

Mayorías cualificadas cuando los votantes manifiestan gradualmente sus preferencias

José Luis GARCÍA LAPRESTA
BONIFACIO LLAMAZARES RODRÍGUEZ

Universidad de Valladolid
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Dep. de Economía Aplicada (Matemáticas)

1 Introducción

En los procedimientos clásicos de votación los agentes manifiestan sus preferencias de forma binaria: tan solo señalan qué opción es preferida, o bien se muestran indiferentes. En este trabajo se parte de una información más rica y realista en la que los agentes no solo informan de qué opciones prefieren, sino que evalúan numéricamente la intensidad de sus preferencias ante las diferentes parejas de opciones. Con estas premisas se establecen y estudian una amplia gama de preferencias colectivas correspondientes a, una regla de agregación que generaliza los sistemas de votación por mayoría simple, por mayoría absoluta y otras mayorías cualificadas, recogiendo con gran fidelidad la forma de preferir de los votantes.

Cuando consideremos relaciones de preferencia ordinarias sobre un conjunto de opciones X , tomaremos como noción primitiva la de preferencia (estricta) mediante una relación binaria asimétrica $P[\forall x, y \in X \ xPy \Rightarrow \text{no } yPx]$. La relación de indiferencia asociada, I , reflejará la ausencia de preferencia: $xIy \Leftrightarrow \text{no } xPy \text{ y } \text{no } yPx$ y la relación de preferencia no estricta asociada englobará preferencia estricta e indiferencia, $R = P \cup I: xRy \Leftrightarrow xPy \text{ o } xIy$. De esta construcción se deducen las siguientes consecuencias: R es completa $[\forall x, y \in X (xRy \text{ o } yRx)]$ y, por tanto, reflexiva $[\forall x \in X \ xRx]$; I es reflexiva $[\forall x \in X \ xIx]$ y simétrica $[\forall x, y \in X \ xIy \Rightarrow yIx]$; $P \cap I = \emptyset$ $[\forall x, y \in X \ xPy \Rightarrow \text{no } xIy]$; y $P = (R^{-1})^c$ $[\forall x, y \in X \ xPy \Leftrightarrow \text{no } yRx]$.

1.1 Relaciones binarias difusas

Dado un conjunto no vacío X , llamado universo, en la teoría ordinaria de conjuntos cualquiera que sea el subconjunto A de X , todo elemento de X o bien es de A o, por el contrario, no lo es; no existen situaciones intermedias. Su función característica, $\mathbf{m}_A : X \longrightarrow \{0,1\}$ definida por

$$\mathbf{m}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases},$$

marca de forma abrupta la transición entre pertenencia y no pertenencia. Sin embargo, en la teoría de subconjuntos difusos esta transición es gradual. La función característica o función de pertenencia de un subconjunto difuso A del universo X es una aplicación $\mathbf{m}_A : X \longrightarrow [0,1]$, donde $\mathbf{m}_A(x)$ es el grado de pertenencia de x a A . En consecuencia, la noción de subconjunto difuso generaliza la de subconjunto ordinario: un subconjunto difuso A de X es ordinario si y sólo si $\mathbf{m}_A(X) \subseteq \{0,1\}$,

En concordancia con la noción de subconjunto difuso se define la de relación binaria difusa.

Definición. Dado un conjunto ordinario X , una relación binaria *difusa sobre X* es un subconjunto difuso de $X \times X$. Si R es una relación binaria difusa sobre X con función de pertenencia $X \times X \longrightarrow [0,1]$, se entenderá que $\mathbf{m}_R(x, y)$ es la intensidad con la que x está relacionado con y .

El conjunto de relaciones binarias difusas sobre X vendrá denotado por $R(X)$.

Notación. A partir de ahora se considerará un conjunto finito de opciones mutuamente excluyentes, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, sobre el que un agente, individual o colectivo, muestra de forma no necesariamente taxativa sus preferencias, a través de una relación binaria difusa R sobre X .

Con $r_{ij} = \mathbf{m}_R(x_i, x_j)$ se indicará el nivel de intensidad con el que el agente prefiere la opción x_i a la opción x_j , que es tanto mayor cuanto más cercano esté a 1.

Dado $a \in [0, 1]$, se definen las siguientes relaciones binarias ordinarias asociadas a R :

$$R_a = \mathbf{m}_R^{-1}([a, 1]) = \{(x_i, x_j) \in X \times X \mid r_{ij} \geq a\},$$

llamada relación binaria ordinaria de nivel a (o α -corte) *asociado a R* y

$$P_a = \mathbf{m}_R^{-1}([a, 1]) = \{(x_i, x_j) \in X \times X \mid r_{ji} \geq a\},$$

llamada relación binaria ordinaria de *nivel estricto a* .

