

CRECIMIENTO ECONÓMICO Y CALIDAD MEDIOAMBIENTAL

M^a Pilar Martínez García
M^a del Mar Sánchez de la Vega
Departamento de Métodos Cuantitativos para la Economía
Universidad de Murcia

INTRODUCCIÓN

Presentamos un modelo de control óptimo que estudia la relación entre crecimiento económico y contaminación. Se trata de un modelo de acumulación de capital en el que se ha incorporado, de forma endógena, un sector tecnológico destinado a la innovación de procesos productivos menos contaminantes, al igual que un sector dedicado a descontaminar el medio ambiente. En este último sector se incluyen tanto las empresas dedicadas al reciclaje de materiales de deshecho, como aquellas otras actividades descontaminantes no productivas.

Aunque la disyuntiva existente entre crecimiento económico y calidad ambiental es un tema de máxima actualidad, son pocos los trabajos teóricos que desarrollan modelos de crecimiento óptimo con variables ambientales.

Uno de los primeros trabajos en este campo se debe a Keeler, Spence y Zeckhause (1971). Estos autores analizan dos modelos de acumulación de capital y control de contaminación. En el primero de ellos el stock de contaminación influye negativamente en la utilidad, pero las emisiones de contaminantes no contribuyen a la producción de capital. Se considera también que parte del producto se emplea en el control de la contaminación. Existen al menos dos estados estacionarios. El primero de ellos, al que los autores llaman *Murky Age Equilibrium*, está caracterizado por altos niveles de consumo, capital y contaminación, y por no invertir capital en el control de la contaminación. En el segundo de los estados estacionarios, al que llaman *Golden Age Equilibrium*, sí se asigna capital al control de la contaminación, y presenta niveles

menores de consumo, capital y contaminación. En el segundo de los modelos las emisiones de contaminantes tienen un producto marginal positivo, y se caracteriza a un único estado estacionario.

Otro trabajo importante se debe a Foster(1973). En este modelo se considera que la producción de capital genera emisiones de contaminantes, y que el stock de contaminación afecta negativamente en la utilidad. El resultado principal de este trabajo es que el control de contaminación proporciona niveles estacionarios de capital y consumo menores que cuando se ignora la contaminación.

El modelo de Brock (1977) considera igualmente que las emisiones de contaminantes tienen un producto marginal positivo, y muestra que con tasa de descuento cero existe un único estado estacionario con la característica de ser punto de silla. Este modelo ha sido estudiado por Tahvonen y Kuuluvainen (1993).

Todos estos trabajos suponen una población y tecnología constantes ya que, de no ser así resultaría difícil caracterizar los estados estacionarios, pudiendo no estar asegurada la existencia de tales estados en muchos casos. Debido a tal dificultad son escasos los modelos que estudian tales situaciones.

En esta línea podemos citar los trabajos de Eismont (1994), Rubio y Fisher (1994), y Bovenberg y Smulders (1995). Este último trabajo, a diferencia de los primeros, contempla la posibilidad de crecimiento técnico de forma endógena. Existe un sector dedicado a la innovación técnica que produce conocimiento técnico, destinado a que las emisiones contaminantes sean más productivas. Estos autores estudian qué condiciones son necesarias para la existencia de un crecimiento equilibrado.

Nuestro modelo está en parte inspirado en este ultimo trabajo, aunque nosotros contemplamos la posibilidad de que parte de los recursos se destinen, no sólo al crecimiento tecnológico para disminuir la emisiones, sino también a actividades de reciclado y limpieza del medio ambiente.

