Y y las de la variable X es el que resulta al sustituir la hipótesis  $H_1$ , del apartado anterior por:

$$H_1': P(Y_i=1 / x_i=0)=0 \quad i=1,2,\dots,N$$

En este caso, se considera que la probabilidad de que una unidad que ha adoptado la opción  $X=0$ , adopte la opción  $Y=1$ , es nula. El modelo contempla la posibilidad de cambio de opción para cada unidad, pero únicamente en el sentido de pasar de  $X=1$  a  $Y=0$ , nunca en el de pasar de  $X=0$  a  $Y=1$ .

Una situación real en la que sería de aplicación el modelo, es la que se presenta en un proceso de control de calidad en dos etapas. Supóngase que en la primera se investiga X y se decide catalogar como unidades defectuosas a las que presentan el valor  $X=0$ . En la segunda etapa se investiga Y en los siguientes términos: si una unidad lleva etiqueta de defectuosa, se considera definitivamente defectuosa y se le hace corresponder  $Y=0$ , en caso contrario se controla una nueva característica que puede conducir a clasificar la unidad como defectuosa ( $Y=0$ ) o como válida ( $Y=1$ ).

De las hipótesis  $H_1'$  y  $H_2$  se deduce que, en este caso,  $P(Y_i=1/x_i)=E[Y_i/x_i]=\alpha'x_i$ , para  $i=1,2,\dots,N$  siendo  $V[Y_i/x_i]=(\alpha'-\alpha'^2)x_i$ .

La función de verosimilitud del parámetro  $\alpha'$  adopta la expresión

$$l(\alpha') = (\alpha'\pi_1)^{\sum y_i} ((1-\alpha')\pi_1)^{\sum (x_i - y_i)} (1-\pi_1)^{n - \sum x_i}$$

Maximizando la función de verosimilitud se obtiene el siguiente estimador de  $\alpha'$ :  $\alpha''=p_2/p_1$ .

Teniendo en cuenta la relación  $\prod_2=\alpha'\prod_1$ , correspondiente al modelo ahora propuesto, se

deduce que el estimador máximo-verosímil de la proporción de interés es  $\pi_2^* = \alpha''\pi_1 = \frac{p_2}{p_1}\pi_1$

Las características del modelo ahora considerado, permiten comprobar que  $\prod_2^*$  es un estimador insesgado con respecto a  $\prod_2$  y, la expresión de su varianza  $V[\prod_2^*]$  así como la de un estimador insesgado de esta última ( $\prod_2^*$ ), se obtienen anulando el valor de  $\alpha$  en las respectivas expresiones de  $V[\hat{\pi}_2]$  y  $\hat{\pi}_2$  obtenidas en el apartado anterior.

Observar que el modelo actual supone una relación lineal sin término independiente entre  $x_i$  y la media de cada variable  $Y_i$ . La coincidencia entre esta relación y la que se deriva de un modelo lineal de la forma  $Y_i = \alpha'x_i + u_i$ , con  $E[u_i] = 0$ , conduce a un estimador  $\hat{\Pi}_2^*$  con una expresión idéntica a los denominados “estimadores de razón” habitualmente utilizados sobre modelos lineales y variables continuas.

La posibilidad de efectuar el proceso inferencial recurriendo a un diseño aleatorio estratificado, sigue siendo válida también en el modelo que define la hipótesis  $H_1'$ . En este caso, el estimador de “razón” propuesto no coincide en general con el estimador insesgado del muestreo estratificado. No obstante, si se acepta la validez de la hipótesis  $H_1'$  del modelo, es lógico pensar que el colectivo de unidades para las que  $X=0$  e  $Y=1$  será vacío y en consecuencia, la proporción  $p_{20}$  definida en el apartado anterior sería nula. En estas circunstancias, los estimadores utilizados en los dos procedimientos coinciden.

## REFERENCIAS:

- BASULTO, I. y MURGUL, J.S. (1987): Diseño, inferencia y robustez en poblaciones finitas. Libro Homenaje al Profesor Arnaiz Ed: INE. Madrid.
- COCHRAN, W.G. (1981): Técnicas de Muestreo. Wiley. New York.
- ERICSON, W.A. (1969): Subjective bayesian models in sampling finite populations. Journal Royal Statistical Society B, 31.
- MURGUL, J.S. (1983): Estimadores de razón y regresión en poblaciones finitas: modelos de superpoblación. Estadística Española, 99, pp 61-72.
- MURGUL, J.S. (1993): Estimación con encuestas repetidas. Estadística Española, 35, pp 617-627.
- ROYALL, R.M. (1971): Linear Regression Models in Finite Population Sampling Theory. Foundations of Statistical Inference, V.P. Godambe y D.A. Sprott (eds) Holt, Rinehart & Wirston, Toronto, Canada, 259-279.
- ROYALL, R.M. y CUMBERLAND W.G. (1981): The Finite Population Regression Estimator and Estimators of its variance-an empirical Study. Journal of the American Statistical Association, 76.
- ROYALL, R.M. y HERSON, J. (1973): Robust estimation in finite populations. Journal American Statistical Association, 68.



# ESTIMACIONES DEL PATRIMONIO. APROXIMACION METODOLOGICA Y APLICACION AL CASO DE LAS INFRAESTRUCTURAS EN CARRETERAS.

JOAQUÍN MURILLO VIU

Departamento de Econometría, Estadística y Economía Española.  
Universidad de Barcelona.

## 1. INTRODUCCION

La Contabilidad Nacional ha proporcionado tradicionalmente una descripción de los fenómenos de naturaleza económica en el ámbito de una economía nacional, así como de las relaciones entre ésta y el resto del mundo. En su momento, la construcción de instrumentos estadísticos capaces de proporcionar una descripción de la economía, supuso un impulso para el análisis y la política económica. Aunque los primeros sistemas de contabilidad nacional centraron sus esfuerzos en la cuantificación de los flujos de la actividad económica, con el paso del tiempo se fueron explicitando algunas limitaciones que se derivaban precisamente de esta especialización.

Para superar las carencias detectadas, se empezó a trabajar en el diseño de una nueva categoría de cuentas que proporcionara la descripción del resultado de la acumulación en la economía nacional. Por tanto, la inclusión de las cuentas de patrimonio en los sistemas de contabilidad nacional encuentra su razón de ser en la necesidad de completar la representación de la economía proporcionada por las cuentas de flujo. Según explica Vanoli (1985) en una comunicación presentada en la XIX Conferencia del IARIW, el cuadro central de la Contabilidad Nacional debe proporcionar una visión sintética de los agregados de flujo que se encuentre articulada con la presentación de las cuentas de patrimonio. De igual modo, según argumenta Pichot (1988) para que un sistema de contabilidad nacional se pueda considerar completo, debe proporcionar una presentación integrada de los stocks y los flujos. Ambas opiniones se encuentran en consonancia con los principios recogidos en el Sistema de Contabilidad Nacional de las Naciones Unidas (SCN) y en Sistema Integrado de Cuentas Económicas (SEC) elaborado por Eurostat.

Si se revisa, desde una perspectiva histórica, la difusión que han tenido las estimaciones del Patrimonio Nacional en el ámbito de los sistemas internacionales de contabilidad nacional, se puede comprobar como tras la publicación en el año 1968 de una nueva versión del Sistema de Contabilidad Nacional (SCN-68) elaborado por Naciones Unidas, se puso de manifiesto un posicionamiento oficial favorable a la implantación de un sistema que no quedase restringido a la contabilización de flujos, sino que integrase conjuntamente stocks y flujos. Esta línea de opinión se vio refrendada posteriormente con la aparición de las *directivas internacionales para el establecimiento de las cuentas de patrimonio* (Naciones Unidas, 1977). No obstante, durante mucho tiempo, incluso avanzada la década de los ochenta, la contabilidad nacional de muchos países quedó circunscrita

---

ta al registro de flujos. En el inicio de la década de los ochenta, muchos países con un programa activo de Contabilidad Nacional todavía centraban sus esfuerzos en el desarrollo de las cuentas de flujo, limitándose el interés por las cuentas de patrimonio a unos pocos componentes que ya jugaban un papel activo en los análisis económicos, como los stocks de bienes duraderos producidos, los activos y los pasivos de la banca. Aún así, los indicios que se observaban evidenciaban que la contabilidad patrimonial entraba en una fase emergente tras un período de relativa desatención (Blades, 1980).

El proceso de revisión del SCN-68 se inició en 1975 y culminó en el mes de febrero de 1993, momento en que las Naciones Unidas aprobaron el nuevo sistema de cuentas nacionales (SCN-93). La Oficina Estadística de la Comunidad Europea (EUROSTAT) acaba de elaborar la última versión del Sistema Integrado de Cuentas Económicas (SEC) que viene a constituir la versión comunitaria del SCN-93 y cuyo cumplimiento deviene obligatorio para los miembros de la Unión Europea. En estas últimas versiones de los sistemas internacionales de contabilidad nacional (SCN y SEC) se contempla por igual la contabilización de stocks y flujos. Por tanto, se ha consolidado este doble papel asignado a los sistemas de contabilidad nacional, según el cual deben ocuparse de la descripción de los flujos que constituyen el movimiento económico del período, por un lado, así como del estado del patrimonio del país y sus modificaciones, por otro.

Como se acaba de indicar, la consolidación de las cuentas de patrimonio como un elemento esencial en los sistemas de contabilidad nacional, se ha visto refrendada por las directrices que Eurostat ha recogido en su última versión del Sistema Integrado de Cuentas Económicas (SEC)<sup>1</sup>. Asimismo se ha puesto de manifiesto la deseabilidad de introducir una mejora en la calidad de los datos básicos que se utilizan en la elaboración de las cuentas de los países miembros, dada la importancia que se otorga en el Tratado de la Unión Europea a los indicadores estadísticos derivados del SEC. Según se ha previsto, será preciso disponer de las cuentas de patrimonio de todos los Estados miembros para poder analizar el comportamiento de los agentes económicos. Por todo ello, en un futuro próximo, que ya es realidad para algunos países<sup>2</sup>, la elaboración de las cuentas de patrimonio constituirá un elemento esencial en los Sistemas de Contabilidad Nacional.

Tras haberse consolidado la introducción de la Contabilidad Patrimonial, la Contabilidad Nacional mantiene su importancia como sustento para la adopción de decisiones y continúa siendo esencialmente un instrumento de política económica.

---

<sup>1</sup> En la *Decisión del Consejo de las Comunidades Europeas*, de 22 de julio de 1993, relativa al programa marco para las acciones prioritarias en el ámbito de la información estadística 1993-1994, se enuncia la voluntad de impulsar la creación de indicadores estadísticos armonizados, cuya información se precisa para avanzar hacia los objetivos fijados dentro de la Unión Económica y Monetaria.

<sup>2</sup> En esta comunicación se presta una especial atención a la experiencia del *Institut National de la Statistique et des études économiques* (INSEE) en la elaboración de las cuentas de patrimonio en el ámbito de su Sistema de Contabilidad Nacional. La adopción de la base 1980 del *Système élargi de comptabilité nationale* (SECN-80) supuso la introducción de las correcciones necesarias para superar los problemas detectados en la anterior base (SECN-71) y la integración definitiva de las cuentas de patrimonio en el cuadro central de la Contabilidad Nacional, con adecuación de su metodología a las directrices establecidas por Eurostat (SEC).



## 2. INTERES QUE COMPORTA PARA EL ANALISIS ECONOMICO LA ESTIMACION DEL PATRIMONIO. APORTACIONES DE LAS CUENTAS DE PATRIMONIO AL ANALISIS ECONOMICO.

Si se analiza el interés que comporta para el análisis económico la introducción de las cuentas de patrimonio en los sistemas de contabilidad nacional, según el modelo recogido en el SEC y SCN, en primer lugar se debe considerar cómo la utilización de los datos que se presentan en las cuentas de patrimonio, además de posibilitar la obtención de una descripción más completa de la realidad económica, enriquecen el análisis económico clásico en términos de flujos (Muller y Bournay, 1991). Su introducción amplía notoriamente las posibilidades analíticas, pudiéndose abordar con éxito el estudio de algunos comportamientos de los agentes que tan solo se pueden aclarar cuando se relacionan los stocks y los flujos (inversión, endeudamiento, reparto de las rentas, etc).

El sistema contable integrado por cuentas de flujo y de patrimonio, se encuentra capacitado para ilustrar cómo los cambios que se producen de una fecha a otra en las cuentas de patrimonio se explican, entre otros factores, por los flujos que se registran durante el período considerado<sup>3</sup>. Con la introducción de la cuenta de variaciones de patrimonio, que describe la evolución del patrimonio desde final de un año hasta el final del año siguiente, se invalida la visión de las cuentas de patrimonio y las cuentas de flujo como dos elementos independientes. Asimismo la cuenta de variaciones de patrimonio explicita la coherencia entre los flujos y los stocks.

En este contexto, la evaluación del patrimonio nacional y, por tanto, el conocimiento de su estado y composición, resulta de un gran interés para el análisis económico general ya que proporciona una nueva plataforma para la realización de estudios de economía aplicada. Ahora, en la situación descrita, resulta factible abordar el estudio de algunos de los principales problemas económicos (inflación, desempleo, etc) desde una perspectiva, según la cual los análisis en términos de flujos se replantearán en función de los stocks que los generan. Asimismo, la información suministrada por estas cuentas se puede utilizar para introducir algunos análisis adicionales, por ejemplo, sobre la financiación de la formación de capital, el impacto de la inflación en la distribución sectorial de la riqueza, los efectos de la política monetaria y fiscal en la estructura de los activos y pasivos, etc. Además, el cálculo de las cuentas de patrimonio capacita para la emisión de diagnósticos sobre la potencialidad de crecimiento de la economía nacional y sobre los posibles desequilibrios que dicha economía pueda presentar con respecto a la de otros países. La evaluación del patrimonio del conjunto de agentes económicos permite apreciar cómo se produce el reparto de la riqueza entre los principales polos económicos, desentrañar las relaciones entre los diferentes agentes y, en definitiva, poder aportar una primera respuesta a preguntas tan básicas como ¿quien posee qué?, ¿quien financia qué?, etc.

<sup>3</sup> Entre los componentes de la variación del patrimonio, excluidos los flujos que ya han sido citados, se encuentran también: el consumo de capital fijo, entendido como la depreciación sufrida en el curso del período considerado por el capital fijo, que resulta de su utilización normal o de la obsolescencia previsible y comprende una previsión para pérdidas de bienes de capital fijo debidas a daños accidentales asegurables; la creación neta de activos no producidos; las variaciones producidas por acontecimientos excepcionales o imprevistos; las modificaciones del valor que resultan de la alteración de los precios.

---

A modo de conclusión del epígrafe, se puede decir que la ampliación del sistema de cuentas nacionales a las cuentas de patrimonio abre vastas perspectivas analíticas. Pero debemos atemperar la aseveración anterior recordando que su implementación aún plantea numerosos problemas pendientes de resolución. Por tanto, el debate para aportar soluciones continúa abierto.

### **3. PROBLEMAS CONCEPTUALES QUE SE PLANTEAN EN EL AMBITO DE LA CONTABILIDAD PATRIMONIAL.**

Quando se pretende abordar la elaboración de las cuentas de patrimonio se plantea un primer problema, la delimitación de su campo conceptual. En la actualidad se ha consensuado la utilización del término patrimonio para designar el objeto de estudio que aquí nos ocupa<sup>4</sup>. No obstante, si se revisa la literatura económica especializada elaborada en los años precedentes, se constata que los autores utilizaron en sus trabajos términos diversos (riqueza nacional, fortuna nacional, capital nacional, patrimonio nacional, stock de capital, etc). Según opina Vanoli (1980) la utilización del vocablo patrimonio cuenta con la ventaja que presenta un significado más amplio hoy que en el pasado y, también, menos cargado de connotaciones teóricas o doctrinales. No obstante, por la insuficiencia en su delimitación, no disipa las dificultades que conlleva el objeto que designa.

Tras haber asumido la utilización del término patrimonio, se debe acotar cuál debe ser su contenido. Pichot (1988) considera que el concepto de patrimonio utilizado en Contabilidad Nacional debe encontrar su sustento en la noción jurídica de propiedad y, por tanto, el concepto de propiedad debe constituir el fundamento para la definición del patrimonio. Debe destacarse que esta noción resulta patrimonio es restrictiva ya que excluye a determinados elementos (Le Laidier et al.,1991).

Si se revisan las directivas internacionales relativas al establecimiento de cuentas de patrimonio (Naciones Unidas,1977), se constata que lo expuesto concuerda con los criterios generales que en ellas se establecen para la elaboración de las cuentas de patrimonio: las cuentas tan sólo deben integrar aquellos elementos para los que se puede calcular su valor de forma razonable; y, la necesidad de mantener la coherencia con los conceptos y definiciones que ya se encuentran establecidos para las cuentas de flujo.

Por tanto, resulta obvio el interés que comporta el poder realizar una medición razonable del valor de los elementos que componen el patrimonio. Llegados a este punto, se debe tener presente que la evaluación monetaria del patrimonio depende de los elementos cuya valoración se contempla y de las convenciones de valoración adoptadas. Por tanto, cuando se aborda la elaboración de estas cuentas se plantean dos problemas conceptuales fundamentales: la delimitación del campo

---

<sup>4</sup> Vanoli (1980), en el artículo titulado *Quelques reflexions sur la notion de patrimoine* presenta una reflexión sobre la tendencia observada en el momento de su publicación, a sustituir los términos fortuna, riqueza o capital, por el de patrimonio para designar al objeto de las cuentas patrimoniales.

<sup>5</sup> En el SECN base 1980, la acepción de Patrimonio seleccionada se sustenta en la noción jurídica de propiedad (INSEE,1987) y se define como el estado de los haberes (tangibles, intangibles, créditos) y los débitos de una unidad en un momento dado (Muller y Bournay,1991).

que resulta propio para las cuentas de patrimonio y la selección de los principios de valoración que se van a aplicar.

Cuando analizan los contenidos que se van a asignar a las cuentas de patrimonio, se detectan algunas dificultades que conducen a la exclusión de algunos de los elementos que a priori se podría considerar que debían figurar en las mismas. Si tomamos como referencia la experiencia de otros países que nos han precedido en su elaboración, por ejemplo la del INSEE, se puede comprobar que la no inclusión de determinados elementos en las cuentas de patrimonio, puede encontrar justificación tanto por razones empíricas como por razones metodológicas<sup>6</sup>. En líneas generales, las exclusiones que se operan se pueden clasificar en dos categorías (Muller y Bournay, 1991). Una primera categoría de exclusiones se sustenta en la preocupación por la obtención de una medida razonable. En ella se incluyen aquellos elementos que no disponen de valor mercantil y que, generalmente, no resultan apropiables por una unidad determinada. La segunda engloba a los elementos cuya integración no se puede abordar sin modificar algunos de los conceptos y tratamientos que se utilizan en la Contabilidad Nacional: definición de los conceptos de producción, de capital, de ahorro, etc, de manera que éstos resulten válidos para el conjunto de cuentas del sistema de contabilidad nacional. En este caso, por tanto, las exclusiones se producen por la necesidad de mantener la coherencia conceptual con las cuentas de flujo.

Teniendo en cuenta todas las consideraciones expuestas, el campo de las cuentas de patrimonio queda circunscrito a los contenidos recogidos en la Tabla nº1. El cuadro que se presenta recoge el contenido efectivo de las cuentas de patrimonio en el SECN-80 y, resulta ilustrativo y de interés por adecuarse a las directrices promulgadas por Eurostat.

Tras haber presentado la acepción de patrimonio y los elementos que van a ser considerados para la elaboración de las cuentas de patrimonio, debemos tratar otro problema conceptual de difícil resolución, nos referimos a la elección del sistema de valoración. Cuando se aborda la valoración de los elementos que componen el patrimonio, se debe garantizar que ésta se realice de forma que los principios seleccionados posibiliten una interpretación significativa de las relaciones entre flujos y las variaciones de patrimonio, garanticen la coherencia general de las cuentas, de manera que se puedan agregar y comparar los patrimonios de las unidades en una fecha determinada y faciliten los objetivos analíticos previstos. El cumplimiento de estas premisas limita el margen de maniobra posible en la búsqueda de las posibles soluciones para solventar el problema de la obtención de una valoración adecuada.

Si recurrimos una vez más a las soluciones adoptadas en el SECN-80, cuando queremos explicitar las soluciones adoptadas por algún sistema de contabilidad nacional que tenga experiencia en la elaboración de las cuentas de patrimonio, podemos identificar los principales criterios de valoración que se consideran operativos (INSEE, 1987):

<sup>6</sup> En el SECN base 1980, los elementos que se excluyen de las cuentas de patrimonio son: el capital ecológico y el capital natural, el capital humano, el patrimonio público (en parte), los bienes duraderos de las familias, los bienes militares, las provisiones constituidas por las empresas y los derechos de pensión en régimen de repartición (INSEE, 1987).

- \* Valor de mercado del activo, en el estado en que se encuentra, en el momento en que se produce su valoración, es decir su valor de transacción.
- \* Valor de reemplazamiento, es decir el coste de reposición del bien de manera que el valor de uso no se vea alterado.
- \* Valor actualizado neto, obtenido a partir de la capitalización de los rendimientos netos esperados de la utilización del elemento patrimonial durante su vida útil.

**Tabla nº 1. Elementos que integran la cuenta de patrimonio**

|  |  | Activo   | Pasivo  |
|--|--|--|---|
| A<br>C<br>T<br>I<br>V<br>O<br>S<br><br>T<br>A<br>N<br>G<br>I<br>B<br>L<br>E<br>S | N<br>O<br><br>R<br>E<br>P<br>O<br>S<br>I<br>C. | <b>ACTIVOS FIJOS</b><br>Edificios residenciales (*)<br>Otras construcciones (*)<br>Material de transporte<br>Maquinaria y otros bienes de equipo<br>Cabaña animal<br><br><b>STOCKS</b><br>Trabajos en curso<br>Bienes en stock de los productores<br>Bienes en stock de los usuarios<br>Bienes en stock de los comercios   |   |
|  |  | <b>TERRENOS</b><br>Terrenos sobre los que se han erigido las edificaciones y las otras construcciones (*)<br>Terrenos cultivados o plantados<br>Diversos<br><br><b>MONUMENTOS HISTÓRICOS</b><br>(Que hayan sido objeto de una operación en la cuenta de capital<br><br><b>RECURSOS DEL SUBSUELO</b><br>(Únicamente las canteras que hayan sido objeto de una transacción |   |
|  |  | <b>ACTIVOS INTANGIBLES NO FINAN.</b><br>ACTIVOS INTANGIBLES NO FINANCIEROS<br>(Hayan sido objeto de una operación en la cuenta de capital).  |   |
| ACTIVOS Y PASIVOS FINANC.  |  | Medios de pago internacionales<br>Moneda<br>Depósitos no monetarios<br>Bonos negociables<br>Obligaciones<br>Acciones y otras participaciones<br>Créditos a corto plazo<br>Créditos a medio y largo plazo<br>Reservas técnicas de seguro  | Medios de pago internacionales<br>Moneda<br>Depósitos no monetarios<br>Bonos negociables<br>Obligaciones<br>Acciones y otras participaciones<br>Créditos a corto plazo<br>Créditos a medio y largo plazo<br>Reservas técnicas de seguro |
|  |  |  | <b>SALDO (Valor neto)</b>   |

(\*) En el SECN-80, el valor de los terrenos edificados se incluye en el valor del patrimonio en vivienda y en el patrimonio en otras construcciones (edificaciones no residenciales e infraestructuras). Fuente: (INSEE, 1987) (Le Laidier et al., 1991).

En principio, el valor de mercado es el criterio de valoración que mejor satisface los objetivos que se plantean en el contexto en el que nos encontramos, ya que es el método más coherente con las cuentas de flujo y, también, es el criterio más externo a los agentes y, por tanto, el más objetivo. No obstante, en ciertos casos la ausencia de un mercado de referencia comporta la imposibilidad de obtener una medición directa. Este es el caso de muchos de los activos fijos reproducibles. Cuando no se pueda obtener el precio de mercado de los elementos considerados o bien resulte poco representativo, se puede recurrir a la utilización con carácter sustitutivo de otro criterio. En estos casos se puede intentar la medición del valor mediante la utilización del valor de reemplazamiento. Este criterio resulta apropiado para la valoración de los activos fijos tangibles producidos<sup>7</sup>. Finalmente, procede revisar el caso del valor actualizado neto. Según Le Laidier, Muller, Peyroux y Willard (1991), la utilización de este criterio queda restringida para casos muy particulares, cuando el valor de mercado y el valor de reemplazamiento no resultan adecuados. La difusión en la utilización de este criterio se ve mermada porque su utilización a nivel macroeconómico resulta delicada, tanto para la determinación anticipada de los rendimientos futuros como para la selección de la tasa de actualización adecuada. Por ello, autores como Muller y Bournay (1991) propugnan el descarte de este criterio.

#### **4. ESTIMACIONES DEL PATRIMONIO: EL CASO PARTICULAR DE LAS INFRAESTRUCTURAS EN CARRETERAS**

Para profundizar en el análisis de las dificultades que comporta la implementación de las cuentas de patrimonio, centraremos nuestra atención en el caso particular de las infraestructuras en carreteras, inscritas en la categoría de los activos fijos reproducibles.

Con el tratamiento específico del caso de las infraestructuras en carreteras se pretende profundizar en las dificultades que aparecen cuando se pretende evaluar la cuantía del stock de una categoría de elementos incluida en las cuentas de patrimonio. Su elección se puede argumentar, además, recordando la importancia analítica que presenta la cuantificación monetaria de los stocks en infraestructuras en carreteras, para el estudio de los efectos que estos puedan tener sobre el crecimiento económico, los desequilibrios territoriales, etc. Así, por ejemplo, el análisis de la medida en que la provisión de los servicios que se derivan de la existencia de infraestructuras beneficia a consumidores y productores, requiere la disponibilidad de datos que resulten adecuados para dicho análisis. Entre éstos se encuentran los que pueden proporcionar las cuentas de patrimonio.

De manera general, se puede establecer que entre las principales dificultades que se encuentran cuando se pretende poner en marcha la contabilidad patrimonial, cabe citar la dificultad que comporta la recogida, agrupación y armonización de un conjunto de información dispersa y diversa.

<sup>7</sup> Este criterio resulta de utilidad para valorar activos en los que la evaluación se sustenta en un modelo de simulación de la acumulación. En determinadas circunstancias, la determinación del valor de reemplazamiento se puede sustentar en un método indirecto al que se denomina Método del Inventario Permanente.

En el caso particular de la medición de la dotación de infraestructuras en carreteras en términos monetarios, debe destacarse que ésta plantea serias dificultades. Cabe precisar que esta problemática se agudiza cuando se trueca el ámbito estatal por uno más reducido (comunidades autónomas, comarcas, etc).

Cuando se quiere abordar el cálculo del capital público en infraestructuras en carreteras se identifican dos vías metodológicas alternativas que, en ocasiones, pueden resultar complementarias: la estimación directa y la estimación indirecta.

La primera de ellas, la estimación directa del patrimonio en carreteras<sup>8</sup>, se sustenta en la estimación del valor de reemplazamiento del bien de capital considerado, valor que deberá ser disminuido según la depreciación acaecida en el momento de referencia. Desglosando con mayor detalle la manera de proceder, en primer lugar, se debe calcular el coste que comportaría volver a construir la red actual. Para ello, con ayuda de la información contenida en los Inventarios de Características Geométricas, se deberá establecer una tipología que permita categorizar los diferentes tipos de tramos de carretera. A continuación, se deben identificar los costes genéricos de construcción por kilómetro, para cada una de las categorías identificadas. Finalmente, se procede al cálculo del coste total de construcción de la red de carreteras. En segundo lugar, tras haberse realizado el cómputo que acaba de ser descrito, deberá procederse a la minoración del coste global de construcción según la cuantía de la depreciación actual.

La segunda vía de estimación del patrimonio en infraestructuras viarias se sustenta en un método que se puede calificar como indirecto: el Método del Inventario Permanente<sup>9</sup>. El MIP parte de la consideración que cuando se plantea el estudio de la cuantía de capital fijo, en un determinado momento del tiempo, se constata que éste se encuentra constituido por diversos bienes de capital que se han ido incorporando en períodos anteriores al considerado y que formarán parte del mismo hasta que finalice su vida activa en un futuro que puede encontrarse más o menos lejano. Trabajando con precios constantes, se verifican las siguientes ecuaciones:

$$\overline{KB}_t = \overline{KB}_{t-1} + \overline{I}_t - \overline{R}_t$$

$$\overline{KN}_t = \overline{KN}_{t-1} + \overline{I}_t - \overline{A}_t$$

Donde:  $\overline{KB}_t$  representa el capital bruto a final de año,  $\overline{KN}_t$  el capital neto a final de año,  $\overline{I}_t$  la inversión (FBCF),  $\overline{R}_t$  los retiros y  $\overline{A}_t$  la amortización (CCF).

<sup>8</sup>En el SECN-71, cuando se elaboraron las cuentas de patrimonio por primera vez, el valor de la red de carreteras se evaluó en montante bruto, por un método directo, a partir de datos físicos. En España, también se ha utilizado esta metodología, aunque fuera de la órbita de la contabilidad patrimonial. Es el caso de la valoración patrimonial de la red de carreteras del País Vasco, realizada por Urtagondo, Aldama, y Ferraz (1989).

<sup>9</sup>La utilización del Método del Inventario Permanente cuenta con una amplia tradición en algunos países de nuestro entorno (Francia, Gran Bretaña, Holanda, Suecia, USA, etc). Así, por ejemplo, en las notas metodológicas del INSEE se presenta a este método como el apropiado para proceder a la estimación patrimonial de los activos fijos reproducibles (INSEE, 1987). Este método también se ha utilizado, en algunos estudios realizados en España, para estimar las dotaciones en infraestructuras (Argimón y Martín, 1993) (Mas et al., 1993).

A modo de síntesis, podemos enunciar que este procedimiento se sustenta en la simulación de la acumulación de los flujos pasados de inversión, deduciendo el valor acumulado de la inversión retirada (al final de su vida útil) y descontando la depreciación del stock de capital bruto existente. Se debe reseñar la relevancia que tiene desde esta perspectiva metodológica la selección adecuada de las funciones de supervivencia y de depreciación, una estimación ajustada de la vida media de los activos, el trabajo con deflatores, etc.

Tras la presentación de las principales características de cada una de las dos soluciones metodológicas que se han presentado, se analizarán los datos, que constituyen el input de dichos métodos. Resulta ineludible la necesidad de disponer de unos datos fiables y adecuados para que se pueda materializar la traslación empírica de los modelos teórico-estadísticos diseñados para obtener la información necesaria para cumplimentar el apartado de las cuentas de patrimonio que ahora estamos considerando.

Una prospección exploratoria de las fuentes documentales, permite comprobar que los datos disponibles presentan un amplia diversidad según su naturaleza (datos físicos, datos monetarios, etc), según su presentación (los datos se proporcionan con diversos formatos, variando el nivel de desagregación, los criterios de clasificación, etc). La pluralidad de fuentes y presentaciones alerta sobre la necesidad de introducir un proceso de armonización y depuración conducente a la obtención de las series de datos que resultan necesarias.

Para evaluar las necesidades específicas que presentan los modelos esbozados anteriormente, se aborda en primer lugar la revisión del método para la estimación directa. Como ya se ha indicado anteriormente, ésta requiere la clasificación de los tramos de carretera en categorías exhaustivas y excluyentes, para las que sea posible determinar los costes de construcción (por kilómetro). Para la identificación adecuada de las categorías se precisan datos físicos sobre la red de carreteras<sup>10</sup>, como por ejemplo: la categoría en la red, el tipo de terreno por el que discurre (pendiente media ponderada), la anchura de plataforma, etc.

Para determinar los costes de construcción, puede resultar muy útil la cooperación de los responsables de la red de carreteras en cada una de las administraciones implicadas. Los costes unitarios por kilómetro se pueden determinar, en el caso de las obras de nueva construcción, con ayuda de los presupuestos de liquidación de los proyectos terminados de los últimos años. Para calcular la depreciación de la red se puede adoptar el procedimiento de suponer que la cuantía de la depreciación equivale a las obras que hay que realizar para mantener la red de carreteras en un estado razonable, sin que se produzcan ampliaciones ni aumentos de capacidad sensibles (Urtagondo et al., 1989).

Con respecto a las necesidades de información que comporta la estimación indirecta del patrimonio en carreteras, mediante la aplicación del Método del Inventario Permanente, se pueden identificar algunos requerimientos. En primer lugar, para la implementación del modelo de acumu-

<sup>10</sup> En el País Vasco los datos físicos de la red de carreteras se encuentran compilados en el *Inventario de Características Geométricas y Tipológicas*, y en Cataluña en el *Catálogo de la Red*.

---

lación, se precisa la serie de inversión pública en carreteras. La obtención de esta serie se complica en el caso de algunas Comunidades Autónomas, como por ejemplo Cataluña, en las que la inversión en infraestructuras viarias se realiza desde tres administraciones: la propia Comunidad Autónoma, el Estado y las Diputaciones. Para construir la serie de inversión se puede recurrir a las siguientes fuentes de información: datos de naturaleza contable que se presentan en las diferentes elaboraciones de la Contabilidad Nacional de España y de la Cuentas de las Administraciones Públicas, datos extraídos de los presupuestos presentados por las Administraciones Públicas y otros datos recogidos en anuarios y publicaciones especializadas.

En la medida en que la aplicación de esta metodología requiere la disponibilidad de largas series de inversión, plantea la necesidad de recurrir a una utilización combinada de fuentes de diversa naturaleza. Esta circunstancia conlleva la necesidad de compatibilizar dichos datos. Además, la aplicación del MIP requiere información sobre la vida media de las infraestructuras consideradas y, también, sobre la depreciación del stock de capital.

Aunque el MIP es el método que se utiliza tradicionalmente para la cuantificación monetaria de las dotaciones de carreteras en el ámbito de la Contabilidad Patrimonial, algunos autores lo critican. Draper y Herce (1993) indican que *este método supone que el precio de compra de una unidad de capital, usado para ponderar cada unidad del stock, refleja el valor descontado de sus beneficios marginales presentes y futuros, supuesto que sólo se satisface en presencia de mercados perfectamente competitivos y, en la realidad, en la medida en que el gobierno no está sujeto a restricciones competitivas o de mercado, el precio no refleja la productividad marginal del capital público*. Asimismo, señalan que *una determinada proporción de la inversión bruta de cada período se usa para reponer el capital que se ha depreciado, lo que requiere estimaciones ajustadas de la vida media de los activos, la tasa de reemplazamiento y la función de depreciación*.

Tras analizar las características de cada uno de los métodos y los datos que precisan para su implementación, se puede plantear una tercera vía que es la que resultaría de su aplicación conjunta. Como se ha comentado anteriormente, en algunos estudios se ha planteado la estimación del stock de infraestructuras a nivel estatal y en otros a nivel autonómico. Pues bien, en la comunidad autónoma de Cataluña existe otra unidad territorial de ámbito territorial menor, con entidad analítica: la comarca. La estimación del patrimonio en carreteras de Cataluña desagregado por comarcas, constituye una tarea difícil. Esto es así, ya que la disponibilidad de los datos necesarios en este tipo de trabajos se empobrece a medida que descendemos en la escala de ámbito territorial. No obstante, para afrontar esta tarea en la que ya estamos trabajando, se puede recurrir a la utilización de una metodología mixta. De acuerdo con este planteamiento, en primer lugar, se plantea una estimación directa a partir de los datos físicos que proporciona el Catálogo de la Red y, posteriormente, se completará hasta la actualidad la serie de stocks, con la ayuda del MIP.

A modo de conclusión, debe explicitarse las dificultades que plantean los datos disponibles, en cuanto a su cantidad y calidad, para la cumplimentación de las cuentas de patrimonio. Además, de lo expuesto se deriva que la aplicación de los métodos presentados no se encuentra exenta de problemas. Por tanto, no se ha adoptado aún ninguna solución que constituya la solución final, por lo que serán precisas nuevas aportaciones para aproximarse a ésta.



## BIBLIOGRAFÍA:

Argimón, I. y Martín, M.J. (1993) Series de stock de infraestructuras del estado y de las Administraciones Públicas en España. Banco de España. Servicio de estudios, Documento de Trabajo DT-9315.

Blades, D.W. (1980). Survey of country practices in compiling balance-sheet statistics. The Review of Income and Wealth, Series 26, 3, 325-340.

Draper, M. y Herce J.A. (1993) Infraestructuras. Fundación de Estudios de Economía Aplicada,

Documento de trabajo 93-07.

INSEE. (1987) Système élargi de comptabilité nationale (Base 1980). Cap.9: Comptes de patrimoine. Les Collections de l'INSEE, C140-141.

Le Laidier, Muller, Peyroux y Willard. (1991) Comptes de Patrimoine en base 1980. Note de base 59/220. INSEE.

Mas, M.; Pérez, F. y Uriel, E. (1993) Estimaciones de las dotaciones del capital público en España. I Simposio sobre igualdad y distribución de la renta y la riqueza. Volumen III: La distribución de la riqueza. Fundación Argentaria.

Muller, P. y Bournay, J. (1991) Les apports des comptes de patrimoine a la comptabilité nationale. IV Colloque de Comptabilité Nationale. Actes des Colloques de l'Association de Comptabilité Nationale.

Murillo, J (1995) La estimación del valor de las dotaciones en infraestructuras de transporte: métodos y fuentes de información. Departamento de Econometría, Estadística y Economía Española. Documento de Trabajo 95R07.

Naciones Unidas (1977). Directives internationales provisoires relatives aux comptes de patrimoine et d'ajustement nationaux et sectoriels du système de comptabilité nationale. Etudes statistiques, série M, nº 60.

Pichot, A. (1988) Comptabilité nationale et modèles économiques. Presses Universitaires de France.

Urtagondo, E., Aldama, J. y Ferraz, J. (1989) Valoración patrimonial de la red de carreteras del País Vasco.

Vanoli, A. (1980) Quelques reflexions sur la notion de patrimoine. En: INSEE (1980) Les comptes de patrimoine, une première expérience 1971-1972-1976, Les Collections de l'INSEE, C89-90.

Vanoli, A. (1985) Sur la structure générale du SCN à partir de l'expérience du SECN français. Communication à la 19 Conférence de l'IARIW.



# AJUSTE DE UN MODELO BETA CON INFORMACIÓN ADICIONAL SOBRE SU APUNTAMIENTO

PÉREZ RODRÍGUEZ, EDUARDO

Facultad de C.C. E.E. y E.E.  
Universidad de Granada

## 1. INTRODUCCIÓN

En diversos trabajos, (p.e. Sasiени (1986), Moitra (1990)), se ha puesto de manifiesto la imposibilidad de determinar los cuatro parámetros de una distribución beta,  $a$ ,  $b$ ,  $p$  y  $q$ , a partir de, las ya clásicas, tres estimaciones periciales. La estimación optimista (en el PERT tiempos) se considera igual al parámetro  $a$  (extremo inferior del intervalo de variación), la pesimista se considera igual al parámetro  $b$  (extremo superior del intervalo) y con la estimación más probable, que se considera igual a la moda de la distribución, sólo se obtiene una relación lineal entre los parámetros  $p$  y  $q$ . (Véase Herrerías y Pérez (1991)).

Así pues, es precisa información adicional para determinar esos parámetros, y esa información puede provenir de hipótesis simplificadoras, como es el caso del PERT clásico, véase Littlefield y Randolph (1987), o puede recabarse del experto. En este segundo caso, las preguntas a formular al perito han de reunir un equilibrio entre una interpretación muy intuitiva, lo que hace posible la obtención de respuestas fiables, y una cómoda incorporación de la información así obtenida en el armazón teórico de la distribución beta.

En esta línea de trabajo, que podemos titular "obtención de información adicional", cabe citar los trabajos de Chae y Kim (1990) y de Moitra (1990), en los que, respectivamente, se formulan preguntas sobre la verosimilitud relativa de la moda y sobre la asimetría de la distribución.

Este artículo también persigue la obtención de información adicional, desarrollando una argumentación que permite incorporar información "blanda" sobre el apuntamiento de la distribución beta.

## 2.- EL MODELO

En la metodología PERT se trabaja con la distribución beta de forma acampanada, i.e. con parámetros  $p$  y  $q$  estrictamente mayores que 1, cuyas características vienen dadas por: (véase Dumas de Raully (1968))

$$(\text{moda}) \quad m = \frac{p-1}{p+q-2}b + \frac{q-1}{p+q-2}a$$

$$(\text{media}) \quad \mu = \frac{p}{p+q}b + \frac{q}{p+q}a \quad (2)$$

$$(\text{varianza}) \quad \sigma^2 = \frac{pq(b-a)^2}{(p+q+1)(p+q)^2} \quad (3)$$

Utilizando el parámetro K, definido como  $K = p+q-2$ , a partir de (1) se obtiene que

$$p = 1 + K \frac{m-a}{b-a}$$

$$q = 1 + K \frac{b-m}{b-a}$$

Estas fórmulas tienen la virtud de indicar claramente la existencia de una infinidad de modelos beta, sobre el mismo intervalo (a,b), con la misma moda m. Para cada valor de K, y puede tomar todos los del intervalo  $(0, +\infty)$ , hay una distribución beta distinta que satisface esos tres requisitos, cuya media y varianza vienen dadas por

$$\mu = \frac{a + Km + b}{K + 2}$$

$$\sigma^2 = \frac{K^2(m-a)(b-m) + (K+1)(b-a)^2}{(K+3)(K+2)^2}$$

(Véanse Golenko-Ginzburg (1988) y Herrerías (1989)).

Si se pudiese solicitar al experto información sobre este parámetro K estaría resuelto el problema de la individualización de un único modelo, pero desgraciadamente, al no tener dicho parámetro una interpretación intuitiva, ello no es posible.

### 3. POSICIÓN RELATIVA DE MEDIA Y MODA

Si además de la moda y la media de la distribución, dadas por (1) y (2), se considera el centro del intervalo (a,b)

$$c = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a$$

fácilmente puede comprobarse que

$$p < q \leftrightarrow m < \mu < c$$

$$p > q \leftrightarrow c < \mu < m$$

$$p = q \leftrightarrow c < \mu < c$$

En otras palabras, cuando el experto proporciona las tres estimaciones,  $a, b$  y  $m$ , si resulta que  $m=c$  entonces se tiene la certeza de que la media,  $\mu$ , ha de coincidir con la moda,  $m$ . En cambio, si  $m$  no coincide con el centro del intervalo entonces la media,  $\mu$ , ha de estar comprendida entre  $c$  y  $m$ , sin entrar en consideraciones sobre cual de los dos es mayor, y por tanto puede expresarse como combinación lineal convexa de ellos:

$$\mu = \alpha m + (1-\alpha)c, \quad \alpha \in (0,1)$$

#### 4. INTERPRETACIÓN Y GRADUACIÓN DEL PARÁMETRO

El coeficiente  $\alpha$  de la expresión (7) tiene una cómoda interpretación intuitiva, indica la proximidad entre  $m$  y  $\mu$  (cuanto mayor sea  $\alpha$  mayor será la proximidad entre ambos puntos), que se ve reforzada por el hecho de que sólo pueda tomar valores entre 0 y 1.

