

## CONTRASTES DE RAICES UNITARIAS EN SERIES TEMPORALES HETEROCEDASTICAS

---

AFONSO RODRIGUEZ, JULIO ANGEL

GUIRAO PEREZ, GINES

Departamento de Economía Aplicada

Facultad de CC.Económicas y Empresariales

Universidad de La Laguna

### Introducción

Numerosas series temporales de alta frecuencia, particularmente financieras, presentan una serie de regularidades empíricas (no normalidad, autocorrelación, heterocedasticidad, no estacionariedad, ...) que pueden hacer dudar de la validez de las estimaciones, así como de la inferencia estadística, su interpretación económica y la predicción.

La mayoría de las variables económicas son no estacionarias, de forma que la distinción entre no estacionariedad estocástica (DS) y determinista (TS) tiene numerosas implicaciones, tanto teóricas como prácticas en macroeconomía y en finanzas. En este campo, en particular, la presencia de una raíz unitaria es importante y tiene consecuencias en la interpretación del análisis de eficiencia de los mercados.

Así, desde un punto de vista empírico, es imprescindible convertir una serie en estacionaria (TS o DS) para utilizar los resultados de los procesos estocásticos estacionarios en la inferencia, estimación y predicción, con el objeto de analizar el grado de integración de las variables antes de contrastar los movimientos comunes.

En términos generales, la mayoría de los contrastes disponibles actualmente pueden clasificarse en dos grandes grupos según la estructura que asumen del Proceso Generador de Datos (PGD):

- i) Contrastes de raíces unitarias contra una alternativa estacionaria sobre una tendencia fija (TS);
- ii) Contrastes de raíces unitarias contra una alternativa estacionaria sobre una tendencia cambiante (BTS).

Frente a estos contrastes, para los que la hipótesis alternativa supone la ecuación de contraste (es decir, integración de orden uno contra estacionariedad), se han planteado algunos otros donde se contrasta la estacionariedad (hipótesis nula) frente a la integración de orden uno.

Además del carácter no estacionario de la mayoría de las series económicas, cada vez existe mayor evidencia sobre la presencia de efectos ARCH en numerosas series de frecuencia elevada de relevancia en el dominio financieros y macroeconómico en general.

El objeto de este estudio es investigar los efectos que sobre algunos de los múltiples contrastes planteados para estos dos casos tiene la presencia de perturbaciones condicionalmente heterocedásticas y, en particular, de la forma más comúnmente empleada en la práctica, es decir, procesos GARCH(1,1), debidos a Engle (1982) y Bollerslev (1986), siguiendo fundamentalmente los estudios de Kim y Schmidt (1993) y Hecq y Urbain (1993). Dentro de esta parametrización, consideraremos especialmente el caso integrado o IGARCH(1,1), debido a Engle y Bollerslev (1986), dado que incorporan un elevado grado de persistencia en varianza, fenómeno característico de las observaciones de alta frecuencia, y que implican que los shocks de volatilidad tienen un efecto permanente en todo el horizonte de predicción.

El resto del trabajo está organizado como sigue. En el Apartado 1 se realiza una revisión teórica de los contrastes de raíz unitaria y de los procesos GARCH discutidos. El Apartado 2 presenta los resultados más relevantes de los experimentos de simulación realizados para estudiar cómo afecta a la distribución de estos contrastes la presencia de errores condicionalmente heterocedásticos. Finalmente el Apartado 3 presenta las principales conclusiones obtenidas.

### 1. Raíces Unitarias y Heterocedasticidad: Revisión Teórica

En este trabajo consideramos los siguientes contrastes para la alternativa TS:

i) Dickey-Fuller (DF) (1979, 1981), basado en las siguientes regresiones:

$$\Delta y_t = \mu + \beta(t-T/2) + \phi y_{t-1} + u_t, (\tau_\tau) \quad (1.1)$$

$$\Delta y_t = \mu + \phi y_{t-1} + u_t, (\tau_\mu) \quad (1.2)$$

$$\Delta y_t = \phi y_{t-1} + u_t, (\tau) \quad (1.3)$$

donde  $u_t$  es un proceso ruido blanco. La hipótesis de raíz unitaria se contrasta estableciendo  $H_0: \phi=0$ , frente a la alternativa de estacionariedad,  $H_1: \phi<0$ . La estimación del parámetro  $\phi$  es consistente pero sesgada y la distribución del estimador de  $\phi$  no es independiente de la presencia de un término constante y/o de una tendencia determinista en la especificación de la ecuación del contraste.