DESCRIPCIÓN DEL MODELO

El objetivo de nuestro trabajo es estudiar las condiciones necesarias y suficientes para la maximización intertemporal de la utilidad en un problema con horizonte infinito, donde no se ha considerado crecimiento de población. Podemos describirlo de la siguiente forma

$$\text{MAX}_{c, u_1, u_2, v_1, v_2, e} \int_0^{\infty} e^{-rt} U(c, z) dt \quad (1)$$

$$s. a \dot{k} = Y(u_1 k, v_1 h e) + G(u_2 k, v_2 h e) - c \quad (2)$$

$$\dot{z} = e - \alpha z - F(u_2 k, v_2 h e) \quad (3)$$

$$\dot{h} = H[(1 - u_1 - u_2)k, (1 - v_1 - v_2)h e] \quad (4)$$

Donde la ecuación (2) describe la dinámica de acumulación de capital. Distinguiamos dos tipos distintos de funciones de producción de capital: producción desarrollada por empresas dedicadas al reciclaje de materiales de desecho, $G(K_z, E_z)$, y producción agregada del resto de empresas, $Y(K_y, E_y)$. Se considera que la producción de capital físico depende positivamente tanto del capital, $K_y = u_1 k$ y $K_z = u_2 k$ como de las emisiones de productos contaminantes, $E_y = v_1 h e$, $E_z = v_2 h e$.

La ecuación (3) describe el proceso de acumulación de contaminación, siendo el coeficiente $\alpha > 0$ un indicador de la capacidad de absorción de polución de la propia naturaleza, y $F(K_z, E_z)$ la actividad descontaminante desarrollada en tal economía.

La función $H(K_h, E_h)$, con $K_h = (1 - u_1 - u_2)k$ y $E_h = (1 - v_1 - v_2)h e$, en la ecuación (4), denota a la función de producción de conocimiento tecnológico, destinado a que los procesos productivos sean menos contaminantes, concretamente, un mayor nivel de h elevará la cantidad de capital producido con el mismo nivel de emisiones, e .

Las variables de control de nuestro modelo son c, u_1, u_2, v_1, v_2, e . La variable c representa el consumo, u_1 es la fracción de capital destinado a la producción de capital en empresas no dedicadas al reciclaje, u_2 es la fracción de capital dedicado a actividades descontaminantes, tanto actividades de reciclaje, que contribuyen con una producción de capital, como aquellas que solamente limpian. De la misma forma podemos distinguir entre v_1 y v_2 como la proporción de emisiones contaminantes derivadas de ambas actividades. Denotaremos por $w = (c, u_1, u_2, v_1, v_2, e)$ el vector formado por todas las variables de control.

Las variables de estado del modelo son el stock de capital físico, k , el stock de contaminación, z , y h que es la variable que refleja el nivel de conocimiento tecnológico. Denotaremos por x al vector de variables de estado (k, z, h) .

Las variables están sujetas a las siguientes restricciones,

$$c \geq 0, u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, v_1 \geq 0, v_2 \geq 0, u_1 + u_2 \leq 1, v_1 + v_2 \leq 1$$

$$k \geq 0, 0 \leq z \leq \bar{z}, h \geq 0$$

siendo \bar{z} el nivel máximo de contaminación alcanzable.

Supondremos que la utilidad es una función estrictamente cóncava, y depende positivamente del consumo y negativamente del stock de contaminación. Además,

$$\lim_{c \rightarrow 0} U_c(c, z) = +\infty$$

Supondremos también que las funciones de producción son estrictamente cóncavas y cumplen las condiciones

$$\lim_{K_y \rightarrow 0} \frac{dY}{dK_y} = +\infty \qquad \lim_{E_y \rightarrow 0} \frac{dY}{dE_y} = +\infty \qquad (5)$$

$$\lim_{K_z \rightarrow 0} \frac{dG}{dK_z} = +\infty \qquad \lim_{E_z \rightarrow 0} \frac{dG}{dE_z} = +\infty \qquad (6)$$

$$\lim_{K_z \rightarrow 0} \frac{dF}{dK_z} = +\infty \qquad \lim_{E_z \rightarrow 0} \frac{dF}{dE_z} = +\infty \qquad (7)$$

$$\lim_{K_h \rightarrow 0} \frac{dH}{dK_h} = +\infty \qquad \lim_{E_h \rightarrow 0} \frac{dH}{dE_h} = +\infty \qquad (8)$$

Además, capital y emisiones son sustitutivos técnicos, es decir

$$\frac{dP}{dK dE} > 0$$

siendo P cualquiera de las funciones Y, G, F, H. Este supuesto está justificado porque una disminución en las emisiones requerirá recursos que podrían haberse utilizado en cualquiera otra actividad, en caso de permitir procesos más contaminantes (ver Pittman (1981)).