Por otro lado, al estar tratando con la distribución beta, que lo es sobre un intervalo finito y por tanto no tiene colas, la mayor o menor proximidad entre esas dos medidas de posición central es, de alguna forma, un indicador del mayor o menor apuntamiento de la distribución. Gráficamente la situación es la siguiente:

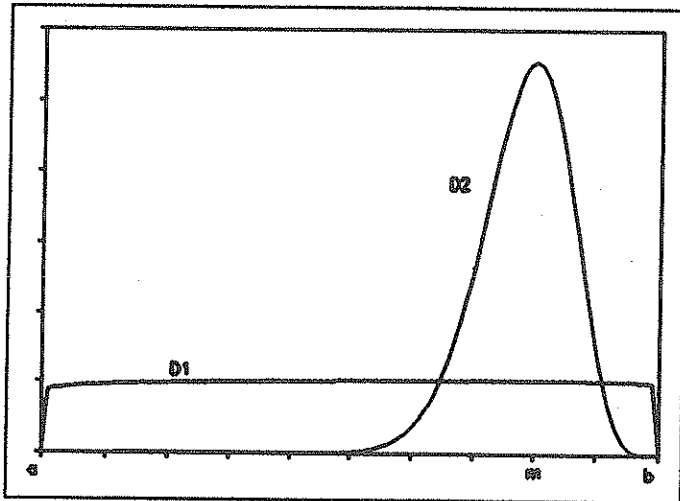
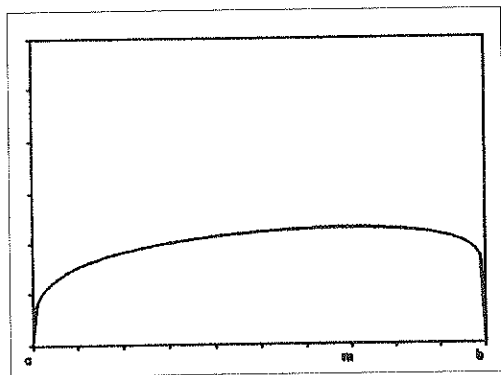


Figura 1. Distribuciones de beta sobre el intervalo  $(a, b)$  con moda  $m$

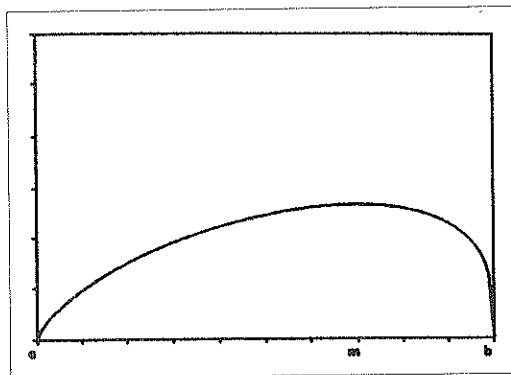
fijado el intervalo de variación  $(a,b)$ , y fijada la moda  $m$ , el modelo beta puede ir desde una distribución  $D_1$ , muy parecida a la uniforme, con un máximo muy suave en  $m$ , cuya media estaría muy próxima al centro del intervalo, hasta una distribución  $D_2$ , prácticamente degenerada, que presenta un máximo muy abrupto en  $m$ , y cuya media está muy próxima a  $m$ . Concluimos, pues, que el coeficiente  $\alpha$  puede considerarse como un indicador del mayor o menor apuntamiento de la distribución.

Aprovechando que sólo toma valores en el intervalo  $(0,1)$ , puede establecerse una graduación del apuntamiento en muy bajo, bajo, medio, alto y muy alto, sin más que considerar cinco puntos igualmente espaciados dentro del rango de variación, p.e.  $1/6$ ,  $2/6$ ,  $3/6$ ,  $4/6$ , y  $5/6$ .

Para obtener esta información bastaría con presentarle al experto los cinco modelos que aparecen en las Figuras 2-6, y pedirle que elija aquel que considera más adecuado. (Todas las figuras corresponden a distribuciones beta sobre el mismo intervalo  $(a,b)$  y con la misma moda  $m$ , sólo difieren en la curtosis).



*Figura 2. Apuntamiento muy bajo*



*Figura 3. Apuntamiento bajo*

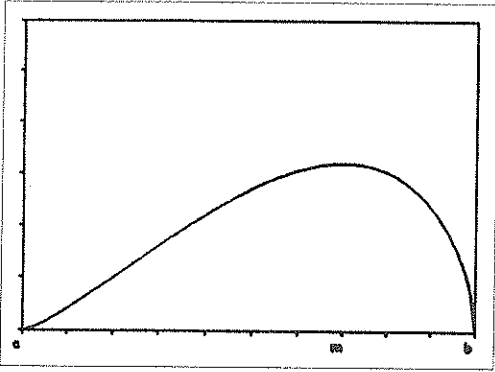


Figura 4. Apuntamiento medio

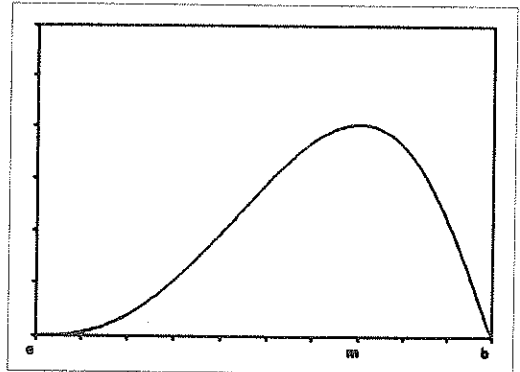


Figura 5. Apuntamiento alto.

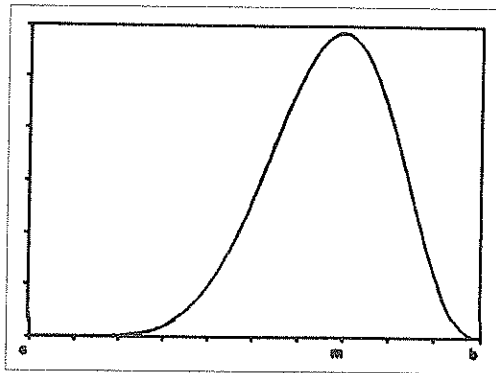


Figura 6. Apuntamiento muy alto.

Esta forma de proceder elude la formulación de preguntas del tipo: “La moda  $m$  que Vd. ha facilitado ¿es mucho más verosímil que otros valores cercanos?”, y facilita una respuesta más fiable por parte del experto.

## 5.- RELACIÓN ENTRE LOS PARÁMETROS $\alpha$ Y $K$ .-

De las expresiones (5) y (7) se obtiene

$$\alpha = \frac{K}{K+2} \text{ o lo que es lo mismo } K = \frac{2\alpha}{1-\alpha}$$

En la siguiente tabla, para cada respuesta cualitativa, aparecen los valores correspondientes de los parámetros  $\alpha$  y  $K$ , así como las características aleatorias de la distribución beta, obtenidas a partir de las fórmulas (5) y (6):

| Respuesta | a                           | K             | Media                     | Varianza                                       |
|-----------|-----------------------------|---------------|---------------------------|--|
| Muy bajo  | $\frac{1}{6}$               | $\frac{2}{5}$ | $\frac{5a + 2m + 5b}{12}$ | $\frac{20(m - a)(b - m) + 175(b - a)^2}{2448}$ |
| Bajo      | $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ | 1             | $\frac{a + m + b}{3}$     | $\frac{(m - a)(b - m) + 2(b - a)^2}{36}$       |
| Medio     | $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ | 2             | $\frac{a + 2m + b}{4}$    | $\frac{4(m - a)(b - m) + 3(b - a)^2}{80}$      |
| Alto      | $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ | 4             | $\frac{a + 4m + b}{6}$    | $\frac{16(m - a)(b - m) + 5(b - a)^2}{252}$    |
| Muy alto  | $\frac{5}{6}$               | 10            | $\frac{a + 10m + b}{12}$  | $\frac{100(m - a)(b - m) + 11(b - a)^2}{1872}$ |

## 6. COMENTARIOS

Sobre la anterior tabla, son dignas de realizarse dos observaciones:

- En el trabajo del Prof. Herrerías (1995), publicado en este mismo volumen, se propone la distribución beta con  $K=2$  como el mejor modelo a adoptar cuando sólo se dispone de las tres estimaciones clásicas. A la vista de la Tabla 1, ello equivale a suponer un grado medio de apuntamiento, i.e. en ausencia de información adicional sobre el apuntamiento se supone que este es de grado medio.
- En el tratamiento PERT clásico se utiliza, con algunas restricciones adicionales, la beta con  $K=4$ . Según la Tabla 1, ello equivale a suponer un alto grado de apuntamiento, sin disponer de ninguna información al respecto, lo cual, cuando menos, es muy atrevido.

## 7. BIBLIOGRAFÍA

CHAE, K.C. y KIM, S. (1990).- Estimating the Mean and Variance of PERT Activity Time Using Likelihood-Ratio of the Mode and the Midpoint.- I.I.E. Transaction, Vol.22, nº3, pp 198-203.

DUMAS DE RAULY, D. (1968).- L'Estimation Statistique.- Ed. Gauthier-Villars.

GOLENKO-GINZBURG, D. (1988).- On the Distribution of Activity Time in PERT.- J.Opl.Res.Soc., Vol.39, nº8, pp 767-771.

HERRERÍAS, R. (1989).- Utilización de Modelos Probabilísticos Alternativos para el Método PERT. Aplicación al Análisis de Inversiones.- Estudios de Economía Aplicada. Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Valladolid, pp. 89-112.



HERRERÍAS, R. y PÉREZ RODRÍGUEZ, E. (1991).- Estimación de una Distribución Beta como Modelo para su Utilización en el Método PERT.- Ponencias de la V Reunión ASEPELT-España. Ed. La Caja de Canarias, pp.1191-1199.

HERRERIAS, R. (1995).- Un Nuevo Uso de las Tres Estimaciones Subjetivas del PERT.- Trabajo presentado a la IX Reunión Asepelt-España, pendiente de publicación.

LITTLEFIELD, T.K. y RANDOLPH, P.H. (1987).- An Answer to Sasieni's Question on PERT Times.- Management Sci.33, pp 1357-1359.

MOITRA, S.D. (1990).- Skewness and the Beta Distribution.- J.Opl. Res. Soc., Vol 41, nº 10, pp 953-961.

SASIENI, M.W. (1986).- A Note on PERT Times.- Management Sci. 32, pp 1652-1653.



# MODELIZACION DINAMICO-BAYESIANA DE SERIES TEMPORALES UNIVARIANTES

MANUEL VARGAS VARGAS

MATIAS GAMEZ MARTINEZ

Fac. de Ciencias Económicas y Empresariales

Universidad de Castilla-La Mancha

## 1. INTRODUCCIÓN:

La información estadística puede venir dada en varias formas, normalmente clasificadas en información histórica y experiencia. Para el análisis de la primera podemos construir un modelo predictivo que cuantifique dicha información. Sin embargo, la segunda es, en muchos casos, de difícil o imposible cuantificación. A pesar de ello, no debería ser simplemente ignorada, sino combinada con el modelo formal. Es en esta situación donde el paradigma bayesiano proporciona un fundamento racional, coherente y formal para combinar ambos aspectos de la información.

El planteamiento bayesiano del análisis de series temporales está intimamente ligado a los modelos dinámicos. Cuando intentamos predecir un valor futuro aparece un grado de incertidumbre cuyo único tratamiento posible es a través de distribuciones de probabilidad. Como dicha predicción está condicionada por nuestro conocimiento, si éste cambia, nuestras predicciones han de cambiar. En otras palabras, nuestra incertidumbre sobre sucesos futuros ha de ser expresada en términos de probabilidades condicionadas.

Cuando construimos un modelo dinámico, estamos definiendo una relación cualitativa para la estructura subyacente a una serie temporal; sin embargo, cualquier cuantificación de dicha relación se considera sólo localmente apropiada. Esta idea es particularmente útil en el tratamiento de series económicas, ya que proporciona una gran flexibilidad en situaciones en las que la evolución temporal introduce cambios en el proceso subyacente a la serie.

Los modelos de espacio de estados parten de la idea de que una serie temporal  $y_t$  depende posiblemente de un estado inobservable,  $\theta_t$ , que está generado por un proceso estocástico. La relación entre  $y_t$  y  $\theta_t$  viene descrita por la ecuación de medida u observacional:

$$Y_t = F_t \theta_t + v_t$$

donde  $F_t$  es una matriz que puede depender del tiempo, y  $v_t$  es el error observacional, comúnmente asumido como ruido blanco.

El vector de estado, o estado de la naturaleza, está generado por el proceso dinámico

$$\theta_t = G_{t-1} \theta_{t-1} + w_{t-1}$$

que recibe el nombre de ecuación de transición y describe la dinámica del vector de estado.  $G_t$  es una matriz de coeficientes que puede depender del tiempo y  $w_t$  es un término de innovaciones que se supone también ruido blanco.

El aprendizaje bayesiano combina, mediante el teorema de Bayes, la información de las observaciones, expresada por la función de verosimilitud, con el estado de conocimiento del investigador antes de disponer de las observaciones temporales. Se dispone así de un mecanismo de actualización del conocimiento sobre la serie que se puede esquematizar como sigue:

1.- Denotemos por  $D_{t-1}$  el conocimiento existente en el instante  $(t-1)$ . Podemos expresar la información a priori sobre el vector de estado en el instante  $t$  mediante la distribución de  $\theta_t|D_{t-1}$ .

2.- La predicción a partir de la información a priori se generará a través de la ecuación de observación

$$Y_t|D_{t-1} = (F_t\theta_t|D_{t-1}) + (v_t|D_{t-1}) = F_t(\theta_t|D_{t-1}) + (v_t|D_{t-1})$$

3.- Ahora, considerando  $D_t = D_{t-1} \cup Y_t$ , podemos obtener la distribución a posteriori del vector de estado, que será proporcional al producto de la distribución a priori por la verosimilitud.

$$(\theta_t|D_t) \propto (Y_t|\theta_t, v_t) (\theta_t|D_{t-1})$$

4.- Por último, utilizando la ecuación de transición, podemos obtener la distribución a priori para el vector de estado en el instante  $(t+1)$  como

$$(\theta_{t+1}|D_t) = G_t(\theta_t|D_t) (w_t|D_t)$$

cerrándose así el ciclo «a priori-verosimilitud-a posteriori-a priori», fundamento del aprendizaje bayesiano.

Esta formulación permite una gran flexibilidad, tanto de análisis como de intervención, propiedad deseable dentro de un contexto dinámico como son las series temporales y de introducción de información extra-muestral propia del análisis bayesiano, y tan conveniente en la economía.

Por último, destacar que la suposición de normalidad para la distribución a priori en un planteamiento secuencial como el actual, presenta la ventaja de su facilidad operacional. Sin embargo, dicho criterio podría ampliarse a cualquier distribución de la familia exponencial regular sin grandes problemas.

## 2. PLANTEAMIENTO DEL MODELO

Sea  $\{Y_t; t=0,1,2,\dots,T\}$  una serie temporal. El modelo dinámico de espacio de estados se puede formular como sigue

$$\begin{aligned} Y_t &= F_t' \theta_t + v_t & v_t &\rightarrow N(0, \phi_t^{-1}) \\ \theta_t &= G_t \theta_{t-1} + w_t & w_t &\rightarrow t_{n_{t-1}}(0, W_t) \end{aligned}$$

donde  $\theta_t$  es el vector de estado, de dimensión  $(p \times 1)$ ;  $F_t$ , de dimensión  $(p \times 1)$ , resume cómo se integran los diversos componentes dentro de la serie;  $G_t$  es una matriz  $(p \times p)$  de transición y refleja el proceso estocástico de generación del vector de estado;  $v_t$  es el error observacional; y  $w_t$  es el vector de innovaciones en el vector de estado.

Dentro del planteamiento conjugado normal-gamma, denominando  $D_{t-1}$  al conjunto de información disponible en el instante  $(t-1)$ , el conocimiento sobre la precisión se modeliza mediante una distribución gamma

$$(\phi_{t-1} | D_{t-1}) \rightarrow G\left(\frac{n_{t-1}}{2}, \frac{d_{t-1}}{2}\right)$$

donde  $n_{t-1}$  son los grados de libertad y  $d_{t-1}$  la suma de los errores al cuadrado, podemos determinar la distribución a priori como

$$(\phi_t | D_{t-1}) \rightarrow G\left(\frac{n_{t-1}}{2}, \delta_t \frac{d_{t-1}}{2}\right)$$

con  $0 < \delta_t < 1$ . La introducción de este parámetro en la distribución a priori no afecta a la media, por ser el cociente de los argumentos de la distribución; sin embargo, la varianza se ve multiplicada por la constante  $\delta_t^{-1}$ . De esta forma, estamos introduciendo en el modelo el aumento de varianza producido por la incertidumbre derivada del paso de un instante temporal al siguiente.

También podemos modelizar el vector de estado en el instante  $(t-1)$  mediante

$$(\theta_{t-1} | D_{t-1}) \rightarrow t_{n_{t-1}}(m_{t-1}, C_{t-1})$$

con lo que podemos dar la distribución a priori para el vector de estado en el instante  $t$  como

$$(\theta_t | D_{t-1}) \rightarrow t_{\delta_t n_{t-1}}(a_t, R_t)$$

donde la actualización de los parámetros se realiza conforme a la ecuación de transición, por lo que

$$\begin{aligned} a_t &= G_t m_{t-1} \\ R_t &= G_t C_{t-1} G_t' + W_t \end{aligned}$$

Con estas distribuciones a priori, podemos obtener la distribución de la observación en el instante  $t$

$$(Y_t | D_{t-1}) \rightarrow t_{\delta_t, n_{t-1}} [f_t Q_t]$$

donde, según la ecuación de observación

$$\begin{aligned} f_t &= F_t' a_t \\ Q_t &= F_t' R_t F_t + S_{t-1} \\ S_{t-1} &= \frac{d_{t-1}}{n_{t-1}} \end{aligned}$$

En este punto, utilizando el teorema de Bayes, podemos actualizar el conocimiento sobre los parámetros, quedándonos las distribuciones a posteriori

$$\begin{aligned} (\theta_t | D_t) &\rightarrow t_{n_t} [m_t C_t] \\ (\theta_t | D_t) &\rightarrow G \left[ \frac{n_t}{2}, \frac{d_t}{2} \right] \end{aligned}$$

donde las actualizaciones son

$$\begin{aligned} m_t &= a_t + A_t e_t & C_t &= \left( \frac{S_t}{S_{t-1}} \right) [R_t - A_t A_t' Q_t] \\ e_t &= Y_t - f_t & A_t &= \frac{R_t F_t}{Q_t} \\ n_t &= \delta_t n_{t-1} + 1 & d_t &= \delta_t d_{t-1} + \frac{S_{t-1} e_t^2}{Q_t} \end{aligned}$$

completándose así el proceso de aprendizaje de los datos.

Hemos introducido toda la información disponible en la serie dentro de nuestro modelo de una forma coherente y bastante versátil. En particular, la formulación de un modelo lineal dinámico permite la introducción de información extramuestral en cualquier instante del período con sólo alterar la distribución a priori en ese período.

Otra ventaja interesante es la detección y tratamiento de anómalos. Supongamos que llamamos  $M$  al modelo propuesto por el algoritmo anterior y  $M_A$  a un modelo alternativo. Si definimos ahora

$$H_t = \frac{p(y_t | D_{t-1}, M)}{p(y_t | D_{t-1}, M_A)}$$

llamado factor de Bayes, este cociente nos permite cuantificar la evidencia a favor o en contra del modelo propuesto frente al alternativo. Con este mecanismo, Jeffreys (1961) sugiere que existe evi-

dencia a favor del modelo  $H < \frac{1}{10}$  alternativo cuando , siendo ésta fuerte cuando  $H < \frac{1}{100}$  . De esta forma, podemos detectar la presencia de outlier cuando el factor de Bayes

$$H_t(k) = \frac{p(Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_{t-k+1} | D_{t-k}, M)}{p(Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_{t-k+1} + D_{t-k}, M_A)}$$

indique evidencia contraria al modelo propuesto, siendo el modelo alternativo el resultante de la eliminación de la información contenida en el dato presuntamente anómalo. El hecho de tomar  $k$  períodos permite la detección de sólo aquellos anómalos que presentan influencia relativamente importante.

En el caso de estar interesados en un horizonte de predicción más amplio,  $\kappa \geq 1$ , las distribuciones predictivas proporcionadas por el modelo lineal dinámico serían

$$(\theta_{t+k} | D_t) \rightarrow t_{\delta_t, n_t} [a_t(k), R_t(k)]$$

$$(Y_{t+k} | D_t) \rightarrow t_{\delta_t, n_t} [f_t(k), Q_t(k)]$$

donde las actualizaciones futuras se hacen en función de

$$a_t(k) = G_{t+k} a_t(k+1) \quad a_t(0) = m_t$$

$$R_t(k) = G_{t+k} R_t(k-1) G'_{t+k} + W_{t+k} \quad R_t(0) = C_t$$

$$f_t(k) = F'_{t+k} a_t(k) \quad Q_t(k) = F'_{t+k} R_t(k) F_{t+k} + S_t$$

Por último, podemos obtener la distribución de los parámetros en cada instante del tiempo utilizando toda la información contenida en la serie. Para ello, hemos de estimar la distribución de  $y$  hacia atrás. De esta forma obtenemos

$$(\theta_{t+k} | D_t) \rightarrow t_{n_t(-k)} [a_t(-k), R_t(-k)]$$

$$(\phi_{t+k} | D_t) \rightarrow G \left[ \frac{n_t(-k)}{2}, \frac{d_t(-k)}{2} \right]$$

donde se tiene que

$$a_t(-k) = m_t - k - B_{t-k} [a_{t-k+1} - a_t(-k+1)]$$

$$R_t(-k) = C_{t-k} - B_{t-k} [R_{t-k+1} - R_t(-k+1)] B'_{t-k}$$

$$B_t = C_t G'_{t+1} R_{t+1}^{-1}$$

$$n_t(-k) = n_{t-k} + \delta_{t-k+1} (n_t(-k+1) - \delta_{t-k+1} n_{t-k})$$

$$S_t^{-1}(-k) = S_{t-k}^{-1} + \delta_{t-k+1} (S_t^{-1}(-k+1) - S_{t-k}^{-1})$$

$$d_t(-k) = n_t(-k) S_t(-k)$$

Así, obtenemos una estimación suavizada de los parámetros dado el conjunto de información disponible en el período muestral. Además, comparando estos resultados con los obtenidos en

cada instante podremos apreciar cómo la evolución futura modifica nuestro conocimiento sobre la serie.

### 3. ANÁLISIS EMPÍRICO

Para ilustrar el comportamiento del modelo propuesto, vamos a estudiar la serie de VABpm total a pesetas constantes para España<sup>1</sup>. Observando el desarrollo de la serie

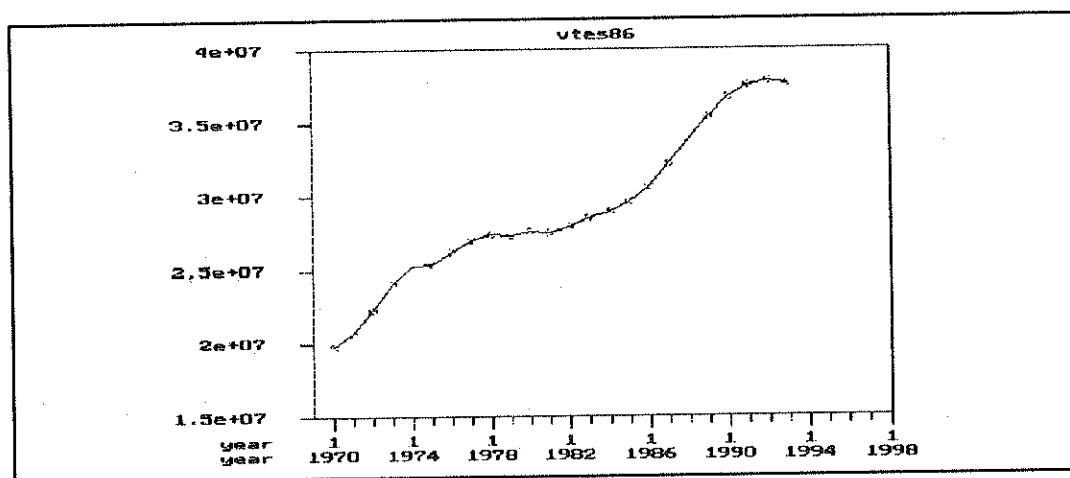


Gráfico 1

parece apropiado plantear un modelo que recoja una tendencia creciente junto a una componente cíclica en forma de onda con un período aproximado de una década. Con este esquema se obtiene un ajuste a la serie bastante aceptable

<sup>1</sup> Millones de pesetas de 1986. Fuente: Banco de Datos Hispalink.



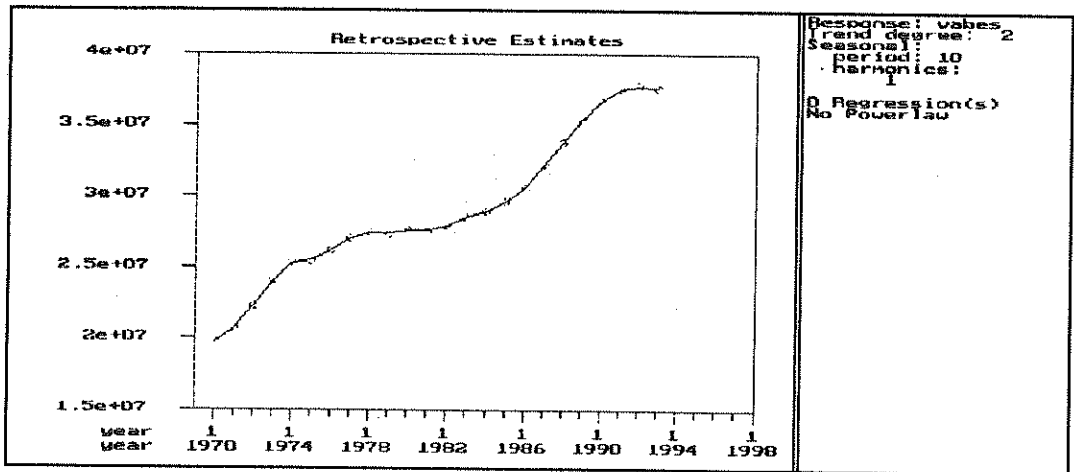


Gráfico 2

Los residuos del modelo se pueden considerar como ruido blanco, confirmando la adecuación a los datos

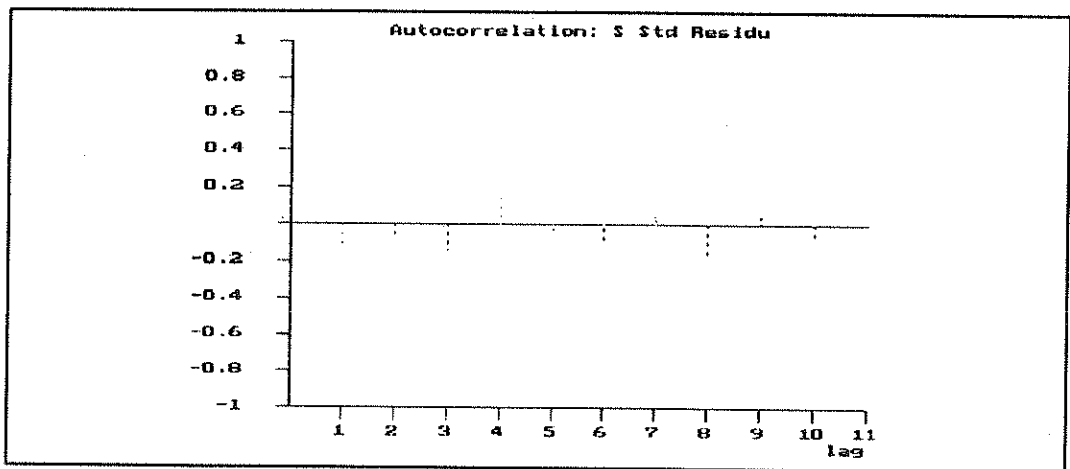


Gráfico 3

Una vez especificado el comportamiento, podemos utilizarlo para predecir valores de la serie hasta el año 2000 a partir de la información existente en 1993. Obtenemos

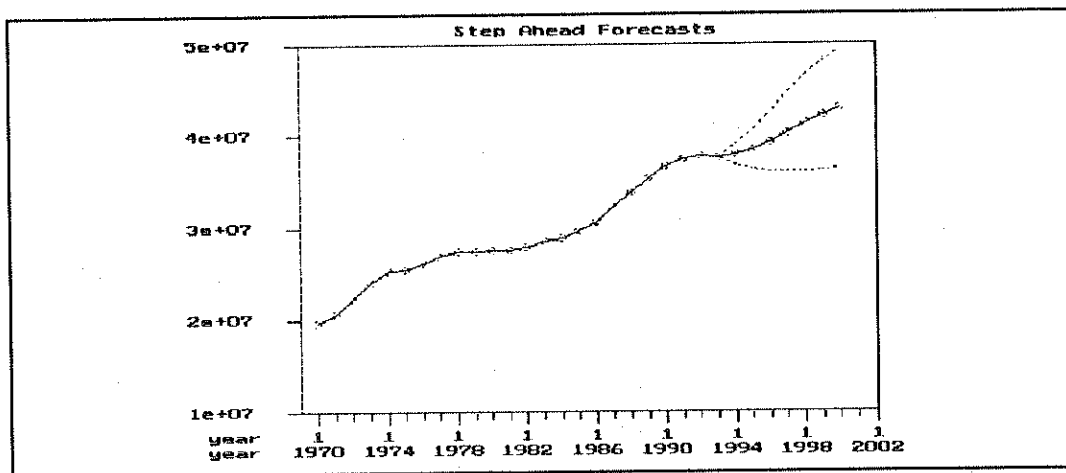


Gráfico 4.

donde podemos apreciar cómo el VABpm nacional aumenta a un ritmo moderado, reflejando la influencia de la componente cíclica antes mencionada. Las tasas de crecimiento resultantes se reflejan en la tabla 1.

Si analizamos el comportamiento de la serie de VABpm total en Castilla-La Mancha<sup>6</sup>, podemos apreciar un incremento de la tasa de variación a partir del año 1986. En este caso, se presenta también una tendencia creciente y una componente cíclica de tipo armónico, junto a una mayor "inercia" del VAB regional

<sup>6</sup>Millones de pesetas de 1986. Fuente: Banco de Datos Hispalink

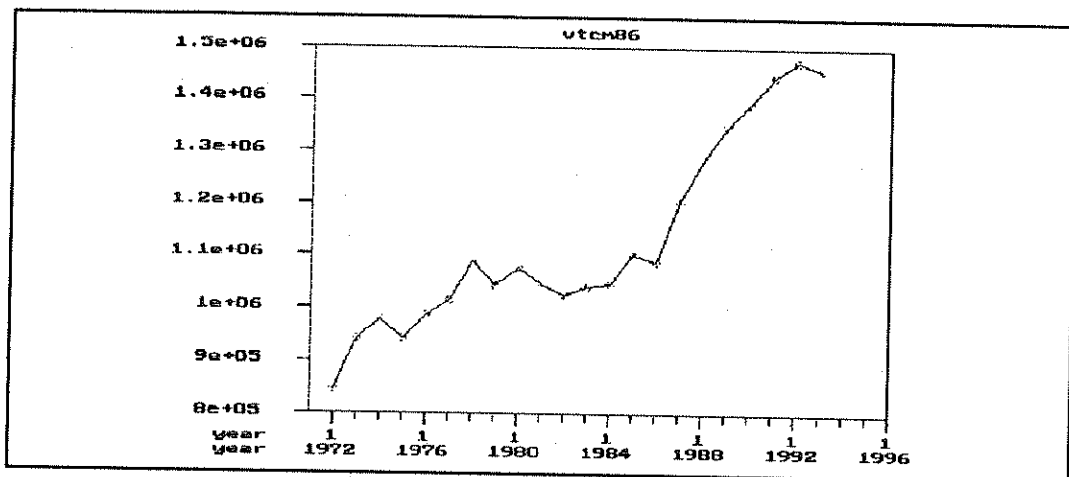


Gráfico 5

Se impone, asimismo, la necesidad de un tratamiento específico del punto de ruptura en 1986. Con todo ello, la adecuación del modelo a los datos se manifiesta en el siguiente gráfico

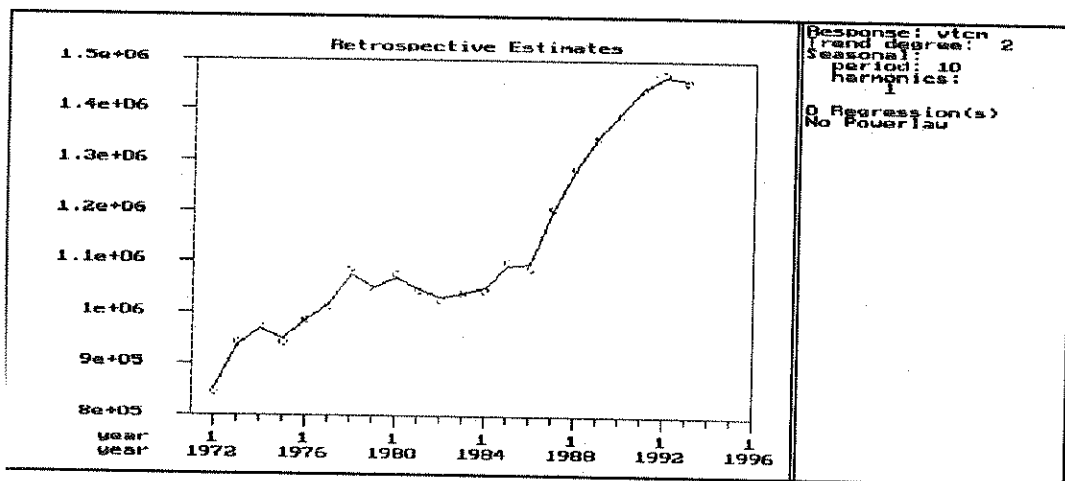


Gráfico 6

Prediciendo el valor de la serie hasta el 2000 con la información existente en 1993, se obtiene el gráfico siguiente

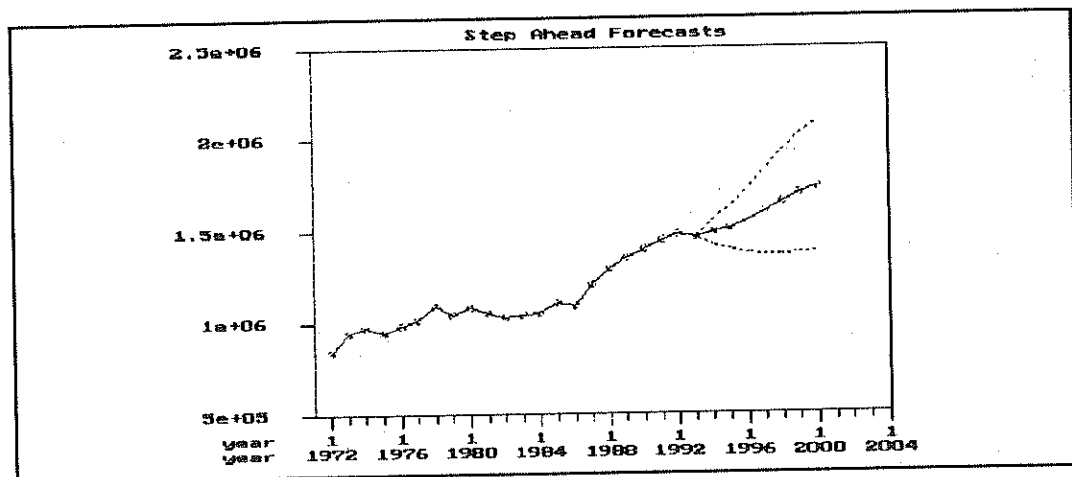


Gráfico 7

donde se aprecia un crecimiento rápido hasta 1997, momento en el que empieza una amortiguación de dicho crecimiento. Las correspondientes tasas de variación se reflejan en la tabla 1.

| Observación | Tasa de España | Tasa de CLM |
|-------------|----------------|-------------|
| 1994        | 1.0            | 1.4         |
| 1995        | 1.5            | 1.9         |
| 1996        | 2.0            | 2.6         |
| 1997        | 2.4            | 3.2         |
| 1998        | 2.6            | 3.2         |
| 1999        | 2.3            | 2.8         |
| 2000        | 1.7            | 2.2         |

Por último, hemos de volver a destacar la importancia que tiene el momento en que se predice (en este caso 1993). De disponer de los valores correspondientes a 1994, se podría actualizar el modelo introduciendo el dato de ese año, sin necesidad de volver a reestimar todo el período muestral. Otro aspecto interesante es la información extramuestral sobre el posible comportamiento futuro del VAB. De difícil manejo en el tratamiento clásico, su introducción explícita en el modelo dinámico bayesiano se reduce a la modificación de la distribución a priori para el momento en el que estemos interesados.

#### 4.BIBLIOGRAFIA:

ABRAHAM, B. y LEDOLTER, J. (1983): *"Statistical Methods for Forecasting"*. John Wiley.

BOX, G.E.P. y TIAO, G.C. (1973): *Bayesian Inference in Statistical Analysis*. Addison-Wesley, Massachusetts.

BROEMELING, L.D. (1985): *Bayesian Analysis of Linear Models*. Marcel Dekker, New York.

HARRISON, P.J. y STEVENS, C.F. (1976): *"Bayesian Forecasting (with discussion)"*. Journal of The Royal Statistical Society, serie B, vol. 38, pp. 205-247.

JEFFREYS, H. (1961): *Theory of Probability*. Oxford University Press, London.

JOHNSON, N.L. y KOTZ, S. (1972): *Distributions in Statistics: Continuous Multivariate Distributions*. Wiley, New York.

POLE, A., WEST, M. y HARRISON, P.J. (1994): *Applied Bayesian Forecasting and Time Series Analysis*. Chapman & Hall, New York.

WEST, M. y HARRISON, P.J. (1989): *Bayesian Forecasting and Dynamic Models*. Springer-Verlag, New York.



# UNA NOTA SOBRE LOS CONTRASTES DE RAICES UNITARIAS ESTACIONALES

MARTIN ALVAREZ, FRANCISCO J.<sup>1</sup>

CANO FERNANDEZ, VICTOR J.

Facultad de C. Económicas y Empresariales  
Universidad de La Laguna

## INTRODUCCION

Recientemente ha habido un interés renovado por el estudio de los comportamientos estacionales de las series económicas, proponiéndose diferentes alternativas de modelización de los mismos. Parafraseando a Ghysels, Lee y Noh (1994), gran parte de este creciente interés se ha centrado en la detección de la presencia de raíces unitarias en las frecuencias cero y estacionales de las series.

Uno de los procedimientos que se ha extendido bastante es el debido a Hylleberg, Engle, Granger y Yoo (1990) (HEGY en adelante), en el que se permite contrastar la posible presencia de raíces unitarias en las distintas frecuencias estacionales para series trimestrales. La extensión al estudio de series mensuales ha sido realizada por Franses (1991a) y Beaulieu y Miron (1993). Algunas aplicaciones de estos procedimientos pueden encontrarse en Osborn (1990), Hylleberg, Jorgensen y Sorensen (1993), Ghysels, Lee y Siklos (1993), Hylleberg (1994) y Martín, Cano y Cáceres (1995), entre otros.

En esta misma línea, y tomando como base los principios dados en los procedimientos anteriores, Ilmakunas (1990) (ver también, Osborn, Chui, Smith y Birchenhall (1988)) propone una ligera modificación de estos procedimientos, basada en la idea dada en Dickey, Hasza y Fuller (1984), y que consiste en la utilización de las variables ajustadas (filtradas por un polinomio AR de orden adecuado) en la regresión auxiliar del contraste en HEGY. Asimismo, se considera conveniente partir de un modelo más general, en el que se suponga que las series requieren una diferencia regular y una estacional. Algunas aplicaciones del mismo se encuentran en Osborn y otros (1988), Otto y Wirjanto (1990) y Matea (1994).

En este trabajo, se presenta evidencia numérica comparativa de ambos procedimientos. Asimismo, se analiza una estrategia para llevar a cabo los tests de raíces unitarias estacionales, ofreciéndose los resultados de algunos ejemplos en los que se pone de relieve algunas de las características obtenidas de la comparación de los métodos.

---

Agradecemos la colaboración prestada por los profesores J.J. Cáceres, M. Hernández, G. Martín y M. Romero.

En el siguiente apartado se describen, brevemente, los métodos que se estudian para la contrastación de raíces unitarias en series mensuales, exponiendo una estrategia para realizar dichos contrastes. En el tercer apartado se ofrecen los resultados de un ejercicio de simulación, mediante el cual los métodos son comparados. Además, se presentan los resultados para cuatro series de precios. Finalmente, se dan las conclusiones más relevantes del trabajo.

## CONTRASTES DE RAICES UNITARIAS ESTACIONALES

Superando la propuesta de Dickey, Hasza y Fuller (1984), en la que no cabía la posibilidad de contrastar la presencia de raíces unitarias en cada una de las frecuencias estacionales, HEGY (1990) presentan un procedimiento para series trimestrales que se ha revelado como uno de los más útiles a este respecto, aunque no exento de ciertos problemas<sup>2</sup>.

La propuesta de HEGY parte de considerar la descomposición del polinomio  $(1-B^4)$ , y está basada en el modelo autorregresivo  $\phi(B) Y_t = \varepsilon_t$ , de las series. A través de una representación del mismo en términos polinómicos, es posible obtener una regresión auxiliar mediante la cual llevar a cabo los contrastes de raíces unitarias en cada una de las frecuencias estacionales.

Unas transformaciones análogas, que son las consideradas en este trabajo, son las obtenidas por Franses (1991a) y Beaulieu y Miron (1993) para series mensuales<sup>3</sup>, pudiendo escribirse la regresión auxiliar como:

$$\begin{aligned} \varphi^*(B) Y_{8,t} = & \pi_1 Y_{1,t-1} + \pi_2 Y_{2,t-1} + \pi_3 Y_{3,t-1} + \pi_4 Y_{3,t-2} + \pi_5 Y_{4,t-1} \\ & + \pi_6 Y_{4,t-2} + \pi_7 Y_{5,t-1} + \pi_8 Y_{5,t-2} + \pi_9 Y_{6,t-1} \\ & + \pi_{10} Y_{6,t-2} + \pi_{11} Y_{7,t-1} + \pi_{12} Y_{7,t-2} + \mu_t + \varepsilon_t \end{aligned}$$

donde  $\varphi^*(B)$  es una función polinomial (retardos de  $Y_{8,t}$  que hacen que  $\varepsilon_t$  sea ruido blanco),  $\mu_t$  representa a los componentes determinísticos e  $Y_{i,t}$ ,  $i=1, \dots, 7$  son transformaciones de las series originales en las que se preserva en cada una la raíz de interés sobre la que se realiza el contraste.  $Y_{8,t}$  se corresponde con la diferencia estacional de la serie, esto es  $(1-B^{12})Y_t$ <sup>4</sup>.

Aplicando MCO a la ecuación (1) se obtienen las estimaciones de los  $\pi_i$ . Dado que éstos serán cero en el caso en que las raíces correspondientes estén sobre el círculo unidad, contrastar la significación de los mismo implica contrastar la presencia de raíces unitarias. De forma muy resumida, se propone realizar un contraste de significación individual para las frecuencias cero y  $\pi$ , que se corresponden con los parámetros  $\pi_1$  y  $\pi_2$ , mientras que en el resto de los casos,  $\pi_i$  y  $\pi_{i+1}$  ( $i=3,5,7,9,11$ ), puede contrastarse  $\pi_i = \pi_{i+1} = 0$  mediante un test F, o bien  $\pi_i = 0$  con un test de dos colas y, en caso de ser aceptada, contrastar  $\pi_{i+1} = 0$  con un test de una cola<sup>5</sup>.

<sup>2</sup> Véase Ghysels, Lee y Noh (1994).

<sup>3</sup> En el procedimiento dado en Beaulieu y Miron (1993), los regresores de (1) son ortogonales.

<sup>4</sup> Para más detalles, véase Franses (1991a).

<sup>5</sup> Para una explicación detallada, véase Hylleberg y otros (1990), Franses (1991a) y Beaulieu y Miron (1993).



A la hora de realizar el proceso de contrastación de raíces unitarias estacionales, deben tenerse en cuenta varias cuestiones.

Por un lado, la forma de estimar la regresión auxiliar varía conforme cambia la función polinomial  $\phi(B)$  elegida. Como se plantea en los test de raíces unitarias convencionales, el número de retardos incluidos puede afectar a los estadísticos, invalidando en algunos casos los resultados debido a la autocorrelación que se mantiene en los residuos, si el número de retardos es bajo, y reduciendo la potencia del contraste si es demasiado elevado. En este sentido, hemos considerado dos procedimientos sugeridos en la literatura sobre raíces unitarias estacionales:

- Estimar directamente la regresión (1), calculando simultáneamente el número de retardos de  $Y_{8,t}$  necesarios para garantizar que  $E_t$  sea ruido blanco. Este procedimiento es el que se deduce de las propuestas de HEGY (1990) para datos trimestrales y Franses (1991a) y Beaulieu y Miron (1993) para datos mensuales<sup>6</sup>.
- Realizar dos etapas: La primera etapa consiste en estimar por MCO los modelos autorregresivos, bajo la hipótesis nula de presencia de raíces unitarias, y escoger el número de retardos necesarios. En una segunda etapa, se estima la regresión auxiliar (1) incluyendo como variables explicativas los retardos seleccionados y filtrando todas las variables  $Y_{i,t}$  por el modelo estimado en la etapa anterior, excepto la dependiente. Este es el procedimiento sugerido por Ilmakunas (1990) y Osborn y otros (1988). Otto y Wirjanto (1990) proponen utilizar como variable dependiente en la regresión auxiliar los residuos obtenidos a partir de los modelos ajustados en la primera etapa.

