

Una aplicación de la programación dinámica a la inversión en carteras.

Inmaculada Masero Moreno
María José Vázquez Cueto
Departamento de Economía Aplicada I
Universidad de Sevilla

0.- Introducción.-

Este trabajo tiene por objetivo mostrar la utilidad de la programación dinámica en la toma de decisiones financiero-empresariales.

Se ilustra con un ejemplo simplificado de una situación real, como es el problema de la modificación de la composición de una cartera, de tal forma que se maximice la "ganancia" en un determinado momento.

Está dividido en cinco apartados. En el primero de ellos se expone la situación real a tratar.

En el segundo apartado se analiza cómo las técnicas de resolución de la programación dinámica son aplicables a este tipo de situaciones, deteniéndonos en la enumeración de las propiedades deseables para la función objetivo.

El apartado tercero formula matemáticamente la situación descrita en el primer apartado, con algunas simplificaciones.

En el cuarto apartado se resuelve el problema aplicando las técnicas de la programación dinámica.

En el quinto y último apartado se extraen las conclusiones y se exponen las líneas de futuras investigaciones.

1.- Planteamiento del problema.-

Supongamos un inversor que posee una cartera bien diversificada y una determinada cantidad de dinero en efectivo disponible para invertir en la cartera. Su objetivo es disponer en un determinado momento, momento en que piensa liquidar la cartera, de la mayor cantidad de dinero posible. Su situación en dicho momento dependerá de las acciones que haya seguido, compras y ventas, desde el momento inicial, t_0 , hasta el momento final, t_n , y del tipo de interés del mercado.

2.- Programación dinámica.-

El periodo de tiempo $[t_0, t_n]$ podemos descomponerlo en tantas etapas como puntos del tiempo en los que deberá el inversor tomar una decisión. Sean t_0, t_1, \dots, t_{n-1} , en tal caso, el valor en t_n dependerá de la decisión tomada en t_{n-1} , ésta, a su vez, dependerá de la decisión tomada en t_{n-2} , y así hasta la decisión tomada en el instante t_0 . El problema es, pues, susceptible de ser tratado como un problema recursivo y en su resolución podemos aplicar las técnicas de la programación dinámica.

La función objetivo, planteada como el valor final de la cartera, va a ser aditiva, suma de las "ganancias" generadas por los valores, y, por tanto va a verificar las condiciones necesarias de factorización y separabilidad de la programación dinámica.

3.- Formulación matemática.-

Como caso particular de la situación planteada en el primer apartado, y para ilustrar la utilidad de la programación dinámica, vamos a formular matemáticamente el problema, con algunas simplificaciones.

* El periodo de tiempo objeto de estudio $[t_0, t_n]$ va a ser considerado como una única etapa, en el sentido de que sólo tomaremos una decisión en el momento t_0 y maximizaremos el resultado de la misma en el momento final $t_n = t_0 + 1$.

* En el momento inicial, t_0 , disponemos de P_0 ptas en efectivo y a_0 títulos. Ambos son vectores de m componentes, siendo m el número de sectores en los que realizamos nuestra inversión:

$$P_0 = (P_{01}, P_{02}, \dots, P_{0m})$$

$$a_0 = (a_{01}, a_{02}, \dots, a_{0m})$$

siendo P_{0k} la cantidad de dinero disponible para invertir en títulos del sector k , y a_{0k} el número de títulos que inicialmente se poseen del sector k .

* La decisión a tomar en t_0 es la modificación de la cartera, que vendrá como consecuencia de las modificaciones hechas en nuestra participación en cada sector, Las variables de decisión son, pues, ¿cuántos títulos del sector k vender, V_{0k} ? y ¿cuántos títulos del sector k comprar, C_{0k} ?, $k=1,2,\dots,m$. Tenemos, pues, $2m$ variables de decisión.

* Conocidos V_{0k} y C_{0k} , $k=1,2,\dots,m$, la composición de la cartera, que mantendremos hasta su liquidación, será de a_{1k} , $k=1,2,\dots,m$, títulos, siendo

$$a_{1k} = a_{0k} - V_{0k} + C_{0k}$$

* Si denotamos por P_{vk} y P_{ck} respectivamente a los precios de venta y compra de los títulos del sector k , el efectivo disponible para invertir en títulos del sector k , después de la decisión tomada en t_0 , es P_{1k} , $k=1,2,\dots,m$, siendo

$$P_{1k} = P_{0k} + P_{vk} V_{0k} - P_{ck} C_{0k}$$

* El valor de liquidación de la cartera en el instante $t_n=t_0+1$ depende del tipo de interés correspondiente al periodo $[t_0, t_n]$, i , que supondremos constante y conocido; del valor de liquidación de los títulos, P_{fk} , $k=1,2,\dots,m$, que supondremos conocido; y de los dividendos, g_k , $k=1,2,\dots,m$, que proporcionan los títulos mantenidos en la cartera, que, a su vez, rendirán intereses.

Valor de liquidación del sector k =

$$P_{1k}(1+i)^{t_n - t_0} + P_{fk} a_{1k} + g_k a_{1k} s_{n/i}$$

$$XY = \sum_{k=1}^m X_k Y_k$$

Denotando por:

La función objetivo se escribe en la forma

$$P_1(1+i)^{t_n - t_0} + P_f a_1 + g a_1$$

hemos simplificado la notación haciendo $g_k = g_k s_{n/i}$.

* Las 2m variables de decisión están sometidas a 7m restricciones que pasamos a desarrollar:

1) El número de títulos a mantener en la cartera debe ser no negativo, $0 \leq C_{0k} - V_{0k} \leq a_{0k}$, $k=1,2,\dots,m$

2) No se debe sobrepasar el dinero disponible para invertir en títulos del sector k, $0 \leq P_{ck} - C_{0k} - P_{vk} V_{0k} \leq P_{0k}$, $k=1,2,\dots,m$.

3) El número de títulos a vender no debe sobrepasar al número de títulos de que se disponía en un principio, $0 \leq V_{0k} \leq a_{0k}$, $k=1,2,\dots,m$.

4) El efectivo a invertir en cada sector es no negativo, $0 \leq C_{0k}$ $k=1,2,\dots,m$.

4.- Formulación del problema en términos de la programación dinámica.-

El problema consiste en maximizar el valor de liquidación sujeto a las restricciones ya conocidas:

$$\max P_I (1+i)^{t_n-t_0} + P_f a_I + g a_I$$

$$s.a.: 0 \leq P_{ck} C_{0k} - P_{vk} V_{0k} \leq P_{0k}$$

$$0 \leq C_{0k} - V_{0k} \leq a_{0k}$$

$$0 \leq V_{0k} \leq a_{0k}$$

$$0 \leq C_{0k}$$

$$k = 1, \dots, m$$

La función objetivo del problema está escrita en términos de las variables a_I y P_I . Las restricciones del problema se hacen sobre las variables C_0 y V_0 . Los vectores P_i , g , P_0 , a_0 , son datos positivos del problema.

La función objetivo anterior está expresada en términos de productos escalares de los vectores del problema. Vamos a desarrollar dichos productos :

$$R = \sum_{k=1}^{k=m} P_{Ik} (1+i)^{t_n-t_0} + \sum_{k=1}^{k=m} P_{fk} a_{Ik} + \sum_{k=1}^{k=m} g_k a_{Ik}$$

Para simplificar la notación, sean:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_k = (1+i)^{t_n-t_0}$$

$$\mathbf{b}_k = P_{fk}$$

$$\mathbf{g}_k = g_k$$

para $k=1,\dots,m$.

Intentamos hacer algunas transformaciones en el problema para que la función a optimizar dependa de las mismas variables que las restricciones. Con este fin, se sustituyen P_{1k} y a_{1k} por las expresiones que se obtienen de las ecuaciones que las relacionan con las otras variables del problema, C_0 y V_0 , y que son respectivamente:

$$P_{1k} = P_{0k} + P_{vk} V_{0k} - P_{ck} C_{0k} \quad k = 1, \dots, m$$

$$a_{1k} = a_{0k} - V_{0k} + C_{0k} \quad k = 1, \dots, m$$

Sustituiremos en la función objetivo las variables anteriores, además agruparemos factores que multipliquen a las nuevas variables que aparecen en la función, con lo que simplificaremos su expresión. El resultado es el siguiente:

$$\begin{aligned} R &= \sum_{k=1}^{k=m} P_{1k} \mathbf{a} + \sum_{k=1}^{k=m} \mathbf{b}_k a_{1k} + \sum_{k=1}^{k=m} \mathbf{g}_k a_{1k} = \\ &= \sum_{k=1}^{k=m} (P_{0k} + P_{vk} V_{0k} - P_{ck} C_{0k}) \mathbf{a} + \\ &+ \sum_{k=1}^{k=m} (\mathbf{b}_k + \mathbf{g}_k) (a_{0k} - V_{0k} + C_{0k}) = \\ &= \sum_{k=1}^{k=m} C_{0k} (\mathbf{b}_k + \mathbf{g}_k - \mathbf{a} P_{ck}) + \sum_{k=1}^{k=m} V_{0k} (\mathbf{a} P_{vk} - \mathbf{b}_k - \mathbf{g}_k) + \\ &+ \sum_{k=1}^{k=m} a_{0k} (\mathbf{b}_k + \mathbf{g}_k) + \sum_{k=1}^{k=m} \mathbf{a} P_{0k} \end{aligned}$$

La función anterior depende ahora de las variables C_0 y V_0 , por lo que hay dos sumandos que al no depender de estas, van a ser constantes y por lo tanto se podría prescindir de ellos en la optimización. El problema sería entonces:

$$\max \sum_{k=1}^{k=m} (\mathbf{b}_k + \mathbf{g}_k - \mathbf{a} P_{ck}) C_{0k} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{k=m} (\mathbf{a} P_{vk} - \mathbf{b}_k - \mathbf{g}_k) V_{0k}$$

$$s.a.: 0 \leq P_{ck} C_{0k} - P_{vk} V_{0k} \leq P_{0k}$$

$$0 \leq C_{0k} - V_{0k} \leq a_{0k}$$

$$0 \leq V_{0k} \leq a_{0k}$$

$$0 \leq C_{0k}$$

$$P_{0k}, P_{vk}, P_{ck}, a_{0k}, \mathbf{a}, \mathbf{b}_k, \mathbf{g}_k > 0 \quad k = 1, \dots, m$$

Introducimos la siguiente notación, sean $C_0 = d_1$ y $V_0 = d_2$, dos vectores reales de m componentes:

$$d_1 = (d_{11}, d_{12}, \dots, d_{1m}) \quad d_2 = (d_{21}, d_{22}, \dots, d_{2m})$$

Y sean las siguientes funciones reales:

$$r_1(d_1) = \sum_{k=1}^{k=m} (\mathbf{b}_k + \mathbf{g}_k - \mathbf{a} P_{ck}) d_{1k} = \sum_{k=1}^{k=m} A_k d_{1k}$$

$$r_2(d_2) = \sum_{k=1}^{k=m} (\mathbf{a} P_{vk} - \mathbf{b}_k - \mathbf{g}_k) d_{2k} = \sum_{k=1}^{k=m} B_k d_{2k}$$

Escribimos el problema utilizando la nueva notación que hemos introducido:

$$\max r_1(d_1) + r_2(d_2)$$

$$s.a.: 0 \leq P_{ck} d_{1k} - P_{vk} d_{2k} \leq P_{0k}$$

$$0 \leq d_{1k} - d_{2k} \leq a_{0k}$$

$$0 \leq d_{1k}$$

$$0 \leq d_{2k} \leq a_{0k}$$

$$P_{0k}, P_{ck}, P_{vk}, a_{0k}, \mathbf{a}, \mathbf{b}_k, \mathbf{g}_k > 0$$

$$k = 1, \dots, m$$

La función objetivo es aditiva por lo que es factorizable y permite abordar el problema para ser resuelto mediante la Programación Dinámica. Las variables de decisión son d_1 y d_2 . EL problema tiene dos etapas. En cada etapa hay m variables de decisión d_{ik} , $i=1,2$ y $k=1,\dots,m$. Las restricciones del problema relacionan las variables d_{1k} y d_{2k} . Hay dos restricciones que hacen esto, por lo tanto tendremos que definir dos tipos de variables de estado. Mediante ellas se deducen las transformaciones de etapa que explican como se pasa de una variable de una etapa a la de la siguiente, es decir, como pasar de d_{1k} a d_{2k} o al revés.

Sean los vectores:

$$X_1 = (X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1m})$$

$$X_2 = (X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2m})$$

donde X_{1k} , X_{2k} con $k=1,\dots,m$, son las variables de estado para las siguientes restricciones:

$$0 \leq P_{ck} d_{1k} - P_{vk} d_{2k} \leq P_{0k} \quad k = 1, \dots, m$$

Dichas variables se definen de la forma siguiente:

$$0 \leq X_{2k} \leq P_{0k}$$

$$X_{1k} - P_{vk} d_{2k} = X_{2k} \quad X_{1k} = X_{2k} + P_{vk} d_{2k}$$

$$X_{1k} = P_{ck} d_{1k} \geq 0$$

para $k=1,\dots,m$.

De aquí se deducen los valores que pueden tomar las variables de decisión:

$$0 \leq d_{2k} \leq a_{0k} \quad k = 1, \dots, m$$

$$0 \leq d_{1k} = \frac{X_{1k}}{P_{ck}} \quad k = 1, \dots, m$$

Sean los vectores:

$$Y_1 = (Y_{11}, Y_{12}, \dots, Y_{1m})$$

$$Y_2 = (Y_{21}, Y_{22}, \dots, Y_{2m})$$

donde Y_{1k}, Y_{2k} , $k=1,\dots,m$, son las variables de estado para las restricciones:

$$0 \leq d_{1k} - d_{2k} \leq P_{0k} \quad k = 1, \dots, m$$

Las definiciones de dichas variables son:

$$0 \leq Y_{2k} \leq a_{0k}$$

$$Y_{1k} - d_{2k} = Y_{2k} \quad -Y_{1k} = Y_{2k} + d_{2k}$$

$$Y_{1k} = d_{1k} \geq 0$$

$$k = 1, \dots, m$$

Y por lo tanto los valores que toman las variables de decisión son:

$$0 \leq d_{2k} \leq a_{0k} \quad k = 1, \dots, m$$

$$0 \leq d_{1k} = Y_{1k} \quad k = 1, \dots, m$$

Las transformaciones de etapa para las primeras k restricciones son:

$$X_{1k} = t_{1k}(X_{2k}, d_{2k}) = X_{2k} + P_{vk} d_{2k} \quad k = 1, \dots, m$$

Y para las k restricciones siguientes:

$$Y_{1k} = T_{1k}(Y_{2k}, d_{2k}) = Y_{2k} + d_{2k} \quad k = 1, \dots, m$$

Aplicamos ahora el Principio de Optimalidad del que se obtienen las relaciones de

recurrencia. Empezamos por optimizar la función objetivo de la primera etapa en d_l . Para ello definimos $f_l(X_l)$ y $f_l(Y_l)$, que son el máximo de la función objetivo de $r_l(d_l)$ relacionando d_l con X_l y con Y_l , respectivamente:

$$\begin{aligned} f_l(X_l) &= \max_{\substack{d_{lk} \equiv \frac{Y_{lk}}{P_{ck}}}} r_l(d_l) = \max_{\substack{d_{lk} \equiv \frac{Y_{lk}}{P_{ck}}}} \sum_{k=l}^{k=m} A_k d_{lk} = \\ &= \sum_{k=l}^{k=m} A_k X_{lk} \\ &= \sum_{k=l}^{k=m} A_k \frac{X_{lk}}{P_{ck}} \end{aligned}$$

Ambos máximos han de ser iguales:

$$f_l(X_l) = f_l(Y_l) \quad - \quad \frac{X_{lk}}{P_{ck}} = Y_{lk} \quad k = l, \dots, m$$

En la segunda etapa se maximiza la suma de la función propia de esta etapa y el máximo que se acaba de obtener, relacionándolo con las variables de esta etapa mediante las transformaciones ya conocidas:

$$\begin{aligned} f_2(X_2) &= \max_{0 \leq d_{2k} \leq a_{0k}} r_2(d_2) + f_l(X_l) = \max_{0 \leq d_{2k} \leq a_{0k}} r_2(d_2) + f_l(X_2 + P_v d_2) = \\ &= \max_{0 \leq d_{2k} \leq a_{0k}} \sum_{k=l}^{k=m} B_k d_{2k} + \sum_{k=l}^{k=m} \frac{A_k}{P_{ck}} (X_{2k} + P_{vk} d_{2k}) = \\ &= \max_{0 \leq d_{2k} \leq a_{0k}} \sum_{k=l}^{k=m} \left[\left(B_k + \frac{P_{vk}}{P_{ck}} A_k \right) d_{2k} + \frac{A_k}{P_{ck}} X_{2k} \right] \text{ con } 0 \leq X_{2k} \leq P_{0k} \\ f_2(Y_2) &= \max_{0 \leq d_{2k} \leq a_{0k}} r_2(d_2) + f_l(Y_l) \equiv \max_{0 \leq d_{2k} \leq a_{0k}} r_2(d_2) + f_l(Y_2 + d_2) = \\ &= \max_{0 \leq d_{2k} \leq a_{0k}} \sum_{k=l}^{k=m} B_k d_{2k} + \sum_{k=l}^{k=m} A_k (Y_{2k} + d_{2k}) = \\ &= \max_{0 \leq d_{2k} \leq a_{0k}} \sum_{k=l}^{k=m} \left[(B_k + A_k) d_{2k} + A_k Y_{2k} \right] \text{ con } 0 \leq Y_{2k} \leq a_{0k} \end{aligned}$$

Al igual que ocurría antes, estas dos funciones han de tener el mismo máximo. Pero a diferencia del caso anterior, éste depende de los valores de los coeficientes que aparecen en las funciones. Para resolver este problema lineal se pueden igualar las dos funciones, con

lo que se obtiene la ecuación de un hiperplano en dimensión 3m. Los valores de d_{2k} , X_{2k} e Y_{2k} se pueden representar perfectamente. Para buscar los valores de estas variables para los que las dos funciones sean iguales, se buscan los puntos de corte del hiperplano con el rectángulo 3m-dimensional que delimitan las variables. Si no se cortan el problema no tiene solución, si se cortan, hay que buscar donde está el valor máximo de la función y además comprobar que sumándole las constantes, de las que se prescindió al optimizar por no depender de las variables, el beneficio es positivo, si no ocurre esto la solución no nos interesa.

5.- Conclusiones.-

La técnica de resolución de la Programación Dinámica se adapta perfectamente a los problemas de inversión en los que hay que tomar decisiones en distintos instantes de tiempo, teniendo en cuenta que cada decisión viene condicionada por las anteriores y condiciona a las posteriores.

El modelo planteado no es más que un ejemplo que pone de manifiesto dicha adaptabilidad. Al considerarse el tipo de interés ,variable fundamental en la toma de decisiones financiero-empresariales, constante y conocido, el método empleado ha sido el de la programación dinámica determinística. Para el caso más general de tipo de interés estocástico, sería la programación dinámica bajo incertidumbre, programación dinámica estocástica, la que resolvería el problema.

Otra posible variante del modelo, más ajustado a la realidad, sería considerar las variables como variables enteras, con lo cuál el problema se trataría como un problema de programación dinámica discreto, ya sea determinístico o estocástico.

De cualquiera de las maneras, la dificultad de la resolución está en el número de variables, que añade complejidad a los cálculos, ya que, conforme aumenta el número de variables, también lo hace el número de cálculos a realizar. El problema final a resolver es un problema de programación lineal, que se puede resolver usando cualquier paquete informático de los disponibles en el mercado para tal uso.

- Bibliografia-

-R. McKendall, S. Zenios, M. Holmer.

Stochastic programming models for portfolio optimization with Mortgage Backed Securities: Comprehensive research guide.
Physica-Verlag, 1994.

-G. L. Nemhauser.

Introduction to Dynamic Programming.
John Wiley & Sons. Inc., 1966.

-L. Cooper. M. Cooper.

Introduction to Dynamic Programming.
Pergamon Press Ltd., 1981.

-M. Sniedovich.

Dynamic Programming.
Marcel Dekker Inc., 1992.