

# Un primer análisis dinámico de un modelo general de crecimiento endógeno

Guiomar Martín Herrán

Dpto. Economía Aplicada (Matemáticas)

Universidad de Valladolid

## 1 Introducción

Una de las características más sorprendentes del proceso de crecimiento económico es la gran dispersión entre los tantos medios de crecimiento de los diferentes países. Estudios recientes, [8], [5], han analizado mecanismos en los que el tanto de crecimiento a largo plazo de una economía es endógeno a las acciones individuales. Estos modelos presentan la propiedad de que la política económica tiene impacto sobre el crecimiento a largo plazo, pudiendo generar diferencias muy importantes. Sin embargo, se sabe por los modelos estándar de crecimiento que el impacto a largo plazo de una política no es un criterio apropiado para la valoración política. En la clase de economías descritas en este trabajo el crecimiento es endógeno, en el sentido de ocurrir en ausencia de aumentos exógenos en la productividad, tales como los atribuidos al progreso técnico en el modelo neoclásico. En este último, la política económica sólo puede afectar al tanto de crecimiento durante la trayectoria de transición hacia el estado estacionario, ya que el tanto de crecimiento de estado estacionario está dado por el progreso tecnológico exógeno.

Tras los artículos pioneros de Romer [8] y Lucas [5], muchos de los modelos de crecimiento endógeno recientes tratan economías con dos bienes de capital. Normalmente, uno de los bienes es el capital físico y el otro varía en los modelos, aunque en muchos trabajos el segundo bien es el capital humano; entre otros, [7], [2], [1], [6], [4],[9], [10]. Este trabajo, siguiendo a Lucas [5], presenta un modelo que distingue el papel del capital físico y el humano. La interacción entre las tecnologías que permite la acumulación de capital físico y humano de forma separada, introduce dinámica transicional, y junto con las preferencias de los consumidores determina endógenamente el tanto de crecimiento de la economía.

El modelo que se estudia presenta tecnologías con rendimientos a escala constantes. La tecnología es similar a la adoptada por Lucas [5], aunque con dos diferencias importantes: no hay externalidades y el capital físico se utiliza en la producción del capital humano. Siguiendo a [4], otra extensión de los modelos más simples ya estudiados consiste en incluir el ocio como argumento en la función de utilidad. Aunque en [4] se plantea el modelo más general, no se analiza y sólo se estudian dos versiones simplificadas: un modelo con capital físico en el sector de educación y otro que incluye ocio como argumento en la función de utilidad. Al considerar los efectos separadamente, el análisis de los dos modelos es más sencillo que el del general, ya que ambos están formulados por medio de tres variables de control frente a los cuatro instrumentos políticos introducidos en nuestro modelo. Además, en el caso general las expresiones de la dinámica de las variables de estado son más complicadas. Todo esto hace que nuestro modelo, en ocasiones, no, pueda estudiarse analíticamente debiéndose recurrir a métodos numéricos para caracterizan la dinámica.

El modelo tiene trayectorias de estado estacionario y la economía que describe presenta dinámica transicional. Así, si el stock de capital inicial no está en la proporción, ratio de estado estacionario de capital físico frente a capital humano, habrá un período en el cual el capital físico crecerá a distintos tantos. Las propiedades de las trayectorias de transición hacia el stock de capital de estado estacionario se estudian analíticamente, cuando esto es posible, intentándose explicar los mecanismos económicos que hay detrás de estas trayectorias.

Al no considerarse externalidades el equilibrio es la solución de un problema convexo, por lo que no puede haber multiplicidad de trayectorias balanceadas de equilibrio. Un resultado de [2] implica que, en este caso, la trayectoria de crecimiento balanceado, si existe, es localmente estable.

## **2 El modelo**

Siguiendo a [4] se considera una economía con un número de individuos idénticos,  $N(t)$ , que se supone crece a un tanto,  $n$ , dado exógenamente. Sin pérdida de generalidad, ya que no hay externalidades, se restringe el análisis al problema del planificador. El individuo representativo obtiene utilidad del consumo de un bien agregado y de una medida de la eficiencia de las

unidades de ocio, definiéndose las unidades de ocio efectivo como  $l(t)h(t)^\lambda$ , con  $l(t)$  la fracción de tiempo dedicado a las actividades ociosas,  $h(t)$  el nivel de educación y  $\lambda$  un parámetro entre cero y uno. La función de utilidad instantánea,  $U(c(t), l(t)h(t)^\lambda)$ , se supone de clase  $C^2$ , estrictamente cóncava y creciente en ambos argumentos, consumo y unidades efectivas de ocio, y se denota por  $\rho$  el tanto de preferencia temporal subjetivo.