Una segunda cuestión a tener en cuenta es que, siguiendo los mismos principios en los que se basa la estrategia para los test de raíces unitarias convencionales, es conveniente iniciar la secuencia de contrastación partiendo de un modelo general. Dado que las series pueden necesitar, además de la diferencia estacional, una diferencia regular, debe comenzarse el proceso considerando un modelo cuya variable dependiente resulte de aplicar  $(1-B)(1-B^{12})$  a la variable considerada. Para ello se filtran por el término  $(1-B)$  todas las variables  $Y_{i,t}$  de (1), descendiendo a la regresión auxiliar con variable dependiente  $Y_{8,t}$  en caso de que sólo sea necesaria una de las dos diferencias  $(1-B)$ . Este procedimiento no alteraría las distribuciones de los estadísticos, ya que los resultados obtenidos por Dickey y Pantula (1987) pueden hacerse extensibles al caso estacional.

En cuanto a los componentes determinísticos, son aplicables los mismos principios, es decir, partir de la forma más general (constante, dummies estacionales y tendencia), e ir seleccionando los elementos relevantes. Nuevamente, sería preferible esta secuencia, ya que, como señalan Beaulieu y Miron (1993), la pérdida de potencia de los resultados de su inclusión cuando son innecesarios es insignificante comparada con el sesgo que se produce cuando son necesarias y se omiten.

<sup>6</sup> Véase, también, Ghysels, Lee y Siklos (1993), pp. 751-755.

---

La estrategia de contrastación consiste, por tanto, en partir de un modelo que considere el término  $(1-B)(1-B^{12})$  frente a  $(1-B^{12})$ , y seleccionar adecuadamente  $\mu_t$  y  $\varphi'(B)$ .

A diferencia de las estrategias planteadas para los contrastes de raíces unitarias convencionales, el proceso de contrastación para el caso estacional no está tan desarrollado, habiendo escasos estudios en los que se analice lo apropiado de los diferentes procedimientos.

En el siguiente apartado se ofrece cierta evidencia numérica y empírica que, aún siendo limitada, puede dar algunas guías para la aplicación de estos procedimientos.

## EVIDENCIA NUMERICA Y EMPIRICA

Con el fin de estudiar la adecuación de las propuestas mencionadas arriba, a la hora de estimar la regresión auxiliar (1), así como la conveniencia de desarrollar la estrategia planteada, se ha diseñado un pequeño ejercicio de simulación que compara los diversos métodos para series mensuales:

**METODO 1:** Considera como variable dependiente  $(1-B^{12})Y_t$  y estima directamente la regresión auxiliar.

**METODO 2:** La variable dependiente es  $(1-B^{12})Y_t$  y se estima la regresión auxiliar en dos etapas, siguiendo la primera propuesta en la segunda etapa.

**METODO 3:** Estima directamente la regresión auxiliar tomando como variable dependiente la resultante de aplicar el filtro  $(1-B)(1-B^{12})Y_t$ .

**METODO 4:** La variable dependiente es  $(1-B)(1-B^{12})Y_t$  y se estima la regresión auxiliar en dos etapas, siguiendo la primera propuesta en la segunda etapa<sup>7</sup>.

Aplicando estos cuatro métodos a un conjunto de series puede analizarse el comportamiento de los contrastes de raíces unitarias en cada una de las dos propuestas, así como la adecuación de la estrategia planteada en cada uno de los procedimientos.

Nuestro experimento consistió en generar 125 series de cada uno de los siguientes procesos: ruido blanco (RB), con una diferencia regular (D), con una diferencia estacional (S) y con ambas diferencias (DS). Se consideró un tamaño muestral de 120 observaciones efectivas para cada una de las series.

Antes de comentar los resultados obtenidos, es conveniente destacar que, debido a lo reducido del experimento, éstos deben ser tomados con cierta cautela, pretendiendo, únicamente, que los

---

<sup>7</sup> Para simplificar, se considera que los métodos 1 y 3 se corresponden con la propuesta de Franses, mientras que los métodos 2 y 4 hacen referencia a la de Ilmakunas.

mismos puedan dar alguna luz sobre ciertas contradicciones que se plantean cuando estos procedimientos son aplicados.

Teniendo en cuenta estas precauciones, pueden destacarse los siguientes comentarios sobre los resultados obtenidos<sup>8</sup>.

Para  $\pi_1$  el método de Franses muestra buenos resultados en general, como se desprende de los porcentajes de acierto para cada uno de los casos, 95% en las series RB, 80% en las series S y 85% en las series DS, mientras que en el caso de requerir una diferencia regular, el porcentaje baja al 75%. Para el método de Ilmakunas, los porcentajes de acierto son en general bajos, sobre todo en ausencia de diferencia estacional; sólo en el caso de presencia de raíces unitarias en todas las frecuencias estacionales, los resultados son similares a los obtenidos por el método de Franses.

Para el estadístico  $\pi_2$  los resultados son similares; el método de Franses se muestra más adecuado que el de Ilmakunas, ya que éste tiende a aceptar integración en esa frecuencia aun cuando no sea necesaria. Los resultados relativos a  $\pi_i$ , para  $i=3, \dots, 12$ , confirman los comentarios anteriores.

Por otra parte, es destacable la mayor fiabilidad encontrada para los estadísticos F frente a los t individuales en Franses. Para el método de Ilmakunas, parecen ser más adecuados los tests t cuando la hipótesis alternativa es cierta y los F cuando lo es la hipótesis nula.

En cuanto a la estrategia planteada, parece apropiada utilizando el método de Franses, siendo menos adecuada para el método de Ilmakunas, salvo que las series presenten integración regular y estacional, es decir, que realmente sea necesaria la ecuación más general. Según esta aproximación, se utilizaría la ecuación amplia, con lo que el resultado final conduciría a una sobrediferenciación de la serie.

Por otro lado, es importante indicar que la estrategia no parece alterar el resultado de los tests en las frecuencias estacionales, ya que la ecuación que representa al modelo más general funciona de manera similar a la más específica, independientemente de que el filtro (1-B) utilizado al construirla sea necesario o no.

Por último, interesa señalar que el estadístico  $\pi_1$  presenta unos resultados que, en cierta forma, vienen a confirmar lo indicado por Franses (1991b) en un ejercicio de simulación para analizar las consecuencias de filtros para ajustar estacionalmente los datos. Estos resultados muestran que el contraste  $\pi_1=0$  no es demasiado adecuado para recoger la presencia de integración en la frecuencia cero cuando no hay integración en las frecuencias estacionales. Los porcentajes de acierto de este estadístico cuando las series sólo requieren diferencia regular son los más bajos en el método de Franses, mientras que para el método de Ilmakunas es claramente erróneo incluso en ausencia de integración.

<sup>8</sup> Exclusivamente se comentan aquellos aspectos que hemos considerado más destacables. Asimismo, únicamente se presentan, en los cuadros 1 y 2, los resultados, para los distintos modelos, referentes al conjunto de series y, por su particular interés, al caso de una diferencia regular.

---

Este último comentario hace pensar en la conveniencia de recurrir, adicionalmente, a los contratos de raíces unitarias convencionales para extraer una conclusión definitiva sobre la presencia o no de integración en la frecuencia cero, una vez determinado lo que ocurre en las frecuencias estacionales.

Con el fin de ilustrar algunas de las características destacadas arriba, seguidamente pasamos a comentar los resultados obtenidos para cuatro series mensuales de precios de vacuno para el periodo 1984-1992, correspondientes a los mercados de Barcelona, Murcia, Valencia y Sevilla de la red MERCASA<sup>9</sup>.

En el proceso de contrastación seguimos la estrategia planteada con anterioridad, considerando los métodos señalados. Los resultados de los contrastes de raíces unitarias estacionales para las series de precios se muestran en los cuadros 3 a 6.

Como puede observarse en los cuadros de resultados, se han incorporado los métodos 5 y 6 que se corresponden con la propuesta de Beaulieu y Miron (1993), y que son equivalentes a los métodos 1 y 3 (propuesta de Franses (1991)), con la única diferencia en las frecuencias correspondientes a los estadísticos  $\pi_1$ . En estos métodos se estima directamente la ecuación (1), mientras que en los métodos 2 y 4 (Ilmakunas (1990)) se estima en dos etapas.

Si se consideran las propuestas de Franses y Beaulieu y Miron, se deduce, a través del estadístico  $\pi_1$  de los métodos 3 y 6, respectivamente, que no es necesaria la segunda diferencia en ninguno de los cuatro casos, con lo que se pasa a analizar la regresión auxiliar que sólo requiere una diferencia (métodos 1 y 5). En este caso, se presenta una raíz unitaria en la frecuencia cero en las cuatro series, rechazándose en todos los casos la presencia de raíces unitarias en las frecuencias estacionales, excepto en el caso de Sevilla, en la que no se rechaza la hipótesis en la frecuencia  $\pi$ .

La propuesta de Ilmakunas, métodos 2 y 4, indica la presencia de raíces unitarias en la frecuencia cero y en gran parte de las estacionales, con lo que se obtienen resultados contradictorios frente a los métodos anteriores. Siguiendo la estrategia planteada, no habría que descender a la ecuación con una única diferencia, no pudiendo rechazarse, en ningún caso, la presencia de dos raíces unitarias en la frecuencia cero.

Como se puso de manifiesto anteriormente, en el caso de que las series no presentasen raíces unitarias en las frecuencias estacionales, este último método conducía a resultados poco satisfactorios, ya que tendía a aceptar la ecuación más general (método 4), aún cuando no fuese necesaria. Este hecho parece evidenciarse en la aplicación realizada.

Es interesante destacar que, si utilizáramos esta propuesta, los resultados finales dependerían del punto de partida de la estrategia de contrastación. Precisamente esta es una de las conclusiones señaladas en Ilmakunas (1990, pp.81-85) al realizar los contrastes de integración estacional para un conjunto de series trimestrales.

---

<sup>9</sup> Para más detalles de esta aplicación, véase Martín (1993).

Como mencionamos al plantear la estrategia, es conveniente garantizar los resultados respecto a la frecuencia cero, acudiendo a los tests propuestos para dicha frecuencia. Realizamos, para las cuatro series de precios, una estrategia de contrastación que permite probar la existencia de diferentes componentes determinísticos (constante y/o tendencia) y varias raíces (comenzando con la existencia de tres raíces unitarias) a través de estadísticos en distintas ecuaciones.

Este esquema de contrastación, con los estadísticos Dickey-Fuller Aumentado (ADF) y Phillips-Perron, generó unos resultados que rechazan claramente la presencia de tres o dos raíces unitarias, y que aceptan la existencia de una raíz unitaria en la frecuencia cero. Estas conclusiones refuerzan los comentarios realizados relativos a la utilización de la propuesta de Ilmakunas.

## CONCLUSIONES

Dentro del análisis de cointegración, recientemente, se ha extendido la utilización de los contrastes de raíces unitarias estacionales, sugiriéndose diversas propuestas para analizar la integración en las frecuencias estacionales.

En este trabajo, se presenta cierta evidencia numérica y empírica, con el objetivo de comparar algunas de las aproximaciones consideradas en la literatura, y estudiar la adecuación de una posible estrategia de contrastación.

Como aspectos más destacables, pueden señalarse los resultados satisfactorios obtenidos a través de la estrategia planteada bajo la propuesta de Franses (1991) (también Beaulieu y Miron (1993)), así como el hecho de que la propuesta de Ilmakunas (1990) es sensible al punto de partida de la estrategia, encontrándose en algunos casos resultados poco satisfactorios.

**CUADRO 1. Resultados de la simulación para el conjunto de series. (% de Aciertos).**

| METODO                      | 1  | 3  | 2  | 4  |
|-----------------------------|----|----|----|----|
| $\pi_1=0$                   | 90 | 95 | 70 | 30 |
| $\pi_2=0$                   | 89 | 92 | 65 | 70 |
| $\pi_3=0$ y $\pi_4=0$       | 90 | 87 | 70 | 70 |
| $\pi_5=0$ y $\pi_6=0$       | 95 | 95 | 78 | 70 |
| $\pi_7=0$ y $\pi_8=0$       | 70 | 88 | 75 | 45 |
| $\pi_9=0$ y $\pi_{10}=0$    | 92 | 90 | 79 | 65 |
| $\pi_{11}=0$ y $\pi_{12}=0$ | 85 | 91 | 81 | 71 |
| $\pi_3=\pi_4=0$             | 95 | 95 | 65 | 65 |
| $\pi_5=\pi_6=0$             | 99 | 95 | 65 | 70 |
| $\pi_7=\pi_8=0$             | 95 | 95 | 70 | 65 |
| $\pi_9=\pi_{10}=0$          | 95 | 95 | 70 | 65 |
| $\pi_{11}=\pi_{12}=0$       | 95 | 95 | 70 | 70 |
| $\pi_3=\dots=\pi_{12}=0$    | 95 | 90 | 90 | 80 |

**CUADRO 2. Resultados de la simulación para las series (D). (% de Aciertos).**

| METODO                      | 1   | 3   | 2  | 4  |
|-----------------------------|-----|-----|----|----|
| $\pi_1=0$                   | 75  | 85  | 70 | 7  |
| $\pi_2=0$                   | 95  | 90  | 60 | 60 |
| $\pi_3=0$ y $\pi_4=0$       | 100 | 97  | 80 | 70 |
| $\pi_5=0$ y $\pi_6=0$       | 100 | 100 | 80 | 70 |
| $\pi_7=0$ y $\pi_8=0$       | 70  | 97  | 75 | 20 |
| $\pi_9=0$ y $\pi_{10}=0$    | 100 | 97  | 80 | 65 |
| $\pi_{11}=0$ y $\pi_{12}=0$ | 98  | 100 | 85 | 50 |
| $\pi_3=\pi_4=0$             | 100 | 100 | 65 | 45 |
| $\pi_5=\pi_6=0$             | 100 | 100 | 65 | 45 |
| $\pi_7=\pi_8=0$             | 100 | 100 | 60 | 35 |
| $\pi_9=\pi_{10}=0$          | 100 | 100 | 70 | 55 |
| $\pi_{11}=\pi_{12}=0$       | 100 | 100 | 60 | 40 |
| $\pi_3=\dots=\pi_{12}=0$    | 100 | 100 | 90 | 80 |

**CUADRO 3. Contrastes de Raíces Unitarias Estacionales (Barcelona).**

| METODO                | 1 <sup>(2)</sup> | 3 <sup>(2)</sup> | 2 <sup>(2)</sup> | 4 <sup>(2)</sup> | 5 <sup>(2)</sup> | 6 <sup>(2)</sup> |
|-----------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| $\pi_1=0$             | -0.96            | -3.27*           | -1.25            | 2.32             | -0.96            | -3.27*           |
| $\pi_2=0$             | -4.44*           | -4.57*           | -2.62**          | -1.86            | -4.44*           | -4.57*           |
| $\pi_3=\pi_4=0$       | 7.32*            | 7.49*            | 4.68             | 3.01             | 7.32*            | 7.49*            |
| $\pi_5=\pi_6=0$       | 15.62*           | 16.42*           | 6.00*            | 6.69*            | 10.06*           | 10.17*           |
| $\pi_7=\pi_8=0$       | 9.73*            | 10.27*           | 2.78             | 2.28             | 8.15*            | 8.19*            |
| $\pi_9=\pi_{10}=0$    | 10.06*           | 10.17*           | 3.21             | 3.96             | 15.62*           | 16.42*           |
| $\pi_{11}=\pi_{12}=0$ | 8.15*            | 8.19*            | 4.93             | 2.18             | 9.73*            | 10.27*           |

(1) La regresión auxiliar contiene constante, dummies mensuales y tendencia.

(2) La regresión auxiliar contiene constante y dummies mensuales.

(3) La regresión auxiliar contiene constante.

(4) La regresión auxiliar no contiene ningún componente determinístico.

\* Significativo al 95%

\*\* Significativo al 90%

**CUADRO 4. Contrastes de Raíces Unitarias Estacionales (Murcia).**

| METODO                | 1 <sup>(3)</sup> | 3 <sup>(4)</sup> | 2 <sup>(4)</sup> | 4 <sup>(4)</sup> | 5 <sup>(3)</sup> | 6 <sup>(4)</sup> |
|-----------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| $\pi_1=0$             | -2.20            | -3.07*           | -0.02            | 1.45             | -2.20            | -2.23*           |
| $\pi_2=0$             | -4.34*           | -3.26*           | -1.54**          | -1.72**          | -4.34*           | -3.13*           |
| $\pi_3=\pi_4=0$       | 11.40*           | 6.82*            | 3.29*            | 2.58**           | 11.40*           | 2.23*            |
| $\pi_5=\pi_6=0$       | 8.87*            | 10.01*           | 7.38*            | 5.89*            | 4.17*            | 4.29*            |
| $\pi_7=\pi_8=0$       | 3.68*            | 4.43*            | 1.91             | 2.63**           | 10.19*           | 7.59*            |
| $\pi_9=\pi_{10}=0$    | 4.17*            | 2.03             | 2.41**           | 1.39             | 8.87*            | 5.78*            |
| $\pi_{11}=\pi_{12}=0$ | 10.19*           | 8.17*            | 3.02**           | 2.60**           | 3.68*            | 3.09*            |

**CUADRO 5. Contrastes de Raíces Unitarias Estacionales (Sevilla).**

| METODO                | 1 <sup>(2)</sup> | 3 <sup>(2)</sup> | 2 <sup>(3)</sup> | 4 <sup>(4)</sup> | 5 <sup>(2)</sup> | 6 <sup>(2)</sup> |
|-----------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| $\pi_1=0$             | -1.65            | -2.77*           | -1.71            | 0.17             | -1.65            | -2.77*           |
| $\pi_2=0$             | -1.73            | -0.71            | -0.08            | -0.71            | -1.73            | -0.71            |
| $\pi_3=\pi_4=0$       | 5.17**           | 6.73*            | 1.59             | 1.90             | 5.17             | 6.73*            |
| $\pi_5=\pi_6=0$       | 10.21*           | 3.26             | 0.39             | 0.50             | 7.55*            | 4.41             |
| $\pi_7=\pi_8=0$       | 8.39*            | 7.75*            | 1.59             | 2.05             | 5.96**           | 10.07*           |
| $\pi_9=\pi_{10}=0$    | 7.55*            | 4.41             | 3.03*            | 2.96**           | 10.21*           | 3.62             |
| $\pi_{11}=\pi_{12}=0$ | 5.96*            | 10.07*           | 1.13             | 0.28             | 8.39*            | 7.75*            |

**CUADRO 6. Contrastes de Raíces Unitarias Estacionales (Valencia).**

| METODO                | 1 <sup>(2)</sup> | 3 <sup>(1)</sup> | 2 <sup>(4)</sup> | 4 <sup>(4)</sup> | 5 <sup>(2)</sup> | 6 <sup>(1)</sup> |
|-----------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| $\pi_1=0$             | -1.52            | -5.98*           | -0.41            | 1.88             | -1.52            | -5.98*           |
| $\pi_2=0$             | -3.86*           | -0.60            | -1.29            | -1.18            | -3.86*           | -0.60            |
| $\pi_3=\pi_4=0$       | 6.41*            | 23.88*           | 3.69*            | 3.35*            | 6.41*            | 23.88*           |
| $\pi_5=\pi_6=0$       | 10.44*           | 26.39*           | 1.79             | 1.69             | 10.50*           | 11.01*           |
| $\pi_7=\pi_8=0$       | 16.92*           | 3.14             | 0.63             | 0.64             | 7.13*            | 14.29*           |
| $\pi_9=\pi_{10}=0$    | 10.50*           | 11.01*           | 0.85             | 1.02             | 10.44*           | 26.39*           |
| $\pi_{11}=\pi_{12}=0$ | 7.13*            | 14.29*           | 0.77             | 0.44             | 16.93*           | 3.14             |

---

## REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- BEAULIEU, J.J. y MIRON, J.A. (1993) "Seasonal unit roots in aggregate U.S. data". *Journal of Econometrics*, 55, pp. 305-328.
- DICKEY, D.A. y FULLER, W.A. (1979) "Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root". *Journal of the American Statistical Association*, 74, pp. 427-431.
- DICKEY, D.A. y FULLER, W.A. (1981) "Likelihood ratio statistics for autoregressive time series with a unit root". *Econometrica*, 49, pp. 1057-1072.
- DICKEY, D.A., HASZA, D.P. y FULLER, W.A. (1984) "Testing for unit roots in seasonal time series". *Journal of the American Statistical Association*, 79, pp. 355-367.
- DICKEY, D.A. y PANTULA, S.G. (1987) "Determining the order of differencing in autoregressive processes". *Journal of Business and Economic Statistics*, 5, pp. 455-462.
- FRANSES, P.H. (1991a) Model selection and seasonality in time series. Tinbergen Institute Series nº 18. Erasmus University. Rotterdam.
- FRANSES, P.H. (1991b) "Moving average filters and unit roots". *Economics Letters*, 37, pp. 399-403.
- FULLER, W.A. (1976) Introduction to statistical time series. John Wiley.
- GHYSELS, E., LEE, H.S. y NOH, J. (1994) "Testing for unit roots in seasonal time series. Some theoretical extensions and Monte Carlo investigation". *Journal of Econometrics*, 62, pp. 415-442.
- GHYSELS, E., LEE, H.S. y SIKLOS, P.L. (1993) "On the (mis)specification of seasonality and its consequences: An empirical investigation with U.S. data". *Empirical Economics*, 18, pp. 747-760.
- HYLLEBERG, S. (1994) "Modelling seasonal variation". En Hargreaves, C.P. (ed.): *Nonstationary Time Series Analysis and Cointegration*, pp. 153-178.
- HYLLEBERG, S., ENGLE, R.F., GRANGER, C.W.J. y YOO, B.S. (1990) "Seasonal integration and cointegration". *Journal of Econometrics*, 44, pp. 215-238.
- HYLLEBERG, S., JORGENSEN, C. y SORENSEN, N.K. (1993) "Seasonality in macroeconomic time series". *Empirical Economics*, 18, 321-335.
- ILMAKUNAS, P. (1990) "Testing the order of differencing in quaterly data: an illustration of the testing sequence". *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 52, pp. 79-88.



MARTIN, F.J. (1993) Cointegración e integración espacial de mercados agrarios. Tesis Doctoral. Universidad de La Laguna.

MARTIN, F.J., CANO, V.J. y CACERES, J.J. (1995) "Seasonal unit roots in Spanish agricultural price indexes". (en prensa).

MATEA, M. (1994) "Contrastes de raíces unitarias para series mensuales. Una aplicación al IPC". Revista Española de Economía, 11, pp. 7-25.

OSBORN, D.R. (1990) "A survey of seasonality in U.K. macroeconomic variables". International Journal of Forecasting, 6, pp. 327-336.

OSBORN, D.R., CHUI, A.P.L., SMITH, J.P. y BIRCHENHALL, C.R. (1988) "Seasonality and the order of integration for consumption". Oxford Bulletin of Economics and Statistics, 50, pp. 361-377.

OTTO, G. y WIRJANTO, T. (1990) "Seasonal unit-root tests on Canadian macroeconomic time series". Economics Letters, 34, pp. 117-120.

PHILLIPS, P.C.B. y PERRON, P. (1988) "Testing for a unit root in time series regression". Biometrika, 75, pp. 335-346.



# PREDICCIÓN EN MODELOS ARCH-M

MIGUEL ALVAREZ, JESÚS ANGEL

Dpto. Métodos Estadísticos  
Universidad de Zaragoza

## 1. INTRODUCCIÓN

Los modelos ARCH-M introducidos por Engle, Lilien y Robins (1987) permiten que la varianza condicional de los errores afecte a la media del proceso. Es decir, la varianza condicional,  $\sigma_t^2$ , del modelo se considerará como variable regresora.

Esta hipótesis es muy apropiada en modelos financieros que tratan de caracterizar relaciones del tipo rentabilidad-riesgo, en cualquier mercado de activos financieros. El gran auge que han tenido este tipo de modelos se debe a la gran ventaja que presentan aquí las técnicas de máxima verosimilitud, puesto que permiten estimar conjuntamente todos los parámetros desconocidos tanto de la media como de la propia volatilidad.

La bondad de las predicciones con modelos de este tipo es un punto que no ha sido tratado, por lo menos de forma exhaustiva, en las recientes revisiones [Bollerslev, Chou y Kroner (1992) y Bera y Higgins (1993)]. El grado de exactitud en modelos homocedásticos se mide a través de la varianza del error de predicción. Sin embargo, en este tipo de modelos el conjunto de información es determinante en la valoración del error de predicción y de su varianza. Así, Bollerslev (1986) y Granger, White y Kamstra (1989) construyeron intervalos de predicción a un paso para modelos ARCH. Posteriormente, Baillie y Bollerslev (1992) estudiaron las características de la distribución condicional del error de predicción para modelos GARCH.

El objetivo de este trabajo consiste en determinar intervalos de predicción a varios pasos en modelos ARMA-GARCH-M, es decir, cuando las innovaciones del proceso son heterocedásticas según un modelo GARCH y la varianza condicional sea una variable regresora para la media del modelo. El esquema del trabajo es el siguiente: previamente introducimos la notación y las hipótesis, en la sección 3 desarrollamos la predicción de la media condicional y su error; en la sección 4 obtenemos la predicción de la varianza condicional y su error. La sección 5 calcula los momentos condicionales del error de predicción de la media con el objetivo de aproximar su distribución mediante desarrollos de Cornish-Fisher, esta aproximación es tratada en la sección 6. En la sección 7 se realiza un estudio Monte Carlo para comprobar empíricamente su validez y se concluye el trabajo con sugerencias para próximos estudios en la sección 8.

## 2. NOTACIÓN E HIPÓTESIS

Sea  $\{y_t\}$  un proceso estocástico univariante y denotamos por la media condicional dada la información hasta el instante  $t-1$ . El proceso de innovaciones viene dado por:  $\mu = E_{t-1}[y_t]$  la media condicional dada la información hasta el instante  $t-1$ . El proceso de innovaciones  $\{\varepsilon_t\}$  viene dado por:

$$\varepsilon_t = y_t - \mu_t$$

Se supone que la varianza condicional del proceso es una función del conjunto de información:

$$\text{Var}_{t-1}[y_t] = E_{t-1}[\varepsilon_t^2] = \sigma_t^2$$

Así mismo,  $\{v_t\}$  sea un proceso de innovaciones para la varianza condicional:

$$v_t = \varepsilon_t^2 - E_{t-1}[\varepsilon_t^2] = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$$

donde la serie anterior es incorrelada a través del tiempo y con media cero.

En este trabajo nos centramos en modelos ARMA(K,L)-GARCH-M(1,1), de esta forma la media y la varianza condicional tienen especificaciones particulares:

$$\begin{aligned} \mu_t &= \mu + \delta \sigma_t^2 + \sum_{i=1}^K \phi_i y_{t-i} + \sum_{i=1}^L \theta_i \varepsilon_{t-i} \\ \sigma_t^2 &= \omega + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 \end{aligned}$$

Suponemos que los parámetros verifican las condiciones usuales para que el proceso esté bien definido y sea estacionario en media y varianza. En los desarrollos posteriores necesitaremos los momentos condicionales del proceso  $\{\varepsilon_t\}$ , por lo tanto, admitimos que su distribución condicional es simétrica y que los momentos de orden par son proporcionales a las correspondientes potencias de la varianza condicional:

$$\begin{aligned} E_{t-1}[\varepsilon_t^{2r+1}] &= 0 \\ E_{t-1}[\varepsilon_t^{2r}] &= \kappa_r \sigma_t^{2r} \end{aligned}$$

Por definición  $\kappa_0 = \kappa_1 = 1$  y, por ejemplo, bajo la hipótesis habitual de normalidad condicional las constantes de proporcionalidad son:

$$\kappa_r = \prod_{i=1}^r (2i-1)$$

### 3.- PREDICCIÓN DE LA MEDIA EN UN MODELO ARMA(K,L)-GARCH-M(P,Q)

Existen diversas alternativas para expresar la ecuación de la media condicional. Sin embargo, para mantener una analogía con el desarrollo que se realizará posteriormente para la varianza condicional utilizamos la siguiente expresión:

$$\begin{pmatrix} y_t \\ y_{t-1} \\ \vdots \\ y_{t-K+1} \\ \varepsilon_t \\ \varepsilon_{t-1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{t-L+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta\sigma_t^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_1 & \cdot & \dots & \cdot & \phi_K & \theta_1 & \cdot & \dots & \cdot & \theta_L \\ 1 & 0 & \dots & \cdot & 0 & 0 & \cdot & \dots & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \dots & 1 & 0 & 0 & \cdot & \dots & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \dots & \cdot & 0 & 0 & \cdot & \dots & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \dots & \cdot & 0 & 1 & 0 & \dots & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \dots & \cdot & 0 & 0 & \cdot & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{t-1} \\ y_{t-2} \\ \vdots \\ y_{t-k} \\ \varepsilon_{t-1} \\ \varepsilon_{t-2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{t-L} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \varepsilon_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

o de forma reducida:

$$Y_t = \mu e_1 + \delta\sigma_t^2 e_1 + \Phi Y_{t-1} + (e_1 + e_2)\varepsilon_t$$

donde  $e_j$  es un vector columna con todos sus elementos nulos salvo el  $j$ -ésimo que es la unidad. El proceso en el instante  $t+s$  se puede expresar con respecto al conjunto de información en el instante  $t$ :

$$\begin{aligned} y_{t+s} = e'_1 Y_{t+s} &= \mu \sum_{i=1}^s \xi_{s-i} + \sum_{i=0}^{K-1} e'_1 \Phi^s e_{i+1} y_{t-i} + \sum_{i=0}^{L-1} e'_1 \Phi^s e_{K+i+1} \varepsilon_{t-i} \\ &\quad + \delta \sum_{i=1}^s \xi_{s-i} \sigma_{t+i}^2 + \sum_{i=1}^s \Psi_{s-i} \varepsilon_{t+i} \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} \xi_{s-i} &= e'_1 \Phi^{s-i} e_1 \\ \Psi_{s-i} &= e'_1 \Phi^{s-i} (e_1 + e_{K+1}) \end{aligned}$$

La predicción para dicho horizonte se obtiene de la expresión anterior:

$$\begin{aligned} E_t[y_{t+s}] &= \mu \sum_{i=1}^s \xi_{s-i} + \sum_{i=0}^{K-1} e'_1 \Phi^s e_{i+1} y_{t-i} + \sum_{i=0}^{L-1} e'_1 \Phi^s e_{K+i+1} \varepsilon_{t-i} \\ &\quad + \delta \sum_{i=1}^s \xi_{s-i} E_t[\sigma_{t+i}^2] \end{aligned} \quad (6)$$

y, por lo tanto, el error de predicción  $s$  pasos hacia adelante se define por:

$$e_{t,s} = \delta \sum_{i=1}^s \xi_{s-i} [\sigma_{t+i}^2 - E_t[\sigma_{t+i}^2]] + \sum_{i=1}^s \Psi_{s-i} \varepsilon_{t+i} \quad (7)$$

El segundo término es el error habitual que aparece en un modelo ARMA, en este caso, la diferencia está en que los errores son heterocedásticos. El primer término es el error de predicción de la varianza condicional.

#### 4. PREDICCIÓN DE LA VARIANZA EN UN MODELO GARCH(p,q)

El modelo GARCH (p,q) permite que la varianza condicional dependa tanto de sus propios retardos como de las innovaciones de la media. Utilizando el proceso  $\{v_t\}$  puede expresarse como un modelo ARMA(m,p):

$$\varepsilon_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^m (\alpha_i + \beta_i) \varepsilon_{t-i}^2 - \sum_{i=1}^p \beta_i v_{t-i} + v_t$$

donde  $m = \max\{p, q\}$  y  $\alpha_i = 0 \quad i > q$  y  $\beta_i = 0 \quad i > p$ . Con esta representación podemos aplicar los desarrollos anteriores para la varianza condicional. Realizamos el desarrollo para un modelo GARCH(1,1) y la extensión al caso general sería inmediata.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_t^2 \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha + \beta - \beta \\ 0 \quad 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{t-1}^2 \\ v_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_t \\ v_t \end{pmatrix}$$

o bien, se puede expresar:

$$V_t^2 = \omega e_1 + \Gamma V_{t-1}^2 + (e_1 + e_2) v_t$$

Por repetidas iteraciones:

$$V_{t+s}^2 = \omega \sum_{i=1}^s \Gamma^{s-i} e_1 + \Gamma^s V_t^2 + \sum_{i=1}^s \Gamma^{s-i} (e_1 + e_2) v_{t+i}$$

Puesto que  $\varepsilon_{t+s} = e_1' V_{t+s}^2$  y  $E_t[v_{t+i}] = 0 \quad i > 0$ , la predicción de la varianza condicional a  $s$  pasos viene dada por:

$$\begin{aligned} E_t[\varepsilon_{t+s}^2] &= E_t[\sigma_{t+s}^2] = \omega \sum_{i=1}^s e_1' \Gamma^{s-i} e_1 + e_1' \Gamma^s V_t^2 \\ &= \omega \sum_{i=0}^{s-2} (\alpha + \beta)^i + (\alpha + \beta)^{s-1} \sigma_{t+1}^2 \end{aligned}$$

y el error de predicción asociado es:

$$\begin{aligned} v_{t,s} &= \sigma_{t+s}^2 - E_t[\sigma_{t+s}^2] = \varepsilon_{t+s}^2 - v_{t+s} - E_t[\sigma_{t+s}^2] = \sum_{i=1}^{s-1} e_i' \Gamma^{s-i} (e_1 + e_2) v_{t+i} \\ &= \sum_{i=1}^{s-1} \chi_{s-i} v_{t+i} = \sum_{i=1}^{s-1} \alpha(\alpha + \beta)^{s-i-1} v_{t+i} \end{aligned}$$

cuyo MSE condicional es:

$$E_t[V_{t,s}^a] = \text{Var}_t[\sigma_{t+s}^2] = \sum_{i=1}^{s-1} \chi_{s-i}^2 E_t[v_{t+i}^2] = (\kappa_2 - 1) \sum_{i=1}^{s-1} \chi_{s-i}^2 E_t[\sigma_{t+i}^4]$$

La evaluación empírica de este MSE condicional requiere una expresión para el cuarto momento condicional. Dicha expresión se obtiene en la siguiente sección.

## 5. ESTUDIO DEL ERROR DE PREDICCIÓN

Cuando realizamos inferencia en un modelo GARCH(p,q), suponemos una distribución condicional de  $\varepsilon_t$  dado  $\sigma_t^2$ . Esto implica valores específicos  $\kappa_r$  que caracterizan los momentos de orden par. Sin embargo, sabemos que la distribución incondicional de  $\varepsilon_t$  tiene colas más pesadas que la condicional del error de predicción a un paso. Similarmente, la distribución condicional de  $\varepsilon_{t+s}$ , para  $s > 1$ , dada la información hasta el instante  $t$  difiere de la distribución condicional para  $s=1$ . Esto nos conduce a estudiar previamente los momentos condicionales de  $\varepsilon_{t+s}$  dada la información hasta el instante  $t$ , y posteriormente calcularemos los momentos del error de predicción. El primer resultado viene dado por Baillie y Bollerslev (1992):

### Teorema 1

Para el modelo GARCH(1,1) definido por (2) y (4)-(5), los momentos condicionales de  $\varepsilon_{t+s}$  con  $s > 1$  vienen dados por:

$$\begin{aligned} E_t[\varepsilon_{t+s}^{2r+1}] &= 0 \\ E_t[\varepsilon_{t+s}^{2r}] &= \kappa_r E_t[\sigma_{t+s}^{2r}] \end{aligned}$$

donde

$$E_t[\varepsilon_{t+s}^{2r}] = \omega^r + \sum_{i=1}^r \binom{r}{i} \pi_i \omega^{r-i} E_t[\sigma_{t+s-1}^{2i}]$$

$$\pi_i = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \kappa_{i-j} \alpha^{i-j} \beta^j$$

y

En particular, desarrollamos los primeros momentos:

$$\begin{aligned} E_t[\sigma_{t+s}^4] &= A_{0,s} + A_{1,s}\sigma_{t+1}^2 + A_{2,s}\sigma_{t+1}^4 \\ E_t[\sigma_{t+s}^6] &= B_{0,s} + B_{1,s}\sigma_{t+1}^2 + B_{2,s}\sigma_{t+1}^4 + B_{3,s}\sigma_{t+1}^6 \end{aligned}$$

donde las constantes  $A_{i,s}$ ,  $B_{i,s}$  se obtienen del teorema 1.

El segundo resultado previo nos proporciona los momentos condicionales del proceso de innovaciones definido para la varianza condicional.

## Teorema 2

Bajo las condiciones del teorema anterior entonces los momentos condicionales del proceso definido en (3) vienen dados por:

$$E_t[v_{t+s}^r] = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (-1)^{r-j} \kappa_j E_t[\sigma_{t+s}^{2r}]$$

Con ambos teoremas y calculando de forma similar los momentos condicionales cruzados

$E_t[v_{t+i}^r \varepsilon_{t+j}^m]$ , nos planteamos obtener los momentos condicionales del error de predicción. Combinando las expresiones (7) y (9) reescribimos el error de predicción de la siguiente forma:

$$e_{t,s} = \sum_{i=1}^{s-1} \gamma_{s-i} v_{t+i} + \sum_{i=1}^s \psi_{s-i} \varepsilon_{t+i}$$

donde

$$\gamma_{s-i} = \delta \sum_{j=1}^{s-1} \xi_{j-i} \chi_{s-j}$$

Con el objetivo de aproximar la distribución del error de predicción obtenemos sus primeros momentos condicionales. El Teorema 3 proporciona el MSE condicional, el teorema 4 describe el momento de orden 3 y el teorema 5 el momento de orden cuatro.

## Teorema 3

El MSE condicional de la predicción de un modelo ARMA(K,L)-GARCH-M(1,1) dado por (1)-(2) y (4)-(5) es igual a:



$$E_t[e_{t,s}^2] = \sum_{i=1}^{s-1} \gamma_{s-i}^2 (\kappa_2 - 1) E_t[\sigma_{t+i}^4] + \sum_{i=1}^s \psi_{s-i}^2 E_t[\sigma_{t+i}^2]$$

#### Teorema 4

El momento condicional de orden 3 del error de predicción en un modelo ARMA(K,L)-GARCH-M(1,1) dado por (1)-(2) y (4)-(5) es igual a:

$$\begin{aligned} E_t[e_{t,s}^3] = & \sum_{i=1}^{s-1} \gamma_{s-i}^3 (\kappa_3 - 3\kappa_2 + 2) E_t[\sigma_{t+i}^6] + 3 \sum_{i=1}^{s-1} \gamma_{s-i} \psi_{s-i}^2 E_t[\sigma_{t+i}^4] \\ & + 3 \sum_{i=1}^{s-1} \sum_{j=i+1}^s \gamma_{s-i} \psi_{s-j}^2 \alpha (\kappa_2 - 1) \pi_1^{j-i-1} E_t[\sigma_{t+i}^4] \\ & + 3 \sum_{i=1}^{s-2} \sum_{j=i+1}^{s-1} \gamma_{s-i} \gamma_{s-j}^2 [v_1 E_t[\sigma_{t+i}^4] + v_2 E_t[\sigma_{t+i}^6]] \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} v_1 &= (\kappa_2 - 1)^2 \alpha [A_{0,j-i} + 2A_{1,j-i} \omega] \\ v_2 &= (\kappa_2 - 1)^2 \alpha A_{1,j-i} [(\kappa_3 - \kappa_2) \alpha + 2(\kappa_2 - 1) \beta] \end{aligned}$$

#### Teorema 5

El momento condicional de orden 4 del error de predicción en un modelo ARMA(K,L)-GARCH-M(1,1) dado por (1)-(2), (4)-(5) es igual a:

$$\begin{aligned} E_t[e_{t,s}^4] = & \sum_{i=1}^{s-1} \gamma_{s-i}^4 E_t[v_{t+i}^4] + \sum_{i=1}^s \psi_{s-i}^4 \kappa_2 E_t[\sigma_{t+i}^4] \\ & + 4 \sum_{i=1}^{s-2} \sum_{j=i+1}^{s-1} \gamma_{s-i} \gamma_{s-j}^3 (\kappa_3 - 3\kappa_2 + 2) [\vartheta_1 E_t[\sigma_{t+i}^4] + \vartheta_2 E_t[\sigma_{t+i}^6] + \vartheta_3 E_t[\sigma_{t+i}^8]] \\ & + 6 \sum_{i=1}^{s-2} \sum_{j=i+1}^{s-1} \gamma_{s-i}^2 \gamma_{s-j}^2 [\vartheta_4 E_t[\sigma_{t+i}^4] + \vartheta_5 E_t[\sigma_{t+i}^6] + \vartheta_6 E_t[\sigma_{t+i}^8]] \\ & + 6 \sum_{i=1}^{s-1} \sum_{j=i+1}^s \psi_{s-i}^2 \psi_{s-j}^2 [\omega \sum_{k=0}^{j-i-1} \pi_1^k E_t[\sigma_{t+i}^2] + \pi_1^{j-i-1} (\alpha \kappa_2 + \beta) E_t[\sigma_{t+i}^4]] \\ & + 12 \sum_{i=1}^{s-2} \sum_{j=i+1}^{s-1} \gamma_{s-i} \gamma_{s-j} \psi_{s-j}^2 (\kappa_2 - 1) [\vartheta_7 E_t[\sigma_{t+i}^4] + \vartheta_8 E_t[\sigma_{t+i}^6]] \\ & + 12 \sum_{i=1}^{s-2} \sum_{j=i+1}^{s-1} \sum_{k=j+1}^s \gamma_{s-i} \gamma_{s-j} \psi_{s-k}^2 (\kappa_2 - 1) \alpha \pi_j^{k-j-1} [\vartheta_7 E_t[\sigma_{t+i}^4] + \vartheta_8 E_t[\sigma_{t+i}^6]] \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \vartheta_1 &= \alpha(\kappa_2 - 1) \quad [3\omega^2 B_{1,j-i} + 2\omega B_{2,j-i} + B_{3,j-i}] \\
 \vartheta_1 &= [(\kappa_3 - \kappa_2)\alpha^2 + 2\alpha\beta(\kappa_2 - 1)] \quad [3\omega^2 B_{1,j-i} + B_{2,j-i}] \\
 \vartheta_3 &= B_{1,j-i}[3(\kappa_3 - \kappa_2)\alpha^2\beta + 3(\kappa_2 - 1)\alpha\beta^2 + (\kappa_4 - \kappa_3)\alpha^3] \\
 \vartheta_4 &= (\kappa_2 - 1)^2[A_{0,j-i} + \omega^2 A_{2,j-i}] + A_{1,j-i}(\kappa_2 - 1)\omega \\
 \vartheta_5 &= [\alpha(\kappa_3 - 3\kappa_2 + 1)(\kappa_2 - 1) + \beta(\kappa_2 - 1)^2] \quad [A_{1,j-i} + 2\omega A_{2,j-i}] \\
 \vartheta_6 &= A_{2,j-i}(\kappa_2 - 1)[\alpha^2(\kappa_4 - 2\kappa_3 + \kappa_2) + \beta^2(\kappa_2 - 1) + 2\alpha\beta(\kappa_3 - 3\kappa_2 + 1)] \\
 \vartheta_7 &= \alpha(\kappa_2 - 1)[2\omega A_{1,j-i} + A_{2,j-i}] \\
 \vartheta_7 &= A_{1,j-i}[\alpha^2(\kappa_3 - \kappa_2) + 2\alpha\beta(\kappa_2 - 1)]
 \end{aligned}$$

El teorema 3 indica que el MSE condicional depende de la variabilidad de las innovaciones de la media y de la varianza. El teorema 4 refleja la asimetría que presenta esta distribución, debida a la incidencia de la varianza condicional en la media del proceso. El teorema 5 permite dislumbrar la complejidad que aparece cuando deseamos calcular momentos de orden superior. Como se ha comentado en la introducción del trabajo el objetivo final de estos complejos cálculos es aproximar la distribución del error de predicción mediante desarrollos de Cornish-Fisher.

## 6. DESARROLLOS DE CORNISH-FISHER

Para construir intervalos de predicción debemos obtener los cuantiles de la densidad predictiva. Denotamos por  $z_{t,s}(p)$  la aproximación mediante desarrollos de Cornish-Fisher al cuantil  $p$ -ésimo de la distribución del error de predicción  $s$  pasos hacia adelante. Este se puede expresar como:

$$z_{t,s}(p) = \varsigma_{t,s}(p) E_1 [e_{t,s}^2]^{1/2}$$

donde

$$\varsigma_{t,s}(p) = z_p + (\lambda_1 h_1(z_p)) + (\lambda_2 h_2(z_p) + \lambda_1^2 h_{11}(z_p)) + \dots$$

y  $z_p$  es el cuantil  $p$ -ésimo de la distribución  $\lambda_j$  normal estandar y es el cumulante  $(j+2)$ -ésimo estandarizado, es decir:

$$\lambda_j = \frac{\kappa_{j+2;t,s}}{\kappa_{2;t,s}^{j/2}}$$

donde  $\kappa_{j,t,s}$  es el cumulante  $j$ -ésimo de  $e_{t,s}$ .

