

UN ESTUDIO BAYESIANO DEL MODELO LOGIT CON VARIABLES MEDIDAS SEGUN EL DISEÑO DE WARNER

Planas de Alfonso,B., Márquez de la Plata y Cuevas,V., Arias Martín,C.

Departamento de Economía Aplicada I. Universidad de Sevilla

1. Introducción.

Cuando se realiza una encuesta por muestreo se pueden cometer dos tipos de errores; los denominados debidos al muestreo y los errores ajenos al muestreo. Dentro de estos últimos, destacan aquellos debidos a las propias características de los individuos que se pretenden analizar, que bien porque no estén consideradas socialmente deseables, bien porque sean altamente personales, o bien porque sean ilegales, tienen la consideración de íntimas.

La técnica conocida como diseño de respuesta aleatorizada, fue concebida por Warner (1965). Este primer diseño supone que la población queda dividida en dos grupos no solapados, donde el primer grupo lo constituyen aquellos individuos que poseen la característica íntima, mientras que el segundo lo forman los que no la tienen. El trabajo de Winkler y Franklin (1979), es el primero que aborda desde la concepción bayesiana el diseño propuesto por Warner.

Por otra parte, la función de verosimilitud resultante al aplicar estos diseños es complicada, haciendo el cálculo del estimador máximo verosímil difícil de obtener. Una forma de resolver este problema es utilizar el algoritmo EM (alternancia entre tomar esperanza y maximizar), que aunque debido a Hartley (1958), no aparece adecuadamente desarrollado hasta 1977 por Dempster et al, siendo el trabajo de Bourke y Moran (1988) el precursor de la utilización de este algoritmo a los diseños de respuesta aleatorizada.

También, presenta notable interés la incorporación de una variable auxiliar, que puede ser modelizada mediante un modelo logit, constituyendo el trabajo de Sheers y Dayton (1988), un adecuado punto de partida para su estudio.

Así pues, en el presente trabajo, analizamos el modelo logit cuando se considera el diseño de Warner, bajo el supuesto de que sobre los dos parámetros de dicho modelo se dispone de cierta información a priori, utilizando el algoritmo EM para obtener los

correspondientes estimadores máximo verosímiles. También, se consideran distintos métodos para aproximar la desviación estándar de las correspondientes distribuciones finales, así como un conjunto de aproximaciones a estas distribuciones a posteriori, desarrollando diversos ejemplos numéricos.

2. Especificación del modelo.

Para estimar la proporción de la población que posee la característica íntima A, π_A , consideramos que cada observación muestral genera un valor de la variable aleatoria Y_i , $i=1,2,\dots,n$, donde

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si el } i\text{-ésimo elemento muestral responde Si} \\ 0 & \text{si el } i\text{-ésimo elemento muestral responde No} \end{cases}$$

siendo entonces $Y_i \sim B(1, \lambda)$, $\lambda = \pi_A p + (1 - \pi_A)(1 - p)$, ($0.5 < p < 1$), para $i=1,2,\dots,n$, donde p denota la probabilidad con el que el mecanismo de aleatorización selecciona la declaración "pertenezco al grupo A".

De esta forma, bajo el supuesto de que el número de respuestas afirmativas en la muestra es n_1 , la función de verosimilitud, L , se puede expresar:

$$L \propto I^{n_1} (1 - I)^{n - n_1}$$

y así, el estimador máximo verosímil de π_A sería,

$$\hat{p}_A = \frac{\hat{I} - (1 - p)}{2p - 1} = \frac{\frac{n_1}{n} - (1 - p)}{2p - 1}$$

Ahora bien, la proporción de elementos que poseen la característica íntima, no tiene porque ser fija, dado que puede variar en función de una variable explicativa, V , nominal u ordinal, que en adelante denominaremos cualidad. Entonces, si denotamos p_{A/v_j} a la proporción de la población, que teniendo el nivel j de la cualidad V , posee la característica íntima A, podemos expresar:

$$p_{A/v_j} = \frac{1}{1 + e^{-b_0 - b_1 v_j}} \quad j=1,2,\dots,k$$

Bajo este supuesto, podemos considerar que cada observación muestral genera un valor de la variable aleatoria Y_{ij} , $i=1,2,\dots,n_j$, $j=1,2,\dots,k$, donde

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el } i\text{-}\zeta\text{simo elemento muestral perteneciente} \\ & \text{al nivel } j\text{-}\zeta\text{simo responde Si} \\ 0 & \text{si el } i\text{-}\zeta\text{simo elemento muestral perteneciente} \\ & \text{al nivel } j\text{-}\zeta\text{simo responde No} \end{cases}$$

siendo entonces $Y_{ij} \sim B(1, \lambda_j)$, $\lambda_j = p^{A/v_j} p + (1 - p^{A/v_j})(1 - p)$.

