

CRECIMIENTO Y REDISTRIBUCIÓN. ESTRATEGIAS DE NASH EN CICLO ABIERTO

M^a José MACARRO HEREDIA

Departamento de Economía Aplicada.

Universidad de Valladolid

1. INTRODUCCIÓN

Planteamos en este trabajo un juego diferencial de suma no nula entre dos jugadores, trabajadores y capitalistas. Las dos clases sociales intentan obtener el mayor consumo sobre un mismo horizonte temporal de amplitud finita T controlando los trabajadores el porcentaje de consumo sobre el output y los capitalistas la acumulación de capital.

Desde que en 1973 el trabajo de K. Lancaster sobre la *Ineficiencia del Capitalismo* modelizara bajo estos parámetros la distribución y el crecimiento de las modernas sociedades industriales, muchos han sido los autores que han introducido modificaciones a las hipótesis planteadas por Lancaster, podemos citar entre otros a Pohjola, M. (1985), Gradus, R. (1988), Seierstad, A. (1993), Soto, D. (1994). Sin embargo, la versión que Kaitala, V. y Pohjola, M. (1990) proponen es el punto de partida de nuestro trabajo. Estos autores suponen que los capitalistas son retribuidos, dentro de un planteamiento neoclásico, por su participación marginal al producto, pero la diferencia fundamental respecto a los planteamientos de Lancaster es la existencia de una forma de redistribución de la renta que controlan los trabajadores. En este contexto y para una función de producción genérica $f(k)$ plantean un juego diferencial en horizonte infinito.

Concretando estas aportaciones de Kaitala y Pohjola en un modelo en tiempo finito planteado en base a una función de producción potencial, este trabajo, que resuelve el juego diferencial en el contexto no cooperativo, está dividido en cinco apartados. La descripción del modelo y la búsqueda de la estrategia de Nash en ciclo abierto constituyen el contenido de los dos siguientes epígrafes para analizar en el cuarto la incidencia en los consumos alcanzados por los jugadores de variaciones, tanto independientes como simultáneas, en el exponente de la función de producción y en el valor de la tasa de redistribución cuando los jugadores siguen la estrategia obtenida. El trabajo termina con unas conclusiones.

2. EL MODELO

Prescindiendo de la dependencia de las variables con respecto al tiempo para simplificar la notación. consideraremos que el ratio capital-output puede expresarse como:

$$f(k) = k^a, \quad 0 < a < 1$$

donde k es el ratio capital-trabajo.

Se supone que los capitalistas son retribuidos por su participación marginal, aunque esta retribución se ve disminuída por la existencia de una variable x por la que los trabajadores pueden detraer una parte de la renta de los capitalistas.

Si llamamos s al porcentaje de ahorro, el consumo instantáneo de los jugadores puede expresarse, para los trabajadores como:

$$c_w = (1-a)k^a + x$$

y para los capitalistas como la porción de renta no dedicada a la inversión:

$$c_c = (1-s)[ak^a - x] .$$

Sobre un horizonte temporal finito de amplitud T , los consumos de los jugadores vienen representados por las siguientes expresiones para capitalistas y trabajadores respectivamente:

$$J_c = \int_0^T (1-s)[ak^a - x]dt, \quad J_w = \int_0^T [(1-a)k^a + x]dt$$

Pero ¿de qué manera inciden las decisiones de los jugadores en la optimización de estos funcionales?. Los capitalistas controlan el porcentaje de ahorro s que tiene las restricciones propias de este tipo de variables

$$0 \leq s \leq 1$$

y los trabajadores deciden en relación con la tasa de impuestos establecida sobre la remuneración del capital, controlando la redistribución x . Suponemos para esta variable de control las siguientes restricciones:

$$0 \leq x \leq bak^a, \quad 0 < b < 1$$

Debido a esta última restricción sobre el parámetro b conseguimos que aún el valor máximo de la redistribución sea menor que la retribución de los capitalistas, y de esta forma queda eliminada la posibilidad de que este jugador quede al margen en la toma de decisiones.