En [3] se prueba que para que un modelo presente trayectorias balanceadas, además de la concavidad de la función de utilidad en ambos argumentos, debe tener elasticidad de sustitución constante en el consumo; por esta razón, se consideran las siguientes funciones de utilidad:

$$U(c, lh^1) = \frac{c^\Theta (lh^1)^{1-q}}{1-s}, \text{ para } s > 0 \text{ y } s \neq 1, 0 < q \leq 1,$$

$$U(c, lh^1) = q \log c + (1-q) \log(lh^1), \text{ para } s = 1 \text{ y } 0 < q \leq 1$$

Se supone que los individuos tienen una cantidad fija de tiempo, normalizada por uno, que pueden dedicar a producir bienes físicos, a acumular capital humano o a actividades de ocio. Denotando por  $u(t)$  la fracción de tiempo dedicado al primer uso, y por  $l(t)$  lo gastado en el sector del capital humano, se tiene que  $1 - u(t) - l(t)$  es la fracción de tiempo dedicada a las actividades ociosas. Los stocks de capital físico y humano en el tiempo cero son fijos. Además, el individuo representativo toma los precios dados y tiene información perfecta.

Las tecnologías de los dos sectores del modelo son diferentes, suponiendo que el capital humano y el físico difieren en al menos tres dimensiones como se señala en [9] y [10]: el capital humano no es sustituible por consumo; no es un bien de mercado; y su acumulación depende de una función de producción con inputs posiblemente diferentes de los que se consideran en la función de producción de bienes finales y capital físico. Así, la tecnología en el sector consumo se describe mediante una función de producción,  $F(\bar{K}, \bar{L})$ , de clase  $C^2$ , cóncava, creciente y homogénea de primer orden en ambos argumentos, capital físico,  $K$ , y trabajo,  $L$ . Además, se supone que satisface las condiciones usuales de Inada:

$$\lim_{K \rightarrow 0} F_L(\bar{K}, \bar{L}) = \infty, \lim_{K \rightarrow 0} F_L(\bar{K}, \bar{L}) = \infty \text{ y } F(0, \bar{L}) = F(\bar{K}, 0) = 0$$

donde  $\bar{L} > 0$  y  $\bar{K} > 0$  son fijos,  $F_{KK}(\bar{K}, \bar{L}) < 0$  y  $F_{LL}(\bar{K}, \bar{L}) < 0$ . El trabajo agregado puede expresarse por  $L(t) = N(t) u(t) h(t)$ .

El bien agregado producido puede utilizarse como bien de consumo o invertirse como bien de capital, con este último depreciándose a un tanto constante,  $\pi \geq 0$ . Denotando por  $v(t)$  la proporción de capital físico dedicado al sector output y por  $k(t)$  su cantidad media, la restricción para este bien puede expresarse:

$$\bar{c}(t) + \bar{k}(t) + (\mathbf{p} + n)\bar{k}(t) \leq F[v(t)\bar{k}(t), u(t)\bar{h}(t)]$$

La tecnología del sector educación se supone que es una función de producción,  $G(K, L)$ , de clase  $C^2$ , cóncava, creciente y homogénea de orden 1 en el capital físico y el trabajo, satisfaciendo las mismas condiciones de Inada que la función de producción del sector del output. Si  $0$  representa el tanto de depreciación del stock medio del capital humano,  $h(t)$ , la restricción para el sector de educación es:

$$\bar{h}(t) + \mathbf{q}\bar{h}(t) \leq G[(1 - v(t))\bar{k}(t), (1 - u(t))\bar{h}(t)]$$

El problema de optimización puede plantearse de la siguiente forma:

$$\tilde{c}(t), l(t), u(t), v(t) \Big|_0^\infty e^{-pt} U[\tilde{c}(t), l(t)\tilde{h}(t)]^I \Big] N(t) dt,$$

$$\tilde{k}(t) = F[v(t)\tilde{k}(t), u(t)\tilde{h}(t)] - (\mathbf{p} + n)\tilde{k}(t) - \tilde{c}(t),$$

$$\tilde{h}(t) = G[(1 - v(t))\tilde{k}(t), (1 - u(t) - l(t))\tilde{h}(t)] - \mathbf{q}\tilde{h}(t),$$

$$\tilde{c}(t) \geq 0, \tilde{k}(t) \geq 0, \tilde{h}(t) \geq 0,$$

$$l(t) \geq 0, u(t) \geq 0, 0 \leq u(t) + l(t) \leq 1, 0 \leq v(t) \leq 1,$$

$$\tilde{k}(0), \tilde{h}(0) \text{ datos } N(t) = N_0 e^{nt}, n > 0, r > 0 \quad (1)$$

En [5] se define una trayectoria de crecimiento optimal balanceado o equilibrio de estado estacionario para una economía como una solución optimal,  $\{\tilde{c}(t), l(t), \tilde{k}(t), \tilde{h}(t), u(t), v(t)\}$ , del problema de optimización, para ciertas condiciones iniciales  $\tilde{k}(0) = k_0$  y  $\tilde{h}(0) = h_0$  tal que los tantos de crecimiento de las variables  $\{\tilde{c}(t), \tilde{k}(t)$  y  $\tilde{h}(t), l(t), u(t), v(t)\}$  y el ratio output-capital permanecen constantes.