1.2 Preferencias difusas recíprocas

Un agente que se dispone a comparar un par de opciones, lo primero que se plantea es si prefiere una de ellas a la otra o, por el contrario, le resultan indiferentes. Si tiene preferencia por una de ellas, podrá manifestar la forma o la intensidad con la que la prefiere, informando de cómo prefiere la que para él es mejor. En ningún caso se planteará cómo prefiere la que para él es peor a la mejor, ya que está implícito. Supuesto que el agente distribuye toda su capacidad de preferir, considerada unitaria, entre cada par de opciones y que cuanto mayor sea la intensidad r_{ij} con la que x_i es preferida a x_j , tanto menor será la intensidad r_{ji} con la que x_j es preferida a x_i , surge de forma natural el axioma de reciprocidad.

Definición. Una relación binaria difusa R sobre $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ es *recíproca* si y sólo si

$$r_{ij} + r_{ji} = 1 \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$$

El conjunto de relaciones binarias difusas recíprocas sobre X vendrá denotado por $\mathcal{R}_r(X)$.

En adelante se supondrá que toda relación binaria difusa que represente las preferencias de un agente es recíproca. Se ha de señalar que ninguna relación binaria difusa recíproca es ordinaria, ya que al ser $r_{ii} = \frac{1}{2}$ para cualquier $i \in \{1, \dots, n\}$, se tiene $\frac{1}{2} \in \mathbf{m}_R(X \times X)$ por lo que no se verifica $\mathbf{m}_R(X \times X) \subseteq \{0, 1\}$

Proposición 1 Si R es una relación binaria difusa recíproca sobre $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ entonces para cualquier $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ la relación binaria ordinaria P_α es una relación de preferencia.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos, por reducción al absurdo, que P_α no es asimétrica, para algún $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Entonces existen $i, j \in \{1, \dots, n\}$, tales que $x_i P_\alpha x_j$ y $x_j P_\alpha x_i$: $r_{ij} > \alpha$ y $r_{ji} > \alpha$. Se tiene, por tanto, $r_{ij} + r_{ji} > 2\alpha \geq 1$, lo cual va en contra de que R sea recíproca.

Observación. Para $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, dado que la relación de preferencia P_α viene definida por $x_i P_\alpha x_j \Leftrightarrow r_{ij} > \alpha$, la relación de indiferencia asociada, I_α queda caracterizada por $x_i I_\alpha x_j \Leftrightarrow 1 - \alpha \leq r_{ij} \leq \alpha$.

1.3 Preferencias taxativas versus preferencias graduales

Un agente tiene preferencias taxativas cuando no gradúa los niveles de intensidad con los que prefiere unas opciones a otras. En tal caso, para cada par de opciones x_i y x_j :

1. Si prefiere x_i a x_j , lo hace de forma extrema: $x_i P_\alpha x_j$ para todo $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, es decir $r_{ij} = 1$ y, en consecuencia, $r_{ji} = 1 - r_{ij} = 0$.
2. Análogamente, si prefiere x_j a x_i , entonces $r_{ji} = 1$ y, por tanto, $r_{ij} = 1 - r_{ji} = 0$.

3. Si es indiferente entre ambas opciones, es porque no tiene preferencia alguna por ninguna de

las opciones: ni $x_i P_a x_j$ ni $x_j P_a x_i$ para ningún $a \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, es decir, $r_{ij} \leq \alpha$ y $r_{ji} \leq \alpha$ para todo

$a \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$; luego $1 - \alpha \leq r_{ij} \leq \alpha$ para todo $a \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ por tanto, $r_{ij} = r_{ji} = 0.5$.

En resumen, $r_{ij} \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ para cualesquiera $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Por el contrario, un agente tiene

preferencias graduales cuando $r_{ij} \notin \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ para ciertos $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Ahora bien, aunque los agentes suelen graduar internamente sus preferencias con diferentes niveles de intensidad, por lo general se ven obligados a manifestarlas de forma taxativa. Ante esta imposición, podemos permitirnos pensar que cada agente determina en su fuero interno un

umbral $a \in \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$, tanto mayor cuanto más indeciso sea, de manera que la relación binaria

difusa recíproca que recoge sus preferencias graduales es sustituida por la relación de preferencia ordinaria P_a . Así, un agente muy decidido utilizará el umbral $\alpha = 0.5$, manifestando preferir x_i a x_j cuando $r_{ij} > 0.5$ y mostrándose indiferente sólo si $r_{ij} = 0.5$. Otro agente menos decidido podría fijarse un umbral $\alpha = 0.7$, mostrando preferencia por x_i frente a x_j cuando $r_{ij} > 0.7$ y mostrándose indiferente si $0.3 \leq r_{ij} \leq 0.7$.