Si suponemos que el nivel de capital de la economía se corresponde con un valor de $k=k_0$, la evolución dinámica del capital quedará expresada por la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{k} = s[ak^a - x]$$

en función de la porción de renta no consumida.

De esta forma queda planteado el juego diferencial bipersonal de suma no nula entre trabajadores y capitalistas.

3. ESTRATEGIAS DE NASH EN CICLO ABIERTO

Una estrategia es un equilibrio de Nash cuando ninguno de los jugadores tiene incentivo alguno para abandonarla. Nos proponemos obtener una solución del juego aplicando el concepto de estrategia de equilibrio de Nash. Esto supone que, además de situarnos bajo la hipótesis de que la información que poseen del juego los jugadores es simétrica, tengamos que hacer referencia a cuál es el tipo de información de que ambos disponen.

Supondremos entonces que los jugadores en cualquier instante recuerdan únicamente el estado inicial, es decir, la información del juego está estructurada en ciclo abierto.

Debemos resolver simultáneamente los siguientes problemas de control óptimo:

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq x \leq bak^a} J_w &= \int_0^T [(1-a)k^a + x] dt \\ \text{s.a: } \dot{k} &= s(ak^a - x); \quad k(0) = k_0 > 0. \end{aligned}$$

para los trabajadores, y

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq s \leq 1} J_c &= \int_0^T (1-s)(ak^a - x) dt \\ \text{s.a: } \dot{k} &= s(ak^a - x); \quad k(0) = k_0 > 0 \end{aligned}$$

para los capitalistas. Por el Principio del Máximo (Kamien, Schwartz, 1981, pág. 201) y llamando

$$\begin{aligned} H_1(k, \varphi_1, x) &= (1-\alpha)k^\alpha + x + \varphi_1 s(\alpha k^{\alpha-1} - x) \\ H_2(k, \varphi_2, s) &= (1-s)(\alpha k^{\alpha-1} - x) + \varphi_2 s(\alpha k^{\alpha-1} - x) \end{aligned}$$

a los hamiltonianos correspondientes a los problemas planteados, donde φ_1, φ_2 son las variables de coestado asociadas a la restricción del capital para trabajadores y capitalistas respectivamente, de resolver los problemas estáticos asociados obtenemos que los controles admisibles para los trabajadores y las condiciones que garantizan su existencia son:

$$x = \begin{cases} 0 & \text{si } \varphi_1 \geq 1 \\ (0, bak^a) & \text{si } \varphi_1 = 1 \\ bak^a & \text{si } \varphi_1 \leq 1 \end{cases}$$

La variable de coestado φ_1 satisface la ecuación diferencial:

$$\dot{\varphi}_1 = - \frac{\partial L_1}{\partial k} = - a[1 + a(\varphi_1 s + a_1 b - 1)]k^{a-1}$$

con la condición de transversalidad $\varphi_1(T) = 0$, y para los capitalistas:

$$s = \begin{cases} 0 & \text{si } \varphi_1 \leq 1 \\ (0, 1) & \text{si } \varphi_1 = 1 \\ bak^a & \text{si } \varphi_1 \geq 1 \end{cases}$$

debiendo verificar la variable de coestado φ_2 la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{\varphi}_2 = - \frac{\partial L_2}{\partial k} = - a^2(1 - s + \varphi_2 s)k^{a-1}, \varphi_2(T) = 0$$

Las condiciones obtenidas nos indican que las únicas políticas que verifican las condiciones necesarias, para los dos jugadores, de sus respectivos problemas paramétricos son:

$$x = 0, s = 1 ; x = bak^a, s = 1 ; x = bak^a, s = 0$$

de las cuales únicamente para la última se verifica la condición $\varphi_1(T) = \varphi_2(T) = 0$ y por lo tanto ésta será la política terminal.