Al plantear este contraste se está suponiendo que  $u_t$  no está autocorrelacionado, por lo que en presencia de autocorrelación la inferencia en cualquiera de estas ecuaciones se verá afectada. Para tener en cuenta este hecho se han propuesto dos tipos de soluciones: el contraste Dickey-Fuller Ampliado (DFA) y la corrección no paramétrica propuesta por Phillips y Perron (PP) (1988).

ii) Schmidt-Phillips (SP) (1992): Plantea la hipótesis nula de existencia de raíz unitaria frente a la alternativa de estacionariedad en varianza sobre una tendencia determinista.

Los contrastes estándar de raíz unitaria no se muestran en general muy potentes contra alternativas relevantes, es decir, tienen poca capacidad para distinguir entre la hipótesis nula y diversas alternativas situadas en un entorno cercano a ésta, por lo que para intentar decidir si una serie temporal es estacionaria o integrada se deben desarrollar contrastes tanto bajo la hipótesis nula de integración como de estacionariedad. Esta es la propuesta de Kwiatkowski *et al* (1992).

iii) Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (1992)<sup>1</sup>. Para contrastar la hipótesis nula de estacionariedad contra la alternativa de una raíz unitaria expresan la serie bajo estudio como la suma de una tendencia determinista, un paseo aleatorio y un error estacionario, es decir,

$$y_t = \beta t + r_t + \varepsilon_t, \quad (2.1)$$

donde  $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma_\varepsilon^2)$  y  $r_t$  es un paseo aleatorio

$$r_t = r_{t-1} + u_t, \quad (2.2)$$

donde  $u_t \sim iid(0, \sigma_u^2)$ .

La hipótesis de estacionariedad es  $\sigma_u^2 = 0$ , ya que la especificación de la tendencia determinista en la estimación del modelo elimina completamente el problema de la no estacionariedad en media. El estadístico empleado es el estadístico LM para la hipótesis  $\sigma_u^2=0$ , bajo el supuesto de que los  $u_t$  son normales y que los  $\varepsilon_t$  son *iid*, pero Kwiatkowski *et al* (1992) desarrollan la distribución asintótica del estadístico LM bajo supuestos más débiles sobre los errores.

<sup>1</sup>De aquí en adelante KPSS.

Los estadísticos desarrollados son  $\eta_\mu$  para el caso de estacionariedad en torno a un valor medio ( $r_0$ ) y  $\eta_\tau$  para el caso de estacionariedad sobre una constante y una tendencia ( $r_0$  y  $\beta$ ).

Aunque la naturaleza tendencial de muchas series temporales económicas ha sugerido el modelo TS como la alternativa más obvia al proceso de raíz unitaria, también resulta evidente que muchas series muestran un comportamiento heterogéneo en sus tendencias históricas. Este comportamiento implica la presencia de *cambios estructurales* en los datos, dando lugar a una clase más general de proceso TS, la clase de procesos Estacionarios sobre una Tendencia Cambiante (BTS).

Se ha encontrado que la mala especificación de la hipótesis alternativa puede llevar a la aceptación (espúrea) de la no estacionariedad estocástica (es decir, una raíz unitaria) cuando de hecho el PGD es de naturaleza determinísticamente heterogénea (no estacionaria), como el modelo BTS.

Para enfrenar este problema se han desarrollado dos enfoques, uno basado en el supuesto de que el punto de ruptura de la tendencia es conocido y otro que no supone exógenamente ningún punto de ruptura. En el estudio de Hecq y Urbain (1993) se incluyen ambas posibilidades y se emplean los contrastes desarrollados por Perron (1990) para el primer enfoque y Perron y Vogelsang (1992) para contrastar la hipótesis nula de raíz unitaria cuando la ruptura es endógena y desconocida a priori.

