

EL ANALISIS DE LA TOLERANCIA EN PROGRAMACION FRACCIONADA

MULTIOBJETIVO

M^a TERESA AREVALO QUIJADA

AMPARO M^a MARMOL CONDE

ASUNCION ZAPATA REINA

Departamento Economía Aplicada I

Universidad de Sevilla

1.- Introducción

El interés de la programación fraccionada lineal radica en su aplicabilidad en una amplia variedad de campos como la planificación agrícola, las carteras de inversiones y los modelos de mínimo malgasto. El análisis de sensibilidad tiene gran importancia pues permite asegurar la permanencia de una determinada solución ante variaciones en los datos que la determinan.

Ultimamente, se viene trabajando desde una nueva perspectiva en el análisis de sensibilidad. El método, llamado análisis de la tolerancia, es una metodología para el tratamiento de las perturbaciones de los coeficientes en los problemas de optimización y proporciona medidas fácilmente interpretables de la sensibilidad de las soluciones ante variaciones simultáneas e independientes de los parámetros. No requiere la especificación de direcciones de crecimiento y decrecimiento como la regla 100% y pretende evitar también la dificultad que tiene el análisis multiparamétrico clásico, que da lugar a una región crítica de difícil manejo para el decisor.

Wendell (1985) y Ravi y Wendell (1986) realizaron un estudio de la tolerancia de todos los coeficientes del problema en programación lineal uniobjetivo. Hansen, Labbé y Wendell (1989) estudian la tolerancia de los pesos en el caso multiobjetivo lineal. Dutta, Rao y Tiwari (1992) han considerado el análisis de la tolerancia en el caso uniobjetivo fraccionado lineal, en términos de los datos del problema, obteniendo expresiones de la tolerancia con respecto a los datos de un problema lineal equivalente.

El objeto de este trabajo es el estudio de la sensibilidad de las soluciones eficientes del problema fraccionado lineal multiobjetivo con respecto a los pesos que las generan, desde el punto de vista de esta nueva metodología.

En la sección 2 se aborda el problema fraccionado lineal multiobjetivo. Conocida una solución eficiente, obtenida a partir de unos pesos de importancia de los objetivos que proporciona el decisor, establecemos la expresión del porcentaje de tolerancia máxima de forma

que los pesos o ponderaciones de los objetivos puedan desviarse simultánea e independientemente del valor estimado y la solución eficiente no varíe. La expresión obtenida depende de los datos que aparecen en la tabla simplicial asociada a la solución básica eficiente. En la sección 3 se desarrolla una aplicación a modo de ilustración y en la sección 4 se presentan las conclusiones.

2.- Tolerancia de los pesos en la programación fraccionada multiobjetivo.

Un problema de programación fraccionada lineal multiobjetivo con los mismos denominadores (PFLMO), se define de la siguiente forma:

$$\max \left[q_1(x) = \frac{c^1 x + a_1}{d^1 x + b}, \dots, q_p(x) = \frac{c^p x + a_p}{d^p x + b} \right]$$

$$s.a. x \in X = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b, x \geq 0, A \in M_{m,n}, b \in \mathbb{R}^m\}$$

donde X es un conjunto no vacío, acotado y tal que no hay en él ningún punto que anule los denominadores; $c^r, d^r \in \mathbb{R}^n$ y $a^r, b \in \mathbb{R}$, $r=1, \dots, p$.

Definición 1.- $x^* \in X$ es una solución eficiente o no dominada de (PFLMO) si

$$\neg x \in X / q_j(x) \geq q_j(x^*), j=1, \dots, p;$$

$$\exists i \text{ tal que } q_i(x) > q_i(x^*)$$

En el caso de un problema (PFLMO) con iguales denominadores, las soluciones eficientes vienen caracterizadas por ser soluciones de problemas ponderados dado que la transformación biyectiva de Charnes y Cooper (1962) permite establecer la equivalencia entre el problema (PFLMO) y un problema lineal multiobjetivo, cuyas soluciones eficientes son soluciones óptimas de un problema ponderado lineal. De este modo, y deshaciendo la transformación de Charnes y Cooper, las soluciones eficientes del problema (PFLMO) coinciden con soluciones óptimas de un problema ponderado fraccionado lineal.