Al compatibilizar las políticas que los jugadores pueden seguir a lo largo del intervalo de duración del juego, el comportamiento de las variables de coestado correspondientes a ambos problemas nos obliga a considerar dos posibilidades en relación con los parámetros del modelo:

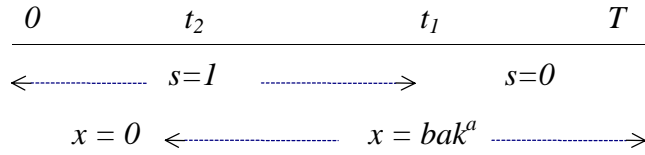
$$\text{i) } \frac{1 - a(1 - b)}{a} < 1, \quad \text{ii) } \frac{1 - a(1 - b)}{a} \geq 1$$

Cuando los parámetros a y b verifican la condición $\frac{1 - a(1 - b)}{a} < 1$, la estrategia de equilibrio de Nash en ciclo abierto es:

$$\begin{aligned} x^* &= 0 & s^* &= 1 & \text{en } [0, t_2] \\ x^* &= bak^a & s^* &= 1 & \text{en } (t_2, t_1] \end{aligned}$$

$$x^* = bak^a \quad s^* = 0 \quad \text{en } (t_1, T]$$

que gráficamente podemos representar a través del siguiente esquema:



siendo los momentos de cambio:

$$t_1 = T - \frac{1}{a^2} k_{t_1}^{1-a}$$

$$t_2 = \frac{a(1-b)}{a(2-b) - [a - (1-a)(1-b)] [2(1-a(1-b))]^{\frac{a-1}{a}}} T +$$

$$+ \frac{[a - (1-a)(1-b)] [2(1-a+ab)]^{\frac{a-1}{a}} - a}{a(1-a) \{ a(2-b) - [a - (1-a)(1-b)] [2(1-a+ab)]^{\frac{a-1}{a}} \}} k_0^{1-a}$$

La evolución del capital viene descrita por las siguientes expresiones:

$$k_t^{1-a} = k_0^{1-a} + a(1-a)t \quad \text{en } [0, t_2]$$

$$k_t^{1-a} = k_{t_2}^{1-a} + a(1-a)(1-b)(t - t_2) \quad \text{en } (t_2, t_1]$$

$$k_t = k_{t_1} \quad \text{en } (t_1, T] .$$

El valor de los funcionales objetivo para trabajadores y capitalistas respectivamente:

$$J_w = \frac{[1-a(1-b)](a+1-b)}{a^2(1-b)} k_{t_1} - \frac{1-a}{a} k_0$$

$$J_c = \frac{1-b}{a} k_{t_1}$$

Hay un primer intervalo en que ambos jugadores consienten que el capital crezca al mayor ritmo que el modelo permite, para ello los trabajadores prescinden de la tasa de redistribución y los capitalistas utilizan el valor máximo para la tasa de ahorro. En este primer período los consumos de ambos jugadores son los más pequeños posibles. Un segundo intervalo en que el capital sigue creciendo pero a un ritmo menor, ya que se sigue invirtiendo en la misma proporción que antes pero los trabajadores alcanzan el valor máximo de redistribución, que aumenta proporcionalmente a la acumulación de capital hasta t_1 , momento en el que los capitalistas

deciden expandir su consumo no invirtiendo hasta el final del horizonte temporal. En este último período, debido a la decisión adoptada por los capitalistas, el capital permanece constante en el nivel alcanzado en el instante t_1 .

Supongamos ahora que los parámetros del juego satisfacen la relación $\frac{1-a(1-b)}{a} \geq 1$, en este caso ambos jugadores cambian de política simultáneamente, estructurándose la estrategia óptima con un único momento de cambio:

$$\begin{array}{ccc} 0 & t_1 & T \\ \hline x = 0, s = 1 & x = bak^a, s = 0 & \end{array}$$

siendo $t_1 = aT - \frac{1}{a}k_0^{1-a}$

La evolución del capital para esta estrategia viene descrita por las siguientes relaciones:

$$k_t^{1-a} = k_0^{1-a} + a(1-a)t \quad \text{en } [0, t_1]$$

$$k_t = k_{t_1} \quad \text{en } (t_1, T]$$

y el valor de los funcionales objetivo para trabajadores y capitalistas respectivamente:

$$J_w = \frac{1+a(b-a)}{a^2} [a^2(1-a)T + a k_0^{1-a}]^{\frac{1}{1-a}} - \frac{1-a}{a} k_0$$

$$J_c = \frac{1-b}{a} [a^2(1-a)T + a k_0^{1-a}]^{\frac{1}{1-a}}$$

Se considera un primer intervalo con una redistribución nula manteniendo los capitalistas un crecimiento de la inversión al no consumir. En el segundo intervalo ambos jugadores optan por el máximo consumo manteniéndose el capital constante en el nivel alcanzado en t_1 .

Las estrategias obtenidas en todos los casos verifican las condiciones suficientes propuestas por Kamien M. I. y Schwartz N. L. (pág.220).

4. VARIACIÓN DE LOS PARÁMETROS DEL MODELO

Nos planteamos estudiar la evolución de los consumos óptimos de los jugadores cuando éstos siguen la estrategia de Nash en ciclo abierto en función de variaciones en los parámetros a , b del modelo. Sin embargo, desde el punto de vista teórico no podemos consentir una variación

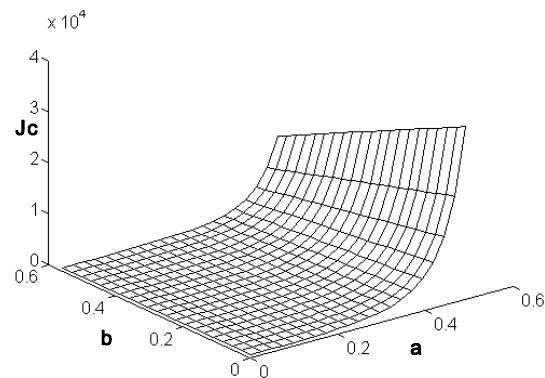
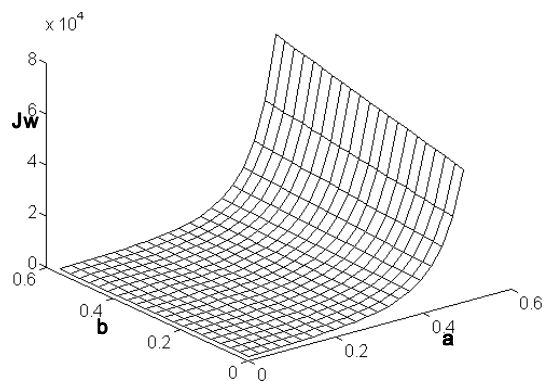
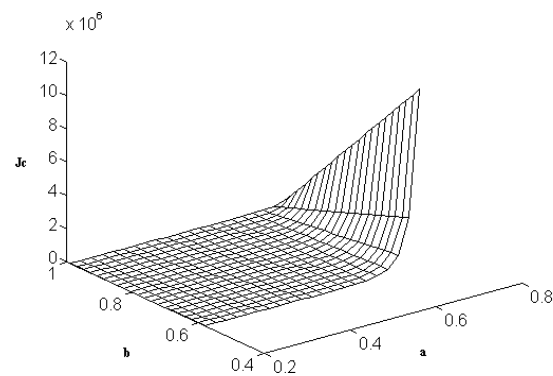
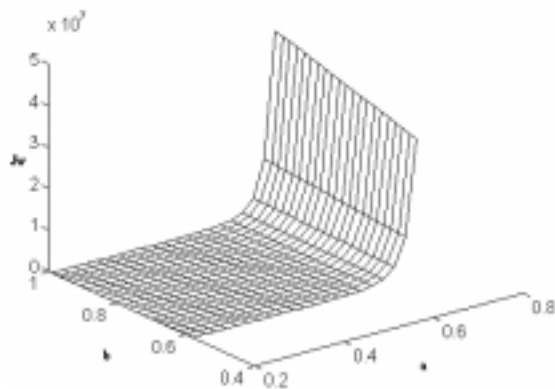
anárquica para dichos parámetros, éstos deben sujetarse a las condiciones obtenidas para el cociente $\frac{1-a(1-b)}{a}$. Nos limitamos en este estudio al supuesto $\frac{1-a(1-b)}{a} \geq 1$ de manera que la estrategia de Nash en ciclo abierto se desarrolla siempre con un único momento de cambio y de acuerdo con el siguiente esquema