Como hemos visto, todos estos contrastes se basan en el supuesto de el término de perturbación  $\{u_t\}$  es *iid*, pero dada la creciente evidencia de que las series económicas de elevada frecuencia presentan ciertas regularidades en sus momentos de segundo orden (heterocedasticidad condicional), estamos interesados en considerar al proceso de innovación  $\{u_t\}$  extraído de una distribución condicionalmente heterocedástica tipo ARCH, es decir,

$$\begin{aligned} u_t &= z_t \cdot \sigma_t, \quad z_t \sim iid(0,1) \\ u_t | I_{t-1} &\sim (0, \sigma_t^2) \end{aligned} \quad (3)$$

donde  $I_{t-1}$  es el conjunto de información disponible en el instante  $t-1$ , y  $\sigma_t^2$  puede formularse como:

$$\text{ARCH}(p): \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i u_{t-i}^2, \quad (4)$$

con  $\alpha_0 > 0$ ,  $0 \leq \alpha_i < 1$ ,  $i=1,2,\dots,p$ , y  $\sum_{i=1,p} \alpha_i < 1$  para garantizar la positividad y estacionariedad del proceso;

$$\text{GARCH}(p,q): \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i u_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2, \quad (5)$$

con  $\alpha_0 > 0$ ,  $0 \leq \alpha_i < 1$ ,  $i=1,2,\dots,p$ ,  $0 \leq \beta_j < 1$ ,  $j=1,2,\dots,q$ , y  $\sum_{i=1,p} \alpha_i + \sum_{j=1,q} \beta_j < 1$ .

Por su relevancia empírica, asumiremos como proceso generador del término de innovación el modelo GARCH(1,1),

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \quad (6)$$

que genera una varianza marginal para el término de innovación igual a  $\sigma_u^2 = \alpha_0 / (1 - \alpha_1 + \beta_1)$  y un coeficiente de curtosis igual a  $\kappa = 6\alpha_1^2 / (1 - \beta_1^2 - 2\alpha_1\beta_1 - 3\alpha_1^2)$  que es mayor que cero, de forma que la estructura de heterocedasticidad genera innovaciones con colas más gruesas que las de la distribución normal.

Nelson (1990) demuestra que cuando  $\alpha_0 > 0$ ,  $\sigma_t^2 < \infty$  y  $\{u_t, \sigma_t^2\}$  es estrictamente estacionario si y sólo si  $E[\ln(\beta_1 + \alpha_1 z_t^2)] < 0$ , que es un supuesto mucho más débil que  $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ , la condición necesaria y suficiente para que  $\{u_t\}$  sea estacionario en covarianza.

Un caso particularmente interesante de este proceso es el denominado GARCH integrado o IGARCH, donde  $\alpha_1 + \beta_1 = 1$ , donde la varianza marginal no existe. La principal característica de estos procesos se refiere a la persistencia de los shocks sobre la varianza condicional en todo el horizonte de predicción.

Puede representarse como

$$\Delta\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1(u_{t-1}^2 - \sigma_{t-1}^2). \quad (7)$$

La naturaleza de este proceso puede justificarse, en principio, porque es una manifestación típica de datos de alta frecuencia, o porque es el resultado de algún tipo de mala especificación. León y Mauleón (1996) han estudiado tres tipos de mala especificación que podrían ser causa de fuertes efectos ARCH: i) cambios en la media de la variable dependiente o no linealidades no tomadas explícitamente en cuenta; por el contrario, los cambios en la varianza sólo inducen pequeños efectos ARCH; ii) amplios retardos en procesos ARCH estables pueden aproximarse por un modelo GARCH(1,1) inestable; iii) consideración inapropiada de las colas gruesas en la distribución del error.

Como hemos visto, la distribución incondicional de un modelo GARCH produce colas más gruesas que las de una distribución normal, de forma que la no consideración del grosor de las colas de la distribución podrían incrementar los efectos tipo ARCH.