2 Reglas de agregación de preferencias difusas

Sea $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ un conjunto de $n \geq 2$ opciones mutuamente excluyentes sobre el que $m \geq 2$ agentes muestran sus preferencias de forma gradual o taxativa, a través de relaciones binarias difusas recíprocas. En este contexto, definimos *regla de agregación* como una función $F: R_r(X)^m \longrightarrow R(X)$ que asigna a cada configuración de relaciones binarias difusas recíprocas, $(R^1, \dots, R^m) \in R_r(X)^m$, una relación binaria difusa $\bar{R} = F(R^1, \dots, R^m)$ llamada agregada.

Dadas dos opciones x_i a $x_j \in X$, $r_{ij}^k = \mathbf{m}_{R^k}(x_i, x_j)$ es el nivel-de intensidad con el que el agente k prefiere x_i a x_j ; con $\bar{r}_{ij} = \mathbf{m}\bar{R}(x_i, x_j)$ denotaremos el nivel de intensidad con el que la opción x_i es preferida colectivamente a la opción x_j , mediante la relación agregada \bar{R} .

Está claro que si \bar{R} ha de representar las preferencias colectivas, la regla de agregación lejos de ser arbitraria, ha de satisfacer determinados principios ético-democráticos. Estos serán introducidos en 2.2 y estudiados en 2.3.

2.1 Independencia de alternativas irrelevantes

Uno de los axiomas que habitualmente se impone a una regla de agregación es el de independencia de alternativas irrelevantes. Este axioma, propuesto por Arrow [11 en su célebre teorema de imposibilidad, asegura que la preferencia colectiva entre dos opciones sólo depende de las manifestaciones de los agentes sobre esas opciones y no de otras, consideradas irrelevantes. En este trabajo se supondrá que toda regla de agregación verifica este axioma, adaptado al caso difuso. Así, toda regla de agregación $F : R_n(X)^m \rightarrow R(X)$ vendrá definida por una función $f : [0,1]^m \rightarrow [0,1]$, de forma que $\bar{r}_{ij} = f(r_{ij}^1, \dots, r_{ij}^m)$ para cualesquiera $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Diremos que F es la *regla de agregación asociada a f* y que f es la función auxiliar de F .

2.2 Propiedades de las reglas de agregación

En la literatura sobre agregación de preferencias difusas existen diversas propiedades, a veces divergentes, para representar los principios normativos que han de satisfacer las reglas de agregación que pretendan respetar los valores individuales. En este sentido se introducen a continuación varias propiedades que puede tener una regla de agregación de preferencias difusas que verifique el axioma de independencia de alternativas irrelevantes, a través de su función auxiliar.

Supongamos que la regla de agregación $F_r : R_r(X)^m \rightarrow R(X)$ asociada a $\int : [0,1]^m \rightarrow [0,1]$. Datos $\bar{x}, \bar{y} \in [0,1]^m$ se entenderá que $\bar{x} = (x_1, \dots, x_m)$, $\bar{y} = (y_1, \dots, y_m)$; con $\bar{x} \geq \bar{y}$ se abreviara $x_i \geq y_i \quad \forall_i \in \{1, \dots, m\}$. Si $c \in [0,1]$, con \bar{c} se denotará el vector $(c, \dots, c) \in [0,1]^m$

1. F respeta el anonimato si y sólo si para cualquier reordenación de los agentes (aplicación biyectiva) $\sigma : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ y para cualquier $\bar{x} \in [0,1]^m$ se verifica $\int(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}) = \int(\bar{x})$.

Parece lógico imponer esta propiedad a toda regla de agregación que intervenga en sistemas democráticos de votación, pues de lo contrario no sería igualitaria y los agentes tendrían diferente poder de influencia en el resultado final. Sin embargo, esta propiedad no es indispensable en la agregación de preferencias correspondientes a criterios, ya que estos pueden tener diferentes pesos en la decisión multicriterio.

2. F es neutral si y sólo si para cualquier $\bar{x} \in [0,1]^m$ se verifica $\int(1 - \bar{x}) = 1 - \int(\bar{x})$ se verifica $f(\bar{t} - t) = 1 - f(t)$.

Mientras que la propiedad anterior expresa un tratamiento igualitario entre los agentes, la neutralidad lo representa para las opciones, de forma que si todos los agentes invirtieran sus preferencias entre dos opciones x_i y x_j , pasando de r_{ij}^k a $1 - r_{ij}^k$, entonces el nivel de intensidad con el que x_i es preferida colectivamente a x_j también se invertiría, pasando de \bar{r}_{ij} a $1 - \bar{r}_{ij}$.