En [1] se prueba que en un equilibrio de estado estacionario todos los niveles,  $\tilde{c}(t), \tilde{k}(t)$ , y  $\tilde{h}(t)$ , deben crecer al mismo tanto. Siguiendo a estos autores, se utilizan nuevas variables definidas por:

$$k(t) = \tilde{k}(t) e^{-vt} \quad h(t) = \tilde{h}(t) e^{-vt}, \quad c(t) = \tilde{c}(t) e^{-vt}$$

donde  $v$  denota el tanto de crecimiento de un estado estacionario dado. Con este cambio las variables normalizadas,  $c(t)$ ,  $k(t)$  y  $h(t)$ , permanecen constantes a lo largo de la trayectoria balanceada, y las restricciones en los sectores de la economía pueden plantearse como:

$$\begin{aligned} \dot{k}(t) &= F[v(t)k(t), u(t)h(t)] - (\pi + v + n)k(t) - c(t), \\ \dot{h}(t) &= G[(1 - v(t))k(t), (1 - u(t) - l(t))h(t)] - (O + v)h(t) \end{aligned}$$

Para el análisis se elige la primera forma funcional de la función de utilidad que permite la existencia de trayectorias de crecimiento balanceado, estudiándose el siguiente problema de optimización:

$$\int_0^{\infty} e^{-(p-n-(1-s)v)t} \frac{(c(t)^q (l(t)h(t))^1)^{1-q}}{1-q} dt,$$

$$\dot{k}(t) = F[v(t)k(t), u(t)h(t)] - (p + n + v)k(t) - c(t),$$

$$\dot{h}(t) = G[(1 - v(t))k(t), (1 - u(t) - l(t))h(t)] - (v + q)h(t),$$

$$c(t) \geq 0, k(t) \geq 0, h(t) \geq 0, \quad (2)$$

$$l(t) \geq 0, u(t) \geq 0, 0 \leq u(t) + l(t) \leq 1, 0 \leq v(t) \leq 1,$$

$$k(0), h(0) \text{ datos } N(t) = N_0 e^{rt}, n > 0, r > 0$$

### 3 Dinámica

Para estudiar la dinámica de este modelo se escribe el hamiltoniano de valor actual,  $H$ , asociado con el problema, con  $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ , las variables de coestado asociadas a  $k(t), h(t)$ , respectivamente:

$$H(k(t), h(t), c(t)l(t), u(t), v(t)g_1(t), g_2(t)) = \frac{(c(t)^q (l(t)h(t)^l)^{1-q})^{1-s}}{1-s} + g_1(t)[F[v(t)k(t), u(t)h(t)] - (p + n + v)k(t) - c(t)] + g_2(t)[G[(1 - v(t))k(t), (1 - u(t) - l(t))h(t)] - (v - q)h(t)]$$

Suponiendo que las trayectorias optimales son interiores, por el Principio del Máximo se tiene que cada trayectoria optimal debe satisfacer las siguientes condiciones de primer orden, donde se han eliminado los puntos en los que están evaluadas las funciones:

$$\dot{g}_1 = -\frac{\partial H}{\partial k} + [p - n - (1 - s)v]g_1, \quad (3)$$

$$\dot{g}_2 = -\frac{\partial H}{\partial h} + [p - n - (1 - s)v]g_2, \quad (4)$$

$$\frac{\partial H}{\partial c} = 0, \frac{\partial H}{\partial l} = 0, \frac{\partial H}{\partial u} = 0, \frac{\partial H}{\partial v} = 0 \quad (5)$$

Además, deben imponerse las condiciones de transversalidad:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(p-n-(1-s)v)t} \mathbf{g}1(t)k(t) = 0 \text{ y } \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(p-n-(1-s)v)t} \mathbf{g}2(t)k(t) = 0$$