Hay un acuerdo general en la literatura sobre que los contrastes Dickey-Fuller son asintóticamente robustos a la heterocedasticidad, de forma que los efectos de innovaciones tipo ARCH o GARCH son como mucho un problema de muestra finita. El apoyo teórico a esta conclusión se basa en el resultado de Phillips (1987) y Phillips y Perron (1988) de que, para un proceso I(1) con innovaciones *i.i.d.*  $(0, \sigma_u^2)$ , la varianza a largo plazo  $\sigma^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1}E(\sum u_t)^2$  y la varianza de la innovación  $\sigma_u^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1}\sum E u_t^2$  son iguales (siempre que el límite exista) en presencia de heterocedasticidad pero no de autocorrelación y, por tanto, los contrastes de Dickey-Fuller son asintóticamente robustos a las formas de heterocedasticidad que satisfacen sus condiciones de regularidad.

Pantula (1988)<sup>2</sup> demuestra que los contrastes Dickey-Fuller son asintóticamente robustos a los errores ARCH(1) con  $\alpha_1 < 3^{-1/2}$ , una condición más fuerte que la de no integración. Pantula (1986) menciona que los contrastes de Dickey-Fuller son asintóticamente robustos a las innovaciones GARCH(p,q) o log-GARCH(p,q) excepto en el caso de varianza integrada, pero no proporciona una prueba de ello.

Partiendo del consenso generalizado de que los contrastes Dickey-Fuller son asintóticamente robustos a los errores GARCH no integrados y no degenerados, se trata de encontrar aquéllos casos donde dichos estadísticos no se comporten bien.

El proceso IGARCH es estrictamente estacionario y ergódico con tal que  $\alpha_0 > 0$ . La propiedad más importante del proceso IGARCH es que tiene varianza incondicional infinita, lo que viola los supuestos de Phillips (1987) y de Phillips y Perron (1987). Esto implica que la distribución de los estadísticos Dickey-Fuller debería verse afectada incluso asintóticamente, dependiendo de la proximidad del proceso de varianza a la integración.

Una segunda fuente de mal comportamiento es el caso *degenerado*, es decir, cuando la constante,  $\alpha_0$ , en el proceso GARCH es igual a cero. Nelson (1995) ha demostrado que el proceso GARCH(1,1) con  $\alpha_0 = 0$  converge casi seguramente a cero si  $E[\ln(\beta_1 + \alpha_1 z_t^2)] < 0$ , y converge casi seguramente a infinito si  $E[\ln(\beta_1 + \alpha_1 z_t^2)] > 0$ . Para  $\alpha_0 = 0$

<sup>2</sup>Pantula, S.G. (1988), "Estimation of Autoregressive Models with ARCH Errors", Sankhya B 50, pp.119-138.

y  $\alpha_1 + \beta_1 \leq 1$ , el proceso converge casi seguramente a cero, justificando la terminología *degenerado*. Al igual que en el caso anterior, parece probable que la precisión en muestras finitas de los contrastes Dickey-Fuller dependerá de la proximidad de los errores del proceso GARCH a la degeneración.

Dado que la varianza incondicional es igual a  $\alpha_0/(1-\alpha_1-\beta_1)$ , se debe esperar que  $\alpha_0$  se aproxime a cero cuando  $\alpha_1 + \beta_1$  se aproxime a uno, y viceversa, es decir, se debe esperar que la casi-integración y la casi-degeneración se presenten juntas. En los trabajos de Nelson (1990, 1992) se presenta un apoyo empírico a esta expectativa, al considerar los modelos GARCH como aproximaciones a un proceso de difusión en tiempo continuo subyacente. Siendo  $h > 0$  la longitud del intervalo de observación de los datos, Nelson demuestra que el modelo GARCH(1,1) proporciona una aproximación consistente en el límite cuando  $h \rightarrow 0$  si los parámetros siguen la secuencia:

$$\alpha_{0h} = \alpha_0 h, \quad \alpha_{1h} = \alpha_1 \cdot h^{1/2}, \quad \beta_{1h} = 1 - \alpha_{1h}, \quad 0 < \alpha_1 < \infty, \quad 0 < h < 1/\alpha_1^2. \quad (8)$$

De acuerdo con este resultado, se debe esperar que los modelos GARCH aplicados a datos de alta frecuencia,  $h \rightarrow 0$ , sean integrados (o casi) y que exhiban pequeños valores de los parámetros  $\alpha_{0h}$  y  $\alpha_{1h}$  y, por lo tanto, que el parámetro  $\beta_{1h}$  esté próximo a la unidad.