De esta forma, bajo el supuesto de que para el nivel j de la cualidad V , el número de respuestas afirmativas en la muestra es n_{1j} , y el número de respuestas negativas es $n_j - n_{1j}$, la función de verosimilitud, L , se puede expresar:

$$L \propto \prod_{j=1}^k l_j^{n_{1j}} (1 - l_j)^{n_j - n_{1j}}$$

Ahora bien, si la variable aleatoria X_{ij} , $i=1, 2, \dots, n_j$, $j=1, 2, \dots, k$, tal que:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el } i\text{-}\zeta\text{simo elemento muestral perteneciente} \\ & \text{al nivel } j\text{-}\zeta\text{simo posee la característica } A \\ 0 & \text{si el } i\text{-}\zeta\text{simo elemento muestral perteneciente} \\ & \text{al nivel } j\text{-}\zeta\text{simo no posee la característica } A \end{cases}$$

fuese conocida, la función de verosimilitud se podría expresar

$$L \propto \prod_{j=1}^k p_{A/v_j}^{t_{1j}} (1 - p_{A/v_j})^{n_j - t_{1j}}$$

donde

$$t_{1j} = \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}$$

y entonces, se podrían obtener sin dificultad los estimadores máximo verosímiles de β_0 y β_1 , y por lo tanto, los correspondientes estimadores máximo verosímiles de p_{A/v_j} .

3. Distribuciones a priori.

Para estudiar la influencia que la distribución inicial propuesta sobre los parámetros β_0 y β_1 ejerce sobre la distribución a posteriori de la proporción de individuos que poseen la característica íntima A , vamos a considerar dos casos. El primero, que denominamos Caso 1, es aquel en el que la información que ofrece la distribución a priori es difusa, mientras que en el segundo, Caso 2, proponemos la distribución Normal bivalente con vector de medias $\bar{\mathbf{b}}$, donde $\bar{\mathbf{b}}' = (\bar{b}_0, \bar{b}_1)$, y

matriz de varianzas y covarianzas $\Sigma = \text{diagonal}[V(\beta_0), V(\beta_1)]$, pues suponemos que los parámetros β_0 y β_1 son independientes.

Sin pérdida de generalidad vamos a suponer que $k=3$ y que $v_j=j$, y entonces, la distribución de final del vector aleatorio β cuando se considera el Caso 1, $f(\beta/1)$, se puede especificar:

$$f(\beta/1) \propto \prod_{j=1}^3 I_j^{n_{1j}} (1-I_j)^{n_j-n_{1j}}$$

para $j=1,2,3$, y donde $\beta'=(\beta_0, \beta_1)$.

Sin embargo, dado que

$$h_1 = \ln\left(\frac{p_{A/v_1}}{1-p_{A/v_1}}\right) = b_0 + b_1; \quad h_2 = \ln\left(\frac{p_{A/v_2}}{1-p_{A/v_2}}\right) = b_0 + 2b_1$$

podemos expresar:

$$h_3 = \ln\left(\frac{p_{A/v_3}}{1-p_{A/v_3}}\right) = b_0 + 3b_1 = 2h_2 - h_1$$

y por lo tanto,

$$f(h_1, h_2/1) \propto \prod_{j=1}^3 I_j^{n_{1j}} (1-I_j)^{n_j-n_{1j}}$$

donde

$$p_{A/v_3} = \frac{1}{1+e^{h_1-2h_2}}$$

por lo que

$$f(p_{A/v_1}, p_{A/v_2}/1) \propto \frac{1}{p_{A/v_1}(1-p_{A/v_1})p_{A/v_2}(1-p_{A/v_2})} \prod_{j=1}^3 I_j^{n_{1j}} (1-I_j)^{n_j-n_{1j}}$$

donde

$$p_{A/v_3} = \frac{(1-p_{A/v_1})p_{A/v_2}^2}{1+p_{A/v_1}(1-p_{A/v_2})^2}$$

y así, la distribución final de la proporción de individuos que poseen la característica íntima A en los dos primeros niveles de la cualidad V se pueden especificar:

$$f(p_{A/v_1}) = \int_0^1 f(p_{A/v_1}, p_{A/v_2}/1) dp_{A/v_2}; \quad f(p_{A/v_2}) = \int_0^1 f(p_{A/v_1}, p_{A/v_2}/1) dp_{A/v_1}$$

pudiendo obtener también sin dificultad la distribución a posteriori de la proporción de individuos que poseen la característica íntima A en el tercer nivel sin más que considerar que

$$h_1 = \ln\left(\frac{p_{A/v_1}}{1-p_{A/v_1}}\right) = b_0 + b_1 = 2h_2 - h_3$$

Si a continuación consideramos el Caso 2, esto es, $f(\beta) = N(\bar{b}, \Sigma)$, dado que

$$f(b/2) \propto \prod_{j=1}^3 I_j^{n_j} (1 - I_j)^{n_j \cdot n_{1j}} f(b_0) f(b_1)$$

donde

$$f(b_0) = \frac{e^{-\frac{1}{2} \frac{(b_0 - \bar{b}_0)^2}{V(b_0)}}}{\sqrt{2p V(b_0)}}; \quad f(b_1) = \frac{e^{-\frac{1}{2} \frac{(b_1 - \bar{b}_1)^2}{V(b_1)}}}{\sqrt{2p V(b_1)}}$$

mediante un desarrollo análogo al expresado anteriormente, se tiene que

$$f(p_{A/v_1}, p_{A/v_2}/2) \propto \frac{\prod_{j=1}^3 I_j^{n_j} (1 - I_j)^{n_j \cdot n_{1j}} f_1(p_{A/v_1}, p_{A/v_2}) f_2(p_{A/v_1}, p_{A/v_2})}{p_{A/v_1} (1 - p_{A/v_1}) p_{A/v_2} (1 - p_{A/v_2})}$$

donde

$$p_{A/v_3} = \frac{(1 - \frac{p_{A/v_1} p_{A/v_2}}{1 - p_{A/v_1}}) \left(\frac{p_{A/v_2}}{1 - p_{A/v_2}} \right) \bar{b}_0}{1 + \frac{p_{A/v_1} (1 - p_{A/v_2})}{1 - p_{A/v_1}}}$$

$$f_1(p_{A/v_1}, p_{A/v_2}) = \frac{1}{\sqrt{2p V(b_0)}}$$

$$f_2(p_{A/v_1}, p_{A/v_2}) = \frac{e^{\frac{\left(\ln \left(\frac{p_{A/v_2}}{1 - p_{A/v_2}} \right) - \ln \left(\frac{p_{A/v_1}}{1 - p_{A/v_1}} \right) \right) \bar{b}_1}{-2V(b_1)}}}{\sqrt{2p V(b_1)}}$$

pudiéndose obtener entonces la correspondientes distribuciones marginales para los dos primeros niveles de la cualidad V, mientras que para la determinación de dicha distribución en el tercer nivel debe procederse tal y como se ha ofrecido al considerar el Caso 1.

4. Aplicación del algoritmo EM.

Dado que en el supuesto de que los valores de la variable aleatoria X_{ij} $i=1,2,\dots,n_j$, $j=1,2,\dots,k$, fuesen conocidos, la obtención de los estimadores máximo verosímiles de β_0 y β_1 es sencilla, nuestro objetivo es utilizar el algoritmo EM para estimar los valores de t_{ij} . Así, dado que el logaritmo de la verosimilitud de los datos completos es función lineal en X_{ij} , y que la función de probabilidad $f(x_{ij}/y_{ij}, p, \beta^0)$ es conocida, donde β^0 es un valor inicial de β , podemos aplicar el algoritmo EM, que para el caso 1, se puede especificar de la siguiente forma:

I) Tomar un valor de β^0 . Un criterio para su selección es

tomar $\beta^0 = (V'V)^{-1}V'U$, donde

$$V = \begin{bmatrix} 1 & v_1 \\ 1 & v_2 \\ \cdot & \cdot \\ 1 & v_k \end{bmatrix}; \quad U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ u_k \end{pmatrix}; \quad u_j = \frac{\frac{n_{1j}}{n_j} - (1-p)}{2p-1}, \quad j=1,2,\dots,k.$$

II) Imputar los valores desconocidos t_{1j} por \hat{t}_{1j} , $j=1,2,\dots,k$, donde:

$$\hat{t}_{1j} = \frac{n_{1j}p_{A1/v_j}p}{p_{A1/v_j}p + (1-p_{A1/v_j})(1-p)} + \frac{1(n_j - n_{1j})p_{A1/v_j}(1-p)}{p_{A1/v_j}p + (1-p_{A1/v_j})(1-p)} \\ p_{A/v_j} = \frac{1}{1 + e^{-(1,v_j)b^0}}$$

