

TÍTULO: PROBLEMÁTICA DE LA “NO-DUALIDAD” EN EL ESQUEMA INFINITO DE LEONTIEF CERRADO.

AUTORES: Quiñoá López, José Luis y Porto Vila, Rosalía.

INSTITUCIÓN: Departamento de Econometría y Métodos Cuantitativos.
Facultad de CC. Económicas y Empresariales.
Universidad de Santiago.

BLOQUE TEMÁTICO: Metodología y análisis teóricos. (Métodos matemáticos aplicados a la Economía).

RESUMEN

En este trabajo se generalizan ciertos resultados clásicos de la Teoría Económica del caso finito al infinito numerable. Se define el esquema infinito de Leontief cerrado y se demuestra que mientras ciertos resultados relevantes son trasladables al infinito, otros no lo son. Así, se demuestra que la matriz tecnológica admite autovalor máximo igual a 1, por lo que existe un vector de cantidades no nulo. Sin embargo, ponemos en evidencia la existencia de posibles matrices tecnológicas para las que no existe vector de precios distinto del $(0,0,\dots,0,\dots)$.

TERMINOLOGÍA, NOTACIONES Y RESULTADOS PRELIMINARES

Sea l_∞ el conjunto de las sucesiones de elementos de K ($K = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C}),

$X = (x_1, \dots, x_n, \dots)$ tales que $\sup |x_i| < +\infty$.

Con la norma $\|X\| = \sup_i |x_i|$, l_∞ es un espacio de Banach.

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz infinita con coeficientes en K ; $i \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}$; i índice de la fila, j índice de la columna.

Denotamos por (l_∞, l_∞) el conjunto de las matrices A que transforman un elemento de l_∞ en uno de l_∞ :

Entonces: (Maddox, teorema 2-6, p. 10) $A \in (l_\infty, l_\infty)$ si y sólo si $\sup_i \sum_j |a_{ij}| < +\infty$.

$$\begin{aligned} \forall X = (x_i) \in l_\infty, \\ \left\{ \begin{array}{l} y_j = \sum_k a_{jk} x_k \text{ existe} \\ Y = (y_j) \in l_\infty \end{array} \right. \end{aligned}$$

Con las operaciones habituales de suma y producto escalar, (l_∞, l_∞) es un espacio vectorial

sobre K ; por otra parte, el producto está definido, es asociativo y admite la matriz infinita identidad I como elemento neutro.

Se demuestra que (l_∞, l_∞) es un espacio de Banach con la norma:

$$\|A\| = \sup_i \sum_j |a_{ij}|$$

y que $|A \cdot B| \leq |A| \cdot |B|$ y luego (l_∞, l_∞) es un álgebra de Banach con unidad (Ref. 8).

Por otra parte, para todos $A \in (l_\infty, l_\infty)$ y $X \in l_\infty$ se tiene $|AX| \leq |A| |X|$ (ref. 8) (el símbolo $\|\cdot\|$ tomado en los espacios correspondientes).

Si $A \in (l_\infty, l_\infty)$, A es pues un operador lineal continuo de l_∞ en l_∞ .

Un número complejo λ es un valor regular de A si $\lambda I - A$ tiene inversa en (l_∞, l_∞) . Los números complejos λ que no son valores regulares de A se denominan valores espectrales y el conjunto de estos valores es el espectro de A , $S_p(A)$.

Si $\lambda \in \mathbb{C}$ es tal que el núcleo de $\lambda I - A$ no se reduce a cero, λ es un valor espectral de A y tales valores espectrales se llaman valores propios de A ; en ese caso, todo vector $X \in l_\infty$ no nulo en el núcleo de $\lambda I - A$ se llama vector propio asociado al valor propio λ .

Para λ valor propio, cero y el conjunto de vectores propios asociados forman un subespacio vectorial cerrado de l_∞ : el subespacio propio de A asociado al valor propio λ . Si en particular $\lambda \in \mathbb{R}$, hablaremos de valor propio real y subespacio propio real.