Estas condiciones aseguran que las variables $k, h, c, e, u_1, u_2, v_1, v_2$ nunca se anularán. Notar que ahora nuestro problema es equivalente al que resulta de considerar como restricciones

$$c > 0, u_1 > 0, u_2 > 0, v_1 > 0, v_2 > 0, u_1 + u_2 < 1, v_1 + v_2 < 1$$

$$k > 0, 0 \leq z \leq \bar{z}, h > 0$$

CONDICIONES DE OPTIMALIDAD

La función Hamiltoniana y Lagrangiana modificadas asociadas al problema (1)-(4) están definidas por

$$\overline{H} = U(c, z) + I(Y + G - c) + m(e - az - F) + fH \quad (9)$$

$$\overline{L} = U(c, z) + I(Y + G - c) + (m - p + q)(e - az - F) + fH \quad (10)$$

Por el teorema de Neustad (1976) (ver Seierstad y Sydsaeter (1987), págs. 332 y 381), si $w^* = (c^*, e^*, u_1^*, u_2^*, v_1^*, v_2^*)$ es solución óptima para nuestro problema, existen funciones $\lambda(t), \mu(t), \Phi(t)$ tales que $\lambda(t)$ y $\Phi(t)$ son continuas con derivadas parciales continuas, $\mu(t)$ tiene límites laterales finitos, y existen funciones $p(t), q(t)$ no decrecientes, de forma que:

En primer lugar, w^* maximiza la función Hamiltoniana (9) $\forall w$ control admisible, y para virtualmente todo t . Aplicando las condiciones de Kuhn y Tucker a este problema de optimización estática, y dado que se cumplen las condiciones (5)-(8), se obtiene que w^* es solución del sistema de ecuaciones:

$$U_c = I \quad (11)$$

$$I \frac{dY}{dK_y} = \Phi \frac{dH}{dK_h} \quad (12)$$

$$-m \frac{dF}{dK_z} + I \frac{dG}{dK_z} = \Phi \frac{dH}{dK_h} \quad (13)$$

$$I \frac{dY}{dE_y} = \Phi \frac{dH}{dE_h} \quad (14)$$

$$-m \frac{dF}{dE_z} + I \frac{dG}{dE_z} = \Phi \frac{dH}{dE_h} \quad (15)$$

$$m = h \left(m \frac{dF}{dE_z} v_2 - I \frac{dG}{dE_z} v_2 - I \frac{dY}{dE_y} v_1 - \Phi \frac{dH}{dE_h} (I - v_1 - v_2) \right) \quad (16)$$

De (12) se obtiene que $\lambda(t) > 0$, que junto con el resto de ecuaciones implica que $\mu(t) < 0$ y $\Phi(t) > 0$.

Las ecuaciones (12) y (14) indican que la productividad marginal del capital y de las emisiones en los sectores de producción H e Y conciden, y además, la relación técnica de sustitución en ambos sectores coincide. Este resultado coincide con las conclusiones del trabajo de Bovenberg y Smulders (1995). Además, en nuestro modelo se obtienen las ecuaciones (13) y (15), que implican que la productividad marginal del capital y de las emisiones debe coincidir en el sector de conocimiento y en el

descontaminante.