III) Bajo el supuesto de que $t_{1j} = \hat{t}_{1j}$, resolver:

$$(V'QV)_{b^0} b^1 = V'(QS)_{b^0}$$

hasta que $|\beta^r - \beta^{r+1}| < 10^{-5}$, para $r=0,1,2,\dots$, donde:

$$Q = \begin{bmatrix} n_1 p_{A/v_1} (1 - p_{A/v_1}) & & \emptyset \\ & \cdot & \\ & & \cdot \\ \emptyset & & n_k p_{A/v_k} (1 - p_{A/v_k}) \end{bmatrix}; \quad S = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \cdot \\ s_k \end{pmatrix};$$

$$s_j = \ln\left(\frac{p_{A/v_j}}{1 - p_{A/v_j}}\right) + \frac{t_{1j} - n_j p_{A/v_j}}{n_j p_{A/v_j} (1 - p_{A/v_j})}, \quad j=1,2,\dots,k.$$

que resultan ser las ecuaciones normales con "pesos", medidos por la matriz Q, en la regresión entre S y V.

IV) Tomar $\beta^0 = \hat{b}^{r+1}$, y volver al paso II, hasta que se verifique $|\beta^0 - \hat{b}^{r+1}| < 10^{-5}$.

De forma análoga, los pasos a seguir para obtener los estimadores máximo verosímiles de β , si consideramos ahora el Caso 2, son los siguientes:

I) Tomar un valor de β^0 . Un criterio para su selección es tomar $\beta^0 = [\bar{b} + (V'V)^{-1}V'U]/2$.

II) Imputar los valores desconocidos t_{1j} por \hat{t}_{1j} , $j=1,2,\dots,k$, donde:

$$\hat{t}_{1j} = \frac{n_{1j} p_{A1/v_j} p}{p_{A1/v_j} p + (1 - p_{A1/v_j})(1 - p)} + \frac{(n_j - n_{1j}) p_{A1/v_j} (1 - p)}{1 - [p_{A1/v_j} p + (1 - p_{A1/v_j})(1 - p)]}$$

$$p_{A/v_j} = \frac{1}{1 + e^{-(1, v_j) b_0}}$$

III) Bajo el supuesto de que $t_{1j} = \hat{t}_{1j}$, aplicar el algoritmo de Newton-Raphson:

$$b^1 = b^0 + [V'QV + \Sigma^{-1}]_{b^0}^{-1} [V'(T - \Pi) - \Sigma^{-1}(b - \bar{b})]_{b^0}$$

hasta que $|\beta^r - \beta^{r+1}| < 10^{-5}$, para $r=0, 1, 2, \dots$, donde:

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{12} \\ \vdots \\ t_{1k} \end{pmatrix}; \quad \Pi = \begin{pmatrix} n_1 p_{A/v_1} \\ n_2 p_{A/v_2} \\ \vdots \\ n_k p_{A/v_k} \end{pmatrix}$$

IV) Tomar $\beta^0 = \hat{b}_*^{r+1}$, y volver al paso II, hasta que se verifique $|\beta^0 - \hat{b}_*^{r+1}| < 10^{-5}$.

En cualquiera de los dos casos, la aplicación del algoritmo EM asegura la convergencia tanto de la sucesión $\{\hat{b}^{r+1}\}$ como de $\{\hat{\beta}_*^{r+1}\}$ a las estimaciones máximo verosímiles de β .

5. Aproximaciones de la distribución a posteriori.

Nuestro interés se centra en aproximar la distribución final de la proporción de individuos que teniendo el nivel j de la cualidad V , poseen la característica íntima A . Así, proponemos tres métodos para aproximar estas distribuciones finales, tanto para el Caso 1 como para el Caso 2.