Sea E un espacio métrico completo, una aplicación $\mathbf{j} : E \rightarrow E$ se dice que es contractiva en E si $\exists \zeta \in \mathbb{R}$, $0 \leq \zeta < 1$ tal que $\forall X \in E$ y $\forall Y \in E$; se tiene $d(\mathbf{j}(X), \mathbf{j}(Y)) \leq \zeta d(X, Y)$.

Se dice que X^* es punto fijo de \mathbf{j} si $\mathbf{j}(X^*) = X^*$.

El siguiente resultado es bien conocido:

En un espacio métrico completo E toda aplicación contractiva \mathbf{j} admite un punto fijo único X^* . Además, $\forall X_0 \in E$, la sucesión $X_0, X_1 = \mathbf{j}(X_0), \dots, X_n = \mathbf{j}(X_{n-1}), \dots$ converge a X^* .

INVERSIBILIDAD EN (l_∞, l_∞)

TEOREMA 1

Sea $B \in (l_\infty, l_\infty)$ para que B sea inversible en (l_∞, l_∞) es necesario y suficiente que exista $A \in (l_\infty, l_\infty)$, A inversible y tal que $\|I - A^{-1}B\| < 1$.

Además, sea: $\Phi : (l_\infty, l_\infty) \rightarrow (l_\infty, l_\infty)$

definida por: $\Phi(X) = A^{-1} + X - A^{-1}BX$

entonces $\forall X_0 \in (l_\infty, l_\infty)$, la sucesión:

$$X_0, X_1 = \phi(X_0), \dots, X_n = \phi(X_{n-1}), \dots$$

converge a B^{-1} . Demostración: (Ref. 8).

Este teorema nos será de gran utilidad para generalizar al caso infinito (cuando ello sea posible) resultados bien conocidos relativos a matrices cuadradas no negativas. Por otra parte, nos permitirá estudiar lo que llamaremos “Esquema infinito de Leontief cerrado”. En el estudio del sistema de Leontief abierto, la condición suficiente del teorema nos lleva a postulados excesivamente restrictivos del punto de vista económico (Ref. 9). A continuación se demuestra un resultado que nos permitirá estudiar el sistema abierto en condiciones muchísimo menos restrictivas.

TEOREMA 2

Para que $A \in (l_\infty, l_\infty)$ sea inversible en (l_∞, l_∞) , es necesario y suficiente que existan B inversible en (l_∞, l_∞) y $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \geq 1$ tales que $-(I - B^{-1}A)^{n_0} < I$.

DEFINICIÓN

Sea $(a_{ij}) = A \in (l_\infty, l_\infty)$, diremos que A es de diagonal dominante si:

- a) $\exists \epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, tal que $\inf_i |a_{ii}| = \epsilon > 0$.
- b) $\exists \zeta \in \mathbb{R}$, $0 \leq \zeta < 1$, tal que $\forall i, \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \leq \zeta |a_{ii}|$.

DEFINICIÓN

Sea $A \in (l_\infty, l_\infty)$. Diremos que A es de Leontief si:

$$\begin{cases} a_{ii} \geq 0 \forall i \\ a_{ij} \leq 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

TEOREMA 3

Si $A \in (l_\infty, l_\infty)$ es de diagonal dominante, A es inversible en (l_∞, l_∞) . Si además A es de Leontief, entonces $A^{-1} \geq 0$ y los elementos diagonales β_{ii} de A^{-1} son tales que $\beta_{ii} \geq \frac{1}{a_{ii}}$.

AUTOVALORES DE UNA MATRIZ INFINITA NO NEGATIVA

A continuación se generalizan al caso infinito ciertos resultados bien conocidos para las matrices cuadradas no negativas.

TEOREMA 4

Si $A \in (l_\infty, l_\infty)$ y $A \geq 0$, entonces si λ es autovalor de A , se tiene $|\lambda| \leq \|A\|$.