Sea $W = \{w \in \mathbb{R}^p / w_r > 0, r=1, \dots, p\}$ un conjunto de pesos positivos. Para cada w de este conjunto, la solución del problema ponderado (PFw):

$$\max \sum_{j=1}^p w_j \frac{c^j x + a_j}{d^j x + b}$$

$$s.a. Ax \leq b,$$

$$x \geq 0$$

es una solución del problema (PFLMO). Los pesos o ponderaciones de los objetivos representan la importancia relativa que el decisor asigna a cada objetivo y la solución eficiente que se obtiene depende de la elección de estos pesos. Así pues, es importante analizar el impacto sobre la solución de posibles variaciones en los pesos estimados.

Una vez obtenida una solución eficiente del problema fraccionado lineal multiobjetivo para un vector de pesos determinado $w=(w_1,...,w_p)$, con el fin de analizar las perturbaciones simultáneas e independientes de tales pesos, consideramos el problema multiparamétrico (PMP) que aparece a continuación:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^p (w_j + g_j w'_j) \frac{c^j x + a_j}{d^j x + b} \\ \text{s.a.} \quad & Ax \leq b, \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Sea x^* una solución básica eficiente del problema (PFLMO) obtenida a partir del vector de pesos w . La matriz de restricciones del problema puede descomponerse como $A=[B,N]$, donde B es la base asociada a x^* .

Definición 2.- Un número no negativo es una **tolerancia permitida** τ para las perturbaciones de los pesos si se mantiene óptima la misma base, siempre que el valor absoluto de cada perturbación γ_j no exceda τ .

Un número no negativo se dice que es la **tolerancia máxima** τ^* para las perturbaciones de los pesos si es el máximo de las tolerancias permitidas.

Si $w'_j=w_j$, γ_j representan perturbaciones multiplicativas del valor estimado del peso w_j y a τ^* se le llama porcentaje de tolerancia. Si $w'_j=1$, se trata de perturbaciones aditivas. Si algún peso se conoce exactamente a priori, podemos suprimir la perturbación haciendo $w'_j=0$. Esto ocurre, por ejemplo, cuando se consideran los pesos en función de uno de ellos, normalizando al hacer $w_1=1$, $w'_1=0$. En el caso de perturbaciones multiplicativas, que es el caso que trataremos en la aplicación, τ^* representa el porcentaje máximo en el que todos los pesos pueden desviarse simultánea e independientemente de su valor estimado sin que varíe la solución eficiente, por lo que si el decisor está seguro de que los pesos de importancia se mantienen en esos márgenes, entonces la solución obtenida utilizando los pesos estimados es la solución óptima del problema.

Mediante la transformación de variables de Charnes y Cooper, $t=1/(d^j x + \beta)$, $y=tx$, obtenemos un problema lineal multiobjetivo equivalente a (PFLMO):

$$\begin{aligned}
& \max (c^{1t}y + \mathbf{a}_1t, \dots, c^{pt}y + \mathbf{a}_pt) \\
& \text{s.a. } Ay - bt \leq 0 \\
& d^t y + \mathbf{b}t = 1 \\
& y \geq 0, t > 0
\end{aligned}$$

Dado un vector de ponderaciones w , puede obtenerse una solución eficiente de (PFLMO) mediante la resolución del siguiente problema ponderado (PLw):

$$\begin{aligned}
& \max \sum_{j=1}^p w_j (c^{jt}y + \mathbf{a}_jt) \\
& \text{s.a. } Ay - bt \leq 0 \\
& d^t y + \mathbf{b}t = 1 \\
& y \geq 0, t > 0, w_j \geq 0
\end{aligned}$$

en el que nos basaremos para la obtención de una expresión de la tolerancia máxima τ^* . Sea el problema perturbado correspondiente:

$$\begin{aligned}
& \max \sum_{j=1}^p (w_j + \mathbf{g}_j w_{j'}) (c^{jt}y + \mathbf{a}_jt) \\
& \text{s.a. } Ay - bt \leq 0 \\
& d^t y + \mathbf{b}t = 1 \\
& y \geq 0, t > 0, w_j \geq 0
\end{aligned}$$

que es un problema lineal, donde $w_{j'}$ ($j=1, \dots, p$) son pesos dados, y \mathbf{g}_j parámetros asociados a estos.