El primero de estos métodos consiste en aproximar la distribución final de β mediante una distribución Normal con vector de medias $\hat{\beta}$ y matriz de varianzas y covarianzas $\hat{\Sigma}$, donde $\hat{\beta}$ es el estimador máximo verosímil de β obtenido por el algoritmo EM, y

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{\left[\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta \partial \beta'} \right]_{\beta = \hat{\beta}}}$$

y a continuación, dado que

$$\mathbf{h}_j = \ln \left(\frac{\mathbf{p}_{A/v_j}}{1 - \mathbf{p}_{A/v_j}} \right) = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 v_j \quad j=1,2,\dots,k.$$

tenemos que la distribución a posteriori de \mathbf{h}_j es aproximadamente Normal de media $\hat{\mathbf{m}}_j$ y varianza $\hat{\mathbf{S}}_j^2$, donde

$$\hat{\mathbf{m}}_j = (1, v_j) \hat{\mathbf{b}}; \quad \hat{\mathbf{S}}_j^2 = (1, v_j) \hat{\mathbf{\Sigma}} (1, v_j)'$$

y por lo tanto, efectuando el cambio de variable correspondiente, la distribución final aproximada de \mathbf{p}_{A/v_j} , $f'(\mathbf{p}_{A/v_j}/1)$, resulta ser

$$f'(\pi_{A/v_j}) = \frac{e^{\left(\frac{1}{2\hat{\mathbf{S}}_j^2} \left[\ln \left(\frac{\pi_{A/v_j}}{1 - \pi_{A/v_j}} \right) - \hat{\mathbf{m}}_j \right]^2 \right)}}{\sqrt{2\pi} \hat{\mathbf{S}}_j \pi_{A/v_j} (1 - \pi_{A/v_j})}$$

Ahora bien, dado que

$$E[\pi_{A/v_j}/1] = \hat{\mu}_j = \frac{1}{1 + e^{-\beta_0 - \beta_1 v_j}}; \quad V(\pi_{A/v_j}) = \hat{\sigma}_j^2 = \hat{\delta}_j \hat{\Sigma} \hat{\delta}_j$$

donde

$$\hat{\delta}_j = \left[\frac{\partial \pi_{A/v_j}}{\partial \beta_0}, \frac{\partial \pi_{A/v_j}}{\partial \beta_1} \right]_{\beta = \hat{\beta}}$$

podemos aproximar la distribución a posteriori $f'(\mathbf{p}_{A/v_j}/1)$ mediante un modelo Beta de parámetros a_{1j} y b_{1j} , tal que la media y la varianza de esta distribución sean $\hat{\mu}_j$ y $\hat{\sigma}_j^2$, respectivamente, siendo entonces:

$$a_{1j} = \frac{\hat{\mu}_j^2 (1 - \hat{\mu}_j) - \hat{\mu}_j \hat{\sigma}_j^2}{\hat{\sigma}_j^2}; \quad b_{1j} = \frac{a_{1j} (1 - \hat{\mu}_j)}{\hat{\mu}_j}$$

o bien aproximar $f'(\pi_{A/v_j}/1)$ a través de un modelo Normal de media $\hat{\mu}_{1j} = (a_{1j} - 1) / (a_{1j} + b_{1j} - 2)$, esto es, la moda de la distribución beta anterior, y de varianza $\hat{\sigma}_{1j}^2 = \hat{\sigma}_j^2$.

Si consideramos el segundo método, vamos a suponer nuevamente que $k=3$ y que $v_j=j$, y entonces, siguiendo la línea propuesta por Leonard (1975), vamos a estimar la varianza de la distribución final de π_{A/v_1} , $\hat{\sigma}_{11}^2$, mediante

$$\frac{1}{\hat{\sigma}_{11}^2} = \left[\frac{\partial^2 \ln f(\pi_{A/V_1}, \pi_{A/V_2} / 1)}{\partial \pi_{A/V_1}^2} \right]_{\pi_{A/V_1} = \hat{\mu}_{11}}^{\pi_{A/V_2} = \hat{\mu}_{12}} + \frac{\left[\frac{\partial^2 \ln f(\pi_{A/V_1}, \pi_{A/V_2} / 1)}{\partial \pi_{A/V_1} \partial \pi_{A/V_2}} \right]_{\pi_{A/V_1} = \hat{\mu}_{11}}^{\pi_{A/V_2} = \hat{\mu}_{12}}}{\left[\frac{\partial^2 \ln f(\pi_{A/V_1}, \pi_{A/V_2} / 1)}{\partial \pi_{A/V_2}^2} \right]_{\pi_{A/V_1} = \hat{\mu}_{11}}^{\pi_{A/V_2} = \hat{\mu}_{12}}}$$

mientras que para estimar la varianza de la distribución final de \mathbf{p}_{A/V_2} , $\hat{\mathbf{s}}_{12}'^2$, basta intercambiar en la expresión anterior las derivadas parciales respecto a \mathbf{p}_{A/V_1} y \mathbf{p}_{A/V_2} . Sin embargo, para calcular la correspondiente a \mathbf{p}_{A/V_3} , es necesario obtener primero la distribución a posteriori $f(\mathbf{p}_{A/V_2}, \mathbf{p}_{A/V_3} / 1)$ y a continuación proceder tal y como se ha especificado. Así pues, una vez obtenidos los valores de $\hat{\mathbf{s}}_{1j}'^2$, las correspondientes distribuciones finales se pueden aproximar a un modelo Beta o a un modelo Normal, tal y como se ha ofrecido anteriormente.