El segundo término ajusta la asimetría, mientras que el tercero y el cuarto ajustan el exceso de curtosis condicional y los términos que afectan a momentos superiores han sido omitidos. Las funciones que aparecen en dicha aproximación vienen dadas en Abramowitz y Stegun (1972).

Para construir los intervalos de predicción simplemente centramos el intervalo anterior en la predicción puntual (6), de esta forma el intervalo tendría la siguiente forma:

$$(E_t[y_{t+s}] + z_{t,s}(1-p), E_t[y_{t+s}] + z_{t,s}(p))$$

## 7. ESTUDIO MONTE CARLO

Para contrastar la exactitud de la aproximación para obtener intervalos de predicción en este contexto realizamos una serie de simulaciones para varios modelos GARCH(1,1) con normalidad condicional del error a un paso. Para la media condicional se seleccionaron modelos ARMA(1,1) y MA(1) que usualmente son los más aplicados en estudios empíricos. Este tipo de modelizaciones no parecen afectar a los intervalos de predicción, puesto que el comportamiento de dichos intervalos dependen fundamentalmente de la varianza condicional. El proceso del estudio Monte Carlo se desarrolla de la siguiente forma:

Se construye una serie original, y a partir de ésta, se calculan los intervalos de predicción; con la información de la serie anterior se consideran 1000 réplicas hacia adelante para calcular las tasas de cobertura de dichos intervalos. Si el proceso anterior se repite un número  $M$  de veces podemos obtener la tasa media de cobertura y la longitud media de los intervalos, así como sus respectivas varianzas.

De forma general podemos admitir que los intervalos tienden a ser conservativos cuando el horizonte de predicción es elevado. Además, la longitud de estos intervalos tienden a crecer muy rápidamente cuando estamos en modelos altamente persistentes ( $a+b>0.9$ ). Aún más, en el caso de modelos con  $a$  elevados y para horizontes medios el contenido informativo del intervalo es escaso. Por el contrario, para modelos con  $a$  pequeños la tasa empírica y la tasa real no difieren mucho incluso para horizontes lejanos. El mismo comportamiento presentan los intervalos cuando el modelo no es persistente.

## 8. CONCLUSIONES

En este artículo se aborda el problema de la predicción en modelos ARCH-M. Se obtienen las expresiones de las predicciones tanto de la media como de la varianza condicional. Se calculan de forma exacta los momentos del error de predicción a varios pasos cuando la varianza condicional sigue un proceso GARCH(1,1); y se describe como los desarrollos de Cornish-Fisher pueden utilizarse para aproximar la distribución predictiva, con el objetivo de construir intervalos de predicción.

Un aspecto importante a destacar es la repercusión de la estimación de los parámetros por máxima verosimilitud. Para el proceso considerado, la matriz de información no es diagonal por bloques entre los parámetros de la ecuación de la media y de la varianza. Esto implica que la incertidumbre asociada a la estimación de los parámetros de la media y a los parámetros de la varianza es

---

determinante en el estudio del error de predicción. En este punto van a tener gran importancia las técnicas bootstrap para demostrar la convergencia de los estimadores a sus parámetros y, por lo tanto, estudiar el comportamiento de estos intervalos cuando se ven afectados por esa incertidumbre asociada a la estimación.

### Bibliografía

- ABRAMOWITZ, M. Y STEGUM, I.A. (1972) Handbook of mathematical functions. Dover Publications.
- BAILLIE, R.T. Y BOLLERSLEV, T. (1992) "Prediction in dynamic models with time-dependent conditional variances". Journal of Econometrics, 52 pp. 91-113.
- BERA, A.K. Y HIGGINS, M. (1993) "ARCH models: Properties, Estimation and Testing". Journal of Economic Surveys, 7 pp.305-366.
- BOLLERSLEV, T. (1986) "Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity". Journal of Econometrics, 31 pp.307-327.
- BOLLERSLEV, T.; CHOU, R.Y. Y KRONER, K. (1992) "ARCH modeling in finance: A review of the theory and empirical evidence". Journal of Econometrics, 52 pp.5-59.
- ENGLE, R.F.; LILIEN, D. Y ROBINS, R.P. (1987) "Estimating time varying risk premia in the term structure: The ARCH-M model". Econometrica, 55 pp.391-407.
- GRANGER, C.W.J.; WHITE, H. Y KAMSTRA, M. (1989) "Interval forecasting: An analysis based upon ARCH-quantile estimators". Journal of Econometrics, 40 pp.87-96.

# CONTRASTES DE CAMBIO ESTRUCTURAL BASADOS EN EL MÉTODO DE ESTIMACIÓN PARAMÉTRICA PONDERADA

JULIÁN PÉREZ GARCÍA  
Instituto "L.R.KLEIN"- U.A.M

El objetivo de la presente comunicación es el desarrollar los diferentes métodos para determinar la existencia de cambio estructural en modelos econométricos de series temporales, basados en el método de ESTIMACIÓN PARAMÉTRICA PONDERADA<sup>1</sup> ampliado, y que ya fueron apuntados en una ponencia presentada en la VIII Reunión de Asepelt [Pérez y Vicéns(1994)].

La obtención de las series de parámetros que se derivan de la aplicación del método EPP ampliado, aún teniendo un cierto interés para el propio análisis descriptivo de las mismas, no tendrían mayor sentido si no se utilizaran para la contrastación de la existencia de cambios de estructura.

En este sentido diferenciaremos tres niveles de análisis que se pueden realizar una vez obtenidas las series de parámetros EPPa:

- Análisis gráfico.
- Contrastes no paramétricos.
- Contrastes paramétricos.

El primero y mas sencillo de estos niveles de análisis consistiría simplemente en la observación del **gráfico de evolución temporal de los parámetros** con el fin de determinar la posible tendencia o alteración puntual en los niveles del mismo.

Si de este primer análisis pareciera deducirse algún comportamiento sistemático en dicha evolución, o bien algún cambio en los niveles del mismo, podríamos proceder a la aplicación del algún contraste clásico de cambio estructural (p.e.Chow) sobre la ecuación normal estimada por MCO, o continuar aplicando alguno de los contrastes, paramétricos o no paramétricos, que recogemos a continuación.

El segundo de los niveles de análisis a los que hacíamos referencia **la aplicación contrastes no paramétricos sobre las series de parámetros estimadas**, puede realizarse con las siguientes variantes:

<sup>1</sup> El metodo de estimación paramétrica Ponderada ampliado (EOOa) se encuentra desarrollado con detalle en la tesis doctoral de J. Pérez, dirigida por el Prof. José Vicéns. Para un referencia más directa puede consultarse la ponencia presentada en la VIII Reunión anual ASEPELT España con el título de «Estimación Paramétrica Ponderada. Una alternativa a la estimación recursiva» (Vol. II, págs. 283-290).

a) Aplicación de alguno de los contrastes no paramétricos clásicos recogidos en la literatura econométrica y que podemos clasificar en los siguientes grupos:

1º) Tests basados en el número de variables excepcionales [Brunk(1960)]. Para emplear este tipo de contrastes sería preciso calcular previamente el total de dichas variables excepcionales,  $N_i$  considerando que:

$$N_i = N_{i-1} + 1 \text{ si } \beta_{k,i} > \text{Max}(\beta_{k,j}) \forall j < i, i = 1, 2, \dots, N$$

2º) Tests basados en el signo de las diferencias entre dos pares de variables, [Mann(1945), Daniels(1950), Cox y Stuart(1955)]. En este caso deberíamos construir en primer lugar una nueva variable

$$\Psi_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } \beta_{k,i} > \beta_{k,j} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

para todos los posibles pares de observaciones  $\{i,j\}$ , determinando el valor de los distintos estadísticos considerando las distintas formulaciones propuestas por los distintos autores.

3º) Test de Wolfe y Schectman(1984). Este tercer tipo de test precisaría igualmente del cálculo de una nueva variable para cada una de las  $i$  estimaciones, definida como:

$$\Psi_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \beta_{k,i} > \ddot{\beta}_k \\ 0 & \text{si } \beta_{k,i} \leq \ddot{\beta}_k \end{cases}$$

siendo  $\ddot{\beta}_k$  la mediana del conjunto de estimaciones  $\beta_{k,i}$

4º) Tests basados en estadísticos de tipo Wilcoxon y medianas [Sen y Srivasta(1975), Pettitt(1979)]. En este último caso habría que calcular las siguientes variables:

$$\Psi_{k,ij}^1 = \beta_{k,i} - \beta_{k,j}$$

donde  $\beta_{k,j}$  es la mediana de todas las estimaciones en las que  $i \leq j \leq N$ , siendo  $N$  el número total de estimaciones disponibles.

Igualmente tendríamos que calcular los correspondientes valores de esperanza matemática y varianza bajo la hipótesis nula ( $E_0$  y  $\text{Var}_0$ ) de los distintos estadísticos  $U_{k,n-k}$  y  $M_{k,n-k}$  planteados en base a las anteriores funciones  $\Psi_{k,ij}^1$  y  $\Psi_{k,ij}^2$

Una vez realizados estos cálculos, determinaríamos la existencia de cambio estructural si el valor de los estadísticos calculados es superior a los valores teóricos obtenidos bajo la hipótesis nula.

b) Realización de un análisis tipo ANOVA sobre los distintos niveles apreciados en el análisis gráfico, o bien aplicar este tipo de análisis de forma recursiva sobre distintas submuestras de parámetros.

En el caso de la contrastación de dos niveles diferentes en los valores del parámetro, según la aproximación por regresión al análisis de la varianza, plantearíamos una regresión en la que la variable endógena sería la serie de parámetros estimados y las variables explicativas serían, para el modelo restringido un término constante, y un término constante más una variable ficticia que recoja la diferencia de niveles en el modelo ampliado, planteándose un test F, considerando la suma de cuadrados de residuos de ambas regresiones:

- Modelo restringido:  $\beta_i^{EPP} = C_1 + u_i$

- Modelo ampliado:  $\beta_i^{EPP} = C_2 + F_0^1 + u_i$

Con  $c_1$  y  $c_2$ , términos constantes,  $u_1$  y  $u_2$  variables normales  $N(0, \sigma_2)$ , y  $F_0^1$  variable ficticia que toma valor 1 para todas las observaciones pertenecientes al primer nivel y 0 en el resto.

El contraste F quedaría planteado, de una forma similar al contraste de Chow, como el cociente entre la suma de cuadrados de residuos del modelo restringido menos el ampliado sobre la suma de cuadrados de residuos del modelo restringido, divididos ambos entre sus respectivos grados de libertad.

$$F(1, N-2) = \frac{(e'_1 e_1 - e'_2 e_2) / 1}{(e'_2 e_2) / (N-2)}$$

Lógicamente este contraste podría ampliarse a más de dos niveles diferenciados, aumentando simplemente en número de variables ficticias del modelo ampliado.

c) Realizar algún tipo de ajuste por regresión sobre la serie de parámetros estimados.

Esta tercera opción, que partiría de la citada aproximación por regresión al análisis de la varianza, consistiría en la determinación de la existencia de un cambio estructural mediante un contraste t clásico, sobre la variable o variables que actuarían como explicativas (excluido el término constante), de una regresión en la que la variable dependiente sería la serie de parámetros estimados.

Con esta tercera alternativa podríamos plantear distintos modelos explicativos de la evolución de los parámetros, (variables de tendencia, variables de escalón, efectos puntuales, etc), dependiendo del tipo de estructura observada en la primera etapa de análisis gráfico.

Así, por ejemplo, si observáramos una cierta tendencia en alguno de los parámetros estimados podríamos plantear una regresión de dicha serie sobre un término constante y una variable de tendencia, detectando la existencia de un cambio de estructura evolutivo si esta variable de tendencia resulta significativa en el modelo.

$$\beta_i^{EPP} = C + \gamma \cdot T + u$$

siendo T una variable de tendencia (1,2,...,N)

Podríamos afirmar que existe un cambio de estructura en el modelo original (sobre el que se estimaron los parámetros  $\beta_i$ ), si el valor del estadístico  $t$ , calculado según la fórmula siguiente, supera el valor tabulado de dicha distribución t-Student para un determinado nivel de significación.

$$t_{(Y)} = \frac{\hat{Y}}{\sqrt{\sigma_Y^2}}$$

El tercero y último de los niveles de análisis planteados consiste en el desarrollo de **contrastes paramétricos** a partir de las distribuciones teóricas de la serie de parámetros estimados.

Para el planteamiento de dichos contrastes se parte, inicialmente de las distribuciones de cada uno de los parámetros estimados y que, como puede demostrarse, siguen una distribución normal multivariante cuyo vector de esperanza matemática y matriz de varianzas y covarianzas vendrían determinadas, para cada conjunto de parámetros  $t$ , por las siguientes expresiones:

$$\beta_i^{EPPa} \sim N(\beta, \sigma^2 (X' W_i^2 X)^{-1} X' W_i^2 W_i^2 X (X' W_i^2 X)^{-1})$$

siendo  $\sigma^2$  la varianza de la perturbación aleatoria  $U$ .

Una vez determinadas las características de la distribución de los parámetros debemos plantearnos los distintos contrastes partiendo de distribuciones del tipo t-Student, ya que al no conocer el verdadero valor de la varianza no podríamos aplicar ningún contraste sobre la distribución normal, para lo que tendremos en cuenta que, sobre el modelo básico de regresión, se puede demostrar que la suma de cuadrados de residuos dividido por la varianza de la perturbación aleatoria se distribuye como una  $\chi_{n-k}^2$

$$\frac{e'e}{\sigma^2} \sim \chi_{n-k}^2$$

Considerando entonces la distribución del estimador EPPa y la  $\chi_{n-k}^2$  anteriormente citada podemos plantear al menos tres contrastes alternativos:

### 1º) Contraste de diferencias con la media precedente.

En este primer contraste consideraremos como hipótesis nula la igualdad entre en un determinado parámetro  $\beta_{i,t}^{EPPa}$  y la media de todos los parámetros anteriores, frente a una hipótesis alternativa de diferencia entre ellos, que estaría implicando un cambio de estructura en el modelo original.

$$H_0(\beta_{i,t}^{EPP} = \bar{\beta}_i^{EPP})$$

$$H_1(\beta_{i,t}^{EPP} \neq \bar{\beta}_i^{EPP})$$



$$\text{siendo: } \bar{\beta}_i^{\text{EPP}} = \sum_{j=1}^{t-1} \beta_{i,j}^{\text{EPP}}$$

Si nos abstraemos del origen del valor medio calculado y lo consideramos como una constante podremos calcular la distribución conjunta de la diferencia entre el estimador EPPa calculado para un determinado punto muestral  $t$ , y la media de todos los parámetros anteriores.

En efecto, dado que  $\beta_{i,t}^{\text{EPPa}}$  se distribuye como una normal, la diferencia con el valor medio de los anteriores parámetros calculados se distribuirá igualmente como una normal, con media 0, bajo la hipótesis nula de igualdad entre ambas, y con la misma desviación típica que el estimador original.

$$\beta_{i,t}^{\text{EPPa}} - \bar{\beta}_i \sim N(0, \sigma \sqrt{a_{i,i}})$$

siendo  $\sigma a_{i,i}$  los elementos de la diagonal principal de la matriz de varianzas y covarianzas del estimador  $\beta_i^{\text{EPPa}}$ :  $\sigma^2 (X/W_i^2 X)^{-1} X/W_i^2 W_i^2 X (X/W_{2i}^2 X)^{-1}$

Para construir el contraste  $t$  utilizaremos como denominador la variable de diferencia entre el estimador en el momento  $t$  y la media de los anteriores, dividida entre su desviación típica, y como denominador la citada distribución  $\chi_{n-k}^2$  dividida entre sus grados de libertad  $(n-k)$ :

$$T_{n-k}^1 = \frac{\beta_{i,t}^{\text{EPPa}} - \bar{\beta}_i}{\sqrt{\frac{\sigma_{\beta_{i,t}^{\text{EPPa}}}^2}{\frac{e'e}{\sigma^2} / n - k}}}$$

Dado que:

$$\beta_i^{\text{EPPa}} : \sigma^2 (X'W_i^2 X)^{-1} X'W_i^2 W_i^2 X (X'W_i^2 X)^{-1}$$

y

$$\frac{e'e}{n-k} = \hat{\sigma}^2$$

siendo  $\hat{\sigma}^2$  el estimador insesgado de la varianza de la perturbación aleatoria calculada mediante la estimación clásica por MCO, podemos reformular la expresión de este primer contraste  $T^1$ , eliminado el valor desconocido de  $\hat{\sigma}^2$ , quedando finalmente como:

$$T_{n-k}^1 = \frac{\beta_{i,t}^{\text{EPPa}} - \bar{\beta}_i^{\text{EPPa}}}{\sqrt{\hat{\sigma}_{\beta_{i,t}}^2}}$$

siendo:

$$\sigma_{\beta_{i,t}}^2 = \hat{\sigma}^2 (X'W_i^2 X)^{-1} X'W_i^2 W_i^2 X (X'W_i^2 X)^{-1}$$

De esta forma, una vez estimados los N parámetros procederíamos a calcular para un determinado punto t la diferencia entre el valor del parámetro estimado y la media de los t-1 parámetros anteriores. Dividiendo este valor entre la desviación típica del parámetro, calculada según la anterior expresión, obtendríamos finalmente el valor del estadístico calculado. Si este estadístico supera el valor tabulado de la distribución para un nivel de confianza dado, rechazaríamos la hipótesis nula, pudiendo afirmar que se produce un cambio de estructura en el período t.

Este tipo de estadístico podemos calcularlo de forma recursiva para el total de parámetros menos uno y realizar un gráfico con los resultados del mismo y sobre la banda de oscilación de los valores tabulados para un nivel de confianza dado, detectando un cambio de estructura en aquellos puntos que superen estos niveles.

## 2º) Contraste de diferencia de medias

Un segundo contraste que podemos plantear utilizando la misma distribución t-Student, sería similar al contraste clásico de diferencia de medias entre dos muestras alternativas de una misma población.

En nuestro caso pretendemos contrastar la diferencia entre los parámetros estimados en dos puntos muestrales diferentes denotados por  $\beta_{i,t1}^{EPPa}$   $\beta_{i,t2}^{EPPa}$

Al igual que el caso precedente es preciso determinar la distribución conjunta de la diferencia entre estos dos parámetros estimados.

Al tratarse de la combinación lineal de dos variables normales la nueva distribución será igualmente una variable normal, cuya media será igual a cero bajo la hipótesis nula, siendo su varianza la suma de las varianzas de cada una de las dos distribuciones menos el doble de la covarianza entre ambas, dado que no podemos asumir la hipótesis de independencia de las dos distribuciones.

Utilizando las distribuciones de cada uno de los estimadores podemos calcular la covarianza entre los parámetros estimados en dos puntos diferentes partiendo de la expresión original de la matriz de varianzas y covarianzas:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\beta_{t1}^{EPPa}, \beta_{t2}^{EPPa}) &= E[\beta_{t1}^{EPPa} - E[\beta_{t1}^{EPPa}]] [\beta_{t2}^{EPPa} - E[\beta_{t2}^{EPPa}]]' = \\ E[(\beta - (X'W_{t1}^2 X)^{-1} X'W_{t1}^2 U - \beta) & (\beta - (X'W_{t2}^2 X)^{-1} X'W_{t2}^2 U - \beta)'] = \\ E[(X'W_{t1}^2 X)^{-1} X'W_{t1}^2 U U' W_{t2}^2 X (X'W_{t2}^2 X)^{-1}] &= \\ (X'W_{t1}^2 X)^{-1} X'W_{t1}^2 E[U U'] W_{t2}^2 X (X'W_{t2}^2 X)^{-1} &= \\ \sigma^2 (X'W_{t1}^2 X)^{-1} X'W_{t1}^2 W_{t2}^2 X (X'W_{t2}^2 X)^{-1} \end{aligned}$$

Si denotamos por  $\sigma_{(\beta_{t1}\beta_{t2})}^2$  a la matriz de varianzas y covarianzas de la diferencia entre los dos parámetros estimados en  $t_1$  y  $t_2$ , cuya expresión es la siguiente:

$$\sigma^2_{(\beta_{i1}\beta_{i2})} = \sigma^2 * [(X'W_{t1}^2X)^{-1}X'W_{t1}^2X(X'W_{t1}^2X)^{-1} + \\ (X'W_{t2}^2X)^{-1}X'W_{t2}^2W_{t2}^2X(X'W_{t2}^2X)^{-1} - \\ 2*(X'W_{t1}^2X)^{-1}X'W_{t1}^2W_{t2}^2X(X'W_{t2}^2X)^{-1}]$$

Podemos plantear el segundo contraste T, utilizando como numerador la distribución de la diferencia de parámetros estimados dividida por su desviación típica, y como denominador el mismo del contraste anterior:

$$T^2_{(n-k)} = \frac{\frac{\beta_{i,t1}^{EPPa} - \bar{\beta}_{i,t2}^{EPPa}}{\sqrt{\sigma^2_{\beta_{i1}\beta_{i2}}}}}{\sqrt{\frac{e'e}{\sigma^2} / n - k}}$$

Realizando una transformación similar a la planteada en el primer contraste, eliminado de la expresión el valor desconocido de  $\sigma^2$ , podemos reformular el contraste como:

$$T^2_{n-k} = \frac{\beta_{i,t1}^{EPPa} - \bar{\beta}_{i,t2}^{EPPa}}{\sqrt{\hat{\sigma}^2_{\beta_{i1}\beta_{i2}}}}$$

siendo :

$$\sigma^2_{(\beta_{i1}\beta_{i2})} = \sigma^2 * [(X'W_{t1}^2X)^{-1}X'W_{t1}^2W_{t1}^2X(X'W_{t1}^2X)^{-1} + \\ (X'W_{t2}^2X)^{-1}X'W_{t2}^2W_{t2}^2X(X'W_{t2}^2X)^{-1} - \\ 2*(X'W_{t1}^2X)^{-1}X'W_{t1}^2W_{t2}^2X(X'W_{t2}^2X)^{-1}]$$

Aplicando este segundo contraste podríamos determinar la presencia de un cambio estructural entre dos períodos dados  $t_1$  y  $t_2$ , siempre que el valor del estadístico calculado superara el valor tabulado para un nivel de confianza dado.

Al igual que el caso anterior podríamos calcular el valor de este estadístico de forma secuencial, bien entre dos estimaciones consecutivas, o bien fijando una determinada “ventana” temporal Q, es decir calculando todos los posibles estadísticos entre dos parámetros separados por Q períodos. Representando gráficamente los valores de estos estadísticos sobre las bandas de confianza para un nivel dado podríamos determinar los puntos en los que se producen posibles cambios de estructura.

### 3º) Contraste de diferencias con MCO.

El tercer contraste que vamos a plantear se basa en la diferencia que existe entre los parámetros estimados por MCO y los estimados por el método EPPa cuando efectivamente se produce un cambio de estructura.

Cuando se estima un modelo mediante MCO y este modelo presenta un cambio de estructura, los parámetros obtenidos vienen a representar una media de los verdaderos parámetros en cada de los regímenes diferenciados por ese cambio de estructura. Por este motivo, los parámetros así obtenidos presentarán, a lo largo de la muestra, sesgos, positivos o negativos, antes y después del punto de ruptura.

Si estimamos ese mismo modelo, que presenta cambio estructural, con el método EPPa estos sesgos tenderán a reducirse, de forma que la diferencia entre los estimadores EPPa y el de MCO, será más elevada cuanto mayor sea la diferencia entre los verdaderos parámetros de ambos regímenes, o dicho de otra forma, cuanto mayor sea el cambio de estructura.

Partiendo de esta hipótesis, vamos a plantear este tercer contraste, teniendo en cuenta que, al contrario de lo que sucedía con los dos contrastes precedentes, en esta ocasión únicamente se podrá detectar la presencia de un cambio estructural en el conjunto del modelo, no pudiéndose precisar con exactitud el punto de ruptura.

Al igual que en los casos anteriores este tercer contraste esta basado en una distribución del tipo T-Student, en la que el denominador es similar a los anteriores y el numerador es la distribución conjunta de la diferencia entre los parámetros estimados por MCO y los estimados por EPPa.

Esta distribución conjunta será igualmente una distribución normal, con media cero, bajo la hipótesis nula, y varianza igual a la suma de las varianzas individuales (MCO y EPPa) menos la covarianza entre ambas, puesto que tampoco podemos admitir la independencia entre ambas.

Para calcular la covarianza entre el estimador de MCO y el EPPa, vamos a acudir, una vez más a la formulación general de la matriz de varianzas y covarianzas.

Así y considerando los resultados generales obtenidos en el apartado anterior, y la conocida expresión del estimador de MCO en función del verdadero valor del parámetro y la perturbación aleatoria, podemos llegar fácilmente a deducir los componentes de esta matriz de varianzas y covarianzas.

Sea,  $\hat{\beta} = \beta + (X'X)^{-1}X'U$  la expresión del estimador de MCO y

$\beta_i^{EPPa} = \beta + (X'W_i^2X)^{-1}X'W_i^2U$  la del estimador EPPa.

Definimos la matriz de varianzas y covarianzas como:

$$\text{Cov}(\beta_i^{EPPa}, \hat{\beta}) = E[(\beta_i^{EPPa} - E[\beta_i^{EPPa}])(\hat{\beta} - E[\hat{\beta}])']$$

Sustituyendo cada una de los términos por sus expresiones desarrolladas llegamos a determinar el valor de la matriz de varianzas y covarianzas como:

$$\begin{aligned}\text{Cov}(\beta_{tl}^{\text{EPPa}} \hat{\beta}) &= E[\beta + (X'W_t^2X)^{-1}X'W_t^2U - \beta)(\beta + (X'X)^{-1}X'U - \beta)'] = \\ &= E[(\beta - (X'W_t^2X)^{-1}X'W_t^2UU'X(X'X)^{-1}) = \\ &= (X'W_t^2X)^{-1}E[UU']X(X'X)^{-1} = \\ &= \sigma^2(X'W_t^2X)^{-1}X'W_t^2X(X'X)^{-1} \\ &= \sigma^2(X'X)^{-1}\end{aligned}$$

Partiendo de este valor de la covarianza, podemos deducir la matriz de varianzas y covarianzas de la distribución conjunta de :  $(\beta_t^{\text{EPPa}} - \hat{\beta})$

$$\begin{aligned}\text{Var}(\beta_t^{\text{EPPa}} - \hat{\beta}) &= \text{Var}(\beta_t^{\text{EPPa}}) + \text{Var}(\hat{\beta}) - 2 * \text{Cov}(\beta_t^{\text{EPPa}}, \hat{\beta}) = \\ &= \sigma^2(X'W_t^2X)^{-1}X'W_t^2X(X'W_t^2X)^{-1} + \sigma^2(X'X)^{-1} - 2 * \sigma^2(X'X)^{-1} = \\ &= \sigma^2(X'W_t^2X)^{-1}X'W_t^2W_t^2X(X'W_t^2X)^{-1} - \sigma^2(X'X)^{-1} = \\ &= \sigma^2 * [(X'W_t^2X)^{-1}X'W_t^2W_t^2X(X'W_t^2X)^{-1} - (X'X)^{-1}] = \\ &= \sigma_{(\beta_t^{\text{EPPa}} - \hat{\beta})}^2\end{aligned}$$

Finalmente el contraste T quedaría planteado como:

$$T_{(n-k)}^3 = \frac{\beta_t^{\text{EPPa}} - \hat{\beta}}{\sqrt{\frac{\sigma_{(\beta_t^{\text{EPPa}} - \hat{\beta})}^2}{\frac{e'e}{\sigma^2} / n - k}}}$$

De nuevo podemos eliminar el valor desconocido de  $\sigma^2$  quedando definido el contraste como:

$$T_{n-k}^3 = \frac{\beta_t^{\text{EPPa}} - \hat{\beta}}{\sqrt{\hat{\sigma}_{(\beta_t^{\text{EPPa}} - \hat{\beta})}^2}}$$

iendo :

$$\hat{\sigma}_{(\beta_t^{\text{EPPa}} - \hat{\beta})}^2 = \hat{\sigma}^2 * [(X'W_t^2X)^{-1}X'W_t^2W_t^2X(X'W_t^2X)^{-1} - (X'X)^{-1}]$$

---

La interpretación de este contraste sería similar a los dos anteriores, es decir, si los valores calculados superan a los tabulados para un nivel de confianza dado, podemos rechazar la hipótesis nula de permanencia estructural.

Si realizáramos un ejercicio paralelo a los anteriores y calculáramos este contraste de forma secuencial para el conjunto de los parámetros estimados por EPPa, podríamos comprobar que, ante la existencia de un cambio de estructura, prácticamente todos los valores del mismo resultarían significativos, ya que como mencionábamos anteriormente, la estimación por MCO produce resultados mucho más sesgados que el método EPPa para el conjunto de la muestra.

El hecho de presentar este tercer contraste que aparentemente presenta mayores desventajas frente a los dos primeros, en el sentido de no detectar el punto de cambio de estructura, estaría justificada por la posibilidad de su aplicación sin necesidad de calcular los  $N$  parámetros.

En este sentido, y considerando la aplicación originaria del método EPP para la estimación de modelos destinados a la predicción (Pérez (1991)), podríamos estimar los parámetros ponderando en mayor medida las observaciones más recientes y aplicar este tercer contraste. Si los resultados son positivos, es decir, se detecta la presencia de un cambio estructural, utilizaríamos los coeficientes estimados por EPP para realizar la predicción, mientras que si no hay cambio de estructura, sería más conveniente utilizar los coeficientes estimados por MCO, ya que la estimación sería, por definición, más eficiente en términos de varianza.

Una vez planteados los tres contrastes alternativos, vamos a definir las principales ventajas e inconvenientes, que a priori, pueden deducirse del mismo:

## **Ventajas :**

- Para la aplicación de los distintos contrastes, no es necesario fijar a priori el punto de cambio de estructura. (Chow, test clásicos, etc).

- Adicionalmente, y ante muestras pequeñas, los contrastes planteados no se ven influidos por los sesgos que se producen en la estimación recursiva clásica, ya que en todas las estimaciones se dispone del total de la muestra.

Frente a estas ventajas nos encontramos con los siguientes **inconvenientes del método**:

- La fijación del tipo de ponderación a utilizar se realiza independientemente del modelo a analizar y en general de forma subjetiva.

- Puede verse muy influenciado por la existencia de puntos raros ("Outliers") sobre todo si se utilizan distribuciones excesivamente "cargadas" sobre un conjunto pequeño de estimaciones, por lo que podría ser recomendable utilizar métodos de estimación robustos del tipo de los M-Estimadores [Yohai(1987)].

## BIBLIOGRAFIA

- BRUNK, H.D. (1960): "On a theorem of E. Sparre Andersen and its applications to test against trend". *Mathematica Scandinavica*, nº 8. Páginas 305-326.
- COX, D.R. and STUART, A. (1955): "Some quick sign test for trend in location and dispersion". *Biometrika*, nº 42. Páginas 80-95.
- DANIELS, H.E. (1950): "Rank correlation and population models". *Journal of the Royal Statistical Society. Serie B*, nº 12. Páginas 171-181.
- MANN, H.B. (1945): "Nonparametric test against trend". *Econometrica* nº13. Páginas 245-259.
- PETTIT, A.N. (1979): "A non parametric approach to the changepoint problem". *Applied statistics*, nº 28. Páginas 126-135.
- PEREZ, J. (1991): *Estimación Paramétrica Ponderada*. Tesina de Licenciatura, dirigida por D. José Vicens Otero. Departamento de Economía Aplicada. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad Autónoma de Madrid.
- (1995): *Tratamiento econométrico del cambio estructural. El método de estimación paramétrica ponderada*. Tesis doctoral no publicada, dirigida por D. José Vicens Otero. Departamento de Economía Aplicada. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad Autónoma de Madrid.
- PEREZ, J. y VICENS, J (1994): *Estimación Paramétrica Ponderada. Una alternativa a la estimación recursiva*. Actas de la VIII Reunión Anual de Asepelt España. Vol.II, Páginas 283-290. Palma de Mayorca, Junio 1994.
- SEN, A. and SRIVASTAVA, M.S. (1975): "On test for detecting changes in mean". *Annals of statistics*, 3. Páginas 98-108.
- WOLFE, D.A. and SCHECHTMAN, E. (1984): "Non parametric statistical procedures for the change-point problem ". *Journal of Statistics Planning and Inference*, nº 9. Páginas 389-396





# MODELOS LINEALES GENERALIZADOS (GLMs) EN EL ANÁLISIS DE LA ECONOMÍA REGIONAL Y URBANA

JESÚS N. RAMÍREZ SOBRINO<sup>1</sup>  
PEDRO P. PÉREZ HERNÁNDEZ

## INTRODUCCIÓN

El objetivo de esta comunicación es realizar una primera aproximación a un conjunto de métodos que, o bien están especialmente adaptados al tratamiento de datos blandos o bien su propia concepción metodológica permitiría utilizarlos como tal.

Estas técnicas de la modelización estadística cualitativa, venían utilizándose en otras ciencias desde los años cincuenta, aunque su aplicación económica es reciente, principalmente en el campo de la ciencia regional.

## 1. MODELOS LINEALES GENERALIZADOS (GLMs)

Tradicionalmente, la modelización estadística utilizada en las investigaciones de economía regional o urbana ha estado orientada hacia datos cuantitativos, de alta fiabilidad, medidos en tasas o escalas de intervalos. Esta tradición ha ignorado la realidad regional y/o urbana, en cuanto que la información disponible frecuentemente es cualitativa, discreta o categórica. El tratamiento más adecuado de este tipo de información lo proporciona la familia de modelos conocidos como Modelos Lineales Generalizados.

Con objeto de comprender mejor el objetivo de estos métodos, es conveniente establecer una clasificación de los problemas derivados de la naturaleza de la información disponible (cuadro 1). Si se observa la fila inferior de dicho cuadro, se percibe una clara distinción entre las casillas d, e y f, por un lado, y g por otro. En las primeras existe diferencia entre variables dependientes e independientes, en cambio para la casilla g no es posible distinguir entre variables explicativas y variables respuesta. Esto condiciona el tratamiento de tales variables, ya que mientras en la primera situación (d a f) se intentará determinar el efecto que las variables independientes tienen sobre la dependiente, mediante modelos de regresión logísticos/logit y probit; en la segunda (g) todas son tratadas como variables respuesta, limitándose a estudiar las relaciones entre ellas mediante modelos log-lineales. En el cuadro 2, aparece una clasificación de los modelos lineales generalizados y su uso en

<sup>1</sup>Profesores de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales-ETEA de la Universidad de Córdoba.

relación con los problemas descritos en el cuadro 1. Puede parecer que no existe relación entre los modelos logit y probit y los log-lineales; sin embargo, la casilla f es quizás la zona fronteriza del dominio de ambos tipos de modelos. La forma más apropiada de enfocar esta cuestión es considerar que para tratar los problemas que se presentan en las casillas d a g, los modelos más adecuados son los pertenecientes a la familia de Modelos Lineales Generalizados.

Un modelo lineal generalizado, puede expresarse en la forma:

$$Y_i = \mu + \xi_i \rightarrow \forall = 1,2,..., N$$

donde:

$Y_i$  es la variable dependiente y se supone que proviene de la familia de distribuciones exponenciales de probabilidad;

$\mu_i$  es el valor esperado de  $Y_i$  [v. g.  $\mu_i = E(Y_i)$ ]; y

$\xi_i$  es un término de error distribuido aleatoriamente.

**Cuadro 1.Lasificación de problemas estadísticos en función de la naturaleza de las variables**

|   |             | VARIABLES INDEPENDIENTES (EXPLICATIVAS) |        |             |         |
|---|-------------|---|--------|-------------|---------|
| VARIABLES INDEPENDIENTES<br><br>(Respuesta) |             | CONTINUAS                               | MIXTAS | CATEGORICAS | NINGUNA |
|   | Continuas   | a                                       | b      | c           |         |
|   | Catógoricas | d                                       | e      | f           | g       |

Nota: 1. La importancia de los problemas que originan es progresiva al moverse desde la casilla a hacia la g.  
2. Las combinaciones de variables (casillas) que se relacionan en la tabla pueden ser tratadas con diferentes tipos de modelos; para las casilla a, b y c, son más adecuados los modelos clásicos. Sin embargo, para las d, e, f y g, deben utilizarse modelos lineales generalizados.  
Fuente: N. Wrigley y F. Brouwer (1987), p. 444. *Qualitative statisticals model for regional economic analysis*, en AA. VV. (1987, a).

En el modelo, las variables explicativas  $X_{ij}$  se pueden resumir en la estructura del llamado *predictor lineal* ( $\eta_i$ ), que adopta la forma,

$$\eta_i = \sum_{j=1}^k \beta_j X_{ij}$$

donde  $\beta_j$  son parámetros a estimar. El predictor lineal se relaciona con el valor esperado de  $Y_i$ , a través de la función g (LINK FUNCTION),

$$\eta_i = g(\mu_i)$$

o mediante la inversa de tal función,  $g^{-1}$ ,

$$\mu_i = g^{-1}(\eta_i).$$

La función  $g$  es monótona no decreciente.

Resulta una forma útil de acotar los valores al intervalo (0,1), siempre y cuando la función sólo pueda tener valores en ese intervalo. Aunque cualquier función de distribución de probabilidad reúne esas propiedades.

Sustituyendo en la ecuación original del modelo el predictor lineal y la función inversa, se obtiene

$$Y_i = g^{-1}(\eta_i) + \xi_i$$

o también, representando por  $F$  a la familia de distribuciones de probabilidad exponencial, puede escribirse

$$Y_i \approx F[g^{-1}(\sum \beta_j X_{ij})]$$

Cada modelo concreto de los denominados como Modelos Lineales Generalizados (GLMs), se obtendría mediante una combinación particular de: función  $g$  (Link Function), predictor lineal y distribución de probabilidad del error ( $\xi_i$ ) (cuadro 2).

**Cuadro 2: Modelos lineales generalizados**

| MODELO                                      | TIPO DE FUNCIÓN DEL PREDICTOR (LINK FUNCTION) | DISTRIBUCIÓN DE LOS ERRORES |
|---|---|-----------------------------|
| REGRESIÓN LINEAL                            | IDENTIDAD                                     | NORMAL                      |
| ANOVA (efectos fijos)                       | IDENTIDAD                                     | NORMAL                      |
| ANOVA (efectos aleatorios)                  | IDENTIDAD                                     | GAMMA                       |
| LOGÍSTICO/REGRESIÓN LOGIT                   | LOGIT   | BINOMINAL O MULTINOMINAL    |
| REGRESIÓN PROBIT BINARIA                    | PROBIT  | BINOMINAL                   |
| MODELO LOGIT LINEAL PARA PROBLEMAS TIPO (f) | LOGIT   | BINOMINAL O MULTINOMINAL    |
| MODELO LOG-LINEAL PARA PROBLEMAS TIPO (g)   | LOGARÍTMICA                                   | POISSON                     |
| MODELO LOG-LINEAL PARA PROBLEMAS TIPO (f)   | LOGARÍTMICA                                   | POISSON                     |

*Nota:* Las letras que aparecen en el cuadro, hacen referencia a los problemas estadísticos en función de la naturaleza de las variables (Cuadro 1).

*fuente:* N. Wrigley y F. Brouwer, *Qualitative statistical models ...*, op. cit., en AA. VV. (1987, a), p. 447.

En los casos en que se ha intentado utilizar un modelo convencional de regresión con información de las características descritas en las casillas d, e y f, se ha tropezado con dos problemas: en primer lugar la hipótesis de normalidad de los residuos no es admisible, lo que implica serias limitaciones tanto en el proceso de estimación como en la fiabilidad de los resultados; la segunda, es que los valores pronóstico de la variable explicativa, que en estos modelos son interpretados como probabilidades de cada opción o valor categórico, pueden estar fuera del intervalo (0,1), de forma tal que los resultados carezcan de sentido.

Existen distintos tipos de modelos con capacidad para resolver este tipo de problemas, aunque los más apropiados son los modelos Logit y Probit. El modelo logit o Logistic Regression Model se fundamenta en la función de distribución de probabilidad logística. El probit o Probit Regression Model, está basado en la función de distribución de probabilidad normal. Para sólo dos valores de variable respuesta, el modelo logit adopta la forma:

$$y_i = \frac{e^{X_i'\beta}}{1 + e^{X_i'\beta}} \quad i=1,2,\dots,N$$

donde:

$$X_i'\beta = \beta_0 + \sum_{j=1}^k \beta_j X_{ij}$$

con valores para  $x_i$  y  $\beta$  pertenecientes al intervalo  $(-\infty, +\infty)$  e  $y_i$  (algunas veces denotado como  $\pi_i$ ) pertenecientes al intervalo (0,1).  $y_i$  representa la probabilidad de que la primera opción sea seleccionada por el individuo  $i$ -ésimo, o en la  $i$ -ésima localidad.

Si en vez de utilizar la función de distribución logística se utiliza la normal, el modelo obtenido sería el Probit. En el caso expuesto, es decir, de elección binaria, el modelo Logit es una buena aproximación al Probit y mucho más sencillo que éste. Esta razón justifica el uso más generalizado del modelo Logit que del Probit.

Generalizando al caso de R valores posibles, supuestos distribuidos independiente e idénticamente según la distribución de Weibull, se obtiene el modelo multi-logit:

$$y_{r/i} = \frac{e^{X_i'\beta_r}}{1 + e^{X_i'\beta_r}} \quad \begin{matrix} r=1,2,\dots,R \\ i=1,2,\dots,N \end{matrix}$$

donde:

$$X_i'\beta_r = \beta_{or} + \sum_{j=1}^k \beta_{jr} X_{ij}$$

el significado de  $y_{r/i}$  es la probabilidad de que sea seleccionada la opción  $r$  por el individuo  $i$ -ésimo o en la  $i$ -ésima localidad, dados los  $k$  valores de las variables explicativas. Si las variables indepen-

dientes son mixtas, categóricas y continuas, el modelo sería apropiado para resolver los problemas reseñados en la casilla e (cuadro 1); si sólo son categóricas, estará indicado para los recogidos en la f (cuadro 1).

También es posible realizar esta generalización con el modelo Probit, con sólo suponer que los errores tienen una distribución normal multivariante, obteniendo así el modelo multi-probit. Sin embargo, aquí las diferencias obtenidas en los resultados de la modelización multi-logit y multi-probit sí son importantes.

La hipótesis de independencia sobre los residuos es muy fuerte, limitando la validez del modelo multi-logit a aquellas situaciones en que se satisface el principio de independencia de alternativas irrelevantes. Dado que es infrecuente que éste se satisfaga, es preciso recurrir al modelo multi-probit. El principio de alternativas irrelevante implica que la proporción existente entre las probabilidades de cada par de alternativas permanece al introducir nuevas alternativas. Es decir, tales alternativas afectan de igual forma a las ya existentes. Pero este modelo entraña una gran dificultad de cálculo. Para evitar su uso se ha recurrido a diversas soluciones, entre las que cabe destacar los modelos dogit y logit anidados. Los primeros son una combinación de los anteriores aplicables en el caso de que se satisfaga en parte el mencionado principio. Los logit anidados transforman un modelo de alternativas múltiples en una secuencia de elecciones binarias condicionadas a los resultados de elecciones anteriores.

Otros interesantes desarrollos son los modelos beta-logísticos, útiles para analizar la heterogeneidad del comportamiento individual, y los que incorporan un carácter dinámico que refleja la influencia que tiene en un decisor su experiencia previa en procesos análogos.

En los casos en que todas las variables son categóricas, casillas f y g, los modelos más apropiados para su tratamiento son los log-lineales; estos modelos son en realidad una generalización de los análisis de independencia en variables discretas.

Su formulación más general, para una tabla de contingencia bidimensional (cuadro 3), se puede expresar como

$$\log e^{m_{ij}} = \log e^{E(n_{ij})} = \lambda + \lambda_i^A + \lambda_j^B + \lambda_{ij}^{AB}$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, I$$

$$j = 1, 2, 3, \dots, J$$

donde

$n_{ij}$  = es la frecuencia observada en la tabla de contingencia, y se utiliza como una variable aleatoria;

$m_{ij}$  = es la frecuencia esperada en la casilla  $ij$ ;

$\lambda^A, \lambda_j^B$  = son los parámetros que representan los principales efectos de las variables A y B, respectivamente; y

$\lambda^{AB}_{ij}$  es el parámetro que representa el efecto interacción de primer orden entre ambas variables.