TEOREMA 5

a) Sea $A \in (l_\infty, l_\infty)$, $A \geq 0$ y tal que:

$$\forall i, \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = a = _A_$$

Entonces a es autovalor real máximo de A que admite $\bar{1} = (1, 1, \dots, 1, \dots)$ como autovector.

b) Sea $A \in (l_\infty, l_\infty)$, $A \geq 0$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| > |A|$. Entonces, $(\lambda I - A)$ es inversible,

$(|\lambda| I - A)^{-1} \geq 0$ y, además, si ponemos $\beta_{ij} = (|\lambda| I - A)^{-1}$, β_{ii} es tal que $b_{ii} \geq \frac{1}{|I|}$.

En el caso de una matriz cuadrada finita A , es bien conocido que $\det(A) = \det({}^t A)$ y luego, dado que los valores propios son las raíces de la ecuación característica:

$$\det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - {}^t A) = 0$$

es claro que los autovalores de A son los mismos que los de ${}^t A$ y, en particular, A y ${}^t A$ tienen el mismo autovalor máximo.

Para matrices infinitas la propiedad anterior no es cierta, como muestra el siguiente contraejemplo.

Sea:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & - & - \\ 0 & 1 & 1 & 0 & - & - \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & - \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \end{pmatrix}$$

$\forall i$ se tiene que

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = 2$$

y luego (teorema 5), $\lambda = 2$ es autovalor máximo de A que admite $\bar{1} = (1, 1, \dots, 1, \dots)$ como autovector asociado.

La traspuesta de A es:

$${}^t A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

y $\lambda = 2$ no es autovalor de ${}^t A$, pues, si lo fuera, tendríamos $\exists x \in l_\infty, x \neq 0$ y ${}^t A x = 2x$; es decir:

$$x_1 = 2x_1 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$x_1 + x_2 = 2x_2 \Rightarrow x_2 = 0$$

$$x_2 + x_3 = 2x_3 \Rightarrow x_3 = 0$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \text{etc.}$$

de donde se deduce $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \dots = 0$.

Ello significa que es preciso tener especial cuidado cuando se intenta aplicar a matrices infinitas resultados conocidos (por clásicos que éstos sean) relativos a matrices finitas.

Además, $\lambda = 1$ también es valor propio de A que admite como vector propio $(1, 0, \dots, 0, \dots)$, como se comprueba inmediatamente y, sin embargo, $\lambda = 1$ tampoco es valor propio de ${}^t A$, a pesar de que:

$${}^t A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

no es inversible.

Para $\lambda = 2$ consideremos la matriz:

$$2I - {}^t A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & -1 & 0 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

mediante cálculos sencillos se comprueba que la matriz:

$$T = (t_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & - & - \\ 1 & 1 & 0 & 0 & - \\ 1 & 1 & 1 & 0 & - \\ - & - & - & - & - \end{pmatrix}$$

es tal que $T(2I - {}^tA) = (2I - {}^tA)T = I$, lo que ocurre es que, evidentemente:

$$\sup_i \sum_j |t_{ij}| = +\infty$$

por lo que $T \notin (l_\infty, l_\infty)$.

La situación para $\lambda = 1$ es bien distinta, pues resulta evidente que ${}^tA - I$, aún no siendo inversible, si es inversible por la izquierda, admitiendo por inversa por la izquierda la matriz

$$T' = (t'_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

como se comprueba inmediatamente.

Como conclusión, $\lambda = 1$ y $\lambda = 2$ son valores propios de A y son valores espectrales de tA , pero no valores propios de esta matriz. De todos modos, se tiene el resultado general siguiente:

TEOREMA 6

Si $A \in (l_\infty, l_\infty)$ es tal que ${}^tA \in (l_\infty, l_\infty)$, entonces A y tA tienen los mismos valores espectrales.

TEOREMA 7

Toda matriz A no negativa admite un valor spectral máximo real \bar{a} , no negativo. \bar{a} es el extremo inferior del conjunto:

$$T(A) = \{a \in \mathbb{R} / (|\lambda| |I - A|^{-1} \geq 0 \text{ para todo } \lambda, |\lambda| \in (a, +\infty))\}$$

Para toda sucesión de números reales (λ_n) tal que $\lambda_n > \lambda$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda$, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (I_n - A)^{-1} = +\infty.$$

En el caso finito todo valor spectral es valor propio, por consiguiente se obtiene para matrices positivas, el valor propio real máximo (Perron-Frobenius) como el extremo inferior del conjunto $T(A)$ definido en el teorema 7.