A continuación establecemos la relación entre las matrices básicas asociadas a una solución del problema (PFLMO) y su correspondiente solución del (PLw).

Lema 1.- Sea x^* una solución básica del problema (PFLMO) e (y^*, t^*) una solución básica del problema ponderado equivalente (PLw). Sea \underline{A} la matriz de coeficientes de las restricciones de (PLw), es decir, $\underline{A} = \begin{bmatrix} d^t & \mathbf{b} \end{bmatrix}$. Sea \underline{B} la base correspondiente a (y^*, t^*) y J el conjunto de índices de variables no básicas. Entonces $\underline{B} = \begin{bmatrix} d_B^t & \mathbf{b} \end{bmatrix}$ donde B y d_B son la parte básica de la matriz A y del vector d para el problema (PFLMO), respectivamente.

Demostración.-

El denominador de las funciones objetivo fraccionadas es no nulo y, al ser una función continua, puesto que es lineal, debe mantener en el conjunto factible el mismo signo. Hay que tener en cuenta que, como la variable t es positiva por hipótesis, es siempre variable básica, por lo que aparece en la base la columna correspondiente a dicha variable. Podemos suponer pues que el denominador es siempre positivo; en caso contrario, multiplicamos numerador y denominador por -1 y ya tendríamos el denominador positivo.

Sea x^* la solución óptima del problema ponderado fraccionado, entonces $x^* = y^*/t^*$, donde (y^*, t^*) es la solución óptima del problema lineal equivalente. Supongamos que las variables básicas son y_1^*, \dots, y_m^*, t^* . Luego $y_j^* = t^* x_j^*$, $j=1, \dots, m$ son variables básicas. Así, las columnas básicas del problema fraccionado, que son las correspondientes a x_1^*, \dots, x_m^* , son las mismas que las del problema lineal equivalente, además de la columna correspondiente a t . Queda probado por tanto que $\underline{B} = \begin{bmatrix} d_B^t & b \end{bmatrix}$

A continuación establecemos la expresión de la tolerancia máxima de una solución eficiente con respecto a los pesos que la generan en el problema (PFLMO).

Teorema 1.- Dada una solución básica eficiente del problema (PFLMO), obtenida a partir de w , la tolerancia τ^* viene dada por:

$$t^* = \min_{j \in J} t_j$$

$$t_j = \frac{-\sum_{r=1}^p w_r (\bar{c}_j^r - q_r(x^*) \bar{d}_j)}{\sum_{r=1}^p w'_r |\bar{c}_j^r - q_r(x^*) \bar{d}_j|}$$

donde

$$\bar{c}_j^r = c_j^r - c_B^r B^{-1} A_{.j},$$

$$\bar{d}_j = d_j - d_B^t B^{-1} A_{.j}$$

son los costes reducidos para los coeficientes c_j^r y d_j y J , el conjunto de variables no básicas.

Demostración.-

Hansen, Labbé y Wendell (1989) establecen la expresión de la tolerancia τ^* para un problema lineal multiobjetivo

$$\max [c^t x]$$

$$s.a. \quad Ax \leq b, \quad x \geq 0, \quad A \in M_{m \times n}, \quad b \in \mathbb{R}^m$$

como

$$t^* = \min_{j \in J} \left\{ t_j = \frac{- \sum_{r=1}^p w_r (c_j^r - c_B^{rt} B^{-1} A_{.j})}{\sum_{r=1}^p w'_r / |c_j^r - c_B^{rt} B^{-1} A_{.j}|} \right\}$$

donde J es el conjunto de variables no básicas.