(3) y (4) pueden expresarse como un par de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\dot{\mathbf{g}}1 = \mathbf{g}1(p + \mathbf{s}v + \mathbf{p} - F_k[vk, uh]v) - \mathbf{g}2(G_k[(1-v)k, (1-u-l)h](1-v)), \quad (6)$$

$$\dot{\mathbf{g}}2 = \mathbf{g}2(\mathbf{q} + p - n + \mathbf{s}v - G_L[(1-v)k, (1-u-l)h](1-u-l)) - \mathbf{g}1F_L[vk, uh]u \quad (7)$$

$$- (c^q (lh^l)^{1-q})^{-q} (1-\mathbf{q})(lh^l)^{-q} c^q l h^{l-1}$$

De (5) se tiene un sistema de cuatro ecuaciones algebraicas:

$$(c^q (lh^l)^{1-q})^{-q} \mathbf{q} \left( \frac{c}{lh^l} \right)^{q-1} - \mathbf{g}1 = 0 \quad (8)$$

$$(c^q (lh^l)^{1-q})^{-q} \left( \frac{c}{lh^l} \right)^q - h \mathbf{g}2 G_L[(1-v)k, (1-u-l)h] = 0 \quad (9)$$

$$\mathbf{g}1 F_L[vk, uh] - \mathbf{g}2 G_L[(1-v)k, (1-u-l)h] = 0 \quad (10)$$

$$\mathbf{g}1 F_L[vk, uh] - \mathbf{g}2 G_L[(1-v)k, (1-u-l)h] = 0 \quad (11)$$

Las dos últimas ecuaciones proporcionan el ratio para las variables de coestado. Es decir, a lo largo de cualquier trayectoria optimal los pseudo-precios asociados al capital físico y humano,  $k$  y  $h$ , están relacionados por las expresiones:

$$\frac{\mathbf{g}1}{\mathbf{g}2} = \frac{F_L[vk, uh]}{G_L[(1-v)k, (1-u-l)h]} = \frac{F_k[vk, uh]}{G_k[(1-v)k, (1-u-l)h]} \quad (12)$$

Ahora (6) y (7) pueden expresarse:

$$\dot{g}1 = g1(p + sv + p - F_K \wedge vk, uh), \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \dot{g}2 = & g2(q + p - n + sv - G[(1-v)k, (1-u-l)h](1-l)) \\ & - c^q (lh^l)^{1-q} (1-q) (lh^l)^{-q} c^q l l h^{l-1} \end{aligned} \quad (14)$$

Se consideran funciones de producción de tipo Cobb-Douglas en ambos sectores, con  $\alpha$  diferente de  $\beta$ :

$$F[vk, uh] = A(vk)^b (uh)^{1-b}, G[(1-v)k, (1-u-l)h] = d((1-v)k)^a ((1-u-l)h)^{1-a}$$

La ecuación (12) ahora es una para los valores de las variables de control:

$$\frac{1-b}{b} \frac{v}{1-v} = \frac{1-a}{a} \frac{u}{1-u-l}$$

Así, se puede establecer una variable política como una función de las otras, por lo que realmente el individuo sólo puede elegir los valores para tres de las variables de control. Por ejemplo,

$$v = \frac{b(1-a)u}{a(1-b)(1-u-l) + b(1-a)u}$$

Reemplazando estos valores de  $v$  y  $1-v$  como funciones de  $u$  y  $1$  en (10), se establece  $u$  como función del control,  $1$ , el ratio de los estados,  $k/h$ , y las variables de coestado,  $\lambda_1/\lambda_2$ :

$$u = \frac{1}{b-a} \left\{ \left[ \frac{A(1-b)}{d(1-a)g2} \frac{g1}{g2} \right]^{\frac{1}{b-a}} \frac{[b(1-a)]^{\frac{b}{b-a}}}{[a(1-b)]^{\frac{a}{b-a}}} \frac{k}{h} - a(1-b)(1-l) \right\} \quad (15)$$

Las ecuaciones (8) y (9) permiten determinar el consumo como:

$$c = \frac{d(1-a)q}{1-q} \frac{g^2}{g^1} lh \left( \frac{1-v}{1-u-l} \right)^a \left( \frac{k}{h} \right)^a$$

Reemplazando en esta ecuación v y u en términos del control, 1, y las variables de estado y coestado obtenidas previamente, después de algunas manipulaciones, se tiene una nueva expresión del consumo:

$$c = \frac{d(1-a)q}{1-q} \left[ \frac{a(1-b)}{b(1-a)} \right]^{\frac{ba}{b-a}} \left[ \frac{d(1-a)}{A(1-b)} \right]^{\frac{a}{b-a}} lh \left[ \frac{g^1}{g^2} \right]^{\frac{b}{b-a}}$$

Hay que notar que la expresión anterior para el consumo no depende de la variable de estado k, capital físico, y la dependencia de las variables de coestado aparece, de nuevo, como el ratio  $\gamma_1/\gamma_2$