Por otro lado, las relaciones entre los efectos ARCH y los cambios estructurales son múltiples. Ya en su artículo de 1982, Engle observa que la presencia de innovaciones ARCH podría ser el síntoma de una mala especificación del modelo por la no consideración de una variable relevante o por la presencia de un cambio estructural.

El olvido de una ruptura de tendencia o el mal emplazamiento de ésta en el contraste de raíz unitaria permite un cambio estructural determinista bajo la alternativa, lo que induce un rechazo importante de la hipótesis de ausencia de efectos ARCH. Por el contrario, la presencia de una varianza condicional autorregresiva heterocedástica que genere "observaciones influyentes" produce en una serie I(1) shocks permanentes en la media de la serie. Este fenómeno puede observarse entonces como un movimiento determinista con ruptura, como puede verse en Hecq y Urbain (1993).

Por tanto, si consideramos que la mayoría de las series económicas de alta frecuencia pueden representarse adecuadamente como

$$\Delta y_t = u_t,$$

con  $u_t$  como en (3), podemos así concluir que el efecto que tenga una estructura IGARCH sobre los contrastes de raíz unitaria dependerá de cómo afecte a las propiedades de la media de la serie.

## 2. Raíces Unitarias y Heterocedasticidad: Resultados Empíricos

En este apartado haremos referencia a los trabajos de Kim y Schmidt (1993) que estudia el comportamiento del contraste DF en presencia de innovaciones GARCH(1,1) y de Hecq y Urbain (1993) que estudian los mismos efectos para los contrastes DF, DFA, PP y SP, y Perron y Perron-Vogelsang para el caso de cambio estructural. Además presentaremos los resultados para el contraste KPSS para un tamaño muestral  $T=100$  e innovaciones iid y AR(1).

Kim y Schmidt (1993) consideran versiones de los estadísticos de contraste  $t$  que emplean la matriz de covarianzas consistente a la heterocedasticidad propuesta por White (1980). La teoría asintótica desarrollada para esta corrección de la matriz de covarianzas no se extiende al caso de un modelo dinámico con raíz unitaria. Nichols y Pagan (1983) demuestran que la corrección de White es asintóticamente válida en un modelo de regresión dinámico estable, es decir, sin raíz unitaria, con varianza del error finita, aunque sus resultados de simulación demuestran que su comportamiento se

deteriora a medida que la raíz se aproxima a la unidad. Además, la teoría asintótica para la corrección de White requiere la existencia no sólo de una varianza finita, sino también del cuarto momento del error. Esta condición es violada en el caso IGARCH, y también es violada en el caso GARCH estable para algunos valores de los parámetros considerados.<sup>3</sup> Así, en principio, no parece claro que la corrección de White pueda ayudar a resolver los problemas planteados, incluso asintóticamente. Sin embargo, empíricamente se observa que generalmente ayuda; la corrección de White reduce la tendencia de los contrastes  $t$  Dickey-Fuller a sobrerrechazar en presencia de heterocedasticidad condicional, especialmente en el caso integrado y degenerado, aunque no resuelve completamente el problema del sobrerrechazo. Cuando  $T$  se incrementa, la proporción de rechazos para los contrastes corregidos por White normalmente descende. Incluso para el caso  $\alpha_1=0.3$ , donde la condición para la existencia del cuarto momento requiere que  $\beta_1 < 0.606$ , no se observa ninguna discontinuidad aparente en el comportamiento de la corrección de White en el entorno de este valor de  $\beta_1$ .

Básicamente, los resultados de los experimentos de Monte Carlo indican que los contrastes Dickey-Fuller son muy imprecisos sólo cuando el proceso de varianza es degenerado (o casi-degenerado) y el parámetro de volatilidad no está