

NUEVOS ARGUMENTOS A FAVOR DEL MODELO PROBABILISTICO DEL P.E.R.T

Rafael Herrerías Pleguezuelo

Eduardo Pérez Rodríguez

Universidad de Granada

0.- RESUMEN.-

En el tratamiento teórico de los flujos de caja de un proyecto de inversión se ha venido usando, de forma satisfactoria para los expertos, el modelo conocido como beta P.E.R.T.. Sin embargo, por parte de los estadísticos teóricos ha recibido un aluvión de críticas en la década de los ochenta, y aún hoy sigue recibéndolas.

En esta comunicación se pone de manifiesto una nueva belleza en relación con la curtosis del modelo usado en el P.E.R.T. clásico, aún inédita en la literatura.

Palabras Clave: distribución beta, método P.E.R.T.

1.- INTRODUCCIÓN.-

En un reciente trabajo de Palacios y Ramos (1995) se justifica el buen funcionamiento del modelo probabilístico del P.E.R.T. , en función de la compensación de errores que se produce si el experto, como es habitual, proporciona para cada actividad del proyecto, o para el flujo de caja neto de cada período de una inversión, estimaciones modales que unas veces están por encima y otras por debajo del centro del intervalo de definición de la variable. A pesar de ello, es interesante comprobar que dicho modelo posee características que le hacen adecuado en cada etapa o período por separado, aunque en los años 80 tuviera un aluvión de críticas a partir de la pregunta de Sasieni (1986) a la comunidad científica sobre los fundamentos de tal modelo probabilístico, lo que dio pie a una serie de trabajos sobre el tema (Gallagher (1987), Farnum y Stanton (1987), etc), poniendo nuevamente actualidad al método

P.E.R.T.

El objetivo principal de este trabajo es hacer patentes algunas propiedades del modelo probabilístico del P.E.R.T. que son, a nuestro entender, responsables de su buen comportamiento. En particular, sus propiedades en relación con la asimetría y curtosis, que han sido menos tratadas que otros aspectos y propiedades del modelo en la literatura especializada.

2.- LA DISTRIBUCIÓN BETA DE PRIMER TIPO ($p>1$, $q>1$).-

La distribución beta de parámetros $p>1$ y $q>1$, definida en el intervalo (a,b) , responde a la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \frac{1}{(b-a)^{p+q-1} \mathbf{b}(p,q)} (x-a)^{p-1} (b-x)^{q-1} \quad \text{si } a < x < b$$

y sus principales características estocásticas son:

$$(\text{moda}) \quad m = \frac{p-1}{p+q-2}b + \frac{q-1}{p+q-2}a$$

$$(\text{media}) \quad \mathbf{m} = \frac{p}{p+q}b + \frac{q}{p+q}a$$

$$(\text{varianza}) \quad \mathbf{s}^2 = \frac{pq(b-a)^2}{(p+q+1)(p+q)^2}$$

Obsérvese que la moda de la distribución beta $B(a,b,p,q)$ coincide con la media de la distribución beta $B(a,b,p-1,q-1)$. Este hecho lo aprovecharon Farnum y Stanton (1987) para diseñar un refinamiento de la fórmula utilizada en el P.E.R.T. para el cálculo de la media.

Utilizando como nuevo parámetro

$K = p+q-2$ se obtienen de (2.2) los parámetros p y q de la distribución beta en función de K y de las tres estimaciones periciales: optimista, pesimista y más probable, esto es:

$$p = 1 + K \frac{m-a}{b-a}$$

$$q = 1 + K \frac{b-m}{b-a}$$

y sustituyendo (2.6) en (2.3), resulta la siguiente expresión de la media:

$$m = \frac{a + Km + b}{K + 2}$$

De forma similar (véase Herrerías (1995)) se obtiene que

$$s^2 = \frac{(m-a)(b-m)}{K+3}$$

Nótese la consecuencia siguiente, que se obtiene de (2.6):

$$p > q \text{ sii } m > \frac{b+a}{2} = c \quad \text{y} \quad p < q \text{ sii } m < \frac{b+a}{2} = c$$

siendo c el centro del intervalo (a,b).