Podría decirse que con la neutralidad se garantiza una simetría total entre las opciones. Si los agentes comparan x_j frente a x_i , en lugar de x_i frente a x_j , sus preferencias se manifestarían con intensidad recíproca ($r_{ji}^k = 1 - r_{ij}^k$, en lugar de r_{ji}^k); con la neutralidad se obliga a que ocurra lo mismo con la preferencia colectiva, es decir, la intensidad sería ($\bar{r}_{ji} = 1 - \bar{r}_{ij}$, en lugar de \bar{r}_{ji}).

3. F respeta la unanimidad si y sólo si para cualquier $c \in [0, 1]$ se verifica $f(\bar{c}) = c$. Esta propiedad, reflejo del principio débil de Pareto e indiscutido en el caso de las preferencias taxativas, en donde $e = 1$, puede parecer inoperante en la formulación que aquí se da para

preferencias graduales, ya que sólo es aplicable cuando todos los agentes coinciden en el mismo nivel de intensidad. Sin embargo, tal como se probará en la Prop. 4 y en el tercer apartado de la Prop. 5, resulta totalmente plausible cuando se da conjuntamente a cualquiera de las propiedades que se definen a continuación.

4. F es monótona si y sólo si para cualesquiera $\bar{x}, \bar{y} \in [0,1]^m$ tales que $\bar{x} \geq \bar{y}$ se verifica $f(\bar{x}) \geq f(\bar{y})$.

Esta propiedad refleja un principio incuestionable: si algún agente incrementa la intensidad de preferencia entre dos opciones, no puede disminuir la intensidad de la preferencia agregada entre dichas opciones.

5. F es aditiva si y sólo si para cualesquiera $\bar{x}, \bar{y} \in [0,1]^m$ tales que $\bar{x} + \bar{y} \in [0,1]^m$ se verifica $f(\bar{x}) + f(\bar{y}) = f(\bar{x} + \bar{y})$.

Esta propiedad, meramente técnica y más fuerte que la anterior, es característica de la regla de la media que se analizará más adelante.

2.3 Resultados

A continuación se establecen varios resultados que caracterizan y relacionan entre sí las propiedades introducidas en 2.2 para las reglas de agregación de preferencias difusas.

Proposición 2 Una regla de agregación $F: R_r(X)^m \rightarrow R(X)$ es neutral si y sólo si para cualquier configuración de relaciones binarias difusas recíprocas, $(R_1, \dots, R_m) \in R_r(X)^m$, la relación agregada $\bar{R} = F(R_1, \dots, R_m)$ es recíproca.

DEMOSTRACIÓN:

\Rightarrow Sean F neutral, $(R_1, \dots, R_m) \in R_r(X)^m$ y $\bar{R} = \bar{F} = F(R_1, \dots, R_m)$ Entonces para cualesquiera $i, j \in [1, \dots, n]$ se verifica:

$$\bar{r}_{ij} + \bar{r}_{ij} = \bar{r}_{ij} + f(\bar{r}_{ji}^1, \dots, \bar{r}_{ji}^m) = \bar{r}_{ij} + f(1 - r_{ij}^1, \dots, 1 - r_{ij}^m) = \bar{r}_{ij} - 1 - \bar{r}_{ij} = 1$$

\Leftarrow Dado $\bar{x} \in [0, 1]^m$, sea $(R^1, \dots, R^m) \in R_r(X)^m$ tal que $x_k = r_{12}^k$ para $k \in \{1, \dots, n\}$, entonces

$\bar{x} = (x_1, \dots, x_m) = (r_{12}^1, \dots, r_{12}^m) \in R_r(X)^m$ tal que $x_k = r_{12}^k$ para $k \in \{1, \dots, n\}$ entonces,

$\bar{x} = (x_1, \dots, x_m) = (r_{12}^1, \dots, r_{12}^m)$ y $\bar{r}_{12} = f(\bar{x})$, por lo que:

$$f(1 - \bar{x}) = f(1 - r_{12}^1, \dots, 1 - r_{12}^m) = f(r_{21}^1, \dots, r_{21}^m) = \bar{r}_{21} = 1 - \bar{r}_{12} = 1 - f(\bar{x})$$

Como acaba de verse, cuando una regla de agregación es neutral, la relación binaria difusa agregada es recíproca y, por Prop. 1, para cada $\mathbf{a} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ se dispone de una relación de preferencia ordinaria, $\bar{P}_a = \{(x_i, x) \in X \times X \mid \bar{r}_{ij} > \mathbf{a}\}$, que señala qué opciones son preferidas colectivamente a otras con el nivel de exigencia a. Esto quiere decir que, fijada una regla de agregación para la toma de decisiones colectivas, pueden exigirse mayorías cualificadas de tantos tipos como valores puede tomar \mathbf{a} en $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, eso sí a costa de mayor indecisión cuanto mayor sea el valor de a.