$$\begin{array}{c} 0 \qquad \qquad \qquad t_1 \qquad \qquad \qquad T \\ \hline x = 0, s = 1 \qquad \qquad \qquad x = bak^a, s = 0 \end{array}$$

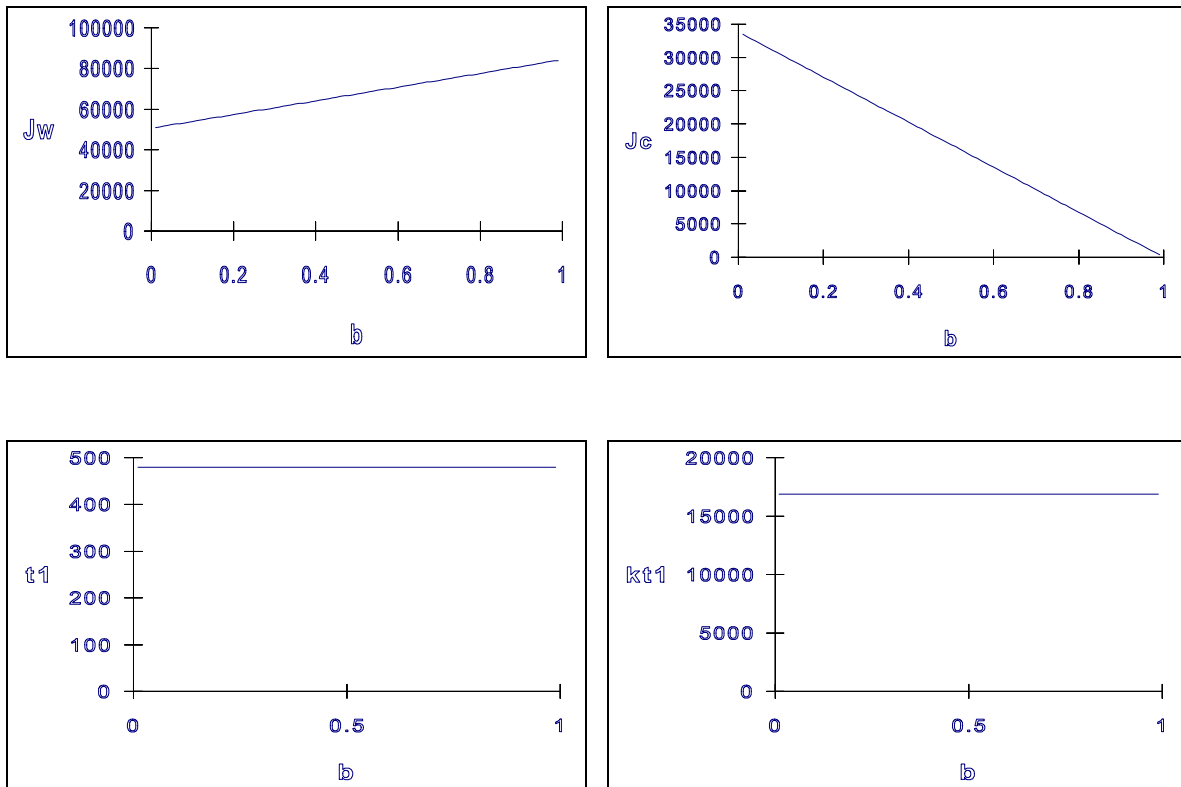
En este sentido, compatibilizando los valores que los parámetros a y b pueden tomar, obtenemos dos casos:

- i) $a \in [0.2, 0.7]$, $b \in [0.58, 1)$
- ii) $a \in (0, 0.5]$, $b \in (0, 0.57]$

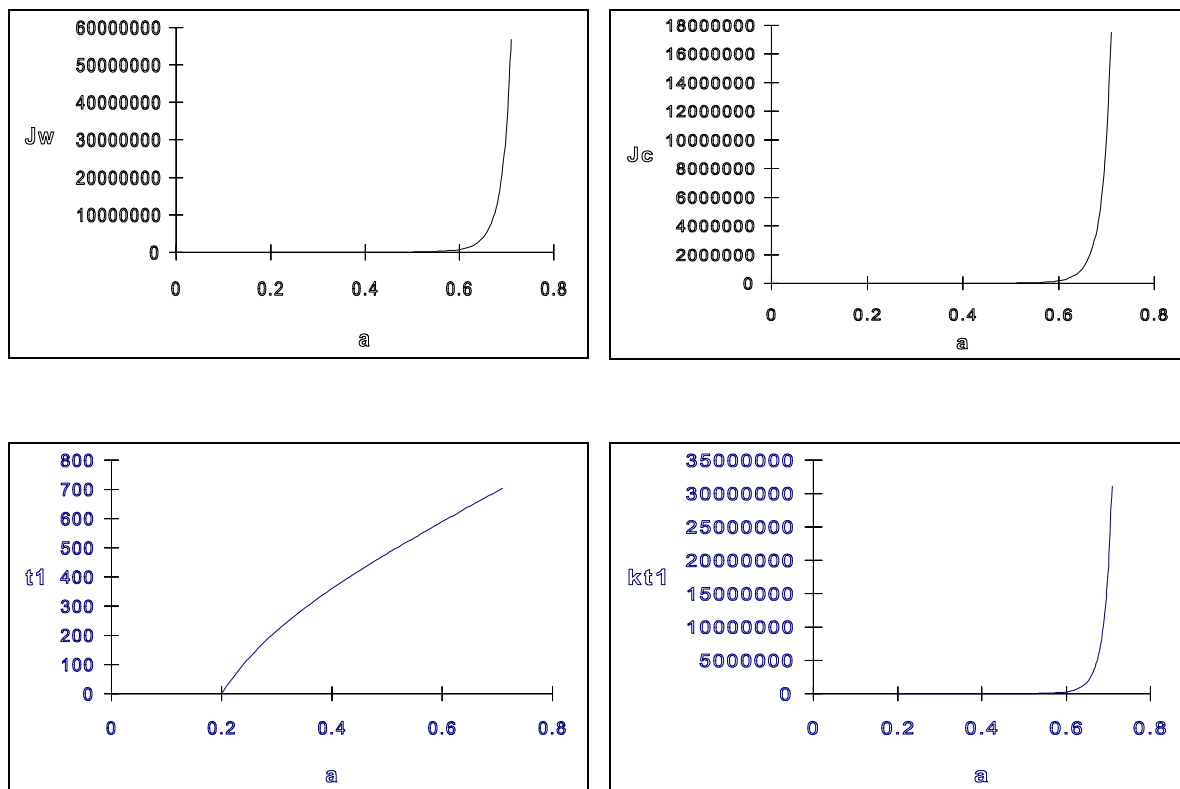
Así, partiendo de unos valores $k_0 = 100$, $T = 1000$ podemos observar en los gráficos siguientes que el consumo de ambos jugadores crece en el mismo sentido que a pero en sentido contrario a b .