El parámetro K, que juega en (2.7) el papel de peso o ponderación del valor estimado como más probable, puede representar la confiabilidad que se tenga en dicha estimación. Para este uso, es un inconveniente el que no esté acotado, por lo que puede resultar más práctico utilizar, en su lugar, el parámetro $\alpha = K / (K + 2)$, que obviamente está en el intervalo (0,1), en la forma señalada en Pérez Rodríguez (1995). De forma natural, de (2.7) se obtiene que:

$\lim_{K \rightarrow 0} m = c$ $\lim_{K \rightarrow +\infty} m = m$ indicando que cuando la confianza en el valor estimado modal es infinita, la media de la duración de la tarea será el valor más probable suministrado por el experto, mientras que si no se tiene ninguna confianza en el valor estimado modal, la duración media de la tarea será el centro del intervalo. Análogamente al tomar límites cuando $K \rightarrow 0$, y cuando $K \rightarrow +\infty$, (2.8) se convierte en la varianza de la distribución uniforme en el intervalo (a,b), y de la distribución de Dirac en m, respectivamente.

Para obtener los coeficientes de asimetría y curtosis de la distribución dada por (2.1) es conveniente estandarizar el recorrido de la variable x del intervalo (a,b) al intervalo (0,1) de la variable t, cuestión que se resuelve fácilmente mediante el cambio de variable

$$t = \frac{x-a}{b-a}$$

con lo que la función de densidad pasa a ser:

$$f(t) = \frac{1}{b(p,q)} t^{p-1} (1-t)^{q-1} \text{ si } 0 < t < 1$$

Los momentos no centrales de esta distribución son:

$$\mathbf{a}_n = E[t^n] = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p+q+n)} \frac{\Gamma(p+n)}{\Gamma(p)} \quad n = 1, 2, \dots$$

(Dumas de Raully (1966)) y entre ellos se da la siguiente relación de recurrencia:

$$\mathbf{a}_n = \frac{p+n-1}{p+q+n-1} \mathbf{a}_{n-1} \quad n = 1, 2, \dots$$

Como:

$$\mathbf{m}_3 = E[(t - \mathbf{a}_1)^3] = \mathbf{a}_3 - 3\mathbf{a}_2\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_1^2 = \mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_2\mathbf{a}_1 - 2(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1^2)\mathbf{a}_1$$

utilizando las expresiones (2.13) y (2.14) se obtiene

$$\mathbf{m}_3 = \frac{2pq(q-p)}{(p+q)^3(p+q+1)(p+q+2)}$$

con lo que el coeficiente de asimetría será:

$$\mathbf{g}_1 = \frac{\mathbf{m}_3}{\mathbf{m}_2^{3/2}} = \frac{2(q-p)\sqrt{p+q+1}}{\sqrt{pq}(p+q+2)}$$

(Canavos (1987)). Puesto que p y q son positivos, por ser mayores que 1, el signo de la asimetría viene dado por el de la diferencia q-p. Obsérvese que (2.16) es invariante frente a cambios de origen y escala como el dado por (2.11), por lo que dicho coeficiente se puede utilizar tanto para la distribución (2.12) como para la (2.1).

Por lo tanto, y teniendo en cuenta la consecuencia (2.9), se obtiene que la distribución presenta asimetría positiva, o negativa, si la moda está a la izquierda, o a la derecha, del punto medio. Al mismo resultado se llega utilizando el coeficiente de asimetría de Pearson, que tras sustituir \mathbf{m} , m y \mathbf{S} , por (2.2), (2.3) y (2.4), adopta la siguiente expresión:

$$A = \frac{\mathbf{m} - m}{\mathbf{S}} = \frac{(q-p)\sqrt{p+q+1}}{\sqrt{pq}(p+q-2)}$$