Proposición 3 Una regla de agregación $F: R_r(X)^m \rightarrow R(X)$ es monótona si y sólo si para cualesquiera $\bar{x}, \bar{y} \in [0, 1]^m$ tales que $\bar{x} + \bar{y} \in [0, 1]^m$ se verifica $f(\bar{x} + \bar{y}) \geq \max\{f(\bar{x}), f(\bar{y})\}$

DEMOSTRACIÓ N: Supongamos F monótona y $\bar{x}, \bar{y} \in [0, 1]^m$ tales que $\bar{x}, \bar{y} \in [0, 1]^m$ Como $\bar{x} + \bar{y} \geq \bar{x}$ se tiene $f(\bar{x} + \bar{y}) \geq f(\bar{x})$; análogamente se tiene $f(\bar{x} + \bar{y}) \geq f(\bar{y})$.

Recíprocamente $\bar{x}, \bar{y} \in [0,1]^m$ son tales que $\bar{x} \geq \bar{y} \geq$ entonces $\bar{x}, \bar{y} \in [0,1]^m$ y, por hipótesis, $f(\bar{x}) = f(\bar{y} + (\bar{x} - \bar{y})) \geq f(\bar{y})$.

La propiedad de respeto a la unanimidad considerada en este trabajo, poco operativo en principio, por ser sólo aplicable cuando todos los agentes coinciden en preferir una opción a otra con el mismo nivel de intensidad, cobra el máximo interés en las reglas de agregación monótonas. En tal caso, y así se prueba en la siguiente proposición, sean cuales sean los niveles de preferencia de los agentes, el respeto a la unanimidad equivale a que la preferencia agregada tenga una intensidad no menor que la más baja y no mayor que la más alta de las intensidades individuales.

Proposición 4 Si $F: R_r(X)^m \rightarrow R(X)$ es una regla de agregación monótona, entonces: F respeta la unanimidad $\Leftrightarrow \forall \bar{x} \in [0,1]^m \min\{x_1, \dots, x_m\} \leq f(\bar{x}) \leq \max\{x_1, \dots, x_m\}$

DEMOSTRACIÓN:

\Rightarrow Dado $\bar{x} = (x_1, \dots, x_m) \in [0,1]^m$ sean $a = \min\{x_1, \dots, x_m\}$ y $b = \max\{x_1, \dots, x_m\}$. De $\bar{a} \leq \bar{x} \leq \bar{b}$ se sigue, por ser F monótona y respetar la unanimidad, $a = f(\bar{a}) \leq f(\bar{x}) \leq f(\bar{b}) = b$.

\Leftarrow Para cualquier $C \in [0,1]$ se tiene, por hipótesis, $C \leq f(C) \leq C$

A continuación se muestra que la aditividad es una propiedad más fuerte que la monotonía y que, en compañía del respeto a la unanimidad, induce propiedades deseables para la agregación de preferencias difusas.

Proposición 5 Si $F: R_r(X)^m \rightarrow R(X)$ es una regla de agregación aditiva, entonces se verifica:

1. F es monótona.
2. F respeta la unanimidad $\Leftrightarrow F$ es neutral.

3. F respeta la unanimidad $\Leftrightarrow \forall \bar{x} \in [0,1]^m \min\{x_1, \dots, x_m\} \leq f(\bar{x}) \leq \max\{x_1, \dots, x_m\}$

4. F respeta el anonimato \Rightarrow (F respeta la unanimidad $\Leftrightarrow \forall \bar{x} \in [0,1] f(x, 0, \dots, 0) = \frac{x}{m}$)

DEMOSTRACIÓN:

1. Si $\bar{x}, \bar{y} \in [0,1]^m$ son tales que $\bar{x} \geq \bar{y}$, entonces existe $\bar{z} \in [0,1]^m$ de forma que $\bar{x} = \bar{y} + \bar{z}$ Entonces se tiene $f(\bar{x}) = f(\bar{y}) + f(\bar{z}) \geq f(\bar{y})$

2. Para cualquier $\bar{x} \in [0,1]^m$ se tiene $\bar{1} = \bar{x} + (\bar{1} - \bar{x})$ luego:

$$1 = f(\bar{1}) = f(\bar{x} + (\bar{1} - \bar{x})) = f(\bar{x}) + f(\bar{1} - \bar{x})$$

1. Es consecuencia del primer apartado y la Prop.

2. \Rightarrow Para cualquier $x \in [0, 1]$ se verifica:

$$x = f(x, \dots, x) = f(x, 0, \dots, 0) + \dots + f(0, \dots, 0, x) = mf(x, 0, \dots, 0)$$