**Cuadro 3. Tabla de contingencia bidimensional (I x J)**

|       | 1   | 2   | .... | j   | .... | J   | TOTAL |
|-------|-----|-----|------|-----|------|-----|-------|
| 1     | n11 | n12 | .... | n1j | .... | n1J | n1    |
| 2     | n21 | n22 | .... | n2j | .... | n2J | n2    |
| .     | .   | .   | .... | .   | .... | .   | .     |
| .     | .   | .   | .... | .   | .... | .   | .     |
| .     | .   | .   | .... | .   | .... | .   | .     |
| j     | ni1 | ni2 | .... | nij | .... | niJ | ni    |
| .     | .   | .   | .... | .   | .... | .   | .     |
| .     | .   | .   | .... | .   | .... | .   | .     |
| I     | nI1 | nI2 | .... | nIj | .... | nIJ | nI    |
| TOTAL | n.1 | n.2 | .... | n.j | .... | n.J | N     |

Fuente: N. Wrigley y F. Brouwer, *Qualitative Statistical ...*, op. cit., AA. VV. (1987, a), p. 451.

El número de parámetros se obtiene de la expresión

$$IJ + I + J + 1$$

Para poder estimar los parámetros es necesario imponer unas restricciones. Los dos conjuntos más comunes de éstas son:

1) El sistema de *efecto centrado*:

$$\sum_{i=1}^I \lambda_i^A = \sum_{j=1}^J \lambda_j^B = \sum_{i=1}^I \lambda_{ij}^{AB} = \sum_{j=1}^J \lambda_{ij}^{AB}$$

en el que el parámetro  $\lambda$ , es análogo al término media global en un modelo de análisis de varianza; y los parámetros,  $\lambda_i^A$ ,  $\lambda_j^B$ ,  $\lambda_{ij}^{AB}$  representan desviaciones de la media global.

2) El sistema de *efecto angular*:

$$\lambda_1^A = \lambda_1^B = \lambda_{1j}^{AB} = \lambda_{i1}^{AB} = 0$$

El objetivo del modelo es detectar estructuras latentes, fundamentalmente de independencia o de equiprobabilidad, en la tabla de contingencia. La forma de operar es ajustar una serie de

modelos lineales a los datos de la tabla tomados en logaritmos; tales modelos estarán dispuestos jerárquicamente, empezando por el más saturado, es decir, el que considera todas las relaciones posibles, y continuando con todas las posibles eliminaciones de parámetros hasta llegar al modelo más simple, que tendrá un sólo parámetro. De entre éstos se seleccionará aquél que presente un mejor ajuste a los datos.

En el modelo seleccionado, la ausencia de un parámetro de interacción implica independencia múltiple entre las variables correspondientes. Si el parámetro que falta es el asociado a una variable indica que esta variable es redundante y puede ser suprimida. Finalmente, si el modelo seleccionado es el más simple indica que existe una estructura de equiprobabilidad para todas las variables que intervienen<sup>2</sup>.

Este modelo es generalizable a más de dos variables, presentando mayores ventajas en el caso de tablas de contingencia multidimensional. El método seguido en esta generalización es básicamente igual al descrito anteriormente.

En cuanto a las técnicas más apropiadas para la estimación de los parámetros en los Modelos Lineales Generalizados, pueden distinguirse tres distintas: métodos de ajuste proporcional iterativo; métodos de mínimos cuadrados ponderados (WLS), iterativos y no iterativos; y técnicas de funciones de maximización (v. g. Newton-Raphson, Davidon-Powell). En la práctica, sin embargo, la distinción de ambas no es tan clara como pudiera parecer. Una alternativa de clasificación se inclina por diferenciar los procedimientos más apropiados, bien para modelos logit (casillas d a f), bien para los modelos log-lineales (casillas f y g).

Finalmente, cabe decir en cuanto a la utilidad de estos modelos, que los logísticos han sido aplicados a procesos de clasificación con cierta ventaja, en ocasiones, respecto al análisis discriminante. El primero produce una mejor clasificación, en aquellos casos en los que algunas de las variables son discretas. El segundo proporciona resultados algo deficientes, más que en cuanto a la proporción total de errores, en cuanto al sesgo de éstos, que son mucho más frecuentes<sup>3</sup>.

En cuanto a los modelos log-lineales, han sido utilizados, de forma generalizada, en análisis de carácter espacial, obteniendo resultados muy satisfactorios. Willekens, demuestra que el modelo log-lineal es equivalente formalmente, al modelo gravital<sup>4</sup>.

Otros modelos, dentro de la línea de tratamiento de datos cualitativos, son los LISREL y PLS.

<sup>2</sup> N. Wrigley y F. Brouwer, *Qualitative statistical ...*, op. Cit., AA.VV. (1987, a), p. 451 s.

<sup>3</sup> En esta línea está el trabajo de N. Alderman y otros, *Regional and urban perspectives on industrial innovation: applications of the logit and cluster analysis to industrial survey data*, tomado de AA. VV. (1987, a), p. 471 s.

<sup>4</sup> F. Willekens, *Specification and calibration of spatial interaction models. A contingency-table perspective and an application to intra-urban migration in Rotterdam*, tomado de AA. VV. (1987, a), p. 113.

---

El modelo LISREL (Linear structural equation models) está basado en los métodos de la variable latente, que permiten tratar variables observables y no observables, simultáneamente. Pueden considerarse una síntesis de muchos otros modelos (modelos recursivos y no recursivos para datos cross-section y longitudinales, modelos de covarianza, análisis factorial, etc.). Estos modelos permiten simultáneamente, la estimación de parámetros para describir las relaciones entre variables teóricas, y parámetros para representar las relaciones entre variables teóricas y observables. La técnica de estimación suele ser la de máxima verosimilitud.

El PLS (Partial least squares), desarrollado originalmente para el tratamiento de relaciones causales con información cardinal, tiene el inconveniente de prestar poca atención a la dependencia espacial de las variables. Su utilización con variables cualitativas, está aún en fase de desarrollo, aunque los resultados parecen ser prometedores <sup>5</sup>.

## BIBLIOGRAFÍA

AA. VV. (1987, a), Handbook of regional and urban economics (vol. I *Regional Economics*), Amsterdam, North-Holland, 702 págs.

PAELINCK, J. H. y NIJKAMP, P. (1975), *Operational Theory and Method in Regional Economics*, Farnborough, Saxon House.

RICHARDSON H. W. (1986), *Economía regional y urbana*, Madrid, Alianza Editorial, 309 págs.

RODRIGUEZ SAIZ, L. y otros (1986), *Política económica regional*, Madrid, Alianza Editorial, 368 págs.

TAYLOR, L. (1975), *Theoretical Foundations and Technical Implications*, Oxford University Press, editado por Blitzer, Clark y Taylor.

## ARTÍCULOS.

ANCOT, J. P y PAELINCK, J. (1979), *A Discriminant Analysis Approach to Regional Threshold Problems: A Progress Report*, Papers of the Regional Science Association, vol. 42, pp. 139-151.

GAROFOLI, G. (1986), *Modelos locales de desarrollo*, Estudios Territoriales, nº 22, pp. 157-167.

HAMPTON, P. y RAYNER, A. C. (1977), *The Use of Multivariate Methods in Economics with Reference to Regional Analysis*, Regional Science and Urban Economics, nº 7, pp. 267-287.

---

<sup>5</sup> P. Nijkamp (1982, a), p. 122 s.



HARRIS, C. C. (1980), *New Developments and Extensions of the Multiregional, Multiindustry Forecasting Model*, Journal of Regional Science, nº 20, pp. 159-171.

JAUMOTTE, Ch. y PAELINK, J. H. P. (1971), *The Differential Economics Structures of the Belgian Provinces: A Time Varying Factor Analysis*, Regional and Urban Economics, vol. 1, nº 1, pp. 41-75.

MALLO FERNANDEZ, F. (1984), *Una metodología multivariante en el análisis socioeconómico regional*, ponencia presentada a la X Reunión de Estudios Regionales, León. Publicada en Actas X Reunión de Estudios Regionales, (2 volúmenes), Valladolid, Consejería de Educación y Cultura, Junta de Castilla y León, pp. 449-473.

NIJKAMP, P. (1982, b), *Una perspectiva de la ciencia regional*, Cuadernos Económicos del ICE, nº 20, pp. 7-15.

— (1986), *25 años de ciencia regional: visión retrospectiva y perspectivas de futuro*, Estudios Territoriales, nº 20, pp. 15-29.

NIJKAMP, P. y REGGIANI, A. (1988), *Entropy, Spatial Interaction Models and Discrete Choice Analysis: Static and Dynamic Analogies*, European Journal of Operational Research, nº 36, pp. 186-196.

NIJKAMP, P. y VOOGD, H. (1979), *The Use of Psychometric Techniques in Evaluation Procedures*, Papers of the Regional Science Association, vol. 42, pp. 119-138.

RICHARDSON, H. W. (1973), *The Future of Regional Economics*, ponencia presentada a la I Reunión de Estudios Regionales, Barcelona. Publicada en Localización Económica y Desarrollo Regional, Madrid, Moneda y Crédito, pp. 27-41.

VOOGD, H. (1981), *Multicriteria Analysis with Mixed Qualitative-Quantitative Data*, ponencia presentada al XXI Congreso Europeo de la Regional Science Association, Barcelona.



# MENSUALIZACIÓN E INTEGRACIÓN DE DATOS BIMESTRALES DE OPINIÓN EMPRESARIAL: UNA PROPUESTA METODOLÓGICA

FCO. JAVIER SIERRA MARTÍNEZ  
Dept. De Econometría, Estadística Y Economía Española  
Facultad de Cc. Económicas Y Empresariales  
Universidad de Barcelona

## 1. INTRODUCCIÓN

En la presente comunicación se manifiesta la propuesta metodológica para la mensualización e integración de los datos bimestrales que se reflejan en las encuestas de opinión empresarial publicadas por la Cámara de Comercio y Navegación de Barcelona en la revista "Perspectiva Económica de Catalunya". Debemos destacar que la metodología presentada se engloba en un proyecto más amplio, a saber, la construcción de un indicador *cualitativo* de actividad para distintos sectores (comercio, industria y turismo) de Cataluña y su posterior incorporación al indicador cuantitativo ya existente en nuestra comunidad. En este sentido, para la construcción de un indicador sintético que recoja la evolución de la actividad industrial a corto plazo en Cataluña debemos considerar todas las fuentes de información posibles y no solamente aquellas que se refieren exclusivamente a indicadores parciales cuantitativos, sino también los indicadores cualitativos que aparecen en las encuestas de opinión comentadas con anterioridad. Así, por ejemplo para la industria, encontramos que los empresarios ante la pregunta de cómo ha evolucionado la producción en comparación con el bimestre anterior tienen tres categorías diferentes para responder: *mayor, igual y menor*, o alternativamente, que la producción *ha aumentado, disminuido o permanecido igual* en comparación con el bimestre anterior. Por lo tanto en las Encuestas se refleja el porcentaje de empresarios que opinan que la producción *ha mejorado, ha empeorado o permanece constante*. Esta comunicación se centra en el análisis de la Encuesta de Coyuntura Industrial y más concretamente aquella referida al conjunto de la industria (también se realizan encuestas a nivel subsectorial).

Para interpretar de forma correcta los resultados que se reflejan en las encuestas debe tenerse en cuenta la definición de la variable saldo, diferencia entre las respuestas extremas, ya que aunque ésta variable pueda proporcionar una aproximación de las variaciones de las magnitudes en cuestión (y de su intensidad), en ningún momento pueden interpretarse en términos cuantitativos ni confundirse con porcentajes de tasas de variación.

---

Propuesta el año 1992 se denominaba «Boletín de Estadística y Coyuntura».

Propuesta formulada por Dr. Manuel Artits, Dr. Miguel A. Sierra, Dr. Jordi Suriñach y Sra. Francisca GRane en «Datos, técnicas y resultados del moderno análisis económico regional». Compiladores: Antonio Pulido y Benardí Cabrer. Proyecto spalink. Generalitat Valenciana (1994).

Una primera etapa en la construcción del indicador de actividad industrial cualitativo consiste en la reformulación de la variable saldo<sub>2</sub>. Tal reformulación surge de la imposibilidad, en nuestra opinión, de considerar a la variable saldo como una magnitud representativa real de la evolución de la opinión de los empresarios. Efectivamente, en la tabla 1 se muestran diferentes situaciones que se pueden producir en las encuestas de opinión.

**Tabla 1**

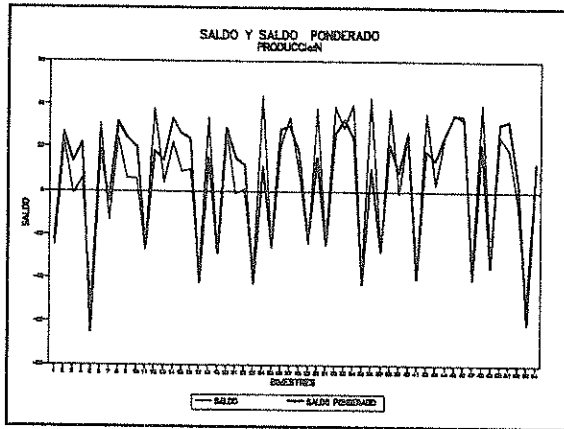
| (=) | (+) | (-) | Saldo |
|-----|-----|-----|-------|
| 100 | 0   | 0   | 0     |
| 80  | 10  | 10  | 0     |
| 0   | 50  | 50  | 0     |

En todas las situaciones consideradas anteriormente la variable saldo es igual a cero. Si lo que deseamos es intentar modelizar las opiniones de los empresarios respecto a una magnitud en particular se hace difícil sostener que, para dicho saldo igual a cero, las diversas formas de calcular el resultado respondan a la misma situación económica. Este comentario origina la primera etapa en la elaboración de la metodología que se presenta, a saber, la incorporación de la categoría igual en el cálculo de la variable saldo.

Para su reformulación, y en el caso de la variable producción, se considera una transformación cuadrática de la forma  $W_i = a_1 S_i + a_2 Z_i + a_3 S_i^2 + a_4 S_i Z_i + a_5 Z_i^2$  (donde  $S = \text{Saldo}$  y  $Z = \text{Categoría igual}$ ), en la línea de lo propuesto por Gnanadesikan (1977) en la definición de lo que se denomina *Componentes Principales Generalizadas*<sup>3</sup>. Tal combinación muestra, para todo momento en el tiempo, la ponderación debida a la categoría igual sobre la variable saldo una vez considerada la relación no lineal entre ambas variables (*saldo e igual*). De la misma forma que en componentes principales lineales debemos buscar el vector de coeficientes  $a = [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5]$  de tal forma que maximice la varianza de  $w_i$ , sujeta a la restricción de normalización ( $a' \cdot a = 1$ ). A la anterior combinación cuadrática ( $W$ ) se le denomina Saldo Ponderado, serie con la que se trabajará a lo largo de la comunicación. A continuación se exponen los resultados obtenidos para el período 1981-1992.

<sup>3</sup> R. Gnanadesikan. «Methods for Statistical Data Analysis of Multivariate Observations». (1977).

Gráfico 1



## 2. TRANSFORMACIONES MONÓTONAS SOBRE LOS DATOS

Las características que presentan los datos bimestrales que aparecen en las encuestas, datos de naturaleza cualitativa, impiden que sobre ellos se puedan utilizar las técnicas clásicas de mensualización por las razones que más adelante se pondrán de manifiesto.

El presente apartado aborda el problema del cálculo del ajuste de la serie “saldo ponderado” a sus factores básicos, como la tendencia y la estacionalidad, ésta última componente fundamental en el proceso de mensualización que trataremos más adelante. La transformación que se propone a continuación sobre las observaciones está en relación con la naturaleza de los datos. Efectivamente, si denotamos por  $I(t)$  el valor de un indicador parcial en un momento del tiempo respecto a una cierta variable  $X(t)$  (construido en base a opiniones empresariales), la única propiedad que debe ser contemplada en el proceso de su construcción es aquella que tiene en cuenta únicamente relaciones de orden en la evolución de la opinión empresarial. Esto es, si  $X'(t)$  representa la serie de opinión correspondiente a  $X(t)$  deberemos construir el indicador  $I(t)$  de tal forma que si  $X'(t-1) < X'(t)$ , entonces  $I(t-1) < I(t)$ .

Varios son los motivos que aconsejan abandonar los procedimientos clásicos (tales como MCO) para el ajuste de las series como las que nos ocupan. En primer lugar, el ya citado carácter no cuantitativo de la serie que impide la interpretación en términos métricos de la misma. En segundo lugar, y dado que los valores de la serie están acotados entre -100 y 100, la existencia de tendencia se dará, en todo caso, a muy corto plazo y con cambios bruscos, imposibilitando con ello la detección de un mantenimiento sostenido a medio y largo plazo. Finalmente, la esperada correspondencia monótona entre la magnitud puesta a estudio y el indicador asociado, nos lleva a exigir a la serie ajustada tan solo esta propiedad de orden. Así, y particularizando en la variable producción, si tal magnitud real se duplica, por ejemplo, en un período respecto al anterior, cabe esperar que la mayo-

ría de los empresarios opinen (perciban) en tal período que la producción ha mejorado. En ningún caso se debe esperar que la variable saldo “dupliche” también su valor. Tan solo cabe esperar una respuesta en la dirección apuntada. La acotación señalada anteriormente (entre -100 y 100) del saldo ponderado muestra claramente esta situación: la economía (la producción) puede seguir creciendo indefinidamente pero el saldo no superará la cota de 100.

Las consideraciones expuestas en el párrafo anterior nos llevan a proponer la siguiente metodología de trabajo para la determinación de las series ajustadas de los saldos ponderados.

En primer lugar especificamos un modelo con dos factores, en este sentido con connotaciones clásicas, de forma que el primero de ellos se asocie con la tendencia anual de la serie, y el segundo con la estacionalidad bimestral.

Así, y representando mediante  $S_{ij}$  el valor de la variable saldo en el bimestre  $j$  del  $i$ -ésimo año, escribimos:

$$S_{ij} = \mu + \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \text{año}_i + \sum_{j=1}^6 \beta_j \cdot \text{bimestre}_j + U_{ij}$$

con  $i = 1, 2, \dots, m$ , años, y  $j = 1, 2, \dots, 6$ , bimestres. El parámetro  $\alpha$  (y sus categorías) se identifica con los efectos de la tendencia anual, mientras que el parámetro  $\beta$  se asocia con los efectos de la estacionalidad bimestral. El término  $u_{ij}$  supone un término de error o perturbación sobre el que no será necesario imponer las hipótesis clásicas de ruido blanco por cuanto nuestra aproximación será descriptiva y no inferencial.

Matricialmente, definiendo previamente las adecuadas variables dicotómicas que conforman la matriz de diseño  $D$ , especificaríamos:

$$s = D \cdot p + u \quad (2)$$

donde:  $s$  = vector del saldo ponderado (variable dependiente).

$D$  = matriz de variables dicotómicas.

$p$  = vector de parámetros.

$u$  = vector de términos de perturbación.

El modelo anterior, que define un análisis de la varianza con dos factores, ha sido ampliamente utilizado en el pasado, si bien con otro tipo de datos y periodicidad, para la detección de las componentes básicas de una serie temporal. Nosotros lo retomamos ahora, como tal modelo, pero con un procedimiento diferente de estimación al habitual mínimo-cuadrático.

En efecto, por lo señalado anteriormente, nuestra propuesta metodológica pasa por la estimación de  $\alpha_i$  y  $\beta_j$  imponiendo la siguiente condición:

Si  $S_{ij} \leq S_{i'j}$ , entonces determinar  $\alpha_i$  y  $\beta_j$  de forma que  $S_{ij}^* \leq S_{i'j}^*$ , en donde  $S_{ij}^*$  y  $S_{i'j}^*$  representan los valores ajustados de la serie. Tal condición se identifica claramente con el procedimien-

to MONANOVA (Monotone Analysis of Variance) introducido por KRUSKAL (1965), del cual indicamos brevemente sus elementos básicos. Dada la definición de las restricciones, es evidente que existen infinitos conjuntos de valores ajustados que satisfacen las condiciones especificadas, por lo que se impone la necesidad de establecer un criterio, de acuerdo con el cual obtengamos el ajuste óptimo. Tal criterio es el bien conocido *Stress*, cuyo valor mínimo determina el ajuste óptimo de la relación anterior. El procedimiento de minimización del *Stress* deriva en un proceso iterativo en el cual, en cada etapa, se lleva a cabo un ajuste mínimo cuadrático (lineal) y un ajuste monótono. Así, en la etapa inicial (previa estandarización de  $S_{ij}$ , por cuanto solo nos interesan las relaciones de orden) se efectúa la regresión lineal de  $s$  sobre la adecuada matriz de variables dicotómicas  $\mathbf{D}$ . Si los valores ajustados ( $s^*$ ) son monótonos con los observados, el proceso termina. Si no es así, lo habitual por lo demás, tales valores ajustados linealmente son reescalados (ajustados) monótonamente mediante la obtención de los  $S_{ij}^{**}$  que minimizan

$$\sum_i \sum_j (S_{ij}^* - S_{ij}^{**})^2 \quad (3)$$

sujetos a las restricciones de orden inducidas por los  $S_{ij}$ . Calculados los  $S_{ij}^{**}$ , tales valores lo son de la variable dependiente de la regresión lineal sobre la matriz  $\mathbf{D}$  en la siguiente etapa.

En cada etapa se calcula el *Stress*, definido mediante

$$S = \sqrt{\frac{\sum_i \sum_j (s_{ij}^* - s_{ij}^{**})^2}{\sum_i \sum_j s_{ij}^2}} \quad (4)$$

cuyo valor varía entre 0 y 1. El proceso termina cuando es alcanzado un *Stress* "suficientemente bajo". Los  $\alpha_i$  y  $\beta_j$  son las estimaciones obtenidas en la regresión lineal de la última etapa y, para esta etapa, los  $S_{ij}^{**}$  son valores referentes de cuán alejada está cada observación ajustada linealmente del correspondiente valor monótono. El *Stress* es una medida global de tal discrepancia.

En nuestro contexto de aplicación (series temporales) la interpretación del *Stress* adquiere una elegante relevancia. Así, un *Stress* alto (pongamos 0.30) indicaría bien la presencia de un efecto interactivo importante entre la tendencia anual y la estacionalidad bimestral (aspecto no contemplado en este trabajo), bien la presencia de unas variaciones erráticas elevadas, fruto de la incertidumbre contenida en la información proporcionada por la serie.

En tal caso, y como tendremos oportunidad de exponer posteriormente, los valores ajustados monótonamente se identifican, por tramos, con valores promedios de los originales. Por otro lado, valores bajos del *Stress* (pongamos 0.05) indicarían una fuerte presencia de efectos tendenciales y estacionales, y su adecuada modelización lineal.

A continuación se muestra el gráfico de la serie ajustada monótonamente y la variable saldo ponderado, así como la tabla en que se presenta la estimación realizada por el procedimiento *monanova*.

Gráfico 2

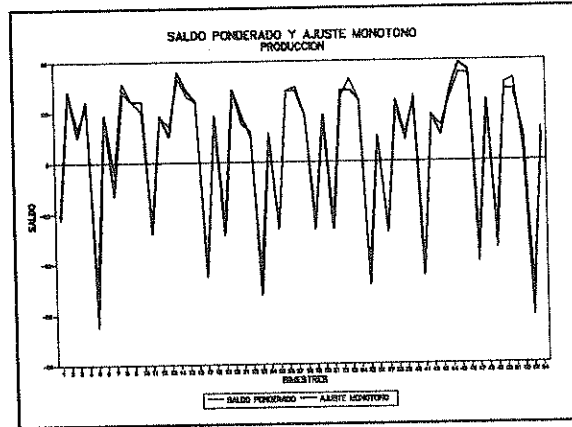


Tabla 2. Estimaciones Análisis *monanova*.

Variable Producción.

$STRESS=0.242$ .

Utilidades estimadas para los parámetros.

|          |        |      |      |       |        |       |        |      |       |
|----------|--------|------|------|-------|--------|-------|--------|------|-------|
| $\alpha$ | -.228  | .227 | .396 | -.437 | .090   | -.154 | -0.265 | .707 | -.335 |
| $\beta$  | -1.208 | 1.36 | 1.13 | 0.913 | -2.828 | .626  |        |      |       |

La primera fila de la tabla representa los efectos fila, es decir, la tendencia, mientras que la segunda fila de la tabla nos recoge los efectos 'columna', es decir, la estacionalidad. Si observamos el gráfico 2 podemos comprobar la ausencia de tendencia (puede existir a corto plazo pero a largo plazo la variable está acotada, como ya se ha comentado). Esto se muestra en los valores (efectos), tomados en valor absoluto, que se exponen en la primera fila. Unos efectos bajos representan, en este caso, una ausencia de tendencia. Si ahora observamos la segunda fila nos damos cuenta que las utilidades son más elevadas; estos efectos nos muestran la estacionalidad de la serie. Podemos comprobar que el valor más elevado es -2.828 que corresponde, justamente, con el bimestre agosto-septiembre, es decir, donde cabría esperar una estacionalidad clara de la producción industrial.



### 3.- MENSUALIZACIÓN DE LOS DATOS BIMESTRALES

#### 3.1.- Propuesta metodológica: Metodología básica

Como hemos indicado anteriormente, los datos que proporciona la Encuesta de Opinión son de periodicidad bimestral. Entonces, y en orden a construir nuestro indicador, un paso previo e imprescindible consistirá en mensualizar aquéllos. En este apartado se presenta una propuesta metodológica a tal fin, habida cuenta que la naturaleza cualitativa de nuestra información nos impide, una vez más, la aplicación inmediata de los métodos tradicionales.

En efecto, si adoptáramos, por ejemplo, el método de DENTON (1971), que básicamente supone una aplicación inmediata de un problema de programación cuadrática a efectos de minimizar las discrepancias entre los valores interpolados, sujeto a la restricción que la suma de tales valores sea igual al valor a desagregar, deberíamos exigir que, interpolados nuestros datos, la suma de porcentajes de dos meses consecutivos fuera igual al porcentaje del bimestre correspondiente, lo cual, a todas luces, es absurdo: si en el bimestre MAYO-JUNIO, por aclarar el anterior punto, el porcentaje de empresarios que opinan que la producción de este bimestre ha mejorado respecto del anterior es del 80%, nada debería impedir que, mensualizados los datos, pudiera ser del 90% el porcentaje de empresarios que opinaran que tal magnitud había aumentado en JUNIO respecto de MAYO. La naturaleza de nuestros datos nos impide la aplicación de tal y similares procedimientos.

Es por todo lo anterior que, en este apartado, proponemos una metodología de mensualización, ciertamente todo lo artificiosa, o artificial, que se quiera (lo cual no hace sino alinearla con las habituales y tradicionales). La defensa de la propuesta se basará en tres aspectos: la racionalidad del método para la utilización óptima de la escasa información disponible; la sencillez conceptual, práctica y programable informáticamente del mismo y, como esperamos, la suficiente "razonabilidad" de los resultados obtenidos.

En síntesis, la propuesta de método es la siguiente:

Sea  $X(t)$  el valor del indicador bimensual (saldo ponderado) en el período  $t$ . Sea  $Z(t)$  el correspondiente valor de la serie ajustada monótonamente para tal período. Sean  $t_1$  y  $t_2$  los dos subperíodos (meses) en que se subdivide el bimestre  $t$ -ésimo. Recordemos que la interpretación de  $Z(t)$  venía dada por la estimación del valor medio de  $X(t)$  en función de la tendencia global de la serie y la estacionalidad del bimestre.

Consideremos la siguiente combinación convexa:

$$X^1(t) = \alpha \cdot X(t) + (1 - \alpha) \cdot Z(t) \quad (5)$$

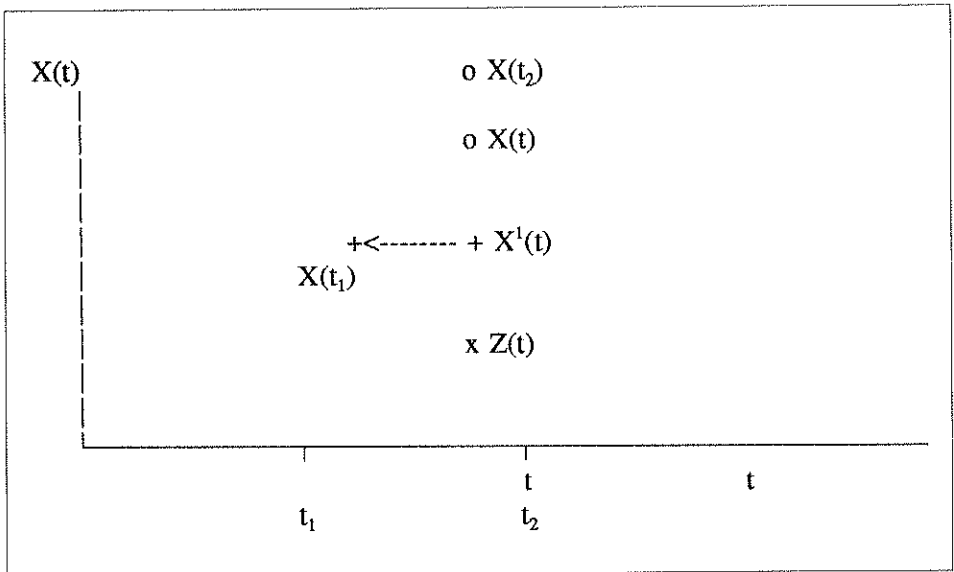
con  $0 \leq \alpha \leq 1$ , que representa un punto intermedio entre la serie saldo ponderado y la serie ajustada monótonamente.

La hipótesis sobre la que descansa la metodología de mensualización consiste en suponer que el correspondiente valor de  $X$  en el período  $t_1$  -  $X(t_1)$  - queda suficientemente bien aproximado por  $X^1(t)$ .

Es decir, hacemos

$$X(t_1) = X^1(t) \quad (6)$$

### Gráficamente



Con tal proceder, a falta de indicar la propuesta de selección de  $a$ , lo que haremos en breve, encontramos el correspondiente valor para el primer mes del bimestre considerado. Seguidamente debemos calcular el valor mensual para el segundo mes de tal bimestre.

El cálculo del mismo supondrá que el valor observado en el bimestre -  $X(t)$  - es el resultado de una cierta combinación entre el valor que pretendemos calcular -  $X(t_2)$  - y el del ajuste monótono de la serie. Así:

$$X(t) = \beta \cdot X(t_j) + (1 - \beta) \cdot Z(t) \quad (7)$$

con  $\beta^* \leq \beta \leq 1$ , (seguidamente se explicará el significado de  $\beta^*$ ). Es decir:

$$X(t_2) = (1/B) \cdot [X(t) - Z(t)] + Z(t) \quad (8)$$

Una interesante interpretación de (8) se obtiene utilizando la combinación expresada en (5). En efecto, sin más que sustituir el correspondiente valor de  $X(t)$ , despejado de (5), en (8) podemos fácilmente calcular la siguiente expresión:

$$X(t_2) = Z(t) + \phi \cdot [X(t_1) - Z(t)] \quad (9)$$

en donde  $\phi = 1/a\beta$ , y siendo  $X(t_1)$  el valor mensualizado para el mes anterior. Entonces, dado  $X(t_1)$  y en ausencia de cualquier otra información, la mejor predicción que podemos hacer para el período  $t_2$  será precisamente  $X(t_1)$ . Si para tal período conocemos, además, la estimación monótona del valor medio de la serie  $Z(t)$  (para cuyo cálculo se ha tenido en cuenta toda la información disponible), entonces la anterior predicción se modifica: pasa a ser  $Z(t)$ , incrementando (o disminuyendo) en  $\phi$  veces el error de predicción de  $X(t_1)$  con relación a  $Z(t)$ . El comportamiento de  $\phi$  depende de  $a$  y  $\beta$ , constantes sobre las que volveremos en seguida. De momento, es obvio que el valor mínimo de  $\phi$  es 1, que se obtendrá en los casos extremos en que  $a = 1$  y  $\beta = 1$ . En tal caso, y de (9), se deduce:

$$X(t_2) = X(t_1)$$

y de (5) y (6)

$$X(t_2) = X(t_1) = X(t)$$

es decir, los valores interpolados son justo los valores del bimestre.

### 3.2. Asignación de los valores para las constantes $\alpha$ y $\beta$ .

En primer lugar debemos observar - en la ecuación 9 - que el valor a determinar  $X(t_2)$  deberá estar acotado entre -100 y 100, lo que implica imponer un conjunto de restricciones sobre el posible recorrido de  $\beta$ . Puede probarse que el mismo viene enmarcado por las siguientes ecuaciones:

a) Si  $X(t) - Z(t) > 0$ :

$$\beta^* = \frac{X(t) - Z(t)}{100 - Z(t)} \leq \beta \leq 1$$

b) Si  $X(t) - Z(t) < 0$ :

$$\beta^* = \frac{Z(t) - X(t)}{100 + Z(t)} \leq \beta \leq 1$$

Seguidamente pasamos a exponer tres propuestas para la determinación de  $a$  y  $\beta$ :

A).- Fijar  $\alpha$  y  $\beta$  a priori para todo el período muestral considerado.

B).- Que sea la propia evolución de la serie la que ajuste, para cada momento del tiempo, los valores de  $\alpha$  y  $\beta$ .

C).- Una combinación de A) y B).

La primera de las alternativas proporciona la posibilidad de asignar de manera exógena el valor de los parámetros.

La propuesta que se realiza en el presente trabajo es el de asociar al parámetro a un valor que se corresponda con el coeficiente de correlación al cuadrado entre la serie original -  $X(t)$  - y la ajustada monótonamente -  $Z(t)$ -. Este coeficiente tenderá a la unidad cuanto mejor sea el ajuste monótono realizado sobre la variable de estudio, ya que cuanto más próximo a la unidad sea a, más se parecerán los valores mensuales a los correspondientes bimestrales, y cuanto más próximo se encuentre a cero más se aproximarán a los valores ajustados monótonamente.

La segunda de las propuestas (B), y también para el parámetro a, consiste en considerar criterios que tengan en cuenta, para cada momento del tiempo, la diferencia en términos de distancia entre  $X(t)$  y  $Z(t)$ . De esta forma, podemos considerar para el parámetro a la siguiente expresión:

$$\alpha(t) = \frac{|X(t) - Z(t)|}{|X(t)| + |Z(t)|}; \quad t = 1, 2, \dots, T. \quad (10)$$

en donde  $| \quad |$  representa valor absoluto.

Para finalizar, en cuanto al valor que se le asigna a  $\beta$  para cada período de tiempo, nuestra propuesta consiste en fijar para  $\beta$ , en cada período de tiempo, el valor medio de su recorrido, esto es:

a) Si  $X(t) - Z(t) > 0$ :

$$\beta(t) = \frac{[100 + X(t)] - 2 \cdot Z(t)}{200 - 2 \cdot Z(t)}$$

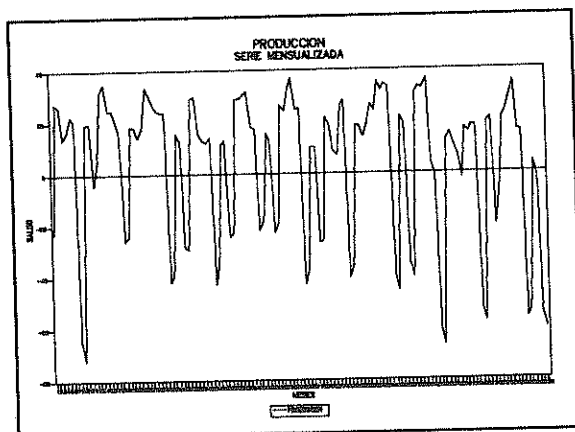
b) Si  $X(t) - Z(t) < 0$ :

$$\beta(t) = \frac{[100 + X(t)] - 2 \cdot Z(t)}{200 - 2 \cdot Z(t)}$$

para  $t = 1, 2, \dots, T$ .

Criterio, el anterior, ciertamente conservador pero que permite garantizar la no presencia de saltos bruscos en la serie mensualizada.

**Gráfico 3**



#### 4. INTEGRACIÓN DE LA SERIE MENSUAL DEL SALDO PONDERADO

Una ambicioso objetivo del presente trabajo, como indicábamos en la introducción, consiste en la elaboración de un indicador sintético de actividad económica del sector industrial, a partir de indicadores cualitativos, al objeto de incorporarlo como elemento de análisis en un marco más general que tiene en cuenta, a su vez, los indicadores cuantitativos. Tal objetivo exigirá posteriormente un tratamiento multivariante de nuestras series de indicadores, en los que se tenga en cuenta la tendencia y estacionalidad de las mismas.

El anterior párrafo justifica que, bien sea artificialmente, dotemos de tendencia a nuestras series de datos mensuales. Para ello nos apoyaremos en el siguiente argumento: los valores de una variable saldo son función de los cambios reales experimentados por la magnitud correspondiente. Así, sea  $Y(t)$  el valor, en  $t$ , correspondiente a la magnitud  $Y$ , cuyo indicador cualitativo (saldo mensual ponderado) viene dado por  $S(t)$ . En este caso, podemos esperar:

Si  $Y(t) - Y(t-1) > 0$ , entonces  $S(t) > 0$ , y si

$Y(t) - Y(t-1) < 0$ , entonces  $S(t) < 0$ .

En consecuencia, cabe esperar que el saldo sea función de la primera diferencia de  $Y(t)$ :

$$S(t) = f(Y(t)) \quad (11)$$

En la actualidad, y habida cuenta las innumerables ventajas operativas que supone trabajar con una aproximación lineal, nosotros hemos optado por la siguiente especificación:

$$S(t) = a + b \cdot [Y(t) - Y(t-1)] \quad (12)$$

Nuestro objetivo es determinar la serie  $Y(t)$  - artificial o proxy de la verdadera magnitud - a partir de la serie  $S(t)$ . Debemos entonces incorporar algunas restricciones sobre  $a$  y  $b$ . En primer lugar, cuando  $Y(t) = Y(t-1)$ , es decir cuando la serie original no experimentara variación, entonces  $S(t) = a$ . Ahora bien, dada la interpretación de la variable saldo, si la serie original no experimenta variación alguna quiere decir que se espera que el saldo (diferencia entre opiniones positivas y negativas) sea 0. Entonces parece razonable imponer la restricción  $a = 0$ . Lo cual presenta, como resultado derivado, que el efecto de  $S(t)$  respecto de  $Y(t)$  permanece constante, no dependiendo del nivel de tal variable. Con la restricción impuesta, estamos especificando una relación en que el saldo es directamente proporcional a los cambios experimentados por  $Y(t)$ :

$$S(t) = b \cdot [Y(t) - Y(t-1)] \quad (13)$$

es decir

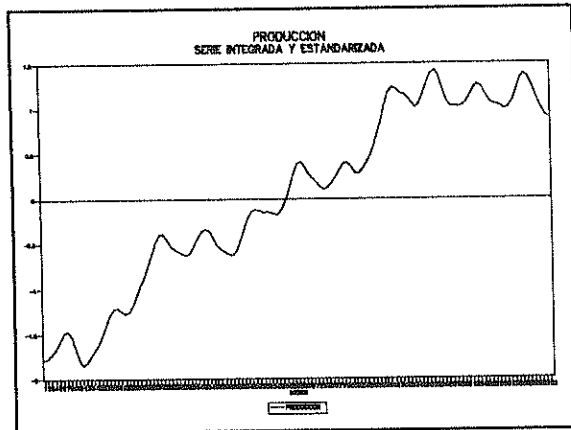
$$Y(t) = (1/b) \cdot S(t) + Y(t-1) \quad (14)$$

Ahora bien,  $(1/b)$  representa un parámetro de escala, cuyo valor no modificará nuestros resultados por cuanto los mismos serán posteriormente estandarizados a efectos de someterlos a un tratamiento multivariante. Entonces:

$$Y(t) = S(t) + Y(t-1) \quad (15)$$

para  $t = 1, 2, \dots, T$ , debiendo asignar a  $Y(0)$  un valor arbitrario para comenzar el proceso, por ejemplo 100. Arbitrario, por cuanto por el mismo motivo argumentado en el párrafo anterior, el resultado estandarizado no dependerá del valor inicial asignado. Ecuación recursiva, la (15), que será utilizada a efectos de integrar nuestras series de datos. En el gráfico 4 se presenta la serie integrada , obtenida a partir de la variable cualitativa producción.

**Gráfico 4**



# PREDICCIONES A LARGO PLAZO DE UNA SERIE TEMPORAL, MODELIZADA EN ESPACIO DE ESTADO BALANCEADO

SUÁREZ RUESTRA, C. y MAYO RODRÍGUEZ, J.L.  
Universidad de Oviedo

## 1.INTRODUCCIÓN

La modelización de sistemas en Espacio de Estado, generalmente se vincula al área de investigación de la ingeniería y el control, dado que sus bases de desarrollo en la teoría de sistemas. Gracias a algunos trabajos integradores de matemáticos y economistas como Aoki(1987,1990), Mehra (1992), Hannan y Deistler(1988), Mittnik (1989,1990), e incluso de los propios autores del presente artículo Suárez R.(1994, 1995) y Suárez R. y Mayo R. (1994a, 1994b), se han ido encontrando aplicaciones exitosas para la economía. Clásicamente, las modelizaciones de las series temporales se llevaban a cabo utilizando metodologías diversas, entre las cuales destaca la de Box-Jenkins, quizá por ser la mas utilizada. En general, este último tipo de representación de las series resulta satisfactorio en la mayoría de los casos, a parte de existir mucho software al efecto para su desarrollo; pero, ante situaciones de modelización multivariantes, por ejemplo, los procesos de modelización, tanto teóricos como prácticos, se complican desproporcionadamente y los procedimientos dejan de ser meros trabajos de ensayo error. Los defensores de la teoría citada justifican su validez, pero, entre la gran cantidad de detractores existentes, las objeciones que se ponen al método son muchas: su falta de objetividad, requerimiento de modelizadores expertos para tener éxito en los resultados, conclusiones mejores con otras técnicas, etc. En resumen, un conjunto de limitaciones que hacen que los investigadores en el tema se vean en la necesidad de buscar vías alternativas conciliadoras. Actualmente, se pueden encontrar diferentes aproximaciones para el mismo objetivo de modelización de series temporales, con el casi único objetivo final de realización de predicciones, por supuesto lo mas fiables posibles. Un cierto número de ellas tienen sus bases en las representaciones de los sistemas en espacio de estado, aunque, los caminos que se siguen son diferentes para llevar a cabo la identificación y estimación de los parámetros del modelo, e incluso para la elaboración de las predicciones. En general, ofrecen bastante buenos resultados, por lo menos en todos los casos tratados, pudiendo encontrar resueltos problemas de modelización de una serie o de varias conjuntamente en Suárez R.(1994 y 1995) y en Suárez R. y Mayo R. (1994a, 1994b).

El hecho de que una serie temporal se pueda representar en espacio de estado es debido a que, si un modelo ARMA esta disponible para una serie, es posible encontrar, por medio de las transformaciones adecuadas, su representación en espacio de estado a partir de dicha representación en ecuación en diferencias; pero, es mucho mas rápido acceder a tal representación directamente a partir de los datos conocidos. Por ejemplo, Aoki(1987) adoptó esta postura empleando un algoritmo de

---

realización minimal, utilizado en teoría del control, para identificar las estructuras y estimar los parámetros de los modelos; Koehler y Murphree (1988), también realizaron estudios comparativos entre modelos para series según Box-Jenkins y modelos en espacio de estado, utilizando para ello el método de correlación canónica propuesto por Akaike (1976), para determinar la estructura y los parámetros de los mismos; Mittnik (1990) en sus trabajos utilizó un tipo de representación en espacio de estado denominado balanceado, obteniendo para la serie del GNP de EEUU buenos resultados, mejores que todos los existentes desarrollados con metodologías alternativas; Suárez R. (1994 y 1995) y Suárez R. y Mayo R. (1994a, 1994b), autores del presente trabajo, utilizamos un tipo de representación denominado espacio de estado balanceado, con algunas variantes respecto a la utilizada por Mittnik obteniendo, en un porcentaje muy elevado de casos, resultados mejores en todos los procesos analizados que con la representación de Box-Jenkins.

