

LA PROGRAMACION LINEAL APLICADA AL ANALISIS DE COSTES EN LA EMPRESA

ANTONIO ARQUES PEREZ y

ANTONIO CALVO-FLORES SEGURA

Departamento de Métodos Cuantitativos para la Economía

Universidad de Murcia

1. INTRODUCCION

La programación lineal aplicada a la resolución de problemas de organización y financiación en la empresa es un tema que ha sido ampliamente difundido y forma parte de los planes de estudios de las facultades de Ciencias Económicas y Empresariales. Tradicionalmente, en el ámbito de la empresa, ha sido aplicada al problema de maximizar los beneficios de un proyecto económico obtenidos por la producción y venta de los artículos, fabricados éstos bajo unos márgenes impuestos por la disponibilidad de unos recursos limitados. En esta comunicación añadiremos al planteamiento clásico, mediante la utilización de variables binarias y manteniendo la linealidad, diversos tipos de costes relacionados con la producción y la política de la empresa.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El problema de optimización de una función sujeta al cumplimiento de un sistema de restricciones con desigualdades mediante la programación lineal, lo aplicamos en economía a la maximización de la función de beneficios (o a la minimización de los costes), restringida esta función al cumplimiento de unos condicionantes sobre las variables económicas como son la utilización de recursos limitados (o el cumplimiento de unos mínimos planeados). Del mismo modo, este método puede aplicarse a distintos aspectos de la realidad empresarial, como son la planificación de la producción, la administración de los recursos, la política de ventas o la gestión de los recursos financieros.

Consideremos el problema general de maximizar o minimizar una función sometida a un conjunto de restricciones:

Max $F(x)$	Min $F(x)$
$s.a$	$s.a$
$R_1(x) \leq a_1$	$R_1(x) \geq a_1$
$R_2(x) \leq a_2$	$R_2(x) \geq a_2$
.....
$R_n(x) \leq a_n$	$R_n(x) \geq a_n$
$x_i \geq 0$	$x_i \geq 0$

3. COSTES FIJOS

Nos referimos con el epígrafe genérico de costes fijos a las cantidades, positivas o negativas, que deberán ser sumadas al resto de factores contenidos en la función objetivo cuando se cumpla condición o se incumpla una limitación impuesta, independientemente del grado de cumplimiento o incumplimiento. Se trata de una cuantía fija que se sumará en su totalidad si se da cierta circunstancia o que no se sumará si se produce la otra situación alternativa. Este problema se resolverá, en definitiva, fijando para el caso "malo" el valor de una variable binaria (ya sea el cero o el uno) y de este modo sumar la penalización, o no sumar la bonificación, en la función objetivo; y dejar libre a esta variable en el caso "bueno", ya que en este último, al optimizar, ante dos valores posibles para la variable binaria se preferirá en el óptimo el que mejora la función objetivo, y así, no se sumará la penalización o sí se sumará la bonificación.

3.1. Penalizaciones

En este caso se recibe una penalización (una aportación negativa para el concepto que se desea optimizar) si no se cumple una condición; piénsese por ejemplo en una multa por parte de la Administración Pública si la producción de ciertos residuos supera un determinado nivel, o si la gerencia de la empresa considera negativo (y lo valora) el no alcanzar ciertas cotas de producción de un determinado artículo. Es decir, se incurre en una penalización, P , en la función objetivo cuando, por ejemplo, una variable o una función de variables, $g(x)$, supera un máximo establecido, b , esto es, se penaliza si $g(x) > b$.

Articulamos una variable binaria, Y , en la siguiente restricción

$$g(x) - M Y \leq b$$

donde, $Y = 0$ ó 1 , y M es un número muy grande en relación a los demás que puedan aparecer en el problema.

Y añadimos la penalización en la función objetivo

$$\text{Max } F(x) - P Y \quad \text{ó} \quad \text{Min } F(x) + P Y$$

De este modo, si $g(x)$ supera el máximo, la variable binaria Y deberá tomar obligatoriamente el valor 1, y en la función objetivo entonces se estará sumando la penalización. Si, por el contrario, $g(x)$ no supera el valor máximo, la variable binaria quedará libre para tomar cualquier valor (el cero o el uno), y ante dos soluciones alternativas al sistema de restricciones, será óptimo el que no añada penalización a la función objetivo, y por lo tanto, la variable tomará, en el óptimo, el valor cero.

De forma análoga podemos extender el planteamiento para el caso en que se recibe una penalización, P , en la función objetivo cuando una variable o una función de variables, $g(x)$, no alcanza un mínimo establecido, b , es decir, si $g(x) < b$. Para ello cambiamos la restricción añadir por:

$$g(x) + M Y \geq b$$

3.2. Bonificaciones

En este caso se recibe una bonificación (una aportación positiva para el concepto que se quiere optimizar) si se cumple una condición; es el caso por ejemplo de una subvención por parte de la Administración Pública si la producción residuos no supera cierto nivel, o si la gerencia de la empresa considera positivo (y lo valora) alcanzar ciertas cotas de producción de un determinado artículo.