De (8) se obtiene el valor del consumo como función de la variable de control, 1, el capital humano, h, y la variable de coestado,  $\gamma_1$ , asociada al stock de capital físico, k:

$$c = \left[ \frac{g^1}{q} \right]^{\frac{1}{q(1-q)-1}} (lh^g)^{\frac{(q-0)(1-s)}{q(1-s)-1}} \quad (16)$$

Incorporando en (9) los valores obtenidos para las tres variables de control, u, v y c, como funciones del cuarto control, 1, y las variables de estado y coestado se obtiene una ecuación para 1:

$$l = M^{\frac{q(1-s)-1}{s}} \left( \frac{g^2}{q} \right)^{\frac{-1}{s}} h^{\frac{(1-s)[q-1(q-1)]-1}{s}} \left( \frac{g^2}{g^1} \right)^{\frac{q(1-s)b-a}{s(b-a)}} \quad (17)$$

donde M denota el factor que relaciona los parámetros, dado por:

$$M = \frac{d(1-a)^q}{1-q} \left[ \frac{a(1-b)}{b(1-a)} \right]^{\frac{ba}{b-a}} \left[ \frac{d(1-a)}{A(1-b)} \right]^{\frac{a}{b-a}}$$

De nuevo, las trayectorias optimales del tiempo dedicado al sector humano son independientes de la cantidad de stock de capital físico.

(16) con la ayuda de (17) puede reescribirse:

$$c = M^{\frac{(q-1)(1-s)}{s}} \left( \frac{I1}{q} \right)^{\frac{1}{q(1-s)-1}} \left( \frac{g2}{q} \right)^{\frac{-(q-1)(1-s)}{s[q(1-s)-1]}} h^{\frac{(q-1)(1-s)(1-l)}{s}} \left( \frac{g2}{g1} \right)^{\frac{[q(1-s)b-a](q-1)(1-s)}{s(b-a)[q(1-s)-1]}} \quad (18)$$

Así, (18) y (17) permiten obtener una nueva formulación de las condiciones de primer orden, ahora como un sistema de ecuaciones diferenciales en términos de las variables de estado y coestado.

De esta forma, utilizando las funciones de producción Cobb-Douglas y eliminando las variables de control por medio de las condiciones optimales algebraicas, (13) y (14) pueden reescribirse como:

$$\dot{g}1 = g1 \left\{ p + sv + p - Ab \left[ \frac{a(1-b)}{b(1-a)} \right]^{\frac{a(b-1)}{b-a}} \left[ \frac{d(1-a)}{A(1-b)} \right]^{\frac{b-1}{b-a}} \left( \frac{g2}{g1} \right)^{\frac{b-1}{b-a}} \right\}, \quad (19)$$

$$\dot{g}2 = g2 \{ q + p - n + sv - G_L [(1-v)k, (1-u-l)h] [1-l(1-l)] \} \quad (20)$$

donde en (19) se ha cambiado  $F_K[vk,uh]$  por su valor como función del ratio  $\gamma1/\gamma2/$ . Haciendo lo mismo con la expresión de  $G_L [(1-v)k, (1-u-l)h]$  se tiene la ecuación para la dinámica de la variable de coestado,  $\gamma2$ :

$$\dot{g}_2 = g_2 \left\{ q + P - N - sv - \frac{(1-q)}{q} M \left( \frac{g_2}{g_1} \right)^{\frac{a}{b-a}} x \right. \\ \left. \left[ 1 - (1-I) M^{\frac{q(1-s)-1}{s}} \left( \frac{g_2}{q} \right)^{\frac{-1}{s}} h^{\frac{(1-s)(q-1)(q-1)-1}{s}} \left( \frac{g_2}{g_1} \right)^{\frac{[q(1-s)b-a]}{s(b-a)}} \right] \right\} \quad (21)$$

Estas expresiones abreviadas muestran, por un lado, que la dinámica de las trayectorias optimales de  $\gamma_1$  sólo depende del ratio  $\gamma_2/\gamma_1$ , y que los valores del stock de capital físico y humano no influyen en ella. Por otro, (21) establece que el stock de capital físico no influye en la evolución optimal de  $\gamma_2$ .