\Leftarrow) Para cualquier $x \in [0, 1]$ se verifica:

$$x = f(x, \dots, x) = f(x, 0, \dots, 0) + \dots + f(0, \dots, 0, x) = mf(x, 0, \dots, 0) = m \frac{x}{m} = x$$

3 Regla de la media

Una forma natural de agregar las preferencias individuales graduales consiste en definir la intensidad con la que una opción es preferida colectivamente a otra como la media aritmética de

las intensidades individuales, Como se verá más adelante, la función media aritmética, $f : [0,1]^m \rightarrow [0,1]$, definida por

$$f(x_1, \dots, x_m) = \frac{x_1 + \dots + x_m}{m}$$

induce una regla de agregación que denominaremos media. Esta satisface todas las propiedades introducidas en 2.2, lo que la convierte en un instrumento válido, desde el punto de vista éticodemocrático, en la toma de decisiones colectivas cuando los agentes manifiesten sus preferencias con diferentes niveles de intensidad. Además, tal como se prueba a continuación, la regla de la media es la única que satisface las propiedades mencionadas. Se ha de señalar que el resultado establecido ha sido probado por Candeal-Induráin-Uriarte [5] fuera del marco de las preferencias difusas, para conjuntos de opciones dotados de la estructura de espacio vectorial topológico.

Proposición 6 Sea $F : R_r(X)^m \rightarrow R(X)$ la regla de agregación asociada a la función $f : [0,1]^m \rightarrow [0,1]$. Son equivalentes:

1. F es aditiva y respeta la unanimidad y el anonimato.
2. f es la media aritmética.

DEMOSTRACIÓN:

1 \Rightarrow Dado $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in [0,1]^m$, por ser F aditiva se tiene

$$f(\bar{x}) = f(x_1, 0, \dots, 0) + \dots + f(0, \dots, 0, x_n)$$

y por respetar el anonimato

$$f(\bar{x}) = f(x_1, 0, \dots, 0) + \dots + f(x_m, 0, \dots, 0)$$

Finalmente, por el cuarto apartado de la Prop. 5 se tiene $f(\bar{x}) = \frac{x_1 + \dots + x_m}{m}$

2 \Rightarrow 1: Obvio.

Los dos primeros apartados de la Prop. 5 aseguran que de la aditividad y la unanimidad se derivan la neutralidad y la monotonía. En consecuencia, la regla de la media queda determinada por las cinco propiedades de 2.2.

3.1 Mayorías cualificadas

Dado que la regla de la media es neutral, por la Prop. 2, a cada configuración de relaciones binarias difusas recíprocas $(R', \dots, R^m) \in R_r(X)^m$ le corresponde una relación agregada \bar{K} , también recíproca. Por la Prop. 1, para cada nivel $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, \bar{K} tiene asociada una relación $\bar{P}_{0.5}$ que puede ser utilizada de preferencia ordinaria, para la obtención de mayorías, tanto más cualificadas cuanto mayor sea el nivel α exigido. Así, en los procedimientos de votación en los que los agentes gradúan los niveles de intensidad en sus preferencias, la regla de la media proporciona una amplia gama de sistemas, cada uno de los cuales determina un tipo concreto de mayoría cualificada.

Tal como se verá en 3.2, cuando los agentes tienen preferencias taxativas, la relación de preferencia $\bar{P}_{0.5}$ determina los mismos resultados que la regla de la mayoría simple. Independientemente de que los agentes muestren sus preferencias de forma taxativa o de forma gradual, al fijarse un nivel $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, \bar{K} para \bar{P}_α las opciones necesitan un mayor respaldo por parte de los agentes para resultar vencedoras, tanto mayor cuanto mayor sea α .

La utilización de mayorías cualificadas para la toma de decisiones colectivas, correspondientes a niveles crecientes de α , arrastra varias consecuencias, unas positivas y otras negativas:

- Las opciones ganadoras están más respaldadas por los agentes, pero son más difíciles de conseguir.
- Los procedimientos de votación son menos decisivos, ya que la indiferencia colectiva \bar{I}_a definida por $x_i \bar{I}_a x_j \Leftrightarrow 1 - a \leq \bar{r}_{ij} \leq a$, se da con mayor frecuencia.
- Se aminora la posibilidad de que existan ciclos en las preferencias colectivas (paradoja de la votación), ya que al haber menos opciones que sean preferidas colectivamente a otras, es más probable que la preferencia colectiva sea acíclica y, consecuentemente, que en todas las agendas (subconjuntos de opciones) haya alguna opción maximal (ninguna opción de la agenda es preferida a ella).