Para matrices de (l_∞, l_∞) hemos obtenido que el valor espectral máximo (en módulo) es un número real no negativo, pero éste no es necesariamente valor propio. Se plantea entonces el problema: ¿cómo caracterizar las matrices infinitas no negativas para las que el valor espectral máximo (que es real) sea valor propio?

TABLA DE TRANSACCIONES

Sea N el conjunto de los números naturales. Identificaremos con N el conjunto de industrias que intervienen en el sistema. La tabla input-output correspondiente refleja los intercambios entre las distintas industrias:

Si q_{ij} es la cantidad física de la mercancía i que va a parar a la industria j y p_i es el precio correspondiente, la tabla de transacciones puede representarse:

	OUTPUTS				
INPUTS	Industria 1 (sector final)	Industria 2	...	Industria j	...
Mercancía 1 (sector final)	$q_{11} p_1$	$q_{12} p_1$		$q_{1j} p_1$...
Mercancía 2					
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	$\dots \vdots \dots$...
Mercancía i	$q_{i1} p_1$	$q_{i2} p_1$		$q_{ij} p_1$	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	

En cada fila i aparecen cantidades q_{ij} homogéneas, pues se refieren a la misma mercancía mientras que, en la columna j , aparecen cantidades q_{ij} referidas a mercancías distintas. En todo caso, fijado un vector de precios $p = (p_1, p_2, \dots, p_n, \dots) \in l_\infty$ y $p \geq 0$, cada $p_i q_{ij}$ representa el valor de lo utilizado por la industria j de la industria i .

“Dado el carácter puramente contable de la tabla, la suma de los elementos de cada fila será igual a la suma de los de la columna correspondiente” (Pasinetti, p. 68), es decir:

$$(*_1): \sum_{j=1}^{\infty} p_i q_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} p_k q_{ki}$$

PLANTEAMIENTO EN TÉRMINOS DE SISTEMAS DE ECUACIONES

Supongamos que se verifica $(*_1)$ y pongamos

$$Q_i = \sum_{j=1}^{\infty} q_{ij}$$

la cantidad total producida (en un período de tiempo) de la mercancía i ; se tienen los dos sistemas de identidades:

$$S - I - 1: \begin{cases} q_{11}p_1 + q_{12}p_2 + \dots + q_{1n}p_n + \dots = Q_1p_1 \\ \vdots \\ q_{i1}p_1 + q_{i2}p_2 + \dots + q_{in}p_n + \dots = Q_ip_i \\ \vdots \\ \dots \\ \vdots \end{cases}$$

o bien, teniendo en cuenta (*):

$$S - I - 2: \begin{cases} q_{11}p_1 + q_{21}p_2 + \dots + q_{i1}p_i + \dots = Q_1p_1 \\ \vdots \\ q_{1j}p_1 + q_{2j}p_2 + \dots + q_{ij}p_i + \dots = Q_jp_j \\ \vdots \\ \dots \\ \vdots \end{cases}$$

Pongamos $a_{ij} = \frac{q_{ij}}{Q_j}$; así, los a_{ij} aparecen como las cantidades físicas de la mercancía i

que es necesaria para la obtención de una unidad de mercancía j .

Sustituyendo y simplificando convenientemente se tienen los sistemas:

$$S - I - 3: \begin{cases} a_{11}Q_1 + a_{12}Q_2 + \dots + a_{1n}Q_n + \dots = Q_1 \\ a_{21}Q_1 + a_{22}Q_2 + \dots + a_{2n}Q_n + \dots = Q_2 \\ \vdots \\ a_{n1}Q_1 + a_{n2}Q_2 + \dots + a_{nn}Q_n + \dots = Q_n \\ \vdots \\ \dots \\ \vdots \end{cases}$$

y

$$S - 1 - 4: \begin{cases} a_{11} p_1 + a_{21} p_2 + \dots = p_1 \\ a_{21} p_1 + a_{22} p_2 + \dots = p_2 \\ \vdots \\ a_{1n} p_1 + a_{2n} p_2 + \dots = p_n \\ \vdots \end{cases}$$

los a_{ij} son lo que se denomina coeficientes de producción. Si para una unidad determinada de tiempo los a_{ij} permanecen constantes, diremos que el proceso de producción tiene rendimientos constantes a escala.