En este artículo, se presenta el problema de la modelización de una serie temporal real de datos mensuales, de alto interés empresarial, que presenta dos problemas bastante habituales: tendencia y estacionalidad, bajo la parametrización en espacio de estado balanceado, con el objetivo único de realizar predicciones a largo plazo. Para ello se empleará la técnica de descomposición canónica singular de la matriz de Hankel, calculada esta a través de un procedimiento mínimo cuadrático, en base a los datos que se poseen. Se buscará el correspondiente modelo y una vez validado, se realizarán las predicciones mensuales hasta aproximadamente el año 2022 (28 años), las cuales solo podrán ser evaluadas en el futuro, dado que los datos que se presentan son predicciones reales, pues el momento de la realización del presente trabajo los datos futuros son absolutamente desconocidos. No obstante, cabe mencionar que la posibilidad de elaborar predicciones a mas largo alcance es posible, pero carece en nuestra opinión de sentido, ya que la validez del modelo es temporal, y con la aparición de nuevos datos debería de revisarse el mismo, y corregirlo si fuese necesario y, por tanto, cabría rehacer la elaboración de predicciones.

## 2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Los modelos en espacio de estado de procesos aleatorios están basados en la denominada propiedad de Markov, la cual implica la independencia del futuro del proceso de su pasado, dado este por el estado presente. En tales sistemas el estado presente del proceso resume toda la información del pasado del mismo que es necesario para predecir el futuro. En el presente trabajo, aunque el proceso que se trata de modelizar podría ser considerado puramente aleatorio, el tratamiento no va a realizarse así. En realidad, se considerará un proceso causal, es decir, la modelización se llevará a cabo considerando el proceso con entradas y salidas, a la par que tendrá los estados estimados correspondientes, inicial y actual, por lo que, tanto para modelizar como para predecir el futuro comportamiento del mismo, se considerarán entradas, salidas y estados. Permaneciendo presente, que el estado actual del sistema contiene toda la información necesaria para predecir el futuro del mismo, pero en nuestro caso junto con las entradas al sistema.

Considerando que el tipo de parametrización elegida, para modelizar el proceso en estudio y realizar el presente trabajo, es el Espacio de Estado, el objetivo primero es estimar un sistema de primer orden, de una determinada dimensión, dado por:



$$\begin{aligned} z_{t+1} &= Az_t + B_{xt} + K \varepsilon_t \\ y_t &= C_{zt} + D_{xt} + \varepsilon_t \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $z_t$  es el vector de estado  $n$ -dimensional, que contiene la información de la historia del proceso y  $\varepsilon_t$ , que puede ser necesaria y suficiente para predecir el futuro. La primera de las ecuaciones en (1), es denominada ecuación de transición de estado, relaciona las entradas al sistema con las variables denominadas de estado, no siempre fácilmente identificables con magnitudes físicas medibles y la segunda es denominada ecuación de salida o ecuación de medida o de observación, que relaciona los estados del sistema con la variable que se está observando.

La matriz  $A$  es la matriz de la dinámica del sistema, de dimensiones  $n \times n$ ; la matriz  $B$ , de acoplo con las entradas, es de dimensiones  $n \times r$ ; la matriz  $K$ , de ponderación de las perturbaciones, es de dimensiones  $n \times m$ ; la matriz  $C$ , de observación, es de dimensiones  $m \times s$  y la matriz  $D$ , de acoplo con las entradas, es de dimensiones  $m \times r$ , son las matrices que conforman el sistema.

La estimación de la matriz  $K$  no siempre es posible y en la práctica se realiza una primera modelización sin tener en cuenta dicha matriz, (es decir como cero). Si el sistema reflejara la existencia de perturbaciones demasiado distorsionantes, pues los residuos del modelo no fueran ruido blanco, habría dos opciones alternativas: una, utilizar el filtro de Kalman (Suárez (1994) para estimar los estados y otra, identificar la matriz  $K$ , para lo cual se utilizaría un algoritmo modificado de identificación similar al descrito en el presente trabajo, pero ampliado.

A partir de una representación en espacio de estado es posible calcular tres matrices muy importantes para el sistema, a saber: la matriz de Hankel, la matriz de observabilidad y la matriz de controlabilidad, las cuales si verifican una determinadas propiedades, garantizan sistemas controlables observables, estables y realizaciones minimales y viceversa, si se conocen esas matrices se pueden encontrar las que representan al sistema. En concreto, la representación en Espacio de Estado Balanceado, que es la elegida en este trabajo, tiene las citadas propiedades, por lo que los modelos que se encuentran, no presentan propiedades patológicas, aunque esto, tiene la pequeña desventaja, como se verá posteriormente, que a la hora de realizar las predicciones a "muy largo" plazo, la tendencia del sistema modelado es hacia un amortiguamiento, por lo que con el paso del tiempo se irá deteriorando, en el sentido de mantenerse constante la predicción.

### 3. IDENTIFICACIÓN Y ESTIMACIÓN DE MODELOS DE ESPACIO DE ESTADO BALANCEADO

En la práctica el modelizador desconoce los parámetros a partir de los cuales es posible determinar las matrices del sistema y ha de estimarlos a partir de los datos de la muestra que posee, ya que esa es la única información disponible. Por otro lado, desconoce también las entradas, si el proceso a modelizar es una serie temporal, por lo que ha de analizarse muy bien la variable original en estudio de cara a conseguir la eficacia del algoritmo, ya que este no puede ser aplicado indiscriminadamente a cualquier serie. En concreto, no han de presentarse ni tendencias ni estacionalidades, es decir los datos de la serie han de transformarse hasta poseer una serie estacionaria. Este pro-

ceso involucra la realización de las transformaciones correspondientes y la aplicación de los test necesarios para ratificarlas, cálculo de funciones de autocorrelación, etc..., de forma similar las realizadas en otras representaciones. Los pasos a seguir para llevar a cabo los procedimientos de identificación y estimación son los siguientes:

#### PASO 1:

Comenzando con las hipótesis establecidas, los parámetros estimados por mínimos cuadrados para el sistema, a partir de los datos de la serie o de una versión transformada de los mismos son los obtenidos al encontrar la matriz:

$$\Theta = [M_0^x M_1^x M_2^x \dots M_k^x]^T \quad (2)$$

Calculada a partir de la operación matricial, mínimo cuadrática, dada por:

$$\hat{\Theta} = (X^T X)^{-1} X^T Y \quad (3)$$

donde,  $M_i^x = C A^{i-1} B$ , son los bloques de la matriz de Hankel del sistema. Las matrices  $X$  e  $Y$  están dadas por la ecuación (3),

$$Y = [y_{k+1} y_{k+2} \dots y_N] \quad X^T = \begin{bmatrix} x_{k+1} & x_{k+2} \dots & x_N \\ x_k & x_{k+1} \dots & x_{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1 & x_2 \dots & x_{N-k} \end{bmatrix} \quad (4)$$

donde  $N$  representa el tamaño elegido de la muestra, es decir el número de valores que se consideran de la serie, que no tienen por que ser todos, es suficiente con tener un tamaño 4 veces  $k$  como mínimo, o más si se desea, para que no se produzcan singularidades en los resultados y donde  $k$  es el orden estimado inicialmente para el sistema, (se puede utilizar directamente un orden elevado, es decir, sobre dimensionar inicialmente, sin alterar posteriormente los resultados, dado que en las siguientes etapas se localiza fácilmente la dimensión correcta, buscando el subespacio dominante). La matriz  $Y$  esta formada a partir de los valores de la serie considerada, la matriz  $X$  se forma con las entradas que se consideren para el sistema, en unos casos estas pueden ser variables endógenas convenientemente retardadas, en otros, señales pseudo-aleatorias, tipo PRBS (Pseudo-Randon-Binary-Sequence), obtenidas por medio de la función signo aplicada a señales gaussianas  $N(0,1)$ .

#### PASO 2:

Si la hipótesis de ruido blanco es aceptada, construimos la matriz de Hankel finita, a partir de la matriz de parámetros estimados (4). Para obtener un modelo de espacio de estado balanceado, a partir de (5) se emplea la técnica de descomposición del valor singular (SVD), (Strang 1982), para realizar la descomposición de la matriz de Hankel finita, ec.(6).

$$\hat{H}_x = \begin{bmatrix} \hat{M}_1^x & \hat{M}_2^x & \dots & \hat{M}_k^x \\ \hat{M}_2^x & \hat{M}_3^x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{M}_k^x & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\hat{H}_x = \hat{U} \hat{Q} \hat{V} \quad (6)$$

Donde las matrices  $\hat{U}$  y  $\hat{V}$  son ortogonales, es decir, verificando que:

$$\begin{aligned} \hat{U}^T \hat{U} &= I \\ \hat{V}^T \hat{V} &= I \end{aligned} \quad (7)$$

y la  $\hat{Q}$  matriz una matriz diagonal, que contiene los valores singulares de la matriz de Hankel ordenados de mayor a menor, y a partir de esos valores se selecciona  $n$ , que es la dimensión definitiva de la representación, simplemente por elección de los valores dominantes, habitualmente los que no son cero en la diagonal de la matriz  $\hat{Q}$ .

#### PASO 3:

La aproximación de rango  $n$  de la matriz de Hankel nos determinará entonces las matrices de observabilidad y controlabilidad del sistema, del siguiente modo:

$$\hat{O} = \hat{U} \quad \hat{Q}^{1/2} \quad C = \hat{Q}^{1/2} \quad (8)$$

donde  $\hat{Q}^{1/2}$  denota la matriz diagonal que contiene la raíz cuadrada de los valores singulares de la descomposición.

#### PASO 4:

Se pueden deducir, a partir de las matrices anteriormente calculadas, las matrices estimadas del sistema:

- La matriz  $D = M_0^x$ .
- La  $C$ , esta dada por las  $m$  primeras filas de la matriz de observabilidad.
- La  $B$ , esta dada por las  $r$  primeras columnas de la matriz de controlabilidad.
- Para obtener la matriz  $A$ , construimos una matriz transformada de la matriz de Hankel, expresada en la ecuación (9):

$$H_n^\dagger = \begin{bmatrix} M_2 & \dots & M_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{n+1} & \dots & M_{2n} \end{bmatrix} = O \quad A \quad C \quad (9)$$

A partir de la cual, determinamos la matriz A, así:

$$A = O^* H_n^\dagger C^*$$

Donde, el asterisco denota la inversa generalizada de las matrices afectadas. El sistema quedaría determinado totalmente de ese modo, es decir, se conocerían las matrices estimadas para el modelo representado en la ecuación (10).

$$\begin{aligned} z_{t+1} &= \hat{A} z_t + \hat{B} x_t \\ y_t &= \hat{C} z_t + \hat{D} x_t + e_t \end{aligned}$$

Si no deseamos partir de un estado inicial que sea supuestamente cero, podemos usar una transformación del algoritmo anterior para estimar el estado inicial en la matriz primitiva de parámetros, ampliando para ello de forma conveniente las matrices consideradas en el algoritmo mínimo cuadrático, (Suárez R. (1994)).

El usar la SDV para obtener lo que origina que (10) sea llamada representación en Espacio de Estado Balanceada. Al modelo (10), se le denomina representación en espacio de estado balanceado si los dos productos dados por la ecuación (11), son diagonales e iguales, (Moore (1981), Otter (1985), Otter and Van Dal (1987, 1989), Aoki (1990)).

$$\hat{O}^T \hat{O} = \hat{Q}^{1/2} U^T \hat{U} Q^{1/2} = \hat{Q}; \quad \hat{C} \hat{C}^T = \hat{Q}^{1/2} \hat{V}^T \hat{V} Q^{1/2} = \hat{Q} \quad (11)$$

Los modelos en espacio de estado balanceado conducen a una reducción secuencial del espacio de parámetros, es decir se trabajará en un subespacio del original si se produjo sobre parametrización. Como se ha dicho, si comparamos los  $n$  primeros valores singulares con los últimos  $n_{\max} - n$  y estos son muy pequeños, este hecho nos permite separar del modelo en espacio de estado sobreparametrizado, un subsistema dominante y otro "débil". Solamente el subsistema dominante, que esta asociado con los  $n$  valores singulares mas grandes de la matriz de Hankel estimada, debería ser retenido para predecir los futuros valores de  $y_t$ . Una consecuencia importante de esto es, pues, que las aproximaciones anidadas de dimensión mas baja, son fáciles de obtener sin tener que realizar de nuevo toda la estimación, operación que si es necesaria de realizar en los modelos convencionales. Por tanto, los modelos de predicción de dimensión  $n_{\max} - i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n_{\max}$ ) se pueden evaluar con bajo coste y pueden servir como criterio de selección del modelo, dato muy interesante a tener en cuenta a la hora de realizar los estudios prácticos de aplicación de esta teoría, y que ha sido utilizado en el presente trabajo, comprobando su utilidad.

## 4. MODELIZACIÓN DE LA SERIE TRÁFICO TELEFÓNICO EN ESPACIO DE ESTADO BALANCEADO

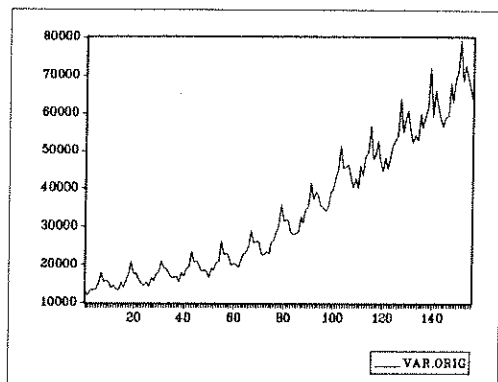


Fig. 1. Tráfico telefónico (datos mensuales, 13 años)

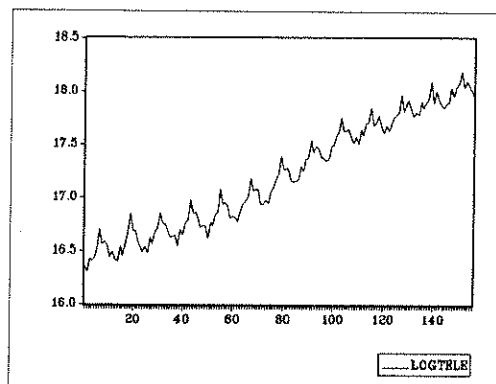


Fig. 2. Logaritmo de la serie original

El procedimiento descrito anteriormente, fue el utilizado para llevar a cabo el proceso de modelización y posterior análisis del comportamiento predictivo de la serie de interés económico en estudio, como es la serie temporal de que se va a modelizar ( $\text{var.orig} = \text{tráfico telefónico}$ ) correspondiente a los minutos acumulados mensuales de demora en el tráfico telefónico internacional, correspondiente a los últimos 13 años; son, por tanto, datos mensuales en millones de minutos, representados en la Fig.1.. En la Fig.2, se representa la misma variable transformada logarítmicamente (LTELE), cara a trabajar con un rango menor de datos y que los procesos sean mas rápidos. No obstante su comportamiento es similar, la serie sigue presentando evidente tendencia y estacionalidad, que es necesario eliminar.

### 4.1. Identificación del modelo

El proceso de estudio, que se lleva a cabo para aplicar la metodología descrita, es el de encontrar un modelo que represente a la serie del tráfico telefónico considerada. Para ello se han de elegir convenientemente las variables de entrada y las de salida al sistema, para establecer, a través de los estados que se estimen, el correspondiente modelo en espacio de estado balanceado.

Como entradas al sistema se han considerado los valores de la primera diferencia de la serie de los logaritmos, desde el instante 11, como salidas los valores del logaritmo de la variable original doce veces diferenciado. En aras a conseguir estacionaridad en el proceso y hacer el algoritmo eficaz se realizaron dichas transformaciones, se trabajará por tanto con 144 datos conocidos de los 156, ya que se pierden 12 en el proceso de diferenciación. Elegidos los elementos que van a constituir los elementos de las matrices X e Y, solo queda por decidir el tamaño de la muestra y el orden del modelo. Fruto de la experiencia en trabajos de modelización similares, se eligió acertadamente

un modelo de orden 12 y un tamaño para la muestra de 100 datos, tomados desde el principio, por los que los 44 restantes no participaron en la estimación de las matrices ni del estado inicial. Los resultados positivos encontrados ratificaron la elección.

Las matrices estimadas para representar el modelo del proceso son de dimensiones elevadas y no se mostrarán aquí. Una vez estimadas dichas matrices que representan al sistema es posible encontrar la salida estimada, en la Fig.3, se representa la salida estimada para la variable transformada (por los logaritmos y las diferencias) y en la Fig.4, los valores estimados para el logaritmo de la variable original y estimada una vez realizadas las correspondientes transformaciones inversas para la reconstrucción.

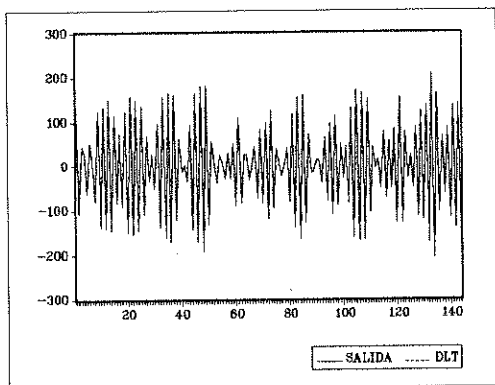


Fig. 3. Salida estimada y variable original (transformada).

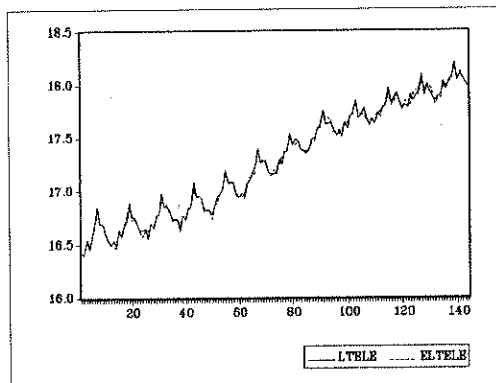


Fig. 4. Logaritmos de variable original real y estimado

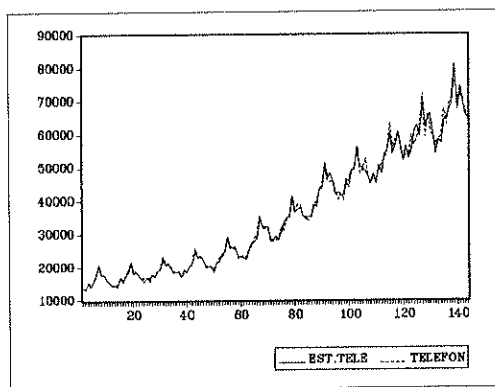


Fig. 5. Salida estimada y real de la variable tráfico telefónico (muestra utilizada (1:100)).

En la Fig.5, se puede observar la salida estimada una vez realizada la reconstrucción total de la variable, es decir, correspondiente la variable tráfico telefónico real y estimado. Los valores a

partir del 100, no han sido considerados para la elaboración del modelo, no han sido representados los doce primeros por considerarlos perdidos con las transformaciones efectuadas.

Una vez que se conocen las salidas estimadas por el modelo, es posible analizar los resultados obtenidos para garantizar la fiabilidad del modelo elegido, una análisis eficaz puede ser estudiar los residuos del modelo, los valores obtenidos para la variable transformada en relación con la salida estimada dan los siguientes resultados (se han calculado los valores para todos los datos conocidos, es decir dentro y fuera de la muestra): Varianza residual = 0.00095593;

Var. resid. corregida con gr. de libertad = 0.0011; Desviación Típica = 0.0324.

A la vista de los resultados obtenidos, parece que el modelo satisface los requisitos necesarios para poder realizar predicciones con un cierto grado de fiabilidad.

## 4.2 Elaboración de predicciones en base al modelo estimado

Una vez que se conocen las matrices estimadas por el modelo y el último estado estimado, siempre es posible realizar predicciones del alcance que se desee. En este caso las predicciones han sido elaboradas hasta el año 2022 (desde el dato 145 hasta el 482), pero, los resultados mas fiables no corresponderán a la longitud total, ya que, como se ha comentado, las características del modelo estimado le confieren unas propiedades, que hacen que se vaya debilitando con el paso del tiempo y pierda validez. Es, pues, de resaltar la conveniencia de la revisión del mismo una vez que se conozcan nuevos datos, manteniendo el modelo si se ajustan al mismo, que será lo mas acertado, pero, reelaborando las predicciones con las nuevas entradas reales de que se disponga, lo que las hará mas válidas, útiles y significativas.

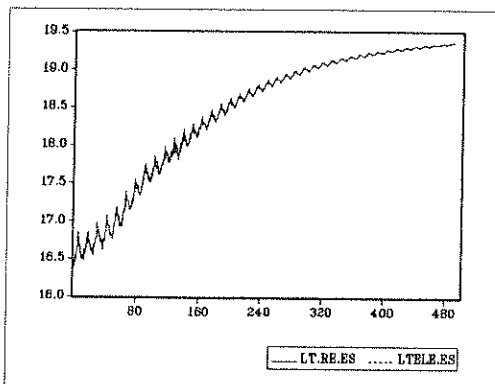


Fig. 6. Valores reales, estimados y de predicción, del logaritmo de la variable original

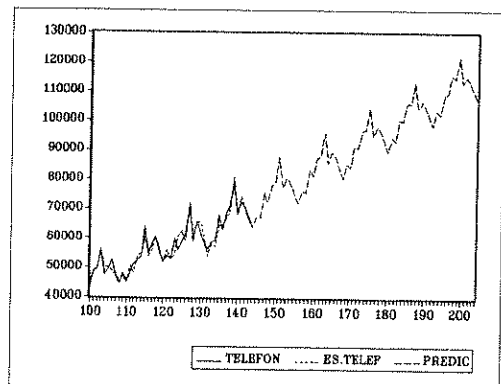


Fig. 7. Val. reales/estimados, var: Tráfico Telf.: (100:144) Predicciones: 5 años.

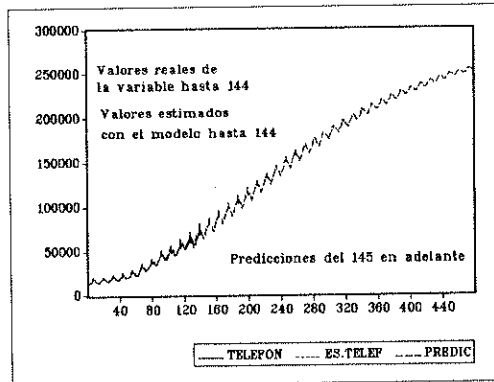


Fig. 8. Val. reales/estimados y predicciones de la variable Tráf. Telef.

Realizado, pues, el proceso de elaboración de predicciones, para el modelo estimado en el presente trabajo los resultados encontrados son los expresados en la Fig.6, la Fig.7 y la Fig 8. Los valores que se representan, corresponden a las variables ya transformadas, bien en logaritmos o en la forma original. La variable denominada TELEFON, representa los datos de la variable original del tráfico telefónico conocidos, los datos de la variable PREDIC, representan las predicciones estáticas, elaboradas a partir del modelo estimado y los denominados ES.TELEf representan los valores estimados para dicha variable en función del modelo estimado. En la Fig.7, se representa reducido el campo de valores en aras a obtener mas nitidez en los resultados.

## 5. CONCLUSIONES

Los modelos en espacio de estado balanceado para representar las series temporales, con estacionalidades y tendencias ofrecen tan buenos resultados como los que se presentan en el presente trabajo. El proceso ha sido elaborado con el soporte de software denominado MATLAB, en su versión 4.0, habiendo realizado un programa al efecto. Con el modelo encontrado, como se ha mostrado, es posible la elaboración de predicciones y no ha sido necesaria la utilización de ningún filtro. El comportamiento futuro de la serie se corresponde con su pasado, es muy similar, sigue presentando tendencia y estacionalidad, solo podrá ser alterado si ante el comportamiento de las predicciones, la empresa correspondiente efectúa las oportunas modificaciones que esten a su alcance, llevando a cabo una modificación en las condiciones actuales en aras de obtener diferentes resultados en el futuro.



## 6. BIBLIOGRAFÍA

AOKI, M. (1987/1990). *State Space Modelling of Time Series*. Springer-Verlag. Berlin.

GRANGER, C. W. P. and NEWOLD, P. (1986). *Forecasting Economic Time Series*. New York. Academic Press.

HANNAN, E.J. and DEISTLER, M.(1988). *The statistical theory of linear systems*. New York.. Wiley.

MITTNIK. S.(1990). *Forecasting with Balanced State Space Representations of Multivariable Distributed Lag Models*. Journal of Forecasting. Wiley Publishers. Vol. 9. pp. 207-218.

MOORE, B.C.(1981). *Principal Component Analysis in Linear Systems: Controllability, Observability, and Model Reduction*. IEEE Transactions in Automatic Control. AC-26. pp.17-32.

OTTER, P. W. and VAN DAL, R. (1987). *State Space and Distributed Lag Modelling of dynamic Economic Processes Based on Singular Value Decomposition*. Anales D'Economie et de Statistique. 6/7. pp. 253-277.

OTTER, P. W. and VAN DAL, R. (1989). *On State Space Approximation of Multi-Input Multi-Output Systems with Stochastic Exogenous Inputs*, in Mittnik (ed.). System-Theoretic Methods in Economic Modelling II. Oxford: Pergamon Press.

STRANG,G. (1982). *Algebra Lineal y sus Aplicaciones*. Fondo Educativo Interamericano, S. A. Mexico 01710,D. F..

SUAREZ R. y MAYO R. (1994a). *A New Procedure of Modelling VARMA Processes in Balanced State Space*. IFAC. Identification Systems Congress. SYSID'94. Copenhagen. Denmark.

SUAREZ R. y MAYO R. (1994b). *Predicciones utilizando modelos en espacio de estado balanceado. Un caso de estudio*. Asepelt 94. Palma de Mayorca. España.

SUAREZ R., C. (1994). *Sistemas Automáticos de Diseño en Espacio de Estado para la Modelización de Series Temporales*. Tesis Doctoral. U.N.E.D. Madrid.

SUAREZ R., C. (1995). *Modelización y Predicciones para la serie temporal del IPC, utilizando el espacio de estado balanceado*. Revista de Estudios de Economía Aplicada. (En prensa).



# PREVISIÓN DE SERIES NO ESTACIONARIAS MEDIANTE ALGORITMOS ADAPTATIVOS Y REDES NEURONALES ARTIFICIALES

DAVID DE LA FUENTE GARCÍA  
RAÚL PINO DIEZ

Escuela Técnica Superior de Ingenieros  
Industriales e Ingenieros Informáticos de Gijón  
Dpto. de Administración de Empresas y Contabilidad.  
Universidad de Oviedo

## 1. INTRODUCCIÓN

El análisis de series temporales, es una herramienta estadística muy importante en el estudio del comportamiento de datos dependientes del tiempo y la predicción de valores futuros. Una serie temporal, es una secuencia de valores medidos en unidades de tiempo discretas o continuas.

Una serie temporal multivariable, consiste en una secuencia de valores de varias variables contemporáneas cambiando con el tiempo. Un caso aparte, es cuando las variables medidas están significativamente correlacionadas, por ejemplo, cuando atributos similares están siendo medidos en diferentes localizaciones geográficas. En la previsión de un valor nuevo para cada variable, la mejor predicción, se conseguirá teniendo en cuenta las variaciones de las otras variables.

Históricamente, podemos decir que en la década de los ochenta, había muchas técnicas disponibles para el análisis de series temporales, las cuales asumían relaciones lineales entre las variables (Box-Jenkins, 1976). Pero en el mundo real los datos no presentan relaciones simples y es difícil hacer predicciones seguras. Las relaciones lineales y sus combinaciones a menudo son inadecuadas para hacer previsiones. Por ello, parece necesario que sean modelos no lineales, los que sirvan para analizar los datos temporales del mundo real.

Los modelos lineales de series temporales presentan además, ciertas desventajas, como la imposibilidad de explicar cambios repentinos de amplitud muy grande y en intervalos irregulares de tiempo (Tong, 1983).

Estudios posteriores (Tiao y Tsay, 1989), analizaron otros problemas del modelado lineal multivariable. Para resolverlos, se utilizaron modelos estadísticos no-lineales como “modelos de umbral” y “modelos bilineales” sugeridos por Tong (1990). Por otra parte, Granger y Newbold (1986), sugirieron utilizar transformaciones no lineales de los datos originales antes de realizar el modelado lineal tradicional. Farmer y Sidorowich (1987), mejoraron significativamente las predicciones sobre series temporales caóticas utilizando métodos de aproximaciones locales.

Desgraciadamente, a pesar de que en la década pasada se avanzó considerablemente, la formulación de modelos no lineales razonables es una tarea extremadamente difícil, debido a las simplificaciones hechas en la etapa de modelado, por ejemplo, omitir parámetros que son desconocidos o que no parece que afecten directamente a los datos observados etc.

Por todo ello, como el objetivo es hacer buenas previsiones, buscamos alternativas como la previsión adaptativa y la utilización de redes neuronales artificiales, para el cálculo de predicciones cuantitativas en el caso de series no estacionarias.

## 2. PROCESOS ESTACIONARIOS

Se dice que una serie temporal viene generada por un proceso estocástico estacionario en sentido amplio si se cumplen las siguientes condiciones, que se denominarán condiciones de estacionariedad definidas sobre los primeros momentos de las variables:

a) Cada observación tiende a oscilar alrededor de una media general que es constante a lo largo del tiempo; es decir, todas las variables del proceso tienen la misma esperanza matemática:

$$E(Y_t) = \mu \quad (1)$$

cualquiera que sea el valor de  $t$ .

b) La dispersión alrededor de esa media constante a lo largo del tiempo también es constante; es decir, todas las variables del proceso tienen la misma varianza:

$$\text{Var}(Y_t) = \sigma_Y^2 \quad (2)$$

c) La correlación lineal entre dos variables que disten  $k$  períodos de tiempo es la misma que la que existe entre cualesquiera otras dos variables que disten también  $k$  períodos entre sí, independientemente del momento concreto del tiempo al que estén referidas:

$$\text{corr}(Y_t, Y_{t-k}) = \text{corr}(Y_{t+j}, Y_{t+j-k}) = \rho_k \quad (3)$$

para cualquier valor de  $t, j$  y  $k$ .

De esta última condición se desprende que si un fenómeno es estacionario, sus variables pueden estar -y en general lo estarán con la excepción del proceso ruido blanco- relacionadas linealmente entre sí, pero con la restricción de que la relación entre dos variables cualesquiera depende solo de la distancia temporal  $k$  existente entre ambas.

En el caso de procesos estacionarios con distribución normal, la teoría estadística de procesos estocásticos dice que, bajo condiciones bastante generales, es posible expresar  $Y_t$  como una combinación lineal de los valores pasados (en teoría infinitos) de  $Y$  más una innovación  $a_t$ .

$$Y_t = \pi_1 Y_{t-1} + \pi_2 Y_{t-2} + \dots + a_t \quad (4)$$

Otros procesos que no son estacionarios también admiten esta formulación, pero cuando corresponde a las variables de un proceso estacionario, los coeficientes  $\beta_j$  están sometidos a restricciones. Por ejemplo, el modelo:

$$Y_t = 1,5 Y_{t-1} + a_t \quad (5)$$

no es estacionario pues el nivel de la serie tiende a  $\pm \infty$  y contradice la condición a) de estacionariedad.

No obstante, la restricción de estacionariedad en términos de los coeficientes  $\beta_j$  no tiene una representación general que sea fácilmente comprensible, y la mejor interpretación de la estacionariedad se obtiene a partir de las condiciones (1), (2) y (3).

Centrando la atención en las condiciones a) y b), se tiene que un proceso estacionario debe de cumplir -de forma necesaria pero no suficiente, pues no se está incorporando la condición c)- que sus observaciones oscilen con varianza constante alrededor de un valor medio constante. Por tanto, un proceso estacionario no puede generar una serie temporal que muestre un crecimiento sistemático, pues en este caso la media de las variables va aumentando en el tiempo y eso viola la condición a) de estacionariedad.

Toda esta discusión lleva a pensar que los procesos estacionarios no son de validez general para representar el mundo real, pues ciertamente los fenómenos económicos no tienden a oscilar alrededor de un valor fijo e inmutable a lo largo de la historia del proceso. En consecuencia, gran parte de los fenómenos económicos que se observan no son estacionarios o evolutivos. Sin embargo existen transformaciones de las observaciones originales que pueden considerarse generadas por procesos estacionarios.

### 3. PREVISIÓN MEDIANTE ALGORITMOS ADAPTATIVOS CELOSÍA.

El filtro celosía (LATTICE), fue desarrollado en sus principios básicos hacia la mitad de los años 70, por Morf, Lee, Kailath y posteriormente mejorado por Friedlander estaba pensado para aplicaciones en procesamiento de señales. Nosotros hemos encontrado interesante las siguientes referencias: entre los artículos cabe destacar los de Markel y Gray (1.972) y de Makhoul, J. (1.975) y entre los textos los de Schwartz, M.; Shaw, L. (1.975), Rabiner, L.R. y Schafer, R.W. (1.978), Papoulis, A. (1.984), Giordano, A.A. y Hsu, F.M. (1.985), Alexander, S.T. (1.986), Jackson, L.B. (1.986).

De este algoritmo existen versiones normalizadas (las cantidades que evolucionan en el algoritmo son menores que la unidad) y sin normalizar. Las primeras tienen el interés de que en el ordenador resultan ser muy exactas, pero tienen el inconveniente de trabajar con menos fórmulas (sólo 3 ecuaciones recursivas) con lo que se pierde interpretación de la serie.

La formulación resumida del algoritmos es la siguiente:

- parámetros de entrada:

N: Máximo orden del filtro celosía.

$x_T$ : Secuencia de datos hasta T.

$\beta$ : Factor de olvido.

- variables:

$R_{p,T}^f, R_{p,T-1}^b$ : Covarianza muestral de los errores hacia adelante y hacia atrás.

$D_{p,T}$ : Coeficiente de correlación parcial.

$\gamma_{p,T}$ : Variable de verosimilitud.

$e_{p,T}^f, e_{p,T-1}^b$ : error de predicción hacia adelante y hacia atrás.

$k_{p,T}^f, k_{p,T}^b$ : coeficiente de reflexión hacia adelante y hacia atrás.

$$e^f(t, 0) = e^b(t, 0) = x(t) \quad (6)$$

$$R^f(t, 0) = R^b(t, 0) = \beta(t) \cdot R^f(t-1, 0) + x(t) \cdot x(t)^T \quad (7)$$

$$R^f(-1, 0) = R \quad (8)$$

FOR n:=1 TO MIN(n max, t)

$$\Delta(t, n+1) = \beta(t) \cdot \Delta(t-1, n+1) + r^b(t-1, n) \cdot e^f(t, n) / \theta(t, n) \quad (9)$$

donde:

$$\Delta(-1, n+1) = 0 \quad (10)$$

$$e^f(-1)^T = 0 \quad (11)$$

$$\theta(t, n+1) = \theta(t, n) - e^b(t, n)^T \cdot [R^f(t-1, n)]^{-1} \cdot e^b(t-1, n) \quad (12)$$

$$e^f(t, n+1) = e^f(t-1, n) - \Delta(t, n+1) \cdot [R^b(t-1, n)]^{-1} \cdot e^b(t-1, n) \quad (13)$$

$$e^b(t, n+1) = e^b(t-1, n) - \Delta(t, n+1)^T \cdot [R^f(t, n)]^{-1} \cdot e^f(t-1, n) \quad (14)$$

$$R^f(t, n+1) = R^f(t, n) - \Delta(t, n+1) \cdot [R^b(t-1, n)]^{-1} \cdot \Delta(t, n+1)^T \quad (15)$$

$$R^b(t, n+1) = R^b(t-1, n) - \Delta(t, n+1)^T \cdot [R^f(t, n)]^{-1} \cdot \Delta(t, n+1) \quad (16)$$

$$K^f(t, n+1) = \frac{\Delta(t, n+1)}{R^b(t-1, n)} \quad (17)$$

$$K^b(t, n+1) = \frac{\Delta(t, n+1)}{R^f(t, n)} \quad (18)$$

Una vez calculados los coeficientes de reflexión  $K^f$  y  $K^b$ , es posible obtener los parámetros  $A(i)$ , de un modelo AR de la siguiente forma:

$$B(p, -1) = 0 \quad p = 0 \dots n_{\max} - 1 \quad (19)$$

FOR  $i = 0$  TO  $n_{\max}$  DO

$$A(0, i) = B(0, i) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = 0 \\ 0 & \text{if } i > 0 \end{cases} \quad (20)$$

FOR  $p = 0$  TO  $n_{\max} - 1$  DO

$$A(p+1, i) = A(p, i) - K^b(p+1) \times B(p, i-1) \quad (21)$$

$$B(p+1, i) = B(p, i) - K^f(p+1) \times A(p, i) \quad (22)$$

$$A(i) = A(n_{\max}, i) \quad (23)$$

Existen muchas aproximaciones en el filtrado celosía que han aparecido en los últimos cinco años, destacando entre ellas, por diferentes familias las siguientes:

- A) Según se tome la ventana en el bloque de datos.
- B) Según se quieran olvidar los datos.
- C) Algoritmos celosía con la incorporación de técnicas de gradiente.
- D) Algoritmos que trabajan con el signo.

En estas familias que hemos comentado, algunas aportaciones recientes se dirigen a simplificar las ecuaciones y por tanto los cálculos, así para como ganar precisión, introduciendo normalizaciones adecuadas. En otros casos las innovaciones se van dirigiendo a mejorar la inercia del filtro, como los algoritmos de memoria creciente y deslizante (Fiedlander, 1982). Por otra parte se han combinado las interesantes propiedades de búsqueda del método del gradiente secuencial, con la estimación celosía de los errores hacia adelante y hacia atrás.

Hemos realizado un estudio comparativo de todos estos métodos y podemos decir que cuando tenemos muchos datos, trabajan adecuadamente bien en todos los algoritmos, y cuando tenemos pocos datos nosotros nos inclinamos por el algoritmo celosía de memoria creciente. Por otra parte hemos introducido por primera vez los factores de olvido variables en los algoritmos celosía que nos va a permitir la supervisión de un modelo o modelos que estén en régimen inestable, para medir la volatilidad de la serie (varianza instantánea del error). La relación que determina los factores de olvido variable es:

$$K(t) = 1 - \left[ 1 - X(t-k-1)^T \cdot K(t) \right] \epsilon(t)^2 / \epsilon_0 \quad (24)$$

donde  $k(t)$  es la ganancia de Kalman,  $\epsilon_0$  un parámetro que depende de la serie;  $\epsilon(t)$  el error a posteriori de estimación.  $X(t-k-1)$  la serie retrasada.  $k$  el orden del modelo.

Los algoritmos de ventana deslizante, trabajan con un número de datos fijos, lo que les hace tener una memoria fija y por lo tanto no se anticipan y no aprenden a aprender. Por otro lado, los algoritmos de tipo gradiente tienen una memoria cambiante, por lo que podríamos decir que tienen una memoria anticipativa muy rústica. Y los algoritmos de memoria creciente olvidan datos a partir de un punto de forma exponencial, pero no dan, ni detectan cambios bruscos. Por lo que nosotros proponemos como algoritmo mas interesante los de memoria creciente con factor de olvido variable.

### *Resultados de simulación*

Vamos a simular varias series no estacionarias univariantes, en las cuales calcularemos sus parámetros mediante el algoritmo celosía, estas series simuladas son: DAR2.DAT y DARMA22.DAT y corresponden a los modelos:

$$\text{ARIMA}(2,0,0): y_t = 1,2y_{t-1} - 0,1y_{t-2} + a_t \quad a_t \sim N(0,1) \quad (25)$$

$$\text{ARIMA}(2,0,0): y_t = 1,2y_{t-1} - 0,1y_{t-2} - 1,5\epsilon_{t-2} + 0,1\epsilon_{t-1} + \epsilon_t \quad (26)$$

cuyas representaciones gráficas se pueden ver en las figuras 1 y 2 respectivamente. En vez de realizar el cálculo de previsiones por el algoritmo celosía, hemos calculado los parámetros de los modelos, dando por supuesto que a partir de ellos se pueden fácilmente obtener las previsiones. Estos parámetros no se podrían calcular mediante algoritmos convencionales como el de Gauss-Marquart en paquetes estandar como BMDP o SPSS, por ser series no estacionarias. En la figura 3 se pueden ver las estimaciones de los parámetros: -1.2 y 0.1 de la serie DAR2.DAT, y en las figura 4 y 5 se pueden ver la evolución de los parámetros media móvil (1.5 y -0.1), y de la parte autorregresiva (-1.2 y 0.1) respectivamente para la serie DARMA22.DAT.