Análogamente, y usando las expresiones (2.13) y (2.14), se tiene para el momento central de cuarto orden:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_4 = E[(t - \mathbf{a}_1)^4] &= \mathbf{a}_4 - 4\mathbf{a}_3\mathbf{a}_1 + 6\mathbf{a}_2\mathbf{a}_1^2 - 3\mathbf{a}_1^4 = \mathbf{a}_4 - \mathbf{a}_3\mathbf{a}_1 - 3(\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_2\mathbf{a}_1)\mathbf{a}_1 + 3(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1^2)\mathbf{a}_1^2 = \\ &= \frac{3pq[pq(p+q-2) + 2(p^2 + q^2)]}{(p+q)^4(p+q+1)(p+q+2)(p+q+3)} \end{aligned}$$

con lo que el coeficiente de curtosis será:

$$g_2 = \frac{m_4}{m_2^2} - 3 = 6 \frac{p(p+1)(p-2q) + q(q+1)(q-2p)}{pq(p+q+2)(p+q+3)}$$

(Canavos (1987)). Nótese que (2.19) es invariante frente a un cambio de variable tal como el de la expresión (2.11), por lo que dicho coeficiente es utilizable tanto para la distribución (2.12) como para la (2.1).

3.- EL MODELO PROBABILISTICO DEL P.E.R.T.-

Al ser imposible la determinación de a, b, p y q con la información procedente de las tres estimaciones periciales a, b y m se recurre a la imposición de una hipótesis adicional sobre el recorrido o rango finito de la variable, y es que este sea seis desviaciones típicas, es decir

$$Rg(X) = 6s = b - a \text{ de donde } s = \frac{b - a}{6}$$

(Véase Yu (1974)).

Llevada esta hipótesis a (2.4), resulta la ecuación:

$$\frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)} = \frac{1}{36}$$

que junto con (2.2) constituyen un sistema de dos ecuaciones en las incógnitas p y q. Este sistema no es cómodo de resolver pues conduce a una ecuación cúbica molesta (Romero (1991), y por ello, ignorando la ecuación (2.2), se consideran las siguientes soluciones de (3.2):

$$S1: \quad p = 3 + \sqrt{2} \quad q = 3 - \sqrt{2}$$

y

$$S2: \quad p = 3 - \sqrt{2} \quad q = 3 + \sqrt{2}$$

(Véase Kauffman y Desbazeille(1965)).

Otra forma de llegar a las soluciones (3.3) es utilizar las relaciones simplificadoras (Suárez (1980) siguientes:

$$p + q = 6$$

$$\frac{pq}{p+q+1} = 1$$

que han sido fuertemente criticadas (Thomas (1968)) por carecer de razones teóricas

convincientes y estar sustentadas en la facilidad de cálculo que producen en los dos primeros momentos del modelo probabilístico del P.E.R.T.

Para los valores (3.3) de los parámetros se tienen, al sustituir en (2.3) y (2.4), las expresiones típicas del P.E.R.T.:

$$m = \frac{a + 4m + b}{6} \quad s^2 = \frac{(b - a)^2}{36}.$$

La super especificación del modelo probabilístico del P.E.R.T. que se emplea en cada una de las tareas parciales, ha dado lugar a multitud de críticas, y sombras, por las rigideces que conlleva. Entre ellas:

- a) Siendo la estimación más probable tan costosa de obtener, llama la atención que no se use para el cálculo de la varianza; en la correspondiente fórmula de (3.7) no aparece m. (Se ignora la más comprometida de las tres estimaciones periciales.)
- b) Difícilmente el valor de m estimado por el experto, coincide con el dado en (2.2) para los valores de p y q señalados en (3.3); esto es , el suministrado pericialmente no será igual a:

$$\frac{(2 + \sqrt{2})b + (2 - \sqrt{2})a}{4} = c + \frac{\sqrt{2}}{4}(b - a) \text{ si } m > c$$

$$\frac{(2 - \sqrt{2})b + (2 + \sqrt{2})a}{4} = c - \frac{\sqrt{2}}{4}(b - a) \text{ si } m < c$$

Es decir, no es ya que se ignore, es que no se respeta la estimación pericial de m, pues se aplica un modelo cuya moda no coincide con esa estimación.

- c) La fórmula de la media que aparece en (3.7) es correcta siempre que m sea la moda de la distribución, y en virtud del punto anterior , es sabido que se va a usar con otra moda distinta. Resulta chocante que a pesar de ello se asigne una ponderación, relativamente, alta a la moda pericial.