Veamos, por ejemplo, el caso en que se consigue una bonificación, B , en la función objetivo cuando una variable o una función de variables, $g(x)$, alcanza o supera un mínimo establecido, b , es decir, si $g(x) \geq b$.

Incluimos una nueva restricción al sistema

$$g(x) + M Y \geq b$$

donde, $Y = 0$ ó 1 , y M es un número muy grande en relación a los demás que puedan aparecer en el problema.

Y añadimos en la función objetivo la bonificación

$$\text{Max } F(x) + B (1 - Y) \quad \text{ó} \quad \text{Min } F(x) - B (1 - Y)$$

Así, si $g(x)$ no alcanza el mínimo, la variable binaria Y deberá tomar obligatoriamente el valor 1, y entonces no se estará sumando la bonificación en la función objetivo. Si, por el contrario, $g(x)$ alcanza o supera el valor mínimo, la variable binaria queda libre para tomar el valor cero o el valor uno, y ante las dos soluciones alternativas al sistema de restricciones, la variable tomará, en el óptimo, el valor cero, para sumar así la bonificación.

Razonando de forma análoga podemos plantear obtener una bonificación, B , en la función objetivo cuando una variable o una función de variables, $g(x)$, no supera un máximo establecido, b , es decir, si $g(x) \leq b$. Ahora añadimos como una nueva restricción al problema

$$g(x) - M Y \leq b$$

4. COSTES POR TRAMOS

En la empresa, el coste de los recursos utilizados en la actividad productiva o en la comercial (los inputs), a menudo estarán sujetos a "rappels" o descuentos por volumen de pedidos, o incluso a encarecimientos por el mismo concepto, debido a las distintas fuentes de adquisición de los mismos a las que se haya de recurrir. En cualquier caso, es más que admisible una variación en los precios de coste de los inputs según la cantidad adquirida de éstos. Esto nos lleva a que los costes unitarios de los inputs utilizados en la actividad económica de la empresa, llevado a la función objetivo de minimizar costes en la forma de coeficientes de las variables que representan a dichos inputs, será distinto según el volumen de recursos adquiridos, siendo este último dato (la cantidad total adquirida) desconocido

hasta que el problema se haya solucionado. Del mismo modo aparecería en un problema de maximizar beneficios, al ser estos la diferencia entre ingresos por venta de productos y coste de los inputs utilizados. Además, todo este epígrafe puede desarrollarse y aplicarse de forma paralela al caso en que los precios de venta de los artículo vendidos por la empresa varían en función de la cantidad adquirida por los clientes.

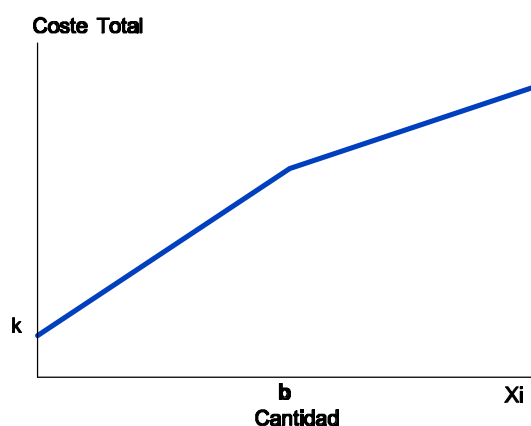
Distinguiremos dos casos particulares, que en un problema global podrían aparecer simultáneamente, incluso para una misma variable.

4.1. El caso convexo

Se trata del caso en que el coste unitario C_i es mayor al principio y se reduce al adquirir una cantidad superior a b unidades de input (variable X_i). Esto es, el segundo tramo presenta un coste unitario, C_i^2 , inferior al del primer tramo, C_i^1 . Estos costes se corresponden a las pendientes de la función de costes del gráfico 1.

La variable X_i , para la que se produce esta situación, aparece en el planteamiento del problema desglosada en dos tramos, X_i^1 y X_i^2 , que se definen como el número de unidades adquiridas del primer tramo y del segundo tramo respectivamente, de modo que $X_i = X_i^1 + X_i^2$.