Utilizando las expresiones derivadas anteriormente para las variables de control en términos de las de estado y coestado, se obtienen nuevas formulaciones para las restricciones de los sectores:

$$\dot{k} = A u h \left[ \frac{a(1-b)}{b(1-a)} \right]^{\frac{ba}{b-a}} \left[ \frac{d(1-a)}{A(1-b)} \right]^{\frac{b}{b-a}} \left( \frac{g_2}{g_1} \right)^{\frac{b}{b-a}} - (p + v + n)k - c, \quad (22)$$

$$\dot{h} = d \left[ \frac{a(1-b)}{b(1-a)} \right]^{\frac{ba}{b-a}} \left[ \frac{d(1-a)}{A(1-b)} \right]^{\frac{b}{b-a}} \left( \frac{g_2}{g_1} \right)^{\frac{b}{b-a}} - (l + -u - l)h - (q + v)h \quad (23)$$

Con la ayuda de (15), (17) y (18) estas ecuaciones diferenciales pueden reescribirse:

$$\dot{k} = E_3(g_1, g_2, k, h), \quad \dot{h} = E_4\left(\frac{g_2}{g_1}, g_2, k, h\right) \quad (24)$$

Hasta este punto se han planteado las condiciones de primer orden de optimalidad a través de cuatro ecuaciones diferenciales, (19), (21) y (24). Su no-linealidad y, principalmente, las expresiones complicadas para las dos últimas ecuaciones no permiten obtener una caracterización completa de la dinámica. Por esta razón, para entender el comportamiento de las variables del modelo se necesita introducir métodos numéricos. Posteriormente, utilizando las ecuaciones de  $c$ ,  $1$ ,  $u$  y  $v$  como funciones de las variables de estado y coestado ya obtenidas,

se puede deducir como se comportan las de control. Primero, se determina la trayectoria balanceada de estados estacionarios de la economía.

#### 4 Trayectorias de estado estacionario

En esta sección el estudio se centra en las trayectorias de estado estacionario o de equilibrio del sistema dinámico en términos de las variables de estado y coestado, derivadas anteriormente. El objetivo es obtener soluciones del siguiente sistema de cuatro ecuaciones algebraicas no-lineales:

$$E_1\left(\frac{g^1}{g^2}\right)=0, \quad (25)$$

$$E_2\left(\frac{g^2}{g^1}, g_2, h\right)=0, \quad (26)$$

$$E_3(g^1, g^2, k, h)=0, \quad (27)$$

$$E_4\left(\frac{g^2}{g^1}, g^2, k, h\right)=0 \quad (28)$$

(25) proporciona un ratio  $\gamma^2/\gamma^1$ , que deben satisfacer todas las trayectorias de equilibrio, en términos de los parámetros del modelo:

$$\frac{g^2}{g^1} = \left[ \frac{p + sv + p}{Ab} \right]^{\frac{b-a}{b-1}} \left[ \frac{b(1-a)}{a(1-b)} \right]^a \frac{A(1-b)}{d(1-a)} \quad (29)$$

Reemplazando  $\gamma^2/\gamma^1$  por (29), se puede establecer una nueva ecuación para (26):

$$\Gamma_2^1 + \Gamma_2^2 \left( \frac{g^2}{q} \right)^{\frac{-1}{s}} h^{\frac{(1-s)[q-1](q-1)}{s}} = 0 \quad (30)$$

donde  $\gamma^2/\gamma^1$  denotan constantes dadas por estas expresiones:

$$\Gamma_2^1 = q + p - n + sv - d(1-a) \left[ \frac{p + sv + p}{Ab} \right]^{\frac{a}{b-1}} \left[ \frac{a(1-b)}{b(1-a)} \right]^{\frac{a}{b-a}}$$

$$\Gamma_2^2 = (1-l)d(1-a) \left[ \frac{qd(1-a)}{1-q} \right]^{\frac{q(1-s)-1}{s}} \Gamma_2^{2*}$$

$$\Gamma_2^2 = \left[ \frac{p+sv+p}{ab} \right]^{\frac{(qb-a)l-s}{(b-1)s}} \left[ \frac{a(1-b)}{b(1-a)} \right]^{\frac{a[s-b+a]}{(b-1)s}} \left[ \frac{A(1-b)}{d(1-a)} \right]^{\frac{q(1-s)}{s}}$$

Hay que notar que la ecuación de estado estacionario para la variable  $\gamma_2$ , también permite obtener una relación para los valores de equilibrio de 1, lo que puede hacerse utilizando (20), que establece la siguiente ecuación de equilibrio:

$$1-l(1-l) = \frac{q+p-n+sv}{G_L[(1-v)k, (1-u-l)h]}$$

Reescribiendo  $G_L[(1-v)k, (1-u-l)h]$  como una función de  $\gamma_2/\gamma_1$ , y utilizando su expresión de equilibrio, tras algunas manipulaciones se tiene:

$$1-l(1-l) = \frac{q+p-n+sv}{d(1-a) \left[ \frac{p+sv+p}{Ab} \right]} \frac{\frac{a}{b-1} \left[ \frac{a(1-b)}{b(1-a)} \right]^a}{(31)}$$

La expresión (31) prueba que existe un único valor de estado estacionario del tiempo dedicado a las actividades de ocio, 1, para un conjunto de parámetros del modelo dado.