El tercer método que proponemos está basado en consideraciones empíricas, y utiliza los dos anteriores, y así:

$$\hat{\mathbf{s}}_{1j}''^2 = \frac{\hat{\mathbf{s}}_{1j}^2 + \hat{\mathbf{s}}_{1j}'^2}{2}$$

pudiendo entonces aproximar la distribución final en cada nivel bien por un modelo Beta o por un modelo Normal.

Para el Caso 2, el planteamiento es similar, debiéndose tener en cuenta que en este supuesto, sobre β se considera un modelo Normal bivalente.

6. Ejemplos numéricos.

Para ilustrar los procedimientos desarrollados anteriormente, se va a suponer que la población se encuentra clasificada, por la cualidad V, en tres niveles, siendo $v_j = j$, para $j=1,2,3$, que los cocientes n_{1j}/n_j son 0,4; 0,45 y 0,55, respectivamente, que $p=0,7$, y que para el Caso 2 consideramos las siguientes distribuciones: $N[(-2;0,8); \text{diagonal}(4;4)]$, $N[(-2;0,8); \text{diagonal}(1;1)]$, $N[(-1;0); \text{diagonal}(1;1)]$ y $N[(-2,5;1,5); \text{diagonal}(1;1)]$.

Los resultados más importantes después de realizar un conjunto bastante numeroso de simulaciones son los siguientes. Para el Caso 1, si el cociente n_{1j}/n_j produce que la estimación de

P^{A/v_j} sea pequeña, es necesario un gran tamaño muestral, puesto que sino la variabilidad, medida en términos de la desviación estándar de los parámetros β_0 y β_1 es muy elevada; la mejor aproximación a la desviación estándar de la distribución final, es la ofrecida por el primer método para el primer nivel, mientras que para los otros dos niveles resulta ser la proporcionada por el segundo, y así, las mejores aproximaciones a la distribución final de la proporción de individuos que, para el nivel j de la cualidad V , poseen la característica íntima A , es la que proporciona el modelo Normal obtenido a partir de cada uno de los dos métodos anteriores.

Para el Caso 2, hemos comprobado que conforme se incrementa el valor de n_j , se atenúa la influencia que ejerce la distribución a priori, y que la varianza de la distribución final se encuentra influenciada por los valores que toma Σ ; también, si la estimación de P^{A/v_j} es un valor pequeño, es necesario un gran tamaño muestral para que la desviación estándar de los parámetros β_0 y β_1 sea razonable; la mejor aproximación a la desviación estándar de la distribución final, es la ofrecida por el primer método para el primer nivel, mientras que para los otros dos niveles resulta ser la proporcionada por el tercero, siendo, en cualquier caso, la mejor aproximación a la distribución final de la proporción de individuos que, para el nivel j de la cualidad V , poseen la característica íntima A , la proporcionada el modelo Beta obtenido a partir de cada uno de los dos métodos anteriores.

Bibliografía.

Bourke, P.D., Moran, M.A. (1988). "Estimating proportions from randomized response data using the EM algorithm". J.A.S.A., 83, 964-968.

Dempster, A.P., Laird, N.M., Rubin, D.B. (1977). "Maximum likelihood estimation from incomplete data via the EM algorithm (with discussion)". J.R.S.S., Ser. B, 39, 1-38.

Hartley, H.O. (1958). "Maximum likelihood estimation from incomplete data". Biometrics, 14, 174-194.

Leonard, T. (1975). "Bayesian estimation methods for two-day contingency tables". J.R.S.S., Ser. B, 37, 23-37.

Sheers,N.J.,Dayton,C.M. (1988). "Covariate randomized response models". J.A.S.A., 83, 969-974.

Warner,S.L. (1965). "Randomized response: a survey technique for eliminating evasive answer bias". J.A.S.A., 60, 63-69.

Winkler,R.L.,Franklin,L.A. (1979) "Warner randomized response model: a bayesian approach". J.A.S.A., 74, 207-214.