Dicho todo esto, parece que el modelo P.E.R.T. no tiene ninguna virtud, aparte de la sencillez de las expresiones (3.7), lo cual no es del todo cierto. El modelo ha funcionado relativamente bien en diversos campos y ello, creemos que se debe a sus buenas propiedades respecto a la asimetría y a la curtosis, que hacen que este modelo sea el más parecido a una

distribución normal, pero con dos grandes ventajas sobre ella, que son:

- i) el recorrido de la variable está limitado, no presenta colas infinitas como tiene la distribución normal, y
- ii) el modelo puede presentar asimetrías, en contra de los que le ocurre a la distribución normal que siempre es simétrica.

Veamos las características de asimetría y curtosis en el modelo del P.E.R.T.. Si en la expresión (2.17) sustituimos los valores de los parámetros p y q dados en (3.3) se obtiene:

$$A = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ segæn que } q < p \text{ ó } q > p$$

En cuanto al coeficiente de asimetría (2.16), si se sustituyen los parámetros p y q por sus valores de (3.3) queda curiosamente que

$$g_1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ segæn que } q < p \text{ ó } q > p$$

i.e. en el modelo beta P.E.R.T. coinciden los dos coeficientes de asimetría. Esta propiedad es común a todas las distribuciones beta tales que $p + q = 6$.

Respecto a la curtosis el resultado es, si cabe, más atrayente. En efecto el modelo probabilístico del P.E.R.T. tiene una curtosis igual a la de la distribución normal, esto es, el modelo P.E.R.T. es mesocúrtico, y por tanto el valor del coeficiente g_2 es cero.

Efectivamente, advirtiendo el carácter simétrico que, con respecto a p y q , tiene (2.18) si se sustituyen los valores de p y q por una cualquiera de las parejas dadas en (3.3), se tiene los siguiente

$$g_2 = \frac{6}{7.8.9} [(3 - \sqrt{2})(4 - \sqrt{2})(-3 - 3\sqrt{2}) + (3 + \sqrt{2})(4 + \sqrt{2})(-3 + 3\sqrt{2})] = \frac{-21\sqrt{2} + 21\sqrt{2}}{84} = 0$$

4.- REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS.-

- Canavos, G.C. (1987).- Probabilidad y Estadística. Aplicaciones y Métodos.- McGraw Hill. Mexico.
- Dumas de Rauly, D. (1966).- L'estimation statistique.- Gauthier-Villars. Paris.
- Farnum, N.R. y Stanton, L.W (1987).- Some Results Concerning the Estimation of Beta Distribution Parameters in PERT. J, Opl. Res. Soc., Vol. 38, nº 3, pp 287-290.
- Gallagher, C, (1987).- A Note on PERT Assumptions.- Management Science, Vol. 33, nº 10, p. 1360
- Herrerías Pleguezuelo, R. (1995).- Un nuevo uso de las tres estimaciones subjetivas del PERT.-IX Reunión ASEPELT-España.- Vol.4, pp. 411-416. Santiago de Compostela.
- Kaufmann, A. Y Desbazeille, G. (1965).- Método del Camino Crítico.- Sagitario
- Pérez Rodríguez, E. (1995).- Ajuste de un modelo beta con información adicional sobre su apuntamiento.- IX Reunión ASEPELT-España.- Vol.4, pp. 445-451.- Santiago de Compostela.
- Romero Lopez, C. (1991).- Técnicas de programación y control de proyectos (4ª edición).- Pirámide. Madrid.
- Sasieni, M.W. (1986).- A Note on PERT Times.- Management Science 32, pp 1652-1653.
- Suarez Suarez, A.S. (1980).- Decisiones óptimas de inversión y financiación de la empresa (3ªedición).- Pirámide. Madrid.
- Thomas, G. (1968).- Introduction de l'aleatoire dans les problèmes d'ordonnancement. Méthode de simulation, en J.Agard: Les Méthodes de simulation. Dunod. Paris
- Yu, L. (1974).- Aplicaciones prácticas del P.E.R.T. y C.P.M. .- Ediciones Deusto.