Por otro lado (27) implica

$$F[uk, uh] - (p+v+n)k - c = 0 \quad (32)$$

Utilizando (22) y reemplazando la variable de control u por su valor (15), cálculos tediosos permiten dar una nueva versión de la ecuación de equilibrio para el stock físico, donde se ha introducido el valor de estado estacionario de  $\gamma_2/\gamma_1$ :

$$(K_1 - K_3)^k - K_2 h - K_4 \left( \frac{gl}{q} \right)^{\frac{1}{q(1-s)-1}} h^{\frac{l(q-1)(1-s)}{q((1-s)-1)}} = 0 \quad (33)$$

con  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  y  $K_4$  representando las siguientes constantes:

$$K = \frac{1-a}{b-a} (p+sv+p), K = K_2^* \left[ \frac{p+sv+p}{Ab} \right]^{\frac{b}{b-1}} \left\{ -l + \frac{q+p-n+sn}{d(1-a)} \left[ \frac{p+sv+p}{Ab} \right]^{\frac{-a}{b-1}} \left[ \frac{b(1-a)}{a(1-b)} \right]^a \right\}$$

$$K_2^* = \frac{A}{1-l} \frac{a(1-b)}{b-a}, K_3 = p + v + n,$$

$$K_4 = \frac{1}{1-l} \left\{ -l + \frac{q+p-n+sv}{d(1-a)} \left[ \frac{p+sv+p}{Ab} \right]^{\frac{-a}{b-1}} \left[ \frac{b(1-a)}{a(1-b)} \right]^{\frac{(q-1)(1-s)}{q(1-s)-1}} \right\}$$

La última ecuación de equilibrio (28) es equivalente a

$$G[(1-v)k, (1-u-l)h] - (q+v)h = 0,$$

y traduciendo el primer término a variables de estado y coestado, después de algunas operaciones se tiene la siguiente versión simplificada:

$$H_1 h - H_2 k = 0 \quad (34)$$

con  $H_1$  y  $H_2$  dadas por las siguientes expresiones que conllevan los parámetros del modelo:

$$H_1 = H_1^* d \left[ \frac{p+sv+p}{Ab} \right]^{\frac{a}{b-1}} \left[ \frac{a(1-b)}{b(1-a)} \right]^a - (q+v)$$

$$H_1^* = \frac{b(1-a)}{(1-l)(b-a)} \left\{ -l + \frac{q+p-n+sv}{d(1-a)} \left[ \frac{p+sv+p}{Ab} \right]^{\frac{a}{b-1}} \left[ \frac{a(1-b)}{b(1-a)} \right]^a \right\}$$

$$H_2 = \frac{db(1-a)}{b-a} \left[ \frac{p+sv+p}{Ab} \right]^{\frac{a}{b-1}} \left[ \frac{a(1-b)}{b(1-a)} \right]^a - (q+v)$$

(34) permite obtener una relación lineal entre los valores de equilibrio del stock de capital físico y humano,  $k = \frac{H_1}{H_2 h}$ . La última ecuación establece un rayo de puntos de equilibrio en el plano de fase  $k - h$ , como el determinado en [1] y [4] en un contexto análogo, pero con modelos más simples.

También se pueden derivar los valores de equilibrio de todas las variables que aparecen en el sistema dinámico como funciones de una de estas variables. Sin pérdida de generalidad se elige  $\gamma_2$ , y se expresa la otra variable de coestado,  $\gamma_1$ , y las de estado,  $k$  y  $h$ , parametrizadas por  $\gamma_2$ . Denotando por  $\Gamma_1$  el segundo término de (29), se tiene directamente:

$$g_1 = \frac{g_2}{\Gamma_1} \quad (35)$$

Reemplazando en (30)  $k$  como una función de  $h$  y utilizando (35), se puede establecer:

$$h = \left( \left[ \begin{array}{c} -\Gamma_2^2 \\ \Gamma_2^1 \end{array} \right]^s \frac{\mathbf{q}}{g_2} \right)^{\frac{1}{(1-s)[I(q-1)-q]+1}} \quad (36)$$

que permite escribir la siguiente parametrización para los valores de equilibrio del stock de capital físico:

$$k = \frac{H_1}{H_2} \left( \left[ \begin{array}{c} -\Gamma_2^2 \\ \Gamma_2^1 \end{array} \right]^s \frac{\mathbf{q}}{g_2} \right)^{\frac{1}{(1-s)[I(q-1)-q]+1}} \quad (37)$$