En segundo lugar, es también condición necesaria de optimalidad que

$$\dot{I} = I \left(r - \frac{dY}{dK_y} \right) \quad (17)$$

$$\dot{m} = (r + a)m - U_z - e^{rt}(\dot{p} - \dot{q}) \quad (18)$$

$$\dot{\Phi} = \Phi \left(r - e \frac{dH}{dE_h} \right) \quad (19)$$

Donde las funciones p(t) y q(t) son funciones tales que

$$p(t) \text{ es constante en el intervalo donde } z^* > 0 \quad (20)$$

$$q(t) \text{ es constante en el intervalo donde } z^* < \bar{z}$$

y p(t) es continua en aquellos puntos $t \in (0, T)$ donde $z^*(t) = 0$ y u_2^*, v_2^* ó e^* son discontinuas

q(t) es continua en aquellos puntos $t \in (0, T)$ donde $z^*(t) = \bar{z}$ y u_2^*, v_2^* ó e^* son discontinuas.

Observemos que el sistema (17)-(19) cuando $0 < z < \bar{z}$ es equivalente a

$$\dot{I} = I \left(r - \frac{dY}{dK_y} \right) \quad (21)$$

$$\dot{m} = (r + a)m - U_z \quad (21)$$

$$\dot{\Phi} = \Phi \left(r - e \frac{dH}{dE_h} \right) \quad (22)$$

Dadas las condiciones de concavidad impuestas sobre el problema, una solución que cumpla las condiciones necesarias será solución óptima (ver Seierstad y Sydsaeter, pag 336).

La naturaleza no lineal de nuestro problema hará que sea imposible en la mayoría de los casos encontrar las trayectorias temporales de las variables de control y de estado. Además, debido al elevado número de variables consideradas, es difícil obtener conclusiones sobre el comportamiento cualitativo del modelo a partir de las ecuaciones (11)-(16) y del sistema de ecuaciones diferenciales (2)-(4), (17)-(19).

Por este motivo hemos diseñado un algoritmo que, inspirado en el método de resolución numérica de ecuaciones diferenciales de Runge-Kutta, nos dará una

aproximación a la solución del problema. Utilizando este procedimiento, no obtendremos resultados generales, sólo conseguiremos aproximaciones de soluciones a problemas particulares, pero en cambio, programando el algoritmo y utilizando un ordenador con suficiente capacidad, podremos observar directamente el comportamiento cualitativo de muy distintas situaciones, y podremos por tanto identificar las propiedades comunes a todas ellas, para intentar posteriormente una demostración analítica.

El algoritmo es aplicable a problemas de control óptimo más generales que el considerado aquí. Sólo será necesario exigir al sistema de ecuaciones que resulta de aplicar las condiciones de Kuhn y Tucker, en nuestro caso el sistema (11)-(16), que tenga solución única. Es decir, que para cada t , y para cada $k(t), z(t), h(t), \lambda(t), \mu(t), \Phi(t)$, el sistema tenga una única solución $w(t)=(c(t), u_1(t), u_2(t), v_1(t), v_2(t), e(t))$.

Para garantizar esta propiedad en nuestro problema será suficiente exigirle a las funciones de producción Y, H, F, G las siguientes desigualdades:

$$-k \frac{dY}{dK_y^2} > he \frac{dY}{dK_y dE_y} \quad -he \frac{dY}{dE_y^2} > k \frac{dY}{dK_y dE_y} \quad (24)$$

$$-k \frac{dH}{dK_H^2} > he \frac{dH}{dK_y dE_y} \quad -he \frac{dH}{dE_h^2} > k \frac{dH}{dK_h dE_h} \quad (25)$$

$$-k \frac{dF}{dK_z^2} > he \frac{dF}{dK_z dE_z} \quad -he \frac{dF}{dE_z^2} > k \frac{dF}{dK_z dE_z} \quad (26)$$

$$-k \frac{dG}{dK_z^2} > he \frac{dG}{dK_z dE_z} \quad -he \frac{dG}{dE_z^2} > k \frac{dG}{dK_z dE_z} \quad (27)$$

Las condiciones (24)-(27) son compatibles con el supuesto de concavidad para las funciones Y, G, F, H . Todas las funciones que cumplan (24)-(27) serán estrictamente cóncavas. Si se cumplen las desigualdades anteriores podemos asegurar, por el teorema del punto fijo (ver Henrici (1972) pags.114,116), que existe para cada t solución única del sistema (11)-(16).

