

# Operadores total aritmético y media aritmética para variables estadísticas discretas de dimensión uno y sus transformadas uniformes. Aplicaciones.

Dpto Métodos cuantitativos  
para la Economía  
Universidad de Murcia

## 1. DISTRIBUCIONES DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS O RELATIVAS EN FORMA SEMIELABORADA DE TRANSFORMACIONES UNIFORMES DE VV.EE. DISCRETAS DE DIMENSIÓN UNO

Sin otro fin que clarificar ideas en párrafos posteriores daremos los siguientes estadillos, acordes al epígrafe del párrafo:

Distribución de frecuencias de una v.e. discreta unidimensional

$x_i$	$n_i$	$f_i$
(1)	(2)	(3)
$x_1$	$n_1$	$n_1/n$
.....	.....	.....
$x_k$	$n_k$	$n_k/n$
	$n = \Sigma$	$1 = \Sigma$

Distribución de frecuencias semielaborada de una transformación uniforme.

$y(x_i)$	$n_i$	$f_i$
(1)	(2)	(3)
$y(x_1)$	$n_1$	$n_1/n$
.....	.....	.....
$y(x_k)$	$n_k$	$n_k/n$
	$n = \Sigma$	$1 = \Sigma$

Distribución de frecuencias semielaborada de dos vv. ee. transformadas uniformes

$y_1(x_i)$	$n_i$	$f_i$
(1)	(2)	(3)
$y_1(x_1)$	$n_1$	$f_1$
.....	.....	.....
$y_1(x_k)$	$n_k$	$f_k$

$y_2(x_i)$	$n_i$	$f_i$
(1)	(2)	(3)
$y_2(x_1)$	$n_1$	$f_1$
.....	.....	.....
$y_2(x_k)$	$n_k$	$f_k$

Distribución de frecuencias semielaborada de una v. e. combinación lineal de dos transformadas uniformes

$c_1 y_1(x_i) + c_2 y_2(x_i)$	$n_i$	$f_i$
(1)	(2)	(3)=(1)/(2)
$c_1 y_1(x_1) + c_2 y_2(x_1)$	$n_1$	$f_1$
.....	.....	.....
$c_1 y_1(x_k) + c_2 y_2(x_k)$	$n_k$	$f_k$

## 2. OPERADORES TOTAL ARITMÉTICO Y MEDIA ARITMÉTICA PARA VARIABLES ESTADÍSTICAS DE DIMENSIÓN UNO Y SUS TRANSFORMADAS UNIFORMES.

Recordemos el significado de un *operador* consiste en la realización de un proceso rutinario de operaciones parciales y el *resultado de un operador* es el logro final del proceso.

Por ejemplo, el operador derivada, aplicado a una función de una variable, consiste en seguir los siguientes cuatro pasos:

- Obtener los valores de una función antes y después de incrementar la variable independiente.
- Despejar el incremento de la variable dependiente.
- Obtener el cociente incremental.
- Determinar el límite del cociente incremental, para el incremento de la variable independiente tendiendo a cero.

El *operador total aritmético* es aplicable a distribuciones de frecuencias absolutas, tanto de vv.ee. discretas de dimensión uno, como, de transformaciones uniformes en forma semielaborada.

El operador se denota en todo caso como  $T[ ]$ .

Las fases del operador  $T[ ]$ , aplicado a una distribución de frecuencias absolutas sin transformar son:

- Enumerar de forma ordenada las marcas de clase de una variable estadística discreta de dimensión uno.
- Proporcionar la distribución de frecuencias absolutas de tales marcas de clase correspondientes a una muestra específica de tamaño  $n$  o a una variable estadística
- Multiplicar cada marca de clase por las frecuencia absoluta y registrar el producto.
- Aplicar el operador sumatorio al registro de productos.

El *resultado total aritmético* lo denotaremos con  $T[x]$ , y valdrá  $T[x] = \sum x_i n_i$

$x_i$	$n_i$	$x_i n_i$
(1)	(2)	(3) = (1) (2)
$x_1$	$n_1$	$x_1 n_1$
.....	.....	.....
$x_k$	$n_k$	$x_k n_k$
	$n$	$T[x]$
	(12) = $\Sigma$	(13) = $\Sigma$

Las fases del operador  $T[ ]$  aplicado a una distribución semielaborada de frecuencias absolutas transformada son:

- Enumerar los valores transformados uniformes de las marcas de clase de una variable estadística discreta de dimensión uno y registrarlos tal cual (o sea sin reordenarlos por causa de existir valores repetidos por ser la transformación sobreyectiva.
- Proporcionar la distribución de frecuencias absolutas de la secuencia de valores transformados correspondientes.

c) En la distribución de frecuencias absolutas de la transformación uniforme en forma semielaborada, multiplicar cada valor transformado de una marca de clase por la frecuencia absoluta y registrar el producto.

d) Aplicar el operador sumatorio al registro de productos.