Finalmente, se obtiene una ecuación algebraica que establece la relación que debe verificarse entre los parámetros del modelo para tener trayectorias de equilibrio. Esta ecuación se establece manipulando (33) tras utilizar (36), y puede escribirse como:

$$(K_1 - K_3) \frac{H_1}{H_2} - K_2 - K_4 \left[ \frac{1}{\Gamma_1} \right]^{\frac{1}{q(1-s)-1}} \left[ \frac{-\Gamma_2^2}{\Gamma_2^1} \right]^{\frac{s}{q(1-s)-1}} = 0 \quad (38)$$

Una vez probada la existencia de una trayectoria balanceada de equilibrio para cada conjunto de valores de parámetros que satisfaga (38), nuestro objetivo para futuros trabajos es determinar, para cada uno de estos conjuntos, el comportamiento de equilibrio de la transición hacia el rayo de estados estacionarios. En [1] y [4] se realiza un análisis similar, pero para modelos mucho más simples, con dinámicas que pueden determinarse completamente utilizando las variables de estado y coestado. Con los supuestos considerados en estos trabajos, el sistema de ecuaciones diferenciales puede integrarse analíticamente, mientras que el que aquí se estudia requiere una integración numérica.

Las técnicas numéricas han empezado a utilizarse con frecuencia para resolver modelos dinámicos que no pueden tratarse analíticamente. Distintos autores han adaptado y desarrollado algoritmos numéricos para obtener soluciones numéricas de diferentes modelos de crecimiento. En un futuro, basándonos en una versión discreta del Principio de Programación Dinámica, se pretende construir soluciones aproximadas de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman relacionada con nuestro problema de control de horizonte infinito, por medio de una discretización en tiempo así como en las variables de estado. El objetivo es utilizar el método numérico para caracterizar la dinámica del modelo de crecimiento endógeno planteado, implementando el algoritmo a través de las expresiones recursivas obtenidas para la función valor aproximada, y teniendo en cuenta las propiedades de homogeneidad de las funciones políticas y valor.

El estudio se centrará en el comportamiento de las trayectorias optimales dependiendo de las condiciones iniciales y de los valores de los parámetros elegidos. Se analizará la influencia que un aumento de los stocks de capital físico y humano tiene sobre la evolución de las trayectorias optimales, y también se estudiarán los efectos de los distintos tantos de crecimiento en la dinámica del modelo. Uno de los objetivos es determinar si los distintos conjuntos de parámetros que permiten la existencia de una trayectoria de crecimiento balanceado,

proporciona diferentes comportamientos de las trayectorias optimales, y cuando sea posible se intentará explicar porque aparecen estas diferencias.

## Referencias

- [1] CABALLÉ, J., SANTOS, M. "On Endogenous Growth with Physical and Human Capital". *Journal of Political Economy* 101, 1993, pp. 1042-1067.
- [2] CHAMLEY, C. "Externalities and Dynamics in Models of "Learnig or Doing"". *Intemational Economic Review* 34, 1993, pp. 583-609.
- [3] KING, R., PLOSSER, C.I., REBELO, S. "Production, Growth and Business Cycles: I. The Basic Neoclassical Model". *Journal of Monetary Economics* 21, 1988, pp. 309-341.
- [4] LADRÓN DE GUEVARA, A., ORTIGUEIRA, S., SANTOS, M. "Equilibrium Dynamics in Two-Sector Models of Endogenous Growth". Working Paper no. 94-14, Universidad Carlos III de Madrid.
- [5] LUCAS, R.E. "On the Mechanics of Economic Development". *Journal of Monetary Economics* 22, 1988, pp. 3-42.
- [6] MULLIGAN, C.B., SALA-I-MARTIN, X. "Transitional Dynamics in Two-Sector Models of Endogenous Growth". *The Quarterly Journal of Economics* 108, 1993, pp. 739-775.
- [7] REBELO, S. "Long-Run Policy Analysis and Long-Run Growth". *Journal of Political Economy* 99, 1991, pp. 500-521.
- [8] ROMER, P.M. "Increasing Returns and Long-Run Growth". *Journal of Political Economy* 94, 1986, pp. 1002-10037.
- [9] ROUBINI, N., MILESI-FERRETTI, G.M. "Taxation And Endogenous Growth in Open Economies". N.B.E.R. Working Paper no. 4881. October 1994.

- [10] ROUBINI, N., MILESI-FERRETTI, G.M. "Optimal Taxation of Human and Physical Capital in Endogenous Growth Models". N.B.E.R. Working Paper no. 4882. October 1994.