3.2 Regla de la media con preferencias taxativas

Cuando todos los agentes tienen sus preferencias taxativas: $r_{ij}^k \in \left\{ \frac{1}{2}, 1 \right\}$ para cualesquiera $k \in \{1, \dots, m\}$ y $i, j \in \{1, \dots, n\}$, la relación de preferencia agregada $\bar{P}_{0.5}$, correspondiente a la regla de la media, coincide con la relación de preferencia agregada de la regla de la mayoría simple. En otras palabras, la regla de la media es una generalización de la regla de la mayoría simple.

Para justificar lo anterior, tendremos en cuenta lo siguiente:

$$r_{ij}^k = 0 \Leftrightarrow r_{ij}^k = 1 \Leftrightarrow x_j P_{0.5}^k x_i$$

$$r_{ij}^k = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_i I_{0.5}^k x_j$$

$$r_{ij}^k = 1 \Leftrightarrow x_i I_{0.5}^k x_j$$

$$m \neq \{k|x_I p_{0.5}^k x\} + \{k|x_I I_{0.5}^k x\} \neq \{k|x_I p_{0.5}^k x\} \neq \{k|r_{ij}^k = 1\} \neq \left\{k|r_{ij}^k = \frac{1}{2}\right\} \neq \{k|r_{ij}^k = 0\}$$

Así, x_i vence a x_j por mayoría simple \Leftrightarrow

$$\neq \{k|x_I p_{0.5}^k x\} > \neq \{k|x_I I_{0.5}^k x\} = m - \neq \{k|x_I p_{0.5}^k x\} - \neq \{k|x_I I_{0.5}^k x\} \Leftrightarrow$$

$$\neq \sum_{k=1}^m r_{ij}^k \neq \{k|x_I p_{0.5}^k x\} + \frac{1}{2} \neq \{k|x_I I_{0.5}^k x\} > \frac{m}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m r_{ij}^k > 0.5 \Leftrightarrow \bar{r}_{ij} > 0.5 = x_i \bar{P}_{0.5} x_j$$

Aun suponiendo que todos los agentes tienen preferencias taxativas, igualmente pueden utilizarse, para la toma de decisiones colectivas, las relaciones de preferencia \bar{P}_a con $a \in (0.5, 1)$. De esta forma se establecen sistemas de votación por mayorías, tanto más cualificadas cuanto mayor sea a .

3.3 Regla de la media con preferencias graduales

Supongamos 5 agentes cuyas preferencias graduales sobre dos opciones x_1 , y x_2 son:

$$r_{12}^1 = r_{12}^2 = r_{12}^3 = 0.6 \quad (r_{21}^1 = r_{21}^2 = r_{21}^3 = 0.4)$$

$$r_{12}^4 = r_{12}^5 = 0.1 \quad (r_{21}^4 = r_{21}^5 = 0.9).$$

Si los agentes están obligados a mostrar taxativamente sus preferencias, la regla de la mayoría simple daría como ganadora la opción x_1 , ya que hay 3 agentes que prefieren x_1 a x_2 , frente a 2 que prefieren x_2 a x_1 .

En cambio, si a los agentes se les permite mostrar sus preferencias en la forma en que las sienten y se utiliza la regla de la media, mediante $\bar{P}_{0.5}$, resultaría vencedora la opción x_2 , ya que

$$\bar{r}_{21} = \sum_{k=1}^5 \frac{r_{21}^k}{5} = \frac{3 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.9}{5} = 0.6 > 0.5.$$

Obsérvese que $x_2 \bar{P}_a x_1$ para cualquier $a \in [0.5, 0.6]$; si $a \in [0.6, 1]$ se tendría $x_2 \bar{I}_a x_1$. En cualquier caso, para ningún $a \in [0.5, 1]$ se daría $x_1 \bar{P}_a x_2$.

De lo anterior puede concluirse que el resultado obtenido al aplicar la regla de la mayoría simple, cuando los agentes muestran sólo qué opciones prefieren, puede ser distinto del obtenido al aplicar la regla de la media, cuando los agentes muestran qué opciones prefieren y el nivel de intensidad con el que las prefieren.

3.4 Regla de la media generalizada

La regla de la media puede generalizarse considerando una biyección $j : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ monótona creciente, de forma que la función $f : [0, 1]^m \rightarrow [0, 1]$, definida por

$$f(x_1, \dots, x_m) = j^{-1} \left(\frac{1}{m} \sum j(x_i) \right)$$

sirve de auxiliar de la nueva regla de agregación, que denominaremos media generalizada.

Resulta inmediato comprobar que la regla de la media generalizada es monótona y que respeta el anonimato y la unanimidad. La aditividad no se verifica, salvo que la aplicación ϕ sea la identidad, por lo que se tendría la regla de la media. Para mantener la neutralidad, se ha de imponer una condición adicional, tal como se prueba en la siguiente proposición.