Dado el problema lineal equivalente, la tolerancia para el problema (PFLMO) se determina de la siguiente forma

$$t^* = \min_{j \in J} \left\{ t_j = \frac{- \sum_{r=1}^p w_r (c_j^r - c_{\underline{B}}^{rt} \underline{B}^{-1} \underline{A}_{.j})}{\sum_{r=1}^p w'_r / |c_j^r - c_{\underline{B}}^{rt} \underline{B}^{-1} \underline{A}_{.j}|} \right\}$$

Sea $\underline{A} = \begin{bmatrix} d^t & b \end{bmatrix}$, \underline{B} la base óptima y J es el conjunto de variables no básicas. Por el lema 1, \underline{B} puede expresarse como $\underline{B} = \begin{bmatrix} d_B^t & b \end{bmatrix}$. Así pues,

$$c_{\underline{B}}^{rt} \underline{B}^{-1} \underline{A}_{.j} = (c_B^{rt}, a) \begin{bmatrix} \underline{B}_{11} & \underline{B}_{12} \\ \underline{B}_{21} & \underline{B}_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_{.j} \\ d_{.j} \end{pmatrix}$$

donde el cálculo de la inversa, \underline{B}^{-1} , se realiza en función de las cajas de la matriz particionada \underline{B} y queda

$$\underline{B}^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{B}_{11} = B^{-1} (I - \frac{1}{d_B^t B^{-1} b + b} b d_B^t B^{-1}) & \underline{B}_{12} = \frac{B^{-1} b}{d_B^t B^{-1} b + b} \\ \underline{B}_{21} = \frac{-d_B^t B^{-1}}{d_B^t B^{-1} b + b} & \underline{B}_{22} = \frac{1}{d_B^t B^{-1} b + b} \end{bmatrix}$$

Entonces, operando con esta expresión, el coste reducido de la variable j-ésima del

problema equivalente es:

$$c_j^r - c_B^r B^{-1} A_{.j} = (c_j^r - c_B^r B^{-1} A_{.j}) - \frac{c_B^r B^{-1} b + a_r}{d_B^r B^{-1} b + b} (d_j - d_B^r B^{-1} A_{.j}) = \bar{c}_j^r - q_r(x^*) \bar{d}_j$$

donde

$$\begin{aligned}\bar{c}_j^r &= c_j^r - c_B^r B^{-1} A_{.j} \\ \bar{d}_j &= d_j - d_B^r B^{-1} A_{.j}\end{aligned}$$

son los costes reducidos en este problema para los coeficientes c^r y d , $r=1,\dots,p$ y se sigue que la tolerancia máxima viene dada por la expresión:

$$t^* = \min_{j \in J} \left\{ t_j = \frac{- \sum_{r=1}^p w_r (\bar{c}_j^r - q_r(x^*) \bar{d}_j)}{\sum_{r=1}^p w'_r |\bar{c}_j^r - q_r(x^*) \bar{d}_j|} \right\} -$$

Puede observarse que esta expresión de la tolerancia es muy fácil de manejar dado que, una vez obtenida una solución eficiente del problema ponderado mediante algún algoritmo simplicial, disponemos de todos los datos necesarios para evaluar la tolerancia sin necesidad de pasar por el problema lineal equivalente, ni de cálculos adicionales.

Además el procedimiento de obtención de la tolerancia permite encontrar un punto extremo eficiente adyacente a la solución eficiente original. El índice j tal que $\tau^* = \tau_j$ proporciona valores de w a partir de los cuales la solución básica factible deja de ser eficiente. Así pues, una vez obtenida la tolerancia máxima es posible determinar la solución "más cercana" a la dada en el sentido de mínima variabilidad porcentual sobre los pesos en $|\cdot|_\infty$. Considerando las siguientes perturbaciones

$$\begin{aligned}\text{si } \bar{c}_j^r - q_r(x^*) \bar{d}_j &> 0, \text{ entonces } \mathbf{g}_r = \mathbf{t}^* \\ \text{si } \bar{c}_j^r - q_r(x^*) \bar{d}_j &< 0, \text{ entonces } \mathbf{g}_r = -\mathbf{t}^* \\ \text{si } \bar{c}_j^r - q_r(x^*) \bar{d}_j &= 0, \text{ entonces } \mathbf{g}_r, \text{ cualquiera}\end{aligned}$$

se obtiene solución múltiple. Al realizar un cambio de base en la tabla asociada se obtiene un nuevo punto extremo que será la solución eficiente más cercana en el sentido indicado.

3.- Una aplicación.