DESCRIPCIÓN DEL ALGORITMO

Sea, para cada t , el sistema de ecuaciones

$$S(w(t), \theta(t))=0$$

donde $w(t)$ representa el vector de variables de control y $\theta(t)=(x(t),\lambda(t))$ es el vector de variables de estado, $x(t)$, y de coestado, $\lambda(t)$.

Supongamos que alguna de la variables de estado está restringida a

$$0 \leq x_i(t) \leq \bar{x}_i \quad i=1,\dots,m$$

En nuestro caso la variable z , que mide el stock de contaminación, se encuentra en esta situación.

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{\theta}(t) = D(w(t), \theta(t))$$

que describe la dinámica de las variables de estado y de coestado, cuando las restricciones se cumplen estrictamente. En el problema tratado en este trabajo, se trata del sistema (2)-(4), (21)-(22), con seis ecuaciones diferenciales y tres variables de estado y coestado.

Paso 1: Damos condiciones iniciales al vector θ . Damos t_f , el instante de parada para el método de Runge-Kutta, y dt , un intervalo de tiempo.

Sea $t_1=0$

Paso 2: Se obtiene la única solución $w(t_1)$ del sistema $S(w(t_1), \theta(t_1))=0$.

Paso 3: Aplicamos el método de Runge-Kutta:

Sea $k_1=D(w(t_1), \theta(t_1)).dt$

$$k_2=D(w(t_1), \theta(t_1)+1/2 k_1).dt$$

$$k_3=D(w(t_1), \theta(t_1)+1/2 k_2).dt$$

$$k_4=D(w(t_1), \theta(t_1)+k_3).dt$$

Sea $\theta(t_1+dt)=\theta(t_1)+1/6 (k_1+2k_2+2k_3+k_4)$

$$\text{Si } x_i(t_1+dt) \leq 0 \text{ para algún } i = 1, \dots, m \Rightarrow x_i(t_1+dt) = x_i(t_1) \quad (27)$$

$$\text{Si } x_i(t_1+dt) = \bar{x}_i \text{ para algún } i = 1, \dots, m \Rightarrow x_i(t_1+dt) = x_i(t_1) \quad (28)$$

Si $t_1+dt < t_f \Rightarrow t_1=t_1+dt$, volver al paso 2.

Si $t_1+dt \geq t_f \Rightarrow$ parar.

Los pasos (27) y (28) quedan justificados porque, si en algún instante t las restricciones se cumplen en igualdad se tendrá que

$$\lim_{s \rightarrow t^-} \dot{x}_i(s) = \lim_{s \rightarrow t^+} \dot{x}_i(s) = 0$$

(ver Seierstad y Sydsaeter pag.333, nota 3).

BIBLIOGRAFIA

- [1] Bovenberg A.L. & Smulders S.(1995) " Environmental quality and pollution-augmenting technological change in a two-sector endogenous growth model" *Journal of Economics*, 57, 369-391.
- [2] Brock W.A. (1977) "A polluted golden age" en *Economics of natural and environmental resources*, V.L.Smith (ed), New York: Gordon & Breach
- [3] Eismont O. (1994) "Economic growth with environmental damage and technical progress". *Environmental and Resource Economics*, 4: 241-249.
- [4] Foster B.A. (1973) "Optimal capital accumulation in a polluted environment", *Southern Econom.J.*39, 544-547.
- [5] Herrici P.(1972), *Elementos de Análisis Numérico*, Editorial Trillas, Mexico
- [6] Rubio S. & Fisher A.C. (1994) " Optimal capital accumulation and stock pollution : The greenhouse effect" *Revista Española de Economía*, Monográfico: "Recursos Naturales y Medio Ambiente". 119-140
- [7] Seierstad A. & Sydsaeter K. (1987) *Optimal control theory with economic applications*, North-Holland.
- [8] Tahvonen O. & Kuuluvainen J.(1993) "Economic Growth, Pollution, and Renewable Resources", *Journal of environmental economics and management*, 24,101-118