Figura 1

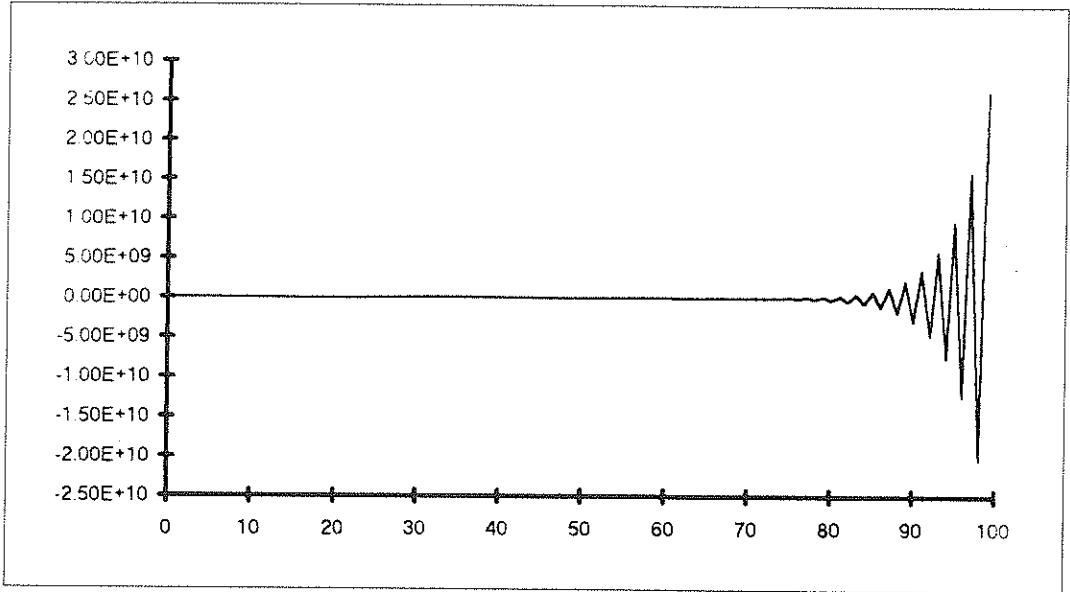
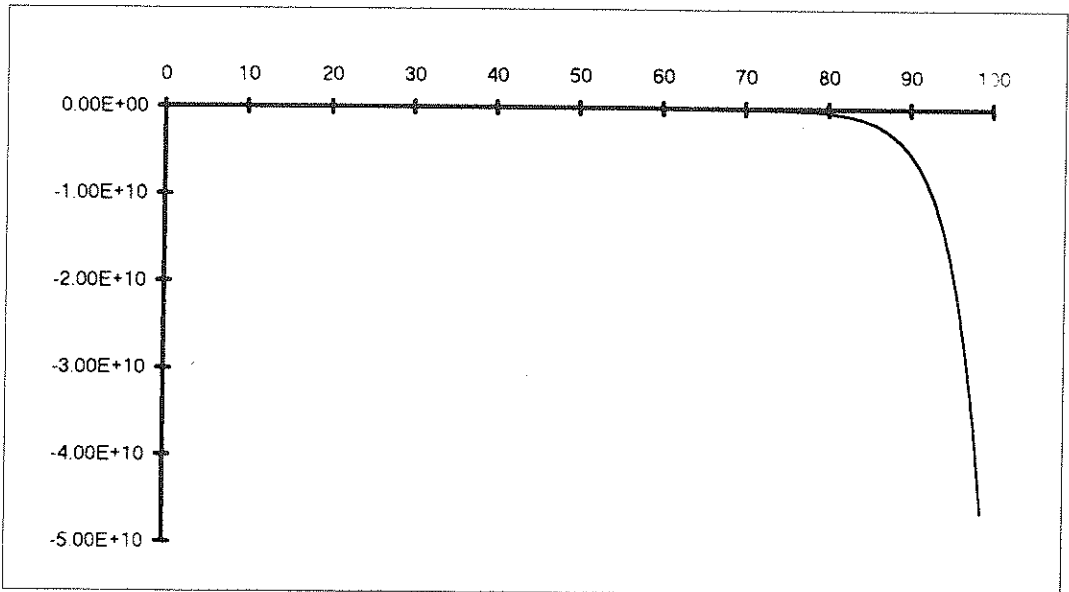
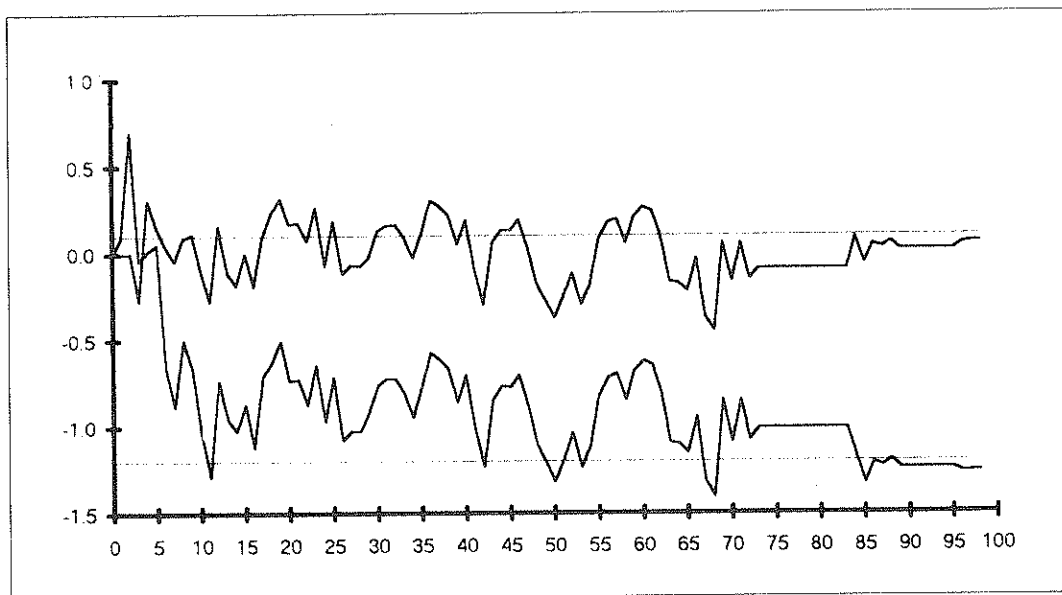


Figura 2



**Figura 3**



**Figura 4**

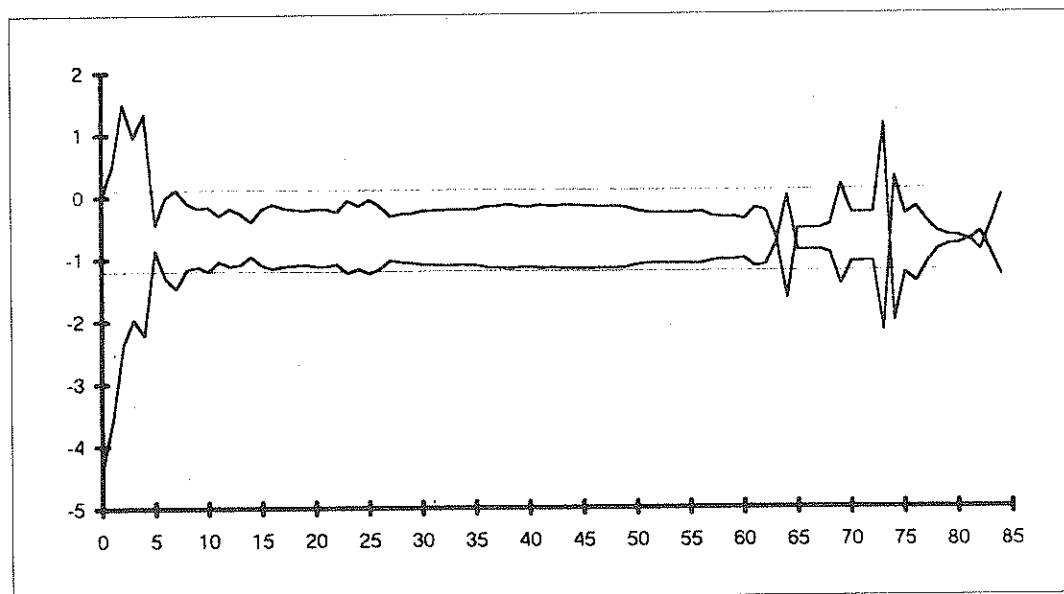
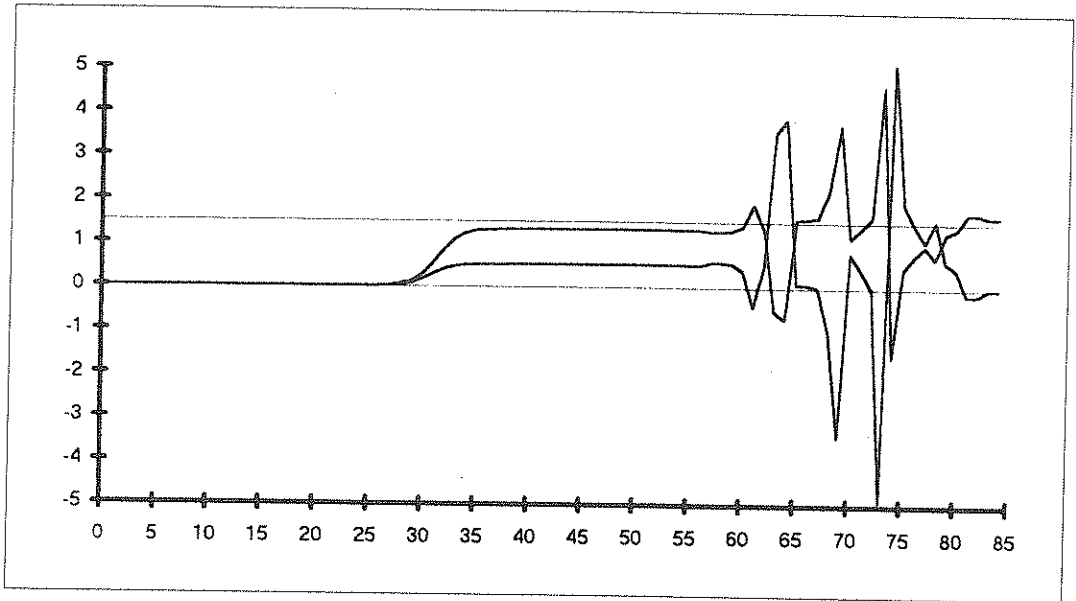


Figura 5



#### 4. PREVISIÓN MEDIANTE REDES NEURONALES.

Las redes neuronales (o redes de neuronas artificiales), son modelos matemáticos simplificados de las redes de neuronas que constituyen el cerebro humano. Estos modelos, están compuestos por un conjunto de “neuronas artificiales” o conjunto de unidades que procesan e intercambian información. Las neuronas de una red, están estructuradas en distintas capas, de forma que una neurona de una capa está conectada con las de la capa siguiente, a las que puede enviar información.

Figura 6

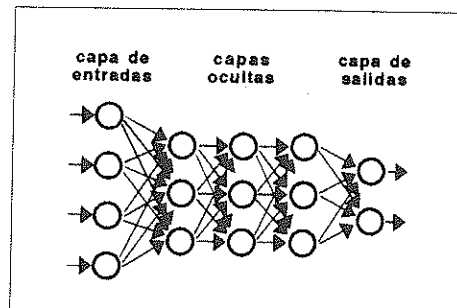
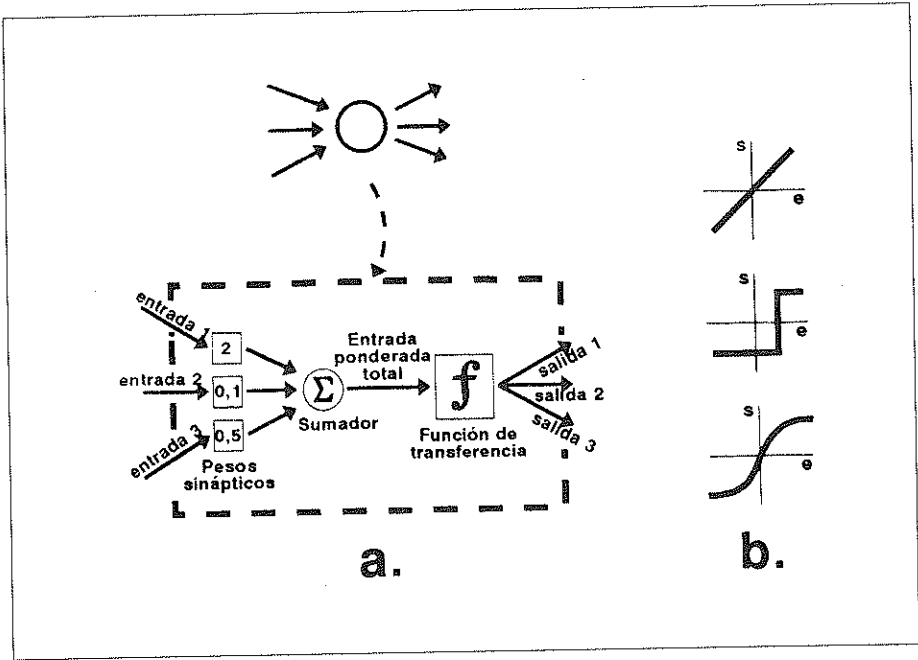


Figura 7



Tal como se refleja en la figura 6, la arquitectura más habitual consiste en una capa de neuronas de entrada que recibe la información “del exterior”, una serie de capas intermedias (u “ocultas”) y una capa de salidas, que proporciona “al exterior” el resultado del trabajo de la red.

Cada neurona, tal como se muestra en la figura 7.a, constituye una “unidad de procesamiento” de información, convierte un conjunto de señales de entrada en una salida que es difundida a las neuronas de la capa siguiente. Esta conversión se realiza en dos etapas: primero, cada una de las señales de entrada es multiplicada por un coeficiente de ponderación (“peso sináptico”) atribuido a la conexión; todos los productos son sumados para obtener una cantidad denominada “entrada ponderada total”. En una segunda fase, cada unidad utiliza una función de transferencia entrada-salida, o función de activación, que transforma la entrada ponderada total en una señal de salida que es la que se difunde a las neuronas de la capa siguiente. La función de transferencia puede ser de tres tipos, (Lippmann, 1987):

1.-*Lineal*. La actividad de salida es proporcional a la entrada ponderada total.

2.-*De umbral*. La salida queda fija a uno de dos niveles, dependiendo si la entrada ponderada total es mayor o menor que cierto valor crítico denominado “umbral”.

3.-*Sigmoide*. La salida varía de forma continua dependiendo de la entrada ponderada total, pero esta dependencia no es lineal.

Habitualmente, se suele utilizar la sigmoide como función de transferencia cuando se trata de aplicar la tecnología de redes neuronales al procesamiento de señales no-lineales (Lapedes y Farber, 1987), aunque es necesario tener presente que las tres son aproximaciones bastante burdas de la actividad de las neuronas reales.

El proceso de aplicación de la tecnología de redes neuronales artificiales a un problema concreto, consta de tres etapas fundamentales:

1.- *Diseño de la Red*. Es necesario decidir la arquitectura que va a tener la red, lo cual implica determinar el número de neuronas de la capa de entradas, el número de capas ocultas y las neuronas que contendrá cada una de ellas, y, por último, el número de neuronas de la capa de salidas. La arquitectura de la red dependerá, como es lógico, del problema concreto que se quiera resolver.

2.- *Entrenamiento de la Red Neuronal Artificial*. El entrenamiento de una Red Neuronal consiste en la utilización de un algoritmo (generalmente se usa el algoritmo "Back Propagation") para ajustar los pesos sinápticos de las conexiones entre las neuronas. El proceso consiste en presentar a la red inicial una batería de casos de entrenamiento, que se construyen utilizando los datos reales disponibles (el pasado de la serie temporal). Cada uno de estos casos está compuesto por una serie de valores de entrada y el valor de salida correspondiente. Se asignan los valores de entrada a las neuronas de la capa de entradas, y se obtiene al final un valor de salida de la red neuronal. Esta respuesta se compara con la deseada u objetivo, mediante una función de error que da una medida de la eficacia de la configuración actual de pesos sinápticos de la red. El objetivo del aprendizaje es minimizar esta función de error.

3.- *Utilización de la Red Neuronal en "Modo Recuerdo"*. Una vez entrenada, la Red Neuronal está en condiciones de ser utilizada. Para ello, no hay más que presentar a la red un caso determinado (por ejemplo los últimos datos disponibles de una serie temporal) para que, utilizando los pesos sinápticos encontrados durante el proceso de entrenamiento, calcule la salida (la previsión del dato siguiente de la serie temporal).

La mayor parte de las aplicaciones de redes neuronales, se realizaron en lenguajes de programación convencionales como FORTRAN ó C. Sin embargo, de forma análoga a lo sucedido con los sistemas expertos, ante la expansión de la tecnología y las dificultades que presentan algunas de las etapas de diseño y entrenamiento de las redes, diversas instituciones y compañías, han empezado a *comercializar entornos de desarrollo* o "shells" que facilitan diversos tipos de arquitecturas y algoritmos de entrenamiento. Nosotros, hemos utilizado el paquete comercial denominado "NEUROSHELL" en aplicaciones sobre previsión, aunque existen otros como "ANSIM", "BACK PROPAGATION", etc, para ordenadores personales.

### Resultados de simulación

Utilizando la tecnología de redes neuronales, se han entrenado las dos series de trabajo DAR2.DAT y DARMA22.DAT. En ambos casos se ha diseñado una red neuronal de 5 nodos de entrada, 11 en la capa oculta y 1 en la capa de salida. Tras unos minutos de entrenamiento, la función de error que se pretende minimizar entró dentro de unos límites previamente fijados como aceptables con lo que se consideró que las redes estaban suficientemente entrenadas y ya dispuestas para su utilización en modo recuerdo (tal como se ha comentado anteriormente).

Figura 8

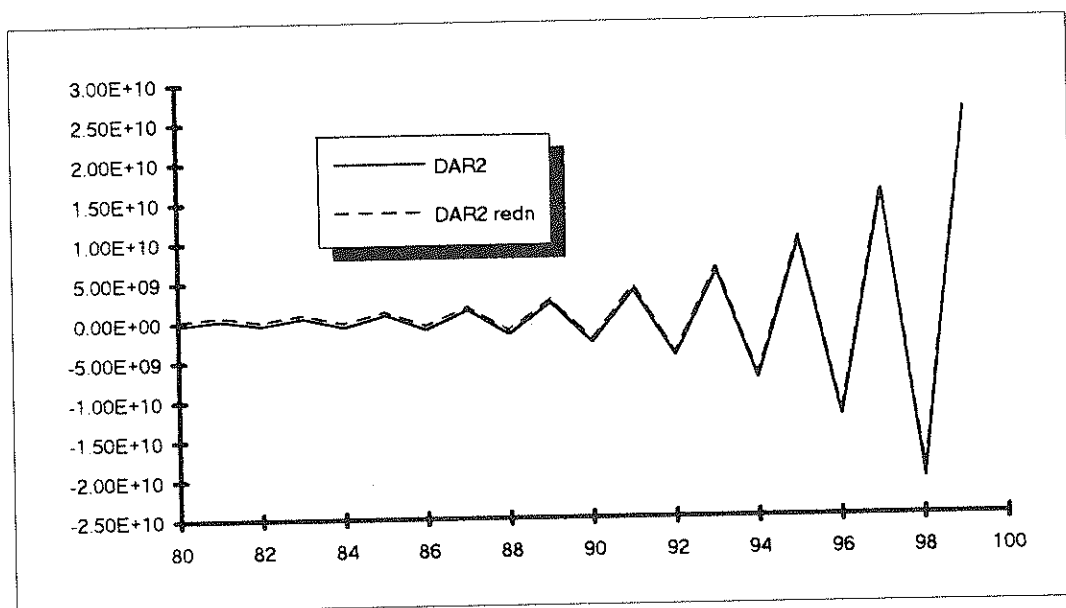
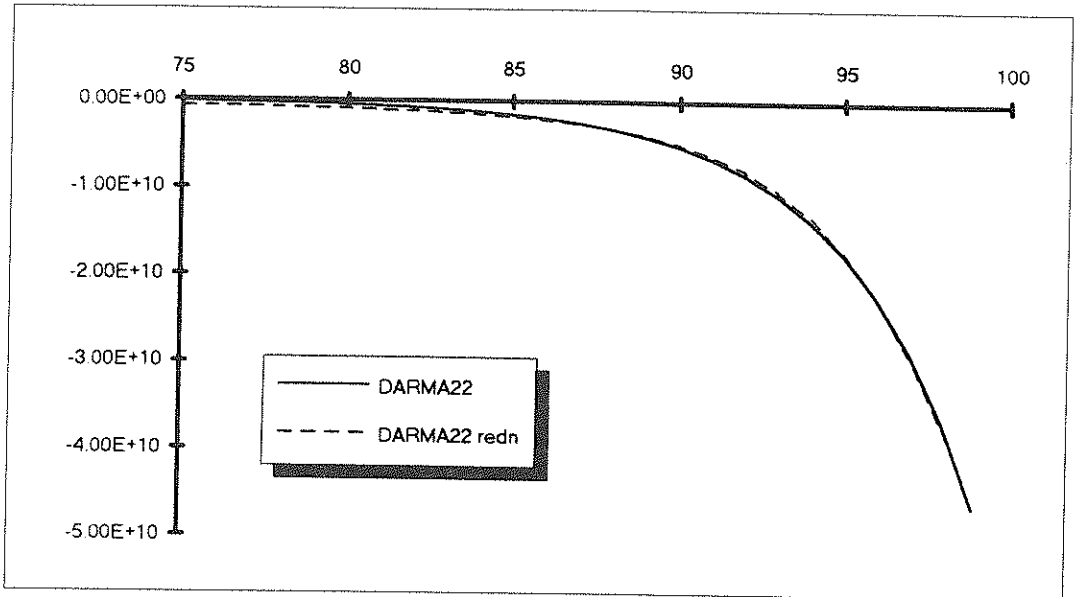


Figura 9



Se han utilizado los mismos casos de entrenamiento, para que la red deduzca un valor de salida para cada uno de ellos. En las figuras 8 y 9 se puede observar el seguimiento de la serie calculada por la red neuronal con respecto a la serie original. Para calcular previsiones bastaría con presentar a la red un caso compuesto por los 5 últimos valores de la serie original, de forma que se calcule el valor siguiente que sería el primer valor previsto.

## 5. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se muestran dos enfoques de cálculo de previsiones de series temporales no estacionarias. Por una parte mediante algoritmos de estimación de parámetros adaptativos y por otra mediante redes neuronales. En cuanto a los algoritmos celosía de cálculo de parámetros, podemos decir dan un resultado aceptable en cuanto a la estimación de los parámetros de series no estables como paso previo para el cálculo de previsiones. Sin embargo, la aplicación de redes neuronales artificiales para el cálculo de previsiones de series no estacionarias sin necesidad de estudios previos, permite eliminar el proceso de cálculo de los parámetros del modelo que es precisamente donde aparecen los problemas más importantes a la hora de hacer previsiones con este tipo de series.

## 6. BIBLIOGRAFÍA

ALEXANDER, S.T. (1986). "Adaptive Signal Processing. Theory and Applications". Springer-Verlag, New York.

---

ASTROM, K.J. (1980). "Design principles for self-tuning regulators." *Methods and Appl in Adaptive Control*, Bochum.

BOX, G.E.P., and JENKINS, G.M. (1976). "Time Series Analysis: Forecasting and Control". 2nd. Ed. San Francisco: Holden Day.

BOX, G.E.P. and TIAO, G.C. (1975). "Intervention analysis with applications to economic and environmental problems." *Jasa*, No.70, pp.70-79.

DE LA FUENTE, D. (1987). "Prevision adaptativa por el metodo celosía en organización de empresas." Tesis, Universidad de Oviedo.

DE LA FUENTE, D. y D. F. GARCIA (1989): "Lattice Algoritms with Variable Forgetting Factors Detecting Interventions and Parametric Changes." IFAC Symposium on Adaptive Systems in Control and Signal Processing, Glasgow, UK.

EBERHART, R.C. and DOBBINS, R.W. (1990). "Neural Network PC Tools". Academic Press.

ESPASA, A. y CANCELO, J.R. (1993). "Métodos cuantitativos para el análisis de la coyuntura económica". Alianza Editorial.

FARMER, J.D. and SIDOROWICH, J.J. (1987). "Predicting chaotic time series". *Physical Review Letters*, 59, 845-848.

FORTESCUE, T. R., L. S. KERSHEMBAUM and B. E. YDSTIE (1981). "Implementation of self-tuning regulators with variable forgetting factors." *Automatica*, Vol.17, No.6, pp.831-835.

FRIEDLANDER, B. (1982). "Lattice filters for adaptive processing." *Proceedings of the IEEE*, Vol.70, No.8.

GIORDANO, A. and HSU, F.M. (1985). "Least Square Stimation, Aplications to Digital Signal Processing". John Wiley.

GRANGER, C.W.J. and NEWBOLD, P. (1986). "Forecasting economic time series" (2nd. ed.). Orlando, FL: Academic Press.

ITAKURA, F. and S. SAITO (1971): "Digital Filtering Techniques for Speech Analysis and Synthesis." 7th International Congress on Acooustic, Budapest, Hungary, pp.262-264.

JACKSON, L.B. (1986) "Digital Filters and Signal Processing". Kluwer Academic Publishers. Boston.

LAPEDES, A. and FARBER, R. (1987). "NonLinear signal processing using neural networks". IEEE Conference on Neural Information Processing System - Natural and Synthetic.

LIPPMANN, R.P. (1987) "An Introduction to Computing with Neural Nets". IEEE ASSP Magazine. April 1987.



# REGRESIÓN LOCAL PONDERADA BAJO CONDICIONES GENERALES. ESTUDIO DE UN CASO ECONÓMICO

MARIO FRANCISCO FERNÁNDEZ  
JUAN M. VILAR FERNÁNDEZ

Facultad de Informática  
Universidad de la Coruña

## I. INTRODUCCION

Una curva de regresión describe una relación general entre una variable respuesta,  $Y$ , y una variable explicativa o regresora,  $X$ . Por ejemplo, estudiar el gasto en alimentación de las familias españolas en función de sus ingresos. Para estudiar esta relación se observa una muestra  $(X_i, Y_i)$ , con  $i=1\dots n$ , que verifica la siguiente relación:

$$Y_i = m(X_i) + \epsilon_i, i=1,2,\dots,n$$

donde  $m(\cdot)$  es la función de regresión desconocida y los  $\{\epsilon_i\}$  son los errores de observación. Siendo el objetivo del Análisis de Regresión obtener una aproximación razonable de  $m(x)$  reduciendo el error de las observaciones, centrándose en la respuesta media de  $Y$  condicionada por  $X$ . Esto puede hacerse de dos formas, la forma paramétrica, donde se asume que  $m(x)$  tiene una forma funcional prefijada y el problema se centra en estimar los parámetros de la función y la forma no paramétrica, donde no se presupone una forma funcional específica de la función de regresión que viene completamente determinada por los datos muestrales, lo que presupone una mayor flexibilidad y permite realizar de forma sencilla y rápida un análisis exploratorio de la curva de regresión, así como detectar características locales de ésta. Por las ventajas que presenta esta nueva metodología (Härdle, 1990) ha sido ampliamente estudiada en las dos últimas décadas, siendo la idea básica la siguiente:

“Si queremos estimar  $m(x)$ , ( $x$  fijo), las observaciones  $X_i$  próximas a  $x$  contienen información acerca del valor de  $m(x)$ , por lo que se utilizará un promedio local de los datos  $Y_i$  cuyas  $X_i$  estén próximas a  $x$  ponderándolos según sea la distancia de  $X_i$  a  $x$ ”.

Lo que nos lleva a estimadores del tipo

$$\hat{m}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_{ni}(x) y_i$$

donde  $W_{ni}$ ,  $i=1\dots n$ , denota una sucesión de pesos que depende del vector muestral  $X_i$ ,  $i=1\dots n$ .

De estos estimadores los más utilizados y estudiados, son los estimadores núcleo: el estimador de Nadaraya-Watson, que utiliza los pesos

$$W_{ni}(x) = \frac{1}{\hat{f}_n(x)} K_h(x - x_i) \quad (3)$$

siendo  $\hat{f}_n$  el estimador de Rosenblatt-Parzen de la densidad de  $X$ ;

$$K_h(u) = \frac{1}{h} K\left(\frac{u}{h}\right)$$

con  $K(u)$  la función núcleo que indica la forma de hacer la ponderación y  $h$  es el parámetro de suavizado o ventana que indica la cantidad de suavización que se introduce. También es interesante, considerar este estimador como el resultado de ajustar localmente un polinomio de grado cero por mínimos cuadrados ponderados.

Un segundo estimador núcleo muy utilizado es el introducido por Gasser-Müller, que utilizan la siguiente sucesión de pesos:

$$W_{ni}(x) = n \int_{S_i}^{S_{i+1}} K_h(x - u) du \quad (4)$$

donde  $X_{i-1} \leq S_i \leq X_i$  es elegido entre los datos ordenados.

Un amplio estudio comparativo de estos dos estimadores puede verse en Chu-Marron (1991).

## II. REGRESION LOCAL LINEAL

Un tercer estimador no paramétrico de la función de regresión que trata de recoger las ventajas de los dos anteriores y que generaliza al de Nadaraya-Watson, es el que se obtiene al ajustar localmente un polinomio por mínimos cuadrados ponderados. Esto es, si se desea estimar  $m(x)$ ,  $x$  fijo, se minimiza la expresión,

$$\psi(P_k) = \sum_{i=1}^n (Y_i - P_k(X_i - x))^2 K\left(\frac{x - X_i}{h}\right) \quad (5)$$

siendo  $P_k$  un polinomio de grado  $k$ . El valor de  $P_k^0(x)$ , con  $P_k^0$  el polinomio que minimiza la expresión (5) es el estimador de regresión polinómica local (RPL) de  $m(x)$ . En particular para  $k=1$ ,  $P_1(y)=a+b(y-x)$  y el estimador local lineal es el valor de "a" que minimiza la función  $\Psi(P_1) = \Psi(a,b)$ . Un sencillo cálculo algebraico nos proporciona la siguiente expresión del estimador:

$$\hat{a} = \hat{m}_n(x) = \left( \sum_{i=1}^n W_i Y_i \right) / \left( \sum_{j=1}^n W_j \right) \quad (6)$$

con

$$W_j = K\left(\frac{x - X_j}{h}\right) (S_{n2} - (x - X_j)S_{n1}); \quad S_{nk} = \sum_{j=1}^n K\left(\frac{x - X_j}{h}\right) (x - X_j)^k, k = 1, 2$$

Este estimador era introducido a final de los setenta por Stone y Cleveland, pero han sido los recientes estudios de Cleveland (1988) y Fan (1992) los que han puesto de actualidad este estimador, al probar las importantes ventajas que presenta su utilización. Es de gran interés el trabajo de Hastie-Loader (1993) en el que se comparan los tres estimadores definidos bajo hipótesis de independencia o el reciente texto de Wand-Jones (1994).

Entre las propiedades del estimador de regresión polinómica local (RPL) destacamos las siguientes:

- i) El estimador de RPL proporciona un método automático, intuitivo y de fácil interpretación, siendo relativamente insensible al diseño del modelo (fijo o aleatorio).
- ii) El estimador de RPL presenta un menor sesgo que el de Nadaraya-Watson y una menor variabilidad que el de Gasser-Müller. Además, Fan ha probado su eficacia minimax.
- iii) Aunque como todos los estimadores no paramétricos presenta problemas (estimaciones con mayor sesgo) en la frontera del dominio de la muestra, es menos sensible que los otros estimadores núcleo, lo que lo hace muy útil para trabajar con regresores d-dimensionales.
- iv) De la definición es fácil deducir estimadores para las derivadas de la función de regresión.

### III. RESULTADOS ASINTÓTICOS

En la literatura existente sobre el estimador RPL se asume que las observaciones son independientes, hipótesis irrealista en muchos casos, sobre todo si se trabaja con variables dinámicas, que evolucionan en el tiempo, como ocurre con la mayoría de las series económicas. Por ello en este trabajo se supone que los datos son dependientes verificando la condición "fuertemente mixing", cuya definición es la siguiente:

"Sea  $\{X_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  una sucesión de variables aleatorias, sea

$$\mathfrak{F}_j^1 := \sigma(X_k, j \leq k \leq 1)$$

la  $\sigma$ -álgebra generada por estas variables. Para cada  $n=1,2,3,\dots$  sea

$$\alpha(n) = \sup_{j \in \mathbb{Z}} \alpha(\mathcal{S}_{-\infty}^j, \mathcal{S}_{j+n}^{+\infty})$$

con

$$\alpha(A, B) : \sup \{ P(AB) - P(A)P(B) \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B} \}$$

la sucesión  $\{X_k\}$  se dice  $\alpha$ -mixing si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(n) = 0$$

De entre todas las condiciones de dependencia utilizadas es de las más débiles que verifican, entre otros, los procesos ARMA generados con ruido continuo (Ver Bradley R. (1986) y Doukhan P. (1994) para un estudio de sus propiedades).

Bajo esta hipótesis de dependencia se ha obtenido la insesgadez asintótica y el error cuadrático medio del estimador RPL definido en (6).

## EL MODELO MATEMÁTICO

Considérese el modelo  $y_i = m(x_i) + E_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ , donde  $m$  es una función "suave" definida en un compacto  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  y los  $\{E_i\}$  son errores muestrales.

Respecto a los  $\{x_i\}$ , siguiendo a Sacks y Ylvisaken (1970) se asume que es un diseño regular, esto es, generada por una densidad de diseño,  $f(x)$ , tal que por cada  $n$ , los puntos del diseño están definidos por:

$$\int_a^{x_i} f(t) dt = \frac{i-1}{n-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

siendo  $f$  una función positiva y lipchiziana continua. Se utilizarán las siguientes HIPOTESIS:

E1. Los errores  $\{E_i\}$  son idénticamente distribuidos, fuertemente mixing de media cero y varianza finita ( $\sigma^2$ ).

E2. Existe algún  $\delta > 0$  tal que

$$P(|E_i| > u) \leq \left( \frac{C_{E_i}(\delta)}{u} \right)^{2+\delta}$$

para cualquier  $u$  positivo.

E3.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha(n)^{\frac{\delta}{2+\delta}} < \infty$$

siendo  $\alpha(n)$  los coeficientes mixing.

K1. La función núcleo,  $K(u)$ , es simétrica, de soporte compacto.

K2.  $K(u)$  es lipchiziana continua.

K3.  $K(u)$  es de orden 2:

$$\int K = 1, \quad \int uK(u) = 0, \quad \int u^2 K(u) < \infty$$

M1. La función  $m(x)$  tiene derivada segunda continua.

$$H1. h_n \rightarrow 0, nh_n \rightarrow \infty, \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

La primera propiedad que se ha obtenido es la insesgadez asintótica, necesaria para que el estimador sea válido.

**TEOREMA 1.** "Si se verifican las hipótesis E1, K1, H1 y  $m$  es continua, entonces  $E(\hat{m}_n(X)) \rightarrow m(x)$  para todo  $x$ ".

El error cuadrático medio se ha obtenido descomponiéndolo en sesgo al cuadrado más varianza, y estudiando cada una de las dos componentes, teniendo en cuenta que la dependencia de las observaciones influye solamente en la parte debida a la varianza.

**TEOREMA 2.** "Bajo las hipótesis enunciadas anteriormente se verifica:

$$\begin{aligned} ECM(\hat{m}_n(x)) &= (E\hat{m}_n(x) - m(x))^2 + \text{Var}(\hat{m}_n(x)) \leq \\ &\leq \left[ \frac{1}{2} h_n^2 \left( \int u^2 K(u) du \right) m''(x) \right]^2 + \left( \int K^2(u) du \right) \frac{\sigma^2}{f(x)} \frac{1}{nh_n} + \\ &+ c_n \left( \frac{1}{nh_n} \right) + o \left( h_n^4 + \frac{1}{nh_n} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

## COMENTARIOS

1. Las demostraciones de los teoremas 1-2 son bastante complejas y técnicas, no incluyéndonlas por problemas de espacio.

2. La dependencia de las observaciones afecta solamente a la varianza del estimador que se incrementa por el efecto de las covarianzas de los errores muestrales, dicho efecto se ha podido acotar por un término del mismo orden ( $c_n n^{-1} h_n^{-1}$ ) que la varianza del estimador bajo hipótesis e independencia. Por venir dada la condición a-mixing por desigualdades solamente hemos podido obtener una cota utilizando recientes desigualdades de momentos debidas a Río E.(1994).

---

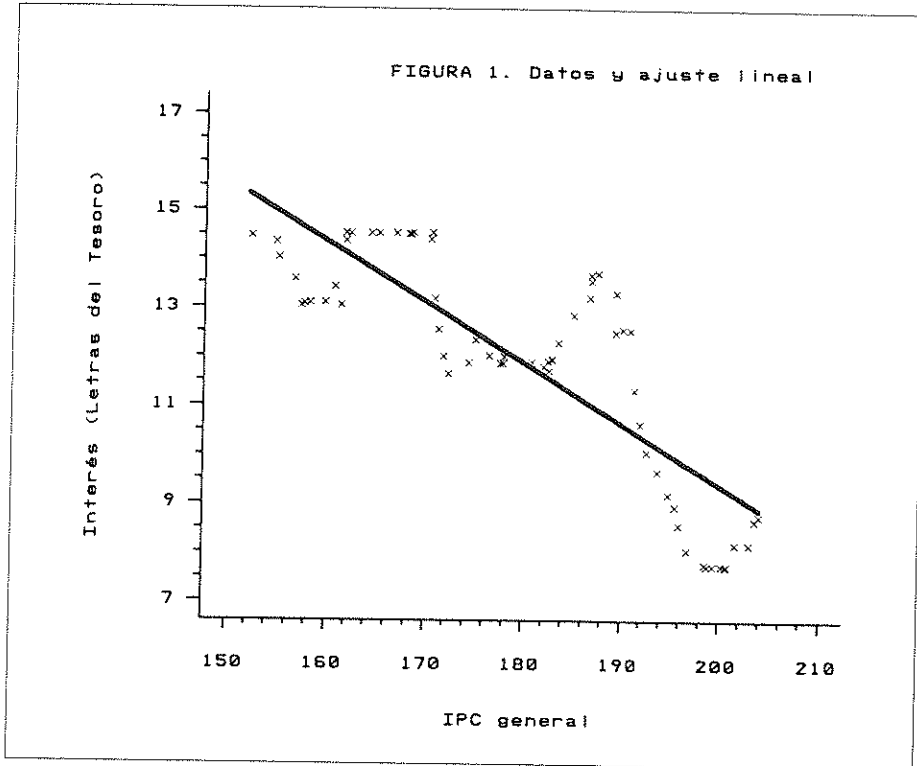
Exigiendo estructuras de dependencia más precisas, como que los errores sean de tipo AR, creemos que es posible obtener la expresión exacta asintótica del ECM del estimador, problema en el que estamos trabajando actualmente.

3. Como en todo problema de estimación no paramétrica es fundamental elegir adecuadamente el parámetro de suavizado, proponiendo para el modelo descrito utilizar técnicas de validación cruzada eliminando varios términos en lugar de uno para lo que hace que se obtengan bandas mayores que para el caso de independencia y así disminuir la influencia de la varianza. Si los errores fuesen de tipo AR, una vez obtenida la expresión del ECM, consideramos que sería mejor utilizar la técnica plug-in ya que se ha demostrado que en la mayoría de las situaciones proporciona mejores resultados.

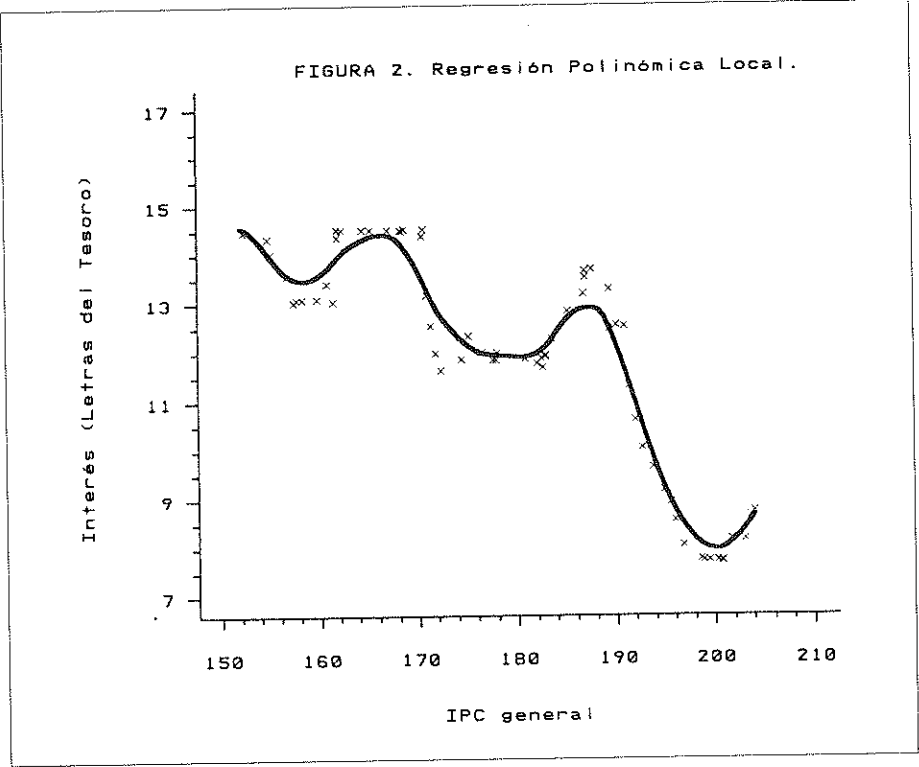
#### **IV ESTUDIO DE UN CASO CON DATOS ECONÓMICOS.**

Para ilustrar el comportamiento del estimador de regresión polinómico local se ha estudiado la relación entre la variable  $Y$ ="Interés de las Letras del Tesoro, emisión a un año" y la variable  $X$ ="Índice de Precios al Consumo (tomando como índice base 100 = 1983)", utilizando 66 datos mensuales, de Junio de 1989 a Noviembre de 1994, recogidos en los Boletines Económicos que publica el Banco de España.

En la Figura 1, pueden verse los datos y un ajuste lineal, como una primera aproximación, que nos proporciona un coeficiente de correlación  $r = -0.8289$ , que indica la existencia de una relación entre ambas variables. Un estudio de residuos detecta una fuerte dependencia entre ellos, que podría ajustarse por un modelo AR(2).

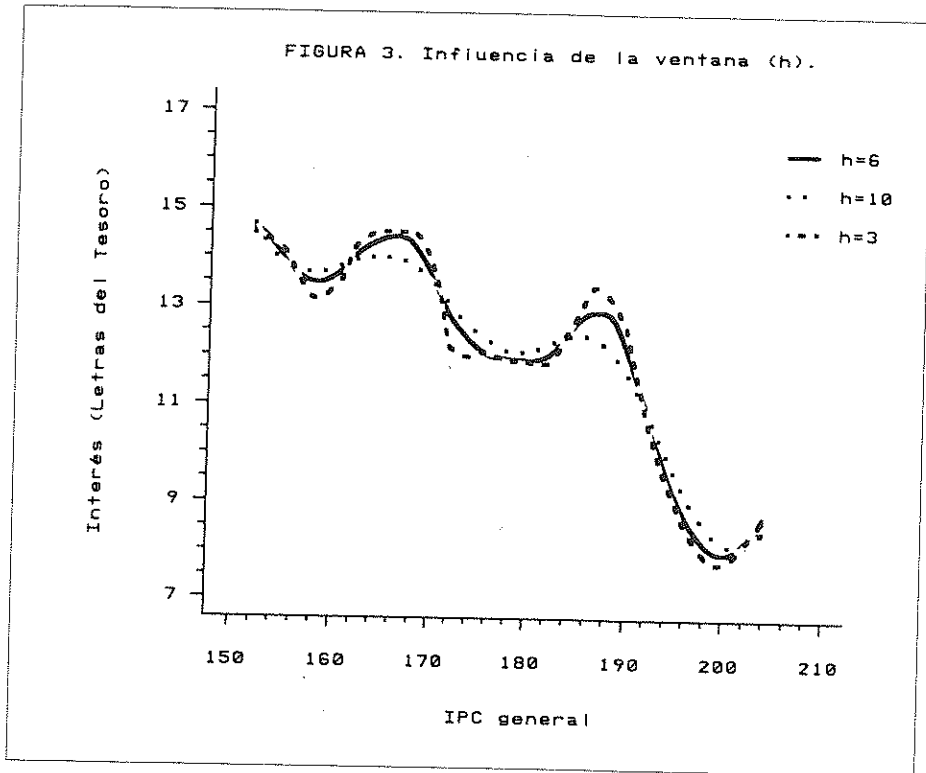


A continuación se ha realizado un ajuste no paramétrico, utilizando el estimador RPL con kernel cuártico y parámetro de suavizado  $h=6$ ; el resultado puede verse en la Figura 2, donde cabe destacar el buen seguimiento que la curva estimada hace de la nube de puntos y su buen comportamiento en los extremos del dominio.

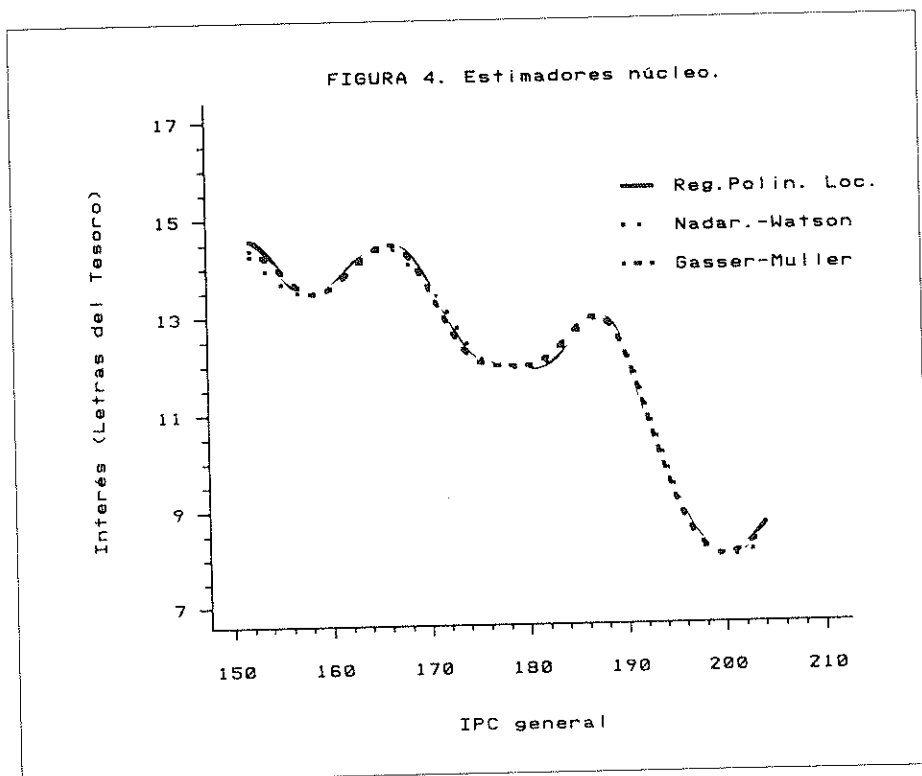




Para estudiar la influencia del parámetro de suavizado se ha calculado el estimador de RPL con  $h=3,6$  y  $10$ , cuyos resultados pueden verse en la Figura 3, donde se observa que al aumentar el valor de  $h$  se obtienen curvas más suaves.



Finalmente se han obtenido las estimaciones no paramétricas de la función de regresión utilizando los estimadores núcleo de Nadaraya - Watson y de Gasser - Müller, cuyos resultados pueden verse en la Figura 4 y donde se observa que en este ejemplo los resultados son parecidos.



## BIBLIOGRAFÍA

BRADLEY, R. (1986) "*Basic properties of strong mixing conditions*", Tecnical Report, 102, Dept. of Stat. Univ., North Carolina, Chapell-Hill.

CLEVELAND, W.S. - DEVLIN, S.J. (1988), "*Locally Weighted Regression: An Approach to Regression Analysis by Local Fitting*", J.A.S.A, 83, 403, 596-610.

CLEVELAND, W.S. - DEVLIN, S.J. GROSSE, E. (1988), "*Regression by Local Fitting*", Journal of Econometrics, 37, 87-114.

CHU, C.K. - MARRON S. (1991), "*Choosing a kernel regression estimator*". Statistical Science, 6, 4, 404-436.

DOUKHAN, P. (1994), "*Mixing*", Ed. Springer-Verlag.