Sea una compañía que fabrica dos productos P_1 y P_2 . Los costes y las demandas de capital requeridas son proporcionales a las actividades individuales, con unos costes fijos de 200 dólares y una demanda fija de capital de 400 dólares. Además, por exigencias de mercado, la producción de P_2 supera a la de P_1 como mucho en 200 unidades. Los datos de la producción se fijan en la tabla:

Tabla 1. Demanda por unidad de producto

Capacidad disponible		P_1	P_2
Máquinas (horas)	800	1	3
Capital propio	1400	4	2
Beneficio por unidad		1	2
Empleo		5	3
Contaminación		3	2,5

Un objetivo de la compañía es la maximización de la rentabilidad del capital propio empleado. Debido a la demanda fija de capital, se dejan 1000 dólares (1400-400) para la demanda variable de capital. Para poder recibir ayudas estatales al desarrollo empresarial, la compañía maximiza el empleo por capital propio, con un nivel de empleo fijo de mantenimiento de 100 horas. En la normativa en vigor de la Mancomunidad de municipios, se penaliza la contaminación según el tamaño de la empresa, por lo que se minimiza la contaminación por capital propio. Así, queda un problema de programación fraccionada lineal con tres objetivos, la rentabilidad, el empleo y la contaminación, todos en relación al capital propio, que se formula como:

$$\begin{aligned} \max & \left(\frac{x_1 + 2x_2 - 200}{4x_1 + 2x_2 + 400}, \frac{5x_1 + 3x_2 + 100}{4x_1 + 2x_2 + 400}, \frac{-3x_1 - 2.5x_2}{4x_1 + 2x_2 + 400} \right) \\ \text{s.a.} \quad & -x_1 + x_2 \leq 200 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 800 \\ & 4x_1 + 2x_2 \leq 1000 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

donde x_i son las unidades de los productos P_i ($i=1,2$) que deben fabricarse. Supongamos que el decisor establece un vector de pesos $w=(3,6,1)$, se obtiene una solución eficiente del problema múltiple, de modo que, fabricando 140 unidades de P_1 y 220 de P_2 , se alcanzan unos valores de rentabilidad de 19/70, empleo de 73/70 y contaminación de 97/140.

Vamos a calcular el porcentaje de tolerancia de esta solución ante perturbaciones

multiplicativas en los pesos. Los datos necesarios aparecen en la siguiente tabla eficiente correspondiente a la solución básica eficiente obtenida:

				d	4	2	0	0	0	
				c ³	-3	-2.5	0	0	0	
				c ²	5	3	0	0	0	
d _B	c _B ³	c _B ²	c _B ¹	B\c ¹	1	2	0	0	0	b
4	-3	5	1	P ₁	1	0	0	-	3/10	140
								1/5		
2	-2.5	3	2	P ₂	0	1	0		-1/10	220
								2/5		
0	0	0	0	P ₃	0	0	1	-	2/5	120
								3/5		
				c _j ³ -z _c ³ _j	0	0	0	-	-1/10	q ^{1*} =19/70
								3/5		
				c _j ² -z _c ² _j	0	0	0	-	-12/10	q ^{2*} =73/70
								1/5		
				c _j ¹ -z _c ¹ _j	0	0	0		13/20	q ^{3*} =-97/140
								2/5		
				d _j -z _d _j	0	0	0	0	-1	

El porcentaje de tolerancia máxima, obtenida mediante la expresión del teorema 1 considerando $w'_j=w_j$, es la siguiente: $\tau_4=13/17$, $\tau_5=11/35$, luego $\tau^*=11/35$. La tolerancia es aproximadamente del 31.42% Esto quiere decir que el decisor puede desviarse en este porcentaje de sus pesos estimados (3,6,1) y la solución (140,220) sigue siendo solución eficiente del problema multiobjetivo. La región de tolerancia de los pesos, que aparece en la gráfica 1, es