EL ESQUEMA DE LEONTIEF CERRADO

Los sistemas (S-1-3) y (S-1-4) pueden escribirse:

$$S - 1 - 5: \begin{pmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} & \dots \\ -a_{21} & 1 - a_{22} & \dots & -a_{2n} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

o más simplemente $(I - A) Q = 0$; o el correspondiente a los precios, (S-1-4):

$$S - 1 - 6: (I - {}^t A) P = 0$$

en donde ${}^t A$ denota la traspuesta de A y en donde, por propio significado económico, los $a_{ij} \geq 0$ vienen dados ("tecnología del sistema"), Q_i (incógnita) representa la mercancía i y p_j (incógnita) representa el precio de la mercancía j .

Supongamos que se verifica la hipótesis de rendimientos a escala constante y que el sector final recibe un tratamiento igual que una industria cualquiera, es decir, la primera fila se considera representativa de los outputs entregados a las otras industrias, mientras que la primera columna representa los inputs recibidos. Se supone también que no hay inversión neta; sólo se pretende reemplazar los medios de producción consumidos en un intervalo de tiempo del proceso productivo.

A un sistema de este tipo es a lo que se llama "Esquema de Leontief cerrado"

SOLUCIÓN DEL SISTEMA DE LEONTIEF CERRADO

Obviamente, los sistemas:

$$(S - 1 - 5) : (I - A) Q = 0$$

$$(S - 1 - 6) : (I - {}^t A) P = 0$$

admiten como soluciones las triviales $Q = 0$ y $P = 0$, respectivamente, pero dichas soluciones non

tienen significado económico. Es preciso, pues, investigar la existencia de soluciones positivas distintas de la trivial.

TEOREMA 8

Si el sistema es tal que el vector $Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n, \dots)$ definido en $I - 1 - 1$, verifica:

$$\begin{cases} a) \exists e \in \mathfrak{R}, e > 0 \text{ tal que } \inf_i Q_i = e \\ b) \sup_i Q_i = M < +\infty \end{cases}$$

Entonces la matriz

$$A = (a_{ij}) = \left(\frac{q_{ij}}{Q_j} \right)$$

admite $\lambda = 1$ como autovalor máximo.

BIBLIOGRAFÍA

- 1) BOURBAKI (1967): *Théories Spectrales*, cap. 1: “Algèbres Normées”. París: Hermann.
- 2) DEBREU, G.; HERSTEIN, I.N. (1953): “Non Negative Square Matrices”, *Econometrica*, 21, pp. 597-607.
- 3) GANTMACHER (1966): *Théorie des Matrices*, tomo 2. París: Dunod.
- 4) LEONTIEF, V. (1951): *The Structure of American Economy 1919-1929*. Nueva York: Oxford University Press.
- 5) MADDOX, J.J. (1980): “Infinite Matrices of Operators”, *Lectures Notes in Mathematics*, 786. Springer Verlag.
- 6) MCKENZIE, L. (1959): “Matrices with Dominant Diagonals and Economic Theory”, en Arrow, Karlin, Suppes [ed.]: *Mathematical Methods in the Social Sciences*. Stanford University Press.
- 7) PASINETTI, L. (1983): *Lecciones de Teoría de la Producción* Fondo de Cultura Económica.
- 8) QUIÑOÁ, J.L. (1983): *Inversibilidad en Álgebras de Banach de Matrices Infinitas y Aplicación a los Sistemas de Ecuaciones de Orden Infinito* Zaragoza. [Tesis Doctoral].
- 9) QUIÑOÁ, J.L. (1992): “Sur un Type de Matrice Infinie de Diagonale Dominante dans la Théorie Économique”, *European Meeting of the Econometric Society* Bruselas.
- 10) SCHAEFER, H.H. (1975): *Espacios Vectoriales Topológicos*. Teide.