Proposición 7 Sea $F : R_r(X)^m \rightarrow R(X)$ la regla de agregación de la media generalizada. Si $\mathbf{j}(1-x) = 1 - \mathbf{j}(x)$ para cualquier $x \in [0,1]$, entonces F es neutral.

DEMOSTRACIÓN: Por ser ϕ biyectiva y monótona creciente, se tiene $\mathbf{j}(1) = 1$. Por otra parte, resulta obvio que \mathbf{j}^{-1} verifica la misma propiedad que \mathbf{j} , es decir $\mathbf{j}^{-1}(1-x) = 1 - \mathbf{j}^{-1}(x)$ para cualquier $x \in [0,1]$. Teniendo en cuenta lo anterior, se tiene:

$$\begin{aligned} f(\bar{1} - \bar{x}) \mathbf{j}^{-1} \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{j}(1-x_i) \right) &= \mathbf{j}^{-1} \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{j}(1-x_i) \right) = \\ &= \mathbf{j}^{-1} \left(1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{j}(1-x_i) \right) = 1 - \mathbf{j}^{-1} \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{j}(1-x_i) \right) = 1 - f(\bar{x}) \end{aligned}$$

Hay que señalar que el estudio de medias generalizadas, como funciones auxiliares de reglas de agregación, ha sido abordado por varios autores, desde distintos enfoques. Se ha de destacar la caracterización dada por Ovchinnikov [11, mediante ciertas propiedades sobre una clase de reglas de agregación (éstas asignan una preferencia colectiva difusa a cada configuración de preferencias individuales ordinarias).

4 Consideraciones finales

Los agentes suelen sentir sus preferencias con diferentes niveles de intensidad. Sin embargo, en los procedimientos habituales de votación, los agentes son forzados a manifestar sus preferencias de forma taxativa, despreciándose con ello una buena parte de la información que podría disponerse para la obtención de las preferencias colectivas. La regla de la media, que considera el promedio de las intensidades individuales de preferencia como el propio de la preferencia colectiva, da resultados distintos según las preferencias de los agentes se manifiesten tal como son, con intensidades graduales, o por el contrario se expresen de forma taxativa.

A los importantes principios ético-democráticos que cumple la regla de la media, se ha de añadir la posibilidad que existe de imponer diferentes niveles de exigencia para las preferencias colectivas. Esto da pie a utilizar una amplia gama de sistemas de votación, correspondientes a

diferentes tipos de mayorías cualificadas. Se ha de observar que, cuando los agentes muestran sus preferencias de forma taxativa, las preferencias colectivas, correspondientes a la más baja cualificación admisible de la regla de la media, coinciden con las que determina la regla de la mayoría simple. Por todo lo anterior, cabe afirmar que la regla de la media constituye un procedimiento versátil y respetuoso con las preferencias de los agentes para la toma de decisiones colectivas consensuadas.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] ARROW, K.J. (1963): *Social Choice and Individual Values*. Second edition. Yale University Press, New Hagen.
- [2] BARRETT, C.R. - PATTANAIK, P.K. - SALLES, M. (1992): "Rationality and aggregation of preferences in an ordinally fuzzy framework". *Fuzzy Sets and Systems* 49, pp. 9-14.
- [31] BEZDEK, J.C. - SPILLMAN, B. - SPILLMAN, R. (1979): "Fuzzy relation spaces for group decision theory: an application". *Fuzzy Sets and Systems* 2, pp. 5-14.
- [4] BLIN, J.M. - WHINSTON, A.B. (1974): "Fuzzy sets and social choice". *Journal of Cybernetics* 3, pp. 28-36.
- [5] CANDEAL, J.C. - INDURÁIN, E. - URIARTE, J.R. (1992): "Some issues related to the topological aggregation of preferences". *Social Choice and Welfare* 9, pp. 213-227.
- [6] KACPRZYK, J. - FEDRIZZI, M. (editores) (1990): *Multiperson Decision Making Using Fuzzy Sets and Possibility Theory*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- [7] GARCÍA LAPRESTA, J.L. (1993): "Criterios de coherencia en preferencias intensas". *Anales de Estudios Económicos y Empresariales* 8, pp. 163-175.

- [8] MAY, K.O. (1952): "A set of necessary and sufficient conditions for simple majority decision". *Econometrica* 20, pp. 680-684.
- [9] NuRmi, H. (1981): "Approaches to collective decision making with fuzzy preference relations". *Fuzzy Sets and Systems* 6, pp. 249-259.
- [10] OVCHINNIKOV, S.V. (1990): "Modelling valued preference relations". En [61, pp. 64-70.
- [11] OVCHINNIKOV, S.V. (1990): "Means and social welfare function in fuzzy binary relation spaces". Eii [61, pp. 143-154.
- [12] TANINO, J'. (1990): "On group decision making under fuzzy preferences". En [6], pp. 172-185.