El *resultado total aritmético* lo denotaremos con  $T[y(x)]$  y valdrá:  $T[y(x)] = \sum y(x_i) \cdot n_i$

$y(x_i)$	$n_i$	$y(x_i)n_i$
(1)	(2)	(3) = (1) (2)
$y(x_1)$	$n_1$	$y(x_1)n_i$
.....	.....	.....
$y(x_k)$	$n_k$	$y(x_k)n_i$
$n$		$T[y(x)]$
(12) = $\Sigma$		(13) = $\Sigma$

El operador media aritmética es aplicable a las distribuciones de frecuencias relativas, en los mismos casos anteriores. El operador se designa con  $M[ ]$ .

Las fases serán las mismas, tanto en el 1er caso como en el 2º, y sólo habremos de cambiar por frecuencias relativas en las respectivas fase b) y c) .

El *resultado* lo denotaremos con  $M[x]$ , en el 1er caso, y con  $M[y(x)]$ , en el 2º. Sus valores serán:

$$M[x] = \sum x_i f_i ; M[y(x)] = \sum y(x_i) \cdot f_i$$

### 3. PROPIEDADES DE AMBOS OPERADORES.

Previa: Aplicar el *operador m.a.*  $M[ ]$  a una v.e.transformada o inicial da un **resultado común**  $a$  dividir entre  $n$  el resultado de aplicar el *operador t.a.*  $T[ ]$

1º Grupo: Si se cambia de escala en todos los valores de una v.e. transformada introduciendo un *factor fijo*  $c$  y luego se aplica el operador *t.a.* o el *m.a.* se obtiene el mismo resultado que cambiando la escala del *t.a.* o *m.a.* de la v.e.:

$$T[c y(x)] = c T[y(x)] \Rightarrow T[c x] = c T[x]$$

$$M[c y(x)] = c M[y(x)] \Rightarrow M[c x] = c M[x]$$

2º Grupo: Son **coincidentes** los **resultados** de aplicar uno de los dos operadores a una transformación suma de dos transformaciones o sumar los resultados de aplicarlo a cada una de ellas:

$$T[y_1(x) + y_2(x)] = T[y_1(x)] + T[y_2(x)]$$

$$M[y_1(x) + y_2(x)] = M[y_1(x)] + M[y_2(x)]$$

3º Grupo: Cualquiera de los dos operadores aplicado a una combinación lineal de dos vv.ee. transformadas coincide con la misma combinación lineal de los *resultados* de los operadores en las vv.ee.:

$$T[c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)] = c_1 T[y_1(x)] + c_2 T[y_2(x)]$$

$$M[c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)] = c_1 M[y_1(x)] + c_2 M[y_2(x)]$$

4º Grupo: Las generalizaciones del grupo 3º para varias vv.ee.

$$T[ c_1 y_1 (x) + \dots + c_L y_L (x) ] = c_1 T[y_1 (x) ] + \dots + c_L T[ y_L (x) ]$$

$$M[ c_1 y_1 (x) + \dots + c_L y_L (x) ] = c_1 M[y_1 (x)] + \dots + c_L M[y_L (x)]$$

Demostraremos el caso 1º del tercer grupo.

$$\begin{aligned} T[ c_1 y_1 (x) + c_2 y_2 (x) ] &= \sum n_i [c_1 y_1 (x_i) + c_2 y_2 (x_i) ] = (\sum c_1 n_i y_1 (x_i)) + (\sum c_2 n_i y_2 (x_i)) = \\ &= c_1 (\sum n_i y_1 (x_i) ) + c_2 (\sum n_i y_2 (x_i) ) = c_1 T[ y_1 (x) ] + c_2 T[ y_2 (x) ] \end{aligned}$$

Hagamos  $c_1 = c$ ;  $c_2 = 0$  y queda demostrado el 1º Grupo de propiedades, o bien, tomemos  $c_1 = 1$ ;  $c_2 = 1$  y queda demostrado el 2º grupo de propiedades.

Los demás casos tienen una demostración análoga y sencilla.

#### 4 APLICACIONES: CÁLCULO SISTEMÁTICO DE PROMEDIOS.

La fórmula general de Foster  $G[r] = \sqrt[r]{M(x^r)}$ , como es bien conocido, es monótona creciente con el parámetro  $r$  y coincidente con los promedios:  $M_h < M_g < \bar{x} < M_c$

Nombre promedio	Notación promedio	Formula promedio
Media armónica	$M_h$	$1 / M(\frac{1}{x})$
Media geométrica	$M_g$	$10^{M[\log x]}$
Media aritmética	$\bar{x}$	$M[x]$
Media cuadrática	$M_c$	$\sqrt{M(x^2)}$

Aplicemos el operador total aritmético  $T(\ )$  a las variable transformadas de características

funcionales:  $y_1 (x) = 1/x$  ;  $y_2 (x) = \log x$  ; la v.e. sin transformar:  $e$  .  $y_3 (x) = x^2$