FAN, J. (1992), "*Design-adaptive nonparametric regression*", J.A.S.A., 87, 420, 998-1004.

FAN, J. - GIJBELS, I. (1992) "*Variable Bandwidth and Local Linear Regression Smoothers*", The Annals of Statistics, 20, 4, 2008-2036.

HASTIE, T. - LOADER, C. (1993), "*Local regression: automatic kernel carpentry*", Statistical Science 8, 2, 120-143.

HARDLE, W. (1990), "*Applied Nonparametric Regression*", Ed University Press.

HARDLE, W. - VIEU, P. (1992), "*Kernel regression smoothing of time series*", Journal of Time Series Analysis, 13, 3, 209-232.

WAND, M.P. - JONES, M.C. (1994), "*Kernel Smoothing*", Ed. Chapman & Hall.



# UNA NOTA SOBRE EL CONTRASTE DE RELACIONES DE COINTEGRACIÓN ENTRE ÍNDICES DE PRECIOS

ANDREU SANSÓ ROSSELLÓ

MANUEL ARTÍS ORTUÑO

JORDI SURINACH CARALT

Departament d'Econometria, Estadística i Economia Espanyola  
Universitat de Barcelona

## 1. INTRODUCCIÓN

En los últimos años han aparecido abundantes trabajos que tratan de contrastar diversas hipótesis económicas utilizando técnicas del análisis de cointegración. Algunas de estas hipótesis establecen relaciones de equilibrio entre índices de precios agregados o transformaciones de éstos. De entre éstas destacar la hipótesis de Paridad del Poder de Compra (*Purchasing Power Parity*, PPP) o la hipótesis de convergencia entre tasas de inflación entre diferentes áreas geográficas en el marco de un sistema de integración monetaria.

Respecto a la primera, ha aparecido evidencia tanto a favor como en contra de la misma y ha sido analizada tanto bilateral como multilateralmente. A ese respecto citar, entre otros, los trabajos de Corbae y Ouliaris (1988), Layton y Stark (1990) que no hallan evidencia en favor de la hipótesis, y los de Enders (1988) y (1989), McNown y Wallace (1989), Kim (1990), Heri y Theurillat (1990) que sí la obtienen en algunos casos. Por lo que respecta a la hipótesis de convergencia en tasas de inflación, ejemplos de su contrastación son los trabajos de Artis y Nachane (1990) y Caporale y Pittis (1993) que estudian la convergencia en tasas de inflación entre diversos países miembros del Sistema Monetario Europeo y el trabajo de Sansó y Suriñach (1995) referente a la convergencia en tasas de inflación entre las Comunidades Autónomas.

Johnson (1991), con el objeto de proporcionar una explicación a los rechazos de la hipótesis de la PPP usando índices de precios agregados y el análisis de cointegración, desarrolla un modelo y un contraste para tratar de explicar dichos rechazos. En síntesis, la hipótesis puede rechazarse si hay cambios internos en los precios relativos de los índices y los países utilizan diferentes ponderaciones en la construcción de los índices de precios, aunque la hipótesis se cumpla para cada bien individualmente. En la presente comunicación se extiende el análisis iniciado por Johnson y se muestra la limitada capacidad del mismo para extraer conclusiones sobre si son los cambios internos en los índices los responsables del rechazo de la hipótesis de cointegración (o equivalentemente: la hipótesis de PPP o de convergencia en tasas de inflación).

El trabajo se estructura como sigue: se expone el modelo desarrollado por Johnson para criticar los procedimientos habituales de contraste de la PPP utilizando índices agregados de precios. Posteriormente, se muestra el contraste sugerido por el autor para determinar si los cambios internos de precios relativos son los responsables del rechazo de dicha hipótesis. Una interpretación y crítica del contraste se expone en el apartado 3. Los dos siguientes apartados tratan de solucionar las críticas al contraste esbozadas anteriormente. Finalmente, en el apartado 6 se extiende el modelo al estudio de la convergencia en tasas de inflación. Termina el trabajo con una recopilación de las conclusiones.

## 2. EL MODELO DE JOHNSON

Supóngase que hay  $n$  bienes diferentes ( $i=1,...,n$ ). Sea  $p_{it}$  el logaritmo natural del precio doméstico del bien  $i$ -ésimo,  $p^*_{it}$  el logaritmo natural del precio extranjero del bien  $i$ -ésimo y  $e_t$  el logaritmo natural del tipo de cambio (unidades monetarias domésticas por unidad monetaria extranjera). Supóngase que  $p_{it}$ ,  $p^*_{it}$  y  $e_t$  son integrados de primer orden ( $I(1)$ ). Si la hipótesis PPP se cumple para el bien  $i$ , entonces  $\alpha=(1,-1,-1)'$  cointegra  $x_{it}=(p_{it}, p^*_{it}, e_t)'$ , es decir,  $d_{it}=\alpha'x_{it}=p_{it}-p^*_{it}-e_t$  es estacionario ( $I(0)$ ). Debe considerarse que ello no implica que todos los  $d_{it}$  ( $i=1,...,n$ ) sigan los mismos procesos. Si la PPP se cumple para todos los bienes  $d_{it}=\alpha'x_{it}=p_{it}-p^*_{it}-e_t$  debería ser estacionario, donde  $p_t$  y  $p^*_t$  son los vectores de los logaritmos de los precios domésticos y extranjeros respectivamente. Veamos como esta hipótesis no tiene porqué cumplirse cuando se utilizan índices de precios agregados.

Sean los índices de precios:

$$p_t = \sum_{i=1}^n \delta_i p_{it} \quad ; \quad p^*_t = \sum_{i=1}^n \phi_i p^*_{it} \quad (1)$$

con  $\sum \delta_i = 1$  y  $\sum \phi_i = 1$ .

Por otro lado, el logaritmo del precio doméstico del bien  $i$ -ésimo ( $i=2,...,n$ ) en relación al bien 1-ésimo es  $_{-it}=p_{it}-p_{1t}$ , y  $_{-1t}=0$ . Si no hay cambios permanentes en los precios relativos de los bienes, entonces  $p_{it}$  será estacionario. El objetivo del modelo que se mostrará es llegar a determinar si los cambios permanentes en los precios relativos (junto con las diferencias de ponderación),  $p_{it}$ , son los responsables del rechazo de la hipótesis de PPP.

Si  $p_{it}$  no es estacionario para algún  $i$  ( $i=2,...,n$ ), es decir, hay cambios permanentes en los precios relativos domésticos, y  $\delta_i \neq 0$ , entonces  $\alpha$  no cointegra  $x_t=(p_t, p^*_t, e_t)'$ . Ello se comprueba mediante el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned}
d_t &= \sum_{i=1}^n \delta_i p_{it} - \sum_{i=1}^n \phi_i p_{it}^* - e_t \\
&= \sum_{i=1}^n \delta_i p_{it} \pm \sum_{i=1}^n \phi_i p_{it} - \sum_{i=1}^n \phi_i p_{it}^* - e_t \\
&= \sum_{i=1}^n (\delta_i - \phi_i) p_{it} + \sum_{i=1}^n \phi_i (p_{it} - p_{it}^* - e_t) \\
&= \sum_{i=1}^n (\delta_i - \phi_i) p_{it} + \sum_{i=1}^n \phi_i d_{it} \\
&= \sum_{i=1}^n (\delta_i - \phi_i) p_{1t} + \sum_{i=2}^n (\delta_i - \phi_i) \rho_{it} + \sum_{i=1}^n \phi_i d_{it}
\end{aligned}$$

en definitiva:

$$d_t = \sum_{i=2}^n (\delta_i - \phi_i) \rho_{it} + \sum_{i=1}^n \phi_i d_{it} \quad (2)$$

Si se cumple la PPP para cada bien, el segundo sumatorio de la derecha de (2) será estacionario. Además, se comprueba que  $d_t$  depende de los cambios relativos en los precios domésticos y de las ponderaciones de los diferentes bienes en cada país ( $\delta_i$  y  $\phi_i$ ). Así, si  $\rho_{it}$  está integrado para algún  $i$  ( $i=2, \dots, n$ ) y  $\delta_i \neq \phi_i$ ,  $d_t$  será no estacionario, por lo que se rechazaría la hipótesis de PPP. De esta forma los contrastes de la hipótesis de PPP pueden tender a rechazarla a pesar de cumplirse para cada bien individualmente.

Más adelante, en el apartado 4, se discutirá la aplicabilidad de este modelo a índices de precios tipo Laspeyres, como son, por ejemplo, los IPC nacionales y los regionales. Por otro lado, Johnson también construye un contraste para comprobar si el efecto de los cambios relativos de precios son los responsables del rechazo de la hipótesis de PPP. Éste se expone a continuación.

## 4. CONTRASTE PARA COMPROBAR SI EL EFECTO DE LOS CAMBIOS RELATIVOS DE PRECIOS ES EL RESPONSABLE DEL RECHAZO DE LA HIPÓTESIS DE PPP

Supóngase que  $d_t$  es integrado de primer orden, por lo que se habría rechazado la PPP, pero que esta hipótesis se cumple para los bienes individuales y, por tanto, el último sumatorio de la derecha de la expresión (2) es estacionario. Así, los cambios en los precios relativos,  $\rho_{it}$ , junto con las diferencias en las ponderaciones serían los responsables de la no estacionariedad de  $d_t$ . El contraste

que propone Johnson para comprobar si los cambios de precios relativos NO son los responsables del rechazo de la PPP, consiste en contrastar la hipótesis que  $d_t$  y los  $\rho_{it}$  integrados no están cointegrados. Las etapas y la explicación del contraste se muestran a continuación.

El contraste consiste en las siguientes etapas:

1) una vez contrastada la integrabilidad de primer orden de  $d_t$ , se contrasta la integrabilidad de los  $\rho_{it}$  ( $i=2,...,n$ ). Ello puede realizarse a partir de cualquier contraste de raíces unitarias. Johnson utiliza el contraste de Phillips y Perron (1988). Comprobada la integrabilidad de orden 1 de los mismos, al mostrar éstos cambios permanentes, existe la posibilidad que sean los responsables del rechazo de la PPP;

2) comprobar que los  $\rho_{it}$  no estacionarios no están cointegrados entre ellos. De forma similar a la primera etapa, ello puede llevarse a cabo mediante cualquier contraste de cointegración. Johnson utiliza el contraste de la traza multivariante de Phillips y Ouliaris (1990). El contraste de esta hipótesis es necesario, ya que no basta que los  $\rho_{it}$  sean integrados para que  $d_t$  lo sea. En otras palabras, se podría dar el caso de que los  $\rho_{it}$  estuvieran cointegrados entre ellos y que el primer sumatorio de la derecha de (2) fuera estacionario, pero que  $d_t$  fuera no estacionario al no cumplirse la PPP para algún bien (segundo sumatorio de (2) no estacionario). Así, esta etapa elimina esta posibilidad;

3) contrastar que  $d_t$  no está cointegrado con los  $\rho_{it}$  ( $i=2,...,n$ ). La aceptación de la hipótesis de no cointegración significa que los cambios de los precios relativos y las diferentes ponderaciones NO son los responsables de la no estacionariedad de  $d_t$ . Es decir, que la fuente de no estacionariedad de  $d_t$  proviene, además de la de los  $\rho_{it}$ , de los  $d_{it}$ , incumpléndose la PPP para algún bien. En otras palabras, los  $\rho_{it}$  no bastan para explicar la no estacionariedad de  $d_t$ . Johnson utiliza en esta etapa el contraste de no cointegración sobre los residuos de la regresión estática:

$$d_t = \text{cts} + \sum_{i=2}^n \theta_i \rho_{it} + u_t$$

Al esquema del contraste desarrollado por Johnson cabría añadir las matizaciones respecto a las diferentes implicaciones que tiene el rechazo de la hipótesis de no cointegración en la tercera etapa, consideraciones que él no realiza. Así, a pesar que en la etapa 3 se rechaza la hipótesis de no cointegración, la no estacionariedad de  $d_t$  puede ser debida tanto al efecto de los cambios relativos de precios y de las diferencias de ponderaciones como al incumplimiento del supuesto de estacionariedad de los  $d_{it}$ . Ello puede verse claramente si se considera que el vector cointegrante,  $\theta=(\theta_2,...,\theta_n)'$  puede ser diferente al vector de diferencias de ponderaciones  $(\delta_2-\phi_2,...,\delta_n-\phi_n)$ . Es decir, el no rechazo de una relación de cointegración entre  $d_t$  y  $\rho_{it}$  puede significar:

a) se cumple la hipótesis de PPP para todos los bienes, y la no estacionariedad de  $d_t$  se debe sólo al efecto de las ponderaciones y de los cambios relativos de precios. Este caso se da cuando  $\theta_i=\delta_i-\phi_i$  ( $i=2,...,n$ ) al comprobarse que:

$$d_t - \sum_{i=2}^n (\delta_i - \phi_i) \rho_{it} + \sum_{i=1}^n \phi_i d_{it} \sim I(0)$$



de esta manera, la no estacionariedad individual de  $d_i$  viene explicada completamente por el efecto de los cambios relativos y de las diferencias de ponderación. Esta hipótesis es sencilla de contrastar cuando se conocen dichas diferencias de ponderación entre ambos índices.

b) la fuente de no estacionariedad univariante de  $d_i$  puede ser debida, además de por el efecto de los  $\rho_{it}$ , al incumplimiento de la PPP para algún bien (algún  $d_{it}$  no estacionario). Este caso se da cuando  $\theta_i \neq \delta_i - \phi_i$  para algún  $i$ :

$$d_t - \sum_{i=2}^n \theta_i \rho_{it} \neq d_t - \sum_{i=2}^n (\delta_i - \phi_i) \rho_{it} \sum_{i=2}^n \phi_i d_{it} \sim I(1)$$

A la vista de lo anteriormente señalado, en caso de rechazarse la hipótesis de no cointegración en la tercera etapa, debería comprobarse si el vector de diferencias de ponderaciones pertenece al espacio de cointegración con el fin de interpretar correctamente los resultados.

Al anterior esquema de contraste pueden dirigirse las siguientes críticas:

1) En general el número de bienes que comprenden los índices de precios agregados es muy elevado. Ello provoca que no se puedan realizar los contrastes de cointegración de las etapas 2 y 3 debido al agotamiento de los grados de libertad, o bien a la no disposición de valores críticos para los contrastes de cointegración, dado el elevado número de variables que aparecen en la regresión de cointegración y a que estos valores críticos dependen del número de variables incluidas en la regresión. Johnson obvia este problema al usar los 9 grupos de gasto con que se divide el índice de precios agregado de Estados Unidos que él utiliza, en lugar de emplear directamente los precios de los bienes individuales. En este caso, la expresión (2) no es directamente utilizable, ya que para los índices de grupos sólo consideraría cambios relativos entre índices, sin considerar los cambios relativos entre precios. El desarrollo de una expresión similar a (2) cuando se consideran índices de precios de grupos de gasto será tratada en el apartado 5.

2) La expresión (1) no es directamente aplicable a los índices de Laspeyres, y, en general, los índices agregados de precios suelen ser de Laspeyres, como pasa con el IPC español. No obstante, la expresión (2) es aplicable a una transformación de los IPC. A ello se dedica el siguiente apartado.

#### 4. DESARROLLO DEL MODELO PARA UN ÍNDICE DE LASPEYRES

La expresión general de un índice de Laspeyres es:

$$I_t = \frac{\sum_{i=1}^n q_{i0} P_{it}}{\sum_{i=1}^n q_{i0} P_{i0}}$$

donde el primer subíndice hace referencia al bien y el segundo al momento temporal y  $q_{i0}$  es la cantidad del bien  $i$ -ésimo consumida en el período base. De esta forma el logaritmo natural del índice  $[\ln(\sum q_{i0}p_{it}) - \ln(\sum q_{i0}p_{i0})]$  no coincide con la expresión (1). Por otro lado:

$$\begin{aligned}\Delta_{12} \ln I_t &= \ln(\sum q_{i0}p_{it}) - \ln(\sum q_{i0}p_{it-12}) \\ &= \ln \frac{\sum q_{i0}p_{it-12}(1 + \dot{p}_{it})}{\sum q_{i0}p_{it-12}} \\ &= \ln \left( 1 + \sum \frac{q_{i0}p_{it-12}}{\sum q_{i0}p_{it-12}} \dot{p}_{it} \right)\end{aligned}$$

donde  $p_{it} = p_{it-12}(1 + \dot{p}_{it})$  y  $\dot{p}_{it}$  es la tasa de crecimiento interanual del precio del bien  $i$ -ésimo. Mediante la aproximación  $\ln(1+x) \approx x$  para valores pequeños de  $x$ , se obtiene:

$$\Delta_{12} \ln I_t \approx \sum \frac{q_{i0}p_{it-12}}{\sum q_{i0}p_{it-12}} \dot{p}_{it} = \sum \delta_{it} \dot{p}_{it} \quad (3)$$

que cumple  $\sum \delta_{it} = 1$ , con  $\delta_{it} = q_{i0}p_{it-12} / (\sum q_{i0}p_{it-12})$ , aunque el sistema de ponderaciones es dinámico. De esta forma el modelo desarrollado por Johnson podría ser aplicado a esta última expresión, aunque las conclusiones serán ligeramente distintas.

Por otro lado, esta formulación puede ser útil ya que existe evidencia que los IPC son SI(2,1), es decir, requieren tanto una diferenciación estacional,  $(1-L^{12})$ , como una regular,  $(1-L)$ , para conseguir su estacionariedad<sup>1</sup>. Por tanto,  $(1-L^{12})\ln IPC$  sería integrado de primer orden. De esta forma, esta transformación de los IPC cumple los dos supuestos en que se basa el modelo desarrollado por Johnson: la integrabilidad de primer orden de los índices y la suma unitaria de las ponderaciones.

Asimismo, cabe señalar que con la expresión desarrollada no se contrastará la tendencia a la igualación de precios entre diferentes áreas geográficas, sino la tendencia a la igualación de las tasas interanuales de crecimiento.

<sup>1</sup> Por ejemplo, a nivel español, Matea (1992) obtiene que algunas componentes del IPC son SI(2,1) (el de servicios y el de bienes no elaborados) por lo que el índice agregado también lo será; Vega (1991) también halla evidencia que el IPC, así como diferentes deflatores, son I(2) por lo que la tasa de inflación sería I(1). A nivel regional Sansó y Suriñach (1995) muestran la integrabilidad de primer orden de la tasa de inflación interanual de todas las Comunidades Autónomas.

## 5. DESARROLLO DEL MODELO CUANDO SE CONSIDERAN DIFERENTES ÍNDICES DE GRUPOS DE GASTO EN LUGAR DE PRECIOS INDIVIDUALES

En este apartado se generaliza el modelo de Johnson para considerar los cambios relativos entre índices de grupos de gasto en lugar de entre precios individuales.

Supóngase que hay  $k$  grupos de gasto, cada uno con un índice de precios agregado,  $p_t^j$  ( $j=1, \dots, k$ ), de forma que:

$$p_t^j = \sum_{i=1}^{n_j} \delta_i^j p_{it}^j \quad ; \quad p_t^{j*} = \sum_{i=1}^{n_j} \phi_i^j p_{it}^{j*}$$

$$\sum_{j=1}^k n_j = n \quad ; \quad \sum_{i=1}^{n_j} \delta_i^j = \sum_{i=1}^{n_j} \phi_i^j = 1 \quad j = 1, \dots, k$$

donde  $p_{it}^j$  ( $i=1, \dots, n_j$ ) son los logaritmos de los precios domésticos de los bienes agrupados en la categoría de gasto  $j$ , y  $\delta_i^j$  son sus respectivas ponderaciones dentro del grupo  $j$ . Para el índice agregado se tendrá:

$$p_t = \sum_{j=1}^k \alpha_j p_t^j \quad ; \quad p_t^* = \sum_{j=1}^k \phi_j p_t^{j*}$$

$$\sum_{j=1}^k \delta_j = \sum_{j=1}^k \phi_j = 1$$

Definiendo los cambios relativos entre grupos de gasto como  $\rho_{jt} = p_t^j - p_t^{j*}$  se puede derivar una expresión para  $d_t$  similar a la de (2):

$$\begin{aligned} d_t &= p_t - p_t^* - e_t \\ &= \sum_{j=1}^k \delta_j p_t^j - \sum_{j=1}^k \phi_j p_t^{j*} - e_t = \dots = \\ &= \sum_{j=2}^k (\delta_j - \phi_j) \rho_{jt} + \sum_{j=1}^k \phi_j d_{jt} \end{aligned} \quad (4)$$

donde  $d_{jt} = p_{it}^j - p_{it}^{j*} - e_t$ . Desarrollando ahora una expresión para  $d_{jt}$  similar a (2) se llega a:

$$d_{jt} = \sum_{i=1}^{n_j} (\delta_i^j - \phi_i^j) \rho_{it}^j + \sum_{i=1}^{n_j} \phi_i^j d_{it}^j$$

$$\rho_{it}^j = p_{it}^j - p_{it}^{j*} \quad ; \quad d_{it}^j = p_{it}^j - p_{it}^{j*} - e_t$$

por lo que (4) quedaría como:

$$d_t = \sum_{j=2}^k (\delta_j - \phi_j) \rho_{jt} + \sum_{j=1}^k \phi_j \left( \sum_{i=2}^{n_j} (\delta_i^j - \phi_i^j) \rho_{it}^j + \sum_{i=1}^{n_j} \phi_i^j d_{it}^j \right) \quad (5)$$

De esta forma, aunque se cumpliera la PPP para cada precio individual, es decir, que todos los  $d_{it}^j$  fueran estacionarios, la no estacionariedad de  $d_t$  puede ser debida a dos tipos de factores:

1) al efecto de los cambios relativos entre los índices de grupos de gasto combinado con las diferencias de ponderaciones entre índices de grupos de gasto. Es decir, al primer sumatorio de la derecha de (5);

2) al efecto de los cambios relativos entre precios dentro de cada grupo de gasto, junto con las diferencias de ponderación entre índices de distintas áreas geográficas. Es decir, al segundo término de la derecha de la expresión (5).

De ese modo, la conclusión de Johnson que, al no hallar cointegración entre  $d_t$  y los  $\Delta_{it}$ , los cambios relativos de precios no parecen los responsables del rechazo de la hipótesis de PPP dos a dos entre Estados Unidos y Canadá, Francia, Italia, Japón, Reino Unido y República Federal Alemana, ha de ser matizada, ya que él no considera los cambios en los precios relativos dentro de cada grupo de gasto.

A la vista de los efectos antes comentados sobre la aplicación del contraste de Johnson cuando se usan índices de grupos de gasto, se pueden obtener sólo las siguientes conclusiones:

a) En caso de no rechazo de la hipótesis de no cointegración en la tercera etapa del contraste, no se pueden obtener conclusiones por lo que respecta a si son los cambios en los precios relativos los causantes de la no estacionariedad de  $d_t$ . Lo que sí puede concluirse es que la no estacionariedad no sólo puede deberse al efecto de los cambios relativos entre índices de grupos de gasto y a las distintas ponderaciones de éstos;

b) Si se rechaza la hipótesis de no cointegración en la tercera etapa, con un vector de cointegración  $\theta = (\theta_2, \dots, \theta_k)'$ , puede suceder:

b1)  $\theta_i = \delta_i - \phi_i$  ( $i=2, \dots, k$ ) por lo que:

$$d_t - \sum_{j=2}^k (\delta_j - \phi_j) \rho_{jt} + \sum_{j=1}^k \phi_j \left( \sum_{i=2}^{n_j} (\delta_i^j - \phi_i^j) \rho_{it}^j + \sum_{i=1}^{n_j} \phi_i^j d_{it}^j \right) \sim I(0) \quad (6)$$

así, adicionalmente, pueden darse dos casos:

b1a) que todos los términos de la derecha de la expresión (6) sean estacionarios, lo cual implica que la PPP se cumple para cada bien individualmente;

b1b) que algunos términos sean no estacionarios pero que haya cointegración entre los mismos. Así, la PPP individual para el precio de cada bien puede no cumplirse;

b2)  $\theta_i \neq \delta_i - \phi_i$  para algún  $i$ . Así:

$$\begin{aligned} d_t - \sum_{j=2}^k \theta_j p_{jt} &\neq d_t - \sum_{j=2}^k (\delta_j - \phi_j) p_{jt} = \\ &= \sum_{j=1}^k \phi_j \left( \sum_{i=2}^{n_j} (\delta_i^j - \phi_i^j) p_{it}^j + \sum_{i=1}^{n_i} \phi_i^j d_{it}^j \right) \sim I(1) \end{aligned} \quad (7)$$

y la no estacionariedad de  $d_t$  puede deberse, además de al efecto de los  $p_{jt}$ , al de los  $p_{it}^j$  o al incumplimiento de la PPP para algún bien (algún  $d_{it}^j$  no estacionario).

## 6. EXTENSIÓN DEL MODELO AL ANÁLISIS DE LA CONVERGENCIA ENTRE TASAS DE INFLACIÓN

A partir de las anteriores consideraciones el modelo desarrollado inicialmente por Johnson puede ser extendido al análisis de la convergencia entre tasas de inflación, medidas éstas a partir de los IPC (índices de Laspeyres). Así, debe extenderse el modelo a fin de considerar los siguientes factores:

- 1) lo apuntado sobre la aplicabilidad del modelo en índices de Laspeyres (apartado 4);
- 2) la utilización de índices de grupos de gasto en lugar de precios individuales (apartado 5);

La hipótesis de convergencia en tasas de inflación de dos economías, una vez considerado el efecto de las variaciones del tipo de cambio, implica que ambas han de tender a la igualdad. En otras palabras, se ha de cumplir que  $\pi_t = \pi_t^* + ge_t$ , donde  $\pi_t$  y  $\pi_t^*$  son las tasas de inflación doméstica y extranjera respectivamente, y  $ge_t$  es la tasa de variación del tipo de cambio. Si las tasas de inflación doméstica y extranjera están integradas, para que se cumpla la PPP relativa cabe que estén cointegradas con  $ge_t$  con vector cointegrante  $(1, -1, -1)'$  y perturbaciones con media nula. De esta forma, la hipótesis de PPP relativa en un entorno de unión monetaria o de tipos de cambio fijos ( $ge_t = 0$  para todo  $t$ ) es equivalente a la hipótesis de convergencia estocástica en tasas de inflación.

El modelo que se desarrollará permitirá determinar si el rechazo de la hipótesis de convergencia es debido a los efectos de cambios relativos entre índices de grupos de gasto o bien a otros factores. Un índice de precios de Laspeyres,  $I_t$ , puede descomponerse a fin de considerar  $k$  índices de precios de grupos de gasto,  $I_t^j$  ( $j=1, \dots, k$ ):

$$I_t = \sum_{j=1}^k \alpha_j I_t^j$$

donde:

$$I_t^j = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} q_{io}^j p_{it}^j}{\sum_{i=1}^{n_j} q_{io}^j p_{io}^j} \quad y \quad \alpha_j = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} q_{io}^j p_{io}^j}{\sum_{i=1}^{n_j} q_{io}^j p_{io}^j}$$

Derivando una expresión similar a (3), la tasa interanual de crecimiento del índice de precios agregado de un país o región,  $\pi_t$ , aproximada por la diferencia estacional del logaritmo natural del índice, puede escribirse como:

$$\pi_t \approx \sum_{j=1}^k \delta_{jt} \pi_t^j$$

$$\delta_{it} = (\alpha_j I_{t-12}^j) / \left( \sum_{j=1}^k \alpha_j I_{t-12}^j \right) \quad y \quad \pi_t^j$$

donde  $\pi_t^j$  es la tasa de crecimiento interanual del índice de precios del grupo de gasto  $j$ -ésimo. Asimismo, desarrollando una expresión similar para  $\pi_t^j$  se obtiene:

$$\pi_t^j \approx \sum_{i=1}^{n_j} \delta_{it}^j p_{it}^j$$

$$\text{donde } \delta_{it}^j = (q_{io}^j p_{it-12}^j) / \left( \sum_{i=1}^{n_j} q_{io}^j p_{it-12}^j \right).$$

Considerando ahora la hipótesis de convergencia entre tasas de inflación, tenemos que  $d_t$  tendría que ser estacionario, definido éste como  $d_t = \pi_t - \pi_t^*$ . Desarrollando esta expresión de forma similar a (4):

$$\begin{aligned} d_t &= \sum_{j=1}^k \delta_{jt} \pi_t^j - \sum_{j=1}^k \phi_{jt} \pi_t^{j*} = \dots = \\ &= \sum_{j=2}^k (\delta_{jt} - \phi_{jt}) p_{jt} + \sum_{j=1}^k \phi_{jt} d_{jt} \end{aligned} \quad (8)$$

donde  $\rho_{jt} = \pi_{jt}^j - \pi_t^j$  y  $d_{jt} = \pi_{jt}^j - \pi_{jt}^{j*}$ . Desarrollando ahora la expresión para  $d_{jt}$ :

$$\begin{aligned} d_{jt} &= \sum_{i=1}^{n_j} \delta_{it}^j \dot{p}_{it}^j - \sum_{i=1}^{n_j} \phi_{it}^j \dot{p}_{it}^{j*} = \dots = \\ &= \sum_{i=2}^{n_j} (\delta_{it}^j - \phi_{it}^j) \rho_{it}^j + \sum_{i=1}^{n_j} \phi_{it}^j d_{it}^j \end{aligned} \quad (9)$$

donde  $\rho_{it}^j = \dot{p}_{it}^j - \dot{p}_{it}^j$  y  $d_{it}^j = \dot{p}_{it}^j - \dot{p}_{it}^{j*}$ . Substituyendo (9) en (8):

$$d_t = \sum_{j=2}^k (\delta_{jt} - \phi_{jt}) \rho_{jt} + \sum_{j=1}^k \phi_{jt} \left( \sum_{i=2}^{n_j} (\delta_{it}^j - \phi_{it}^j) \rho_{it}^j + \sum_{i=1}^{n_j} \phi_{it}^j d_{it}^j \right) \quad (10)$$

De esta forma, a pesar que se cumpla la convergencia en tasas de crecimiento interanual de los precios individuales, es decir, que todos los  $d_{it}^j$  sean estacionarios, la no estacionariedad de  $d_t$  puede deberse a dos tipos de factores:

1) al efecto de los cambios relativos entre las tasas de variación interanual de los índices de grupos de gasto combinado con las diferencias de ponderaciones entre índices de grupos de gasto. Es decir, al primer sumatorio de la derecha de (10);

2) al efecto de los cambios relativos entre la evolución de los precios dentro de cada grupo de gasto, junto con las diferencias de ponderación entre índices de distintas áreas geográficas. Es decir, al segundo término de la derecha de la expresión (10).

Con el fin determinar si son los cambios relativos entre las tasas de variación interanual de los índices de grupos de gasto (combinado con las diferencias de ponderaciones entre índices de grupos de gasto) los responsables del rechazo de la hipótesis de convergencia ( $d_t$  no estacionario) se puede utilizar la misma estrategia de contraste que la sugerida por Johnson:

1ª) contrastar la integrabilidad de los  $\rho_{jt}$  ( $i=2, \dots, k$ );

2ª) comprobar que los  $\rho_{jt}$  no estacionarios no están cointegrados entre ellos;

3ª) contrastar que  $d_t$  no está cointegrado con los  $\rho_{jt}$  ( $i=2, \dots, k$ ) no estacionarios. El aceptar la hipótesis de no cointegración significa que los cambios de los índices de precios relativos y las diferentes ponderaciones NO son los responsables de la no estacionariedad de  $d_t$ . Es decir, que la fuente de no estacionariedad de  $d_t$  proviene, además de la de los  $\rho_{jt}$ , de la no estacionariedad del segundo término de la derecha de (10), o sea, los  $d_{it}^j$  y los  $\rho_{it}^j$ .

Así, se pueden obtener las siguientes conclusiones:

a) en caso de no rechazar la hipótesis de no cointegración en la tercera etapa del contraste, no se pueden obtener conclusiones por lo que respecta a si son los cambios de los precios relativos la causa de la no estacionariedad de  $d_t$ . Lo que sí puede concluirse es que la no estacionariedad no sólo se debe al efecto de los cambios relativos entre tasas de crecimiento de los índices de gasto y a las diferentes ponderaciones de éstos. Un análisis más profundo requerirá analizar si son los cambios relativos de precios dentro de cada índice de grupo de gasto los responsables de la no estacionariedad de  $d_t$ , es decir, el término entre corchetes de la derecha de (10) que incluye los términos con  $\rho_{it}^j$ .

b) si se rechaza la hipótesis de no cointegración en la tercera etapa, con un vector de cointegración  $\theta = (\theta_2, \dots, \theta_k)'$ , puede ocurrir:

b1)  $\theta_i = \delta_{it} - \phi_{it}$  ( $i=2, \dots, k$ ) por lo que:

$$d_t = \sum_{j=2}^k (\delta_{jt} - \phi_{jt}) \rho_{jt} + \sum_{j=1}^k \phi_{jt} \left( \sum_{i=2}^{n_j} (\delta_{it}^j - \phi_{it}^j) \rho_{it}^j + \sum_{i=1}^{n_j} \phi_{it}^j d_{it}^j \right) \sim I(0) \quad (11)$$

así, se pueden dar adicionalmente dos casos:

b1a) que todos los términos de la derecha de la expresión (11) sean estacionarios, lo cual implica que la convergencia se cumple para la tasa de crecimiento de cada precio individualmente;

b1b) que algunos términos sean no estacionarios pero que haya cointegración entre los mismos. De esta forma, la convergencia individual para la tasa de variación del precio de cada bien puede no cumplirse;

b2)  $\theta_i \neq \delta_{it} - \phi_{it}$  para algún  $i$ . Así:

$$\begin{aligned} d_t &= \sum_{j=2}^k \theta_j \rho_{jt} \neq d_t - \sum_{j=2}^k (\delta_{jt} - \phi_{jt}) \rho_{jt} = \\ &= \sum_{j=1}^k \phi_{jt} \left( \sum_{i=2}^{n_j} (\delta_{it}^j - \phi_{it}^j) \rho_{it}^j + \sum_{i=1}^{n_j} \phi_{it}^j d_{it}^j \right) \sim I(1) \end{aligned} \quad (12)$$

y la no estacionariedad de  $d_t$  puede ser debida, además de por el efecto de los  $\rho_{jt}$ , al efecto de los  $\rho_{it}^j$  o al incumplimiento de la convergencia para la tasa de algún bien (algún  $d_{it}^j$  no estacionario).



## 7. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha realizado una extensión del de Johnson (1991) para tratar de explicar los rechazos de la hipótesis de la paridad del poder de compra utilizando índices agregados de precios. Dicho autor introduce la hipótesis que los rechazos son causados por los cambios relativos entre precios dentro de cada índice, combinado con la utilización de diferentes ponderaciones. Para comprobar dicha hipótesis el autor diseñó un contraste.

Las aportaciones realizadas en esta comunicación son, en primer lugar, una interpretación de los resultados del contraste propuesto por el mencionado autor; en segundo lugar, una extensión para índices de Laspeyres; en tercer lugar, la utilización de los índices de grupos de gasto en que se dividen los índices de precios, en lugar de utilizar directamente los cambios relativos entre precios; finalmente, una extensión para intentar explicar los rechazos de la hipótesis de convergencia en tasas de inflación entre diferentes ámbitos geográficos.

De todos los desarrollos propuestos se desprende que el contraste de relaciones de equilibrio entre números índice de precios ponderados presenta la dificultad que un rechazo de dicha relación de equilibrio no puede interpretarse directamente como un rechazo de la hipótesis económica subyacente (paridad de poder de compra, convergencia en tasas de inflación,...). Dicho rechazo puede ser causado por la combinación de cambios internos entre los precios que constituyen los índices, unido a las diferencias de ponderación. El intento de comprobar dichos efectos es igualmente dificultosa debido al elevado número de precios que componen los índices de precios. El intento de solucionar este problema utilizando los índices de grupo de gasto en que se pueden dividir los números índice no resuelve en general dicho problema. Ello es debido a las limitadas conclusiones que se pueden extraer.

## BIBLIOGRAFÍA

- Artis, M.J. y Nachane, D. (1990): "Wages and prices in Europe: A test of the German leadership thesis". *Weltwirtschaftliches Archiv*, 126, pp. 59-76.
- Caporale G.M. y Pittis, N. (1993): "Common stochastic trends and inflation convergence in the EMS". *Weltwirtschaftliches Archiv*, 129, pp. 207-15.
- Corbae, D. y Ouliaris, S. (1988): "Cointegration and tests for Purchasing Power Parity". *Review of Economics and Statistics*, 70, pp. 508-511.
- Enders, W. (1988): "ARIMA and cointegration tests of PPP under fixed and flexible exchange rate regimes". *Review of Economics and Statistics*, 70, pp. 504-508.
- Enders, W. (1989): "Unit roots and the real exchange rate before World War I: The case of Britain and the USA". *Journal of International Money and Finance*, 8, pp. 59-73.

---

Heri, E.W. y Theurillat, M.J. (1990): "Purchasing Power Parity for de DM: a cointegration exercise". *Kredit und Kapital*, 3, 23, pp. 333-350.

Jonhson, P.A. (1991): "Aggregate price indexes, cointegration, and tests of the purchasing power parity hypothesis". *Economics Letters*, 36, pp. 305-309.

Kim, Y. (1990): "PPP in the long run: A cointegrations approach". *Journal of Money, Credit and Banking*, 22, 4.

Layton, A.P. y Stark, J.P. (1990): "Co-integration as an empirical tests of Purchasing Power Parity". *Journal of Macroeconomics*, 12, pp. 125-136.

Matea, M<sup>a</sup> de los Llanos (1992): "Contrastes de raíces unitarias para series mensuales. Una aplicación al IPC". Servicio de Estudios, Banco de España. Documento de Trabajo. 9214.

McNown, R. y Wallace, M.S. (1989): "National price levels, Purchasing Power Parity, and cointegration: A tests of four high inflation economies". *Journal of International Money abd Finance*, 8, pp. 533-545.

Phillips, P.C.B. y Ouliaris, S. (1990): "Asymptotic properties of residual based tests for cointegration". *Econometrica*, 58, pp. 165-193.

Phillips, P.C.B. y Perron, P. (1988): "Testing for a unit root in time series regression". *Biometrika*, 75, pp. 335-346.

Sansó, A. y Suriñach, J. (1995): "Convergencia a largo plazo entre las tasas de inflación de las Comunidades Autónomas". Documento de Trabajo 95R08. Departament d'Econometria, Estadística i Economia Espanyola. Universitat de Barcelona.

Vega, J.L. (1991): "Tests de raíces unitarias: aplicación a series de la economía española y al análisis de la velocidad de circulación del dinero (1964-1990)". Servicio de Estudios, Banco de España. Documento de trabajo. 9117.

## INDICE ALFABETICO DE AUTORES DEL VOLUMEN IV

|  |     |  |     |
|--|-----|--|-----|
| ALAEZ ALLER, RICARDO                     | 231 | LONGAS GARCIA, JUAN CARLOS               | 231 |
| ALBALADEJO PINA, ISABEL PILAR            | 133 | LOPEZ ARES, SUSANA                       | 261 |
| ANDUJAR RODRIGUEZ, ANTONIO SERAFIN       | 123 | LOPEZ DE VICUÑA ARCAUZ, FERNANDO         | 199 |
| ARANDA GALLEGO, JOAQUIN                  | 319 | LOPEZ MARTIN, LUIS JAVIER                | 399 |
| AREITIO BERTOLIN, ANA MARIA              | 145 | LOZANO MOSTERIN, JESUS                   | 3   |
| AREVALO QUIJADA, MARIA TERESA            | 1   | MARTIN ALVAREZ, FRANCISCO JAVIER         | 465 |
| ARQUES PEREZ, ANTONIO                    | 15  | MAUDOS VILLARROYA, JOAQUIN               | 81  |
| ARTIS ORTUÑO, MANUEL                     | 559 | MAYO RODRIGUEZ, J.L.                     | 521 |
| AYBAR ARIAS, CRISTINA                    | 425 | MIGUEL ALVAREZ, JESUS ANGEL              | 477 |
| BARRIO CASTRO, TOMAS DEL                 | 379 | MURGUI IZQUIERDO, JUAN SANTIAGO          | 425 |
| BEAMONTE CORDOBA, EDUARDO                | 331 | MURILLO VIU, JOAQUIN                     | 433 |
| BILBAO UBILLOS, JAVIER                   | 231 | PACHECO BONROSTRO, JOAQUIN ANTONIO       | 283 |
| BUENDIA MOYA, FULGENCIO                  | 311 | PALACIOS GONZALEZ, FEDERICO              | 91  |
| CALVO-FLORES SEGURA, ANTONIO             | 15  | PALMA MARTOS, LUIS                       | 101 |
| CALLEJON CESPEDES, JOSE                  | 34  | PALMA MARTOS, MARIA LUISA                | 101 |
| CAMUÑEZ RUIZ, JOSE ANTONIO               | 350 | PARRA FRUTOS, ISABEL                     | 319 |
| CANO FERNANDEZ, VICTOR J.                | 465 | PASTOR MONSALVEZ, JOSE MANUEL            | 81  |
| CRUZ RAMBAUD, SALVADOR                   | 123 | PEREZ GARCIA, JULIAN                     | 487 |
| CUENCA TADEO, JOSE LUIS                  | 361 | PEREZ HERNANDEZ, PEDRO P.                | 499 |
| DELGADO SERNA, CRISTINA R.               | 283 | PEREZ HIDALGO, MARIA DOLORES             | 350 |
| DIAZ DELFA, M <sup>te</sup> TERESA       | 133 | PEREZ RODRIGUEZ, EDUARDO                 | 445 |
| FERNANDEZ GENIZ, PATROCINIO              | 27  | PINO DIEZ, RAUL                          | 533 |
| FRANCISCO FERNANDEZ, MARIO               | 545 | QUESADA GONZALEZ, JOSE LUIS              | 219 |
| FUENTE GARCIA, DAVID DE LA               | 533 | RAMIREZ SOBRINO, JESUS N.                | 499 |
| GAMERO ROJAS, JAVIER                     | 211 | RAMOS, ANTONIO                           | 91  |
| GAMEZ MARTINEZ, MATIAS                   | 453 | REYES MOLERO, MARIA CARMEN               | 361 |
| GARCIA BLANDON, JOSEP                    | 39  | RINCON VEGA, JOSE MIGUEL                 | 297 |
| GARCIA CLAVEL, JOSE                      | 157 | RODERO FRANGANILLO, ADOLFO               | 11  |
| GARCIA GUEMES, ALFREDO                   | 169 | RODRIGUEZ AVILES, RAFAEL                 | 51  |
| GARCIA LOPERA, FRANCISCA M <sup>te</sup> | 51  | RUIZ AMAYA, CARMEN                       | 239 |
| GARCIA PEREZ DE LEMA, DOMINGO            | 15  | SANCHEZ ALVAREZ, ISIDRO                  | 261 |
| GARCIA PEREZ, JOSE                       | 123 | SANCHEZ MARTINEZ, ANTONIO                | 417 |
| GOMEZ DENIZ, EMILJO                      | 391 | SANCHEZ MONTERO, JESUS M <sup>te</sup>   | 211 |
| GOMEZ DOMINGUEZ, M <sup>te</sup> DOLORES | 27  | SANSO ROSSELLO, ANDREU                   | 559 |
| GOMEZ GARCIA, JUAN                       | 311 | SIERRA MARTINEZ, FRANCISCO JAVIER        | 509 |
| GONZALEZ CUERVO, GREGORIA MARGARITA      | 59  | SILVA PEREZ, M. C.                       | 350 |
| GONZALEZ DE LA FE, PEDRO                 | 177 | SUAREZ MORENO, CARMEN                    | 219 |
| GONZALEZ MORENO, ANGELA                  | 239 | SUAREZ RUESTRA, M <sup>te</sup> CRISTINA | 521 |
| GONZALEZ SIMON, MIGUEL                   | 249 | SUR MORA, ANA DEL                        | 379 |
| GUERRA QUINTANA, NICANOR                 | 391 | SURIACH CARALT, JORDI                    | 559 |
| HERNANDEZ LOPEZ, MONTSERRAT              | 399 | VARGAS VARGAS, MANUEL                    | 453 |
| HERRERIAS PLEGUEZUELO, RAFAEL            | 411 | VAZQUEZ CUETO, MARIA JOSE                | 27  |
| JIMENEZ ZARCO, ANA ISABEL                | 189 | VAZQUEZ POLO, FRANCISCO JOSE             | 391 |
| LAFUENTE LECHUGA, MATILDE                | 417 | VILAR FERNANDEZ, JUAN MARIA              | 545 |
| LASTRES SEGRET, JOSE ANTONIO             | 69  | ZAPATA REINA, ASUNCION                   | 1   |