Gráfico 1: Costes convexos



En la función objetivo aparecerá cada nueva variable ponderada por su coste unitario

$$\text{Min } C_1 X_1 + \dots + C_i^1 X_i^1 + C_i^2 X_i^2 + \dots$$

mientras que en las restricciones la variable X_i aparece también desglosada en la suma de las correspondientes a los dos tramos, necesitando además otras condiciones añadidas que garanticen que el comportamiento de las variables X_i^1 y X_i^2 está de acuerdo a su significado, es decir, que la variable del segundo tramo no tomará valores mayores que cero hasta que la del primer tramo tome su valor máximo y se mantenga de este modo la correcta continuidad en la adquisición del recurso a los costes correspondientes según las cantidades.

Este resultado se conseguirá añadiendo al problema las restricciones siguientes

$$X_i^1 - b Y \geq 0$$

$$X_i^2 - M Y \leq 0$$

donde Y es una variable binaria y M es una constante de un valor muy grande (esta M puede sustituirse por el límite superior de adquisición del recurso en caso de que lo haya). Teniendo en cuenta además lo ya apuntado sobre la división de la variable en dos tramos

$$X_i = X_i^1 + X_i^2$$

$$X_i^1 \leq b$$

$$X_i^1, X_i^2 \geq 0$$

De este modo, cuando la variable del primer tramo X_i^1 no llega hasta su valor máximo, b , en la primera restricción la variable binaria obligatoriamente tomará el valor cero, y por lo tanto, en la segunda restricción la variable del segundo tramo X_i^2 solamente podrá tomar el valor cero. Sólo cuando la variable del primer tramo alcance su máximo la variable binaria podrá tomar el valor uno y de ese modo permitiría que la variable del segundo tramo tomase valores mayores que cero.

Puede ocurrir que exista un coste fijo en la adquisición del recurso, de modo que si se adquiere una cantidad del mismo se produce además del coste unitario por cada unidad comprada un coste fijo k . Esta situación puede llevarse al problema incluyendo este coste como un sumando más en la función objetivo, pero con la salvedad de que no debe sumarse si no se compra ninguna cantidad de este recurso, lo que se consigue añadiendo una nueva restricción al problema.

$$\text{Min } C_l X_l + \dots + k Y_k + C_i^l X_i^l + C_i^2 X_i^2 + \dots$$

s.a

....

$$X_i^l - M Y_k \leq 0$$

....

Esta situación puede generalizarse fácilmente al caso de n tramos con diferentes costes $C_i^1, C_i^2, C_i^3, \dots, C_i^n$:

$$\text{Min } C_l X_l + \dots + C_i^l X_i^l + C_i^2 X_i^2 + C_i^3 X_i^3 + \dots + C_i^n X_i^n + \dots$$

s.a

....

$$X_i^l - b Y_l \geq 0$$

$$X_i^2 - c Y_l \leq 0$$

$$X_i^2 - c Y_2 \geq 0$$

$$X_i^3 - d Y_2 \leq 0$$

....

$$X_i^{n-1} - e Y_m \geq 0$$

$$X_i^n - M Y_m \leq 0$$

....

$$X_i^l \leq b$$

$$X_i^2 \leq c$$

$$X_i^3 \leq c$$

....

$$X_i^{n-1} \leq e$$

....

$$X_j \geq 0 \quad \forall j$$

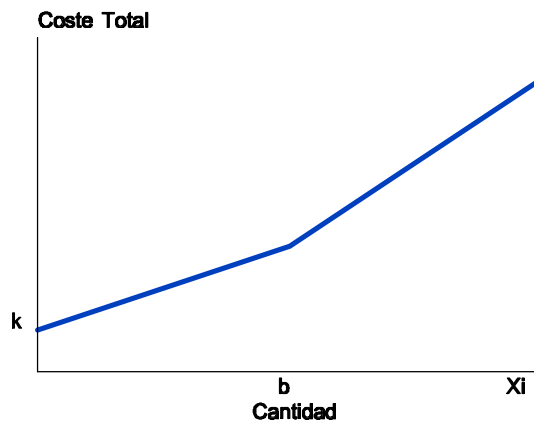
$$X_i^k \geq 0 \quad \forall k$$

4.2. El caso cóncavo

Este caso presenta la situación en la que se produce un encarecimiento de los inputs al sobrepasar éstos un determinado volumen de compras (piénsese por ejemplo en la necesidad de cambiar de proveedor). De nuevo nos encontramos con dos tramos y se

definen las mismas variables X_i^1 y X_i^2 con costes unitarios $C_i^1 < C_i^2$, que son las pendientes de la función representada en el gráfico 2.

Gráfico 2: Costes cóncavos



Se presenta aquí la misma necesidad de mantener el orden en la descomposición de la cantidad total adquirida entre las dos componentes X_i^1 y X_i^2 , pero al contrario que en el caso anterior, este orden está garantizado sin necesitar la adición de nuevas restricciones, pues al ser C_i^1 menor que C_i^2 , la variable X_i^1 se presenta en la función objetivo como mejor frente a la variable X_i^2 , y por lo tanto se agotará la variable del primer tramo antes de comenzar a utilizar la del segundo tramo, que es más cara.

5. COSTES POR TRAMOS A LA TOTALIDAD

Otra forma de presentarse un descuento (o un encarecimiento) por volumen de pedido es la que supone aplicar un nuevo coste unitario cuando la cantidad comprada de recurso supera un cierto límite, b , pero no sólo a la cantidad adicional adquirida sobre ese límite sino a la totalidad de recurso comprado.

En este caso también dividimos a la variable X_i , cantidad comprada del recurso i , como suma de dos variables, X_i^1 y X_i^2 , pero éstas nuevas variables no son las unidades adquiridas en cada tramo sino la cantidad total, que habrá que multiplicar por el coste unitario en la función objetivo. Se trata por tanto de variables alternativas, que no podrán tomar valores distintos de cero simultáneamente. Tomará valor mayor que cero aquella que

corresponda al tramo en que se sitúa la cuantía total adquirida. Por tanto, en la función objetivo, aparecerán del siguiente modo

$$\text{Min } \dots + C_i^1 X_i^1 + C_i^2 X_i^2 + \dots$$

y para conseguir que las variables por tramos se comporten de acuerdo con su significado añadiremos nuevas restricciones al planteamiento

$$(X_i^1 + X_i^2) + M Y_1 \geq b$$

$$X_i^2 - M Y_2 \leq 0$$

$$X_i^1 - b Y_1 \leq 0$$

$$Y_1 + Y_2 = 1$$

De este modo cuando se compren menos de b unidades la variable binaria Y_1 debe valer uno obligatoriamente (por la primera restricción) e Y_2 valdrá cero (por la cuarta restricción), con lo que X_i^2 será cero (por la segunda restricción), a la vez que la tercera restricción permite a X_i^1 tomar valores hasta el límite b. Por este último motivo, si se compran más de b unidades, aunque la primera restricción permite a Y_1 tomar cualquier valor (cero o uno), Y_1 con valor uno no sirve para adquirir más de b unidades (por la tercera restricción), y será necesario activar Y_2 (a costa de anular Y_1 con la cuarta restricción). Todo este desarrollo es independiente de como sean C_i^1 y C_i^2 , y podría simplificarse según el caso concreto; esto es, para $C_i^1 < C_i^2$ podría obviarse la restricción primera, y para el caso $C_i^1 > C_i^2$ no es necesaria la tercera restricción.

Este planteamiento puede ampliarse a tres tramos del siguiente modo (y de forma lógicamente extensible al caso de n tramos):

$$\text{Min } \dots C_i^1 X_i^1 + C_i^2 X_i^2 + C_i^3 X_i^3 \dots$$

$$s. a$$

$$\dots$$

$$(X_i^1 + X_i^2 + X_i^3) + M Y_1 \geq b$$

$$(X_i^2 + X_i^3) + M Y_1 + M Y_2 \geq c$$

$$X_i^1 - b Y_1 \leq 0$$

$$X_i^2 - c Y_2 \leq 0$$

$$X_i^3 - M Y_3 \leq 0$$

$$Y_1 + Y_2 + Y_3 = 1$$

$$\dots$$

siendo b el límite del primer tramo y c el del segundo tramo, no estando limitado el tercer tramo, que en caso de estarlo supondría sustituir la M grande por ese límite.

6. COSTES DISCRETOS

Del mismo modo, podemos considerar la situación en la que sólo se ofrecen dos posibles lotes o cantidades a comprar, con costes totales diferentes, es decir puede adquirirse una cantidad A a un coste C_A ó una cantidad B a un coste C_B .

Para resolver este caso es necesario definir una variable para recoger la cantidad comprada, que sólo toma un número finito de valores.

$$X_i = A Y_A + B Y_B$$

siendo A y B los dos casos posibles y siendo Y_A e Y_B variables binarias.

Llevaremos a la función objetivo los dos costes totales como dos costes fijos asociados a situaciones distintas:

$$\text{Min } \dots C_A Y_A + C_B Y_B \dots$$

e incluiremos la restricción que obliga a elegir sólo uno de los casos posibles

$$Y_A + Y_B = 1$$

Este también es un caso fácilmente extensible a situaciones con más de dos lotes posibles, sólo con añadir nuevos sumandos para los nuevos lotes.

7. CONCLUSIONES

Con la utilización de variables binarias en los planteamientos de los problemas económicos podemos incluir en ellos costes asociados al cumplimiento o no de una condición. Con ello no sólo se completa en el planteamiento del problema el marco en el que la empresa desarrolla su actividad, sino que se ofrece la posibilidad, con la aplicación del análisis de sensibilidad a estas variables, de obtener una información muy útil para evaluar las distintas políticas de la empresa.