$x_i$	$n_i$	$x_i / n_i$	$\log x_i$	$n_i \log x_i$	$x_i \cdot n_i$	$x_i^2 n_i$
(1)	(2)	(3) = (1)(2)	(4)	(5) = (2)(4)	(6) = (1) (2)	(7) = (1)(6)
$x_1$	$n_1$	$x_1 / n_1$	$\log x_1$	$n_1 \log x_1$	$x_1 \cdot n_1$	$x_1(x_1 n_1)$
...	...	.....	.....	.....	.....	.....
$x_k$	$n_k$	$x_k / n_i$	$\log x_k$	$n_k \log x_k$	$x_k \cdot n_k$	$x_k(x_k n_k)$
	$n$	$T[1/x]$		$T[\log x]$	$T[x]$	$T[x^2]$
	(12)= $\Sigma$	(13)= $\Sigma$		(15)= $\Sigma$	(16)= $\Sigma$	(17)= $\Sigma$

Dividamos sistemáticamente entre  $n$  las sumas (13), (15), (16) y (17) y tendremos: la potencia de exponente  $r$  del promedio correspondiente.

$$1/ m_h = M(1/x) = T(1/x) / n$$

$$\log m_g = M[\log x] = T(\log x) / n$$

$$\bar{x} = M[x] = T(x) / n$$

$$m_c^2 = M[x^2] = T(x^2) / n$$

En conclusión los promedios responderán a las fórmulas:

$$m_h = n / T(1/x) : \quad mg = 10^{M(\log x)} ; \quad \bar{x} = M(x); \quad ; \quad m_c = \sqrt{M(x^2)} M$$

##### 5 APLICACIONES: CALCULO DE MOMENTOS.

La fórmula de los momentos ordinarios de orden  $r$  puede ser:  $a_r = M[x^r]$ , pero para mejorar las aproximaciones utilizaremos:  $a_r = \frac{1}{n} T[x^r]$ .

Además, se facilita notablemente el diseño de cálculo, si para obtener la expresión  $x_i^r$  se utiliza la fórmula recurrente:  $x_i^r = x_i (x_i^{r-1})$

En términos prácticos los productos deben hacerse por filas, aprovechando el multiplicando fijo, conforme a las reglas establecidas en la segunda fila del estadillo siguiente, para finalmente sumar por columnas.

$x_i$	$n_i$	$x_i n_i$	$x_i^2 n_i$	$x_i^3 n_i$	$x_i^4 n_i$
(1)	(2)	(3)=(1)(2)	(4)=(1)(3)	(5)=(1)(4)	(6)=(1)(5)
$x_1$	$n_1$	$x_1 n_1$	$x_1(x_1 n_1)$	$x_1(x_1^2 n_1)$	$x_1(x_1^3 n_1)$
.....	.....	.....	.....	.....	.....
$x_k$	$n_k$	$x_k n_k$	$x_k(x_k n_k)$	$x_k(x_k^2 n_k)$	$x_k(x_k^3 n_k)$
	$n$	$T(x)$	$T(x^2)$	$T(x^3)$	$T(x^4)$
	(12) = $\Sigma$	(13) = $\Sigma$	(14) = $\Sigma$	(15) = $\Sigma$	(16) = $\Sigma$

También podemos aplicar la 2ª fórmula del 4º grupo de propiedades del *operador m.a.* para establecer las fórmulas de obtención de momentos centrales a partir de ordinarios.

Se parte de las identidades newtonianas:

$$(x - \bar{x})^r = x^r - r\bar{x}x^{r-1} + \binom{r}{2}\bar{x}^2x^{r-2} - \dots + [-1]^{r-2}\binom{r}{r-2}\bar{x}^{r-2}x^2 + [-1]^{r-1}r\bar{x}^{r-1}x - [-1]^{r-1}\bar{x}^r$$

Y, luego se aplica el operador  $M(\ )$  a los dos miembros:

$$M(x - \bar{x})^r = M(x^r) - r\bar{x}M(x^{r-1}) + \binom{r}{2}\bar{x}^2M(x^{r-2}) - \dots + [-1]^{r-2}\binom{r}{r-2}\bar{x}^{r-2}M(x^2) + [-1]^{r-1}r\bar{x}^{r-1}M(x) - [-1]^{r-1}\bar{x}M(x^0)^r$$

Lográndose la conocida fórmula:

$$m_r = a_r - \bar{x}a_{r-1} + \binom{r}{2}\bar{x}^2a_{r-2} - \dots + [-1]^{r-2}\binom{r}{r-2}\bar{x}^2a_{r-2} + [-1]^{r-2}\binom{r}{r-2}\bar{x}^{r-2}a_2 + [-1]^{r-1}[r-1]\bar{x}^{r-1}a_1 - [-1]^{r-1}\bar{x}^r$$

Con esta operatoria se ha logrado una demostración bastante más breve que si se hubieran utilizado sumatorios.

**Bibliografía:** Acerca del operador derivada la consideramos innecesaria

Existe para el operador esperanza pero no para los operadores de nuestro estudio.

Las fórmulas de los momentos son por supuesto archiconocidas.

La fórmula de Foster puede encontrarse en bibliografía diversa.