$$w_1 \in [72/35, 138/35]$$

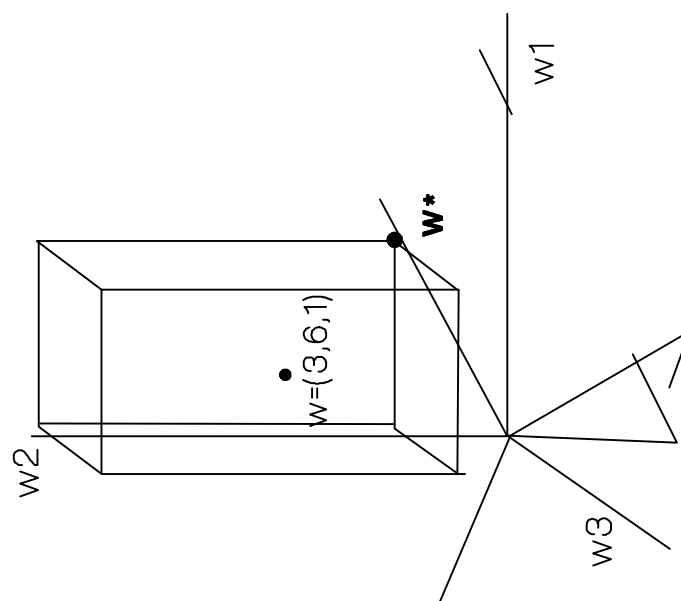
$$w_2 \in [144/35, 276/35]$$

$$w_3 \in [24/35, 46/35]$$

Dado que $\tau^*=\tau_5$, el vector de pesos con el que se puede encontrar un punto extremo

adyacente eficiente es uno de los ocho vértices de la región rectangular de tolerancia y se obtiene calculando $w_r \pm \tau_5 w_r$, y es $(138/35, 144/35, 24/35)$ (señalado en la gráfica 1 como w^*), que permite obtener la solución eficiente adyacente, introduciendo en la base la variable de holgura de la tercera restricción y sacando de la base la holgura de la primera restricción. Obsérvese que este vector de ponderaciones es proporcional a $(23, 24, 4)$, es decir, si la importancia relativa de los objetivos pasa a ser la indicada por este vector, se obtendría otra solución eficiente alternativa, que consiste en producir 50 unidades del producto P_1 y 250 unidades del producto P_2 , y que es la solución más cercana en el sentido señalado.

Gráfica 1.- Tolerancia de los pesos



4.-CONCLUSIONES.

En programación fraccionada lineal multiobjetivo, pueden obtenerse soluciones eficientes del problema múltiple a partir de ponderaciones de los objetivos que representan la importancia relativa que el decisor asigna a éstos. Debido a que es difícil establecer con exactitud los pesos de los objetivos del problema a optimizar, se trabaja con estimaciones de los mismos, por lo que es preciso realizar un análisis de la sensibilidad de las soluciones ante modificaciones en los pesos de importancia que proporciona el decisor.

El estudio de la tolerancia de las soluciones ante cambios simultáneos e independientes de los pesos proporciona un rectángulo en R^n en el que los pesos pueden variar de modo que se siga manteniendo la misma solución eficiente. Independientemente del método utilizado para encontrar dicha solución, la expresión de la tolerancia es fácil de obtener dado que los problemas

fraccionados sólo es necesario disponer de una tabla tipo simplex como la que aparece en el ejemplo. Además, la determinación de la tolerancia permite obtener un vector de pesos que proporciona un punto extremo adyacente, que es solución eficiente para este vector de pesos.

Puede incluirse el análisis de la tolerancia de los pesos en cualquier algoritmo interactivo que encuentre la solución más satisfactoria para el decisor mediante una función de utilidad aditiva en los objetivos, ayudando al decisor en el proceso de elección de la solución.

BIBLIOGRAFIA

- Charnes,A. y Cooper,.W.W. (1962). "Programming with linear fractional functionals". Naval Research Logistics Quaterly 9, pp. 181-185.
- Dutta,D.; Rao,J.R. y Tiwari,R.N. (1992): "Sensitivity analysis in fractional programming- the tolerance approach". International Journal of Systems Sciences 23, 5, 823-832.
- Hansen,P.; Labbé,M.; Wendell,R. (1989): "Sensitivity analysis in multiple objective linear programming: the tolerance approach". E.J.O.R., 38, pp.63-69.
- Ravi,N. y Wendell,R. (1989): "The tolerance approach to sensitivity analysis of matrix coefficients in linear programming". Management Science 35, nº9, 1106-1119.
- Wendell,R. (1985): "The tolerance approach to sensitivity analysis in linear programming". Management Science 31, nº5, 564-578.