Fijado el grado de homogeneidad de la función de producción en $a = 0.5$ por ejemplo, podemos ver que si el porcentaje máximo que puede detraerse vía impuestos de la retribución de los capitalistas crece, también lo hace el funcional objetivo de los trabajadores, a la vez que los capitalistas ven como decrece su consumo. Ésto es debido únicamente al consumo de los jugadores en el último subintervalo del horizonte temporal, pues cualquiera que sea el valor de la tasa de redistribución, fijado a , el momento t_1 , y por lo tanto el capital alcanzado en este instante permanecen constantes en $t_1 = 480$ y $k_{t_1} = 16900$. A continuación representamos gráficamente esta situación:



Sin embargo, como podemos observar en los gráficos siguientes, si fijamos b , por ejemplo en $b = 0.6$, una variación en el exponente de la función de producción produce efectos muy diferentes: Cuando a crece, también lo hacen los funcionales de ambos jugadores porque también evoluciona el momento de cambio t_1 y por lo tanto el capital alcanzado en dicho instante.



5. CONCLUSIONES

Entrando en el análisis de los resultados obtenidos observamos que cuando se dan las hipótesis sobre la estructura de información del juego planteadas y los jugadores siguen la estrategia de Nash obtenida, sus acciones van únicamente encaminadas a conseguir el mayor valor posible para su funcional objetivo, dada la estrategia del otro jugador: En un primer período ambos jugadores dirigen sus esfuerzos a procurar el crecimiento del capital que les proporcione en el tramo final un nivel de consumo aceptable. Para conseguir esto, los trabajadores prescinden primero de la redistribución para luego considerar su valor más alto y los capitalistas dedican toda su renta a la inversión en el primer período y al consumo en el último tramo del horizonte temporal.

Las estrategias óptimas obtenidas dependen del cumplimiento de ciertas relaciones en función de los parámetros del modelo, pero estas condiciones impuestas a a y b solamente dan lugar a un desfase en la toma de decisiones de los jugadores que, en unos casos cambian de política simultáneamente y en otros en momentos diferentes. Sin embargo en la última parte del trabajo se pone de manifiesto la incidencia que sobre el consumo óptimo de los jugadores y el nivel de capital alcanzado en la economía tienen los valores numéricos asignados a los

parámetros a y b . En este sentido los trabajadores ven crecer su consumo óptimo cuando lo hacen tanto el grado de homogeneidad de la función de producción como el porcentaje establecido sobre la remuneración de los capitalistas que determinará el valor de la redistribución. Para los capitalistas sin embargo, el consumo crece en el mismo sentido que el grado de homogeneidad pero en sentido contrario al del parámetro b .

El crecimiento del nivel de capital está íntimamente relacionado con la evolución del momento de cambio y éste únicamente depende de la variación del grado de homogeneidad de la función de producción.

BIBLIOGRAFÍA

- Ba_ar, T. y Olsder, G. J. (1995): *Dynamic Noncooperative Game Theory*. Academic Press, London.
- Gradus, R. (1988): "The Reaction of the Firm on Governmental Policy: A Game Theoretical Approach". *Optimal Control Theory and Economic Analysis*. Vol. 3, págs. 265-290.
- Kaitala, V. y Pohjola, M. (1990): "Economic Development and Agreeable Redistribution in Capitalism: Efficient Game Equilibria in a two-class Neoclassical Growth Model". *International Economic Review*. Vol. 31, nº 2, págs. 421-438.
- Kamien, M. I. y Schwartz, N. L. (1981): *Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*. North Holland, New York.
- Lancaster, K. (1973): "The Dynamic Inefficiency of Capitalism". *Journal of Political Economy*. Vol. 81, págs. 1092-1109.
- Petit, M. L. (1990): *Control Theory and Dynamic Games in Economic Policy Analysis*. Cambridge University Press, New York.
- Pohjola, M. (1985): "Growth, Distribution and Employment Modelled as a Differential Game". *Optimal Control Theory and Economic Analysis 2*. (G. Feichtinger Ed.) North-Holland, Amsterdam, págs. 265-290.
- Seierstad, A. (1993): "The Dynamic Inefficiency of Capitalism". *Journal of Economic Dynamics and Control*. Vol. 17, págs. 877-886.
- Soto M. D. (1994): "Distribución, Crecimiento y Empleo. Una Solución no Cooperativa". *VIII Reunión Anual ASEPELT. España*. Vol. II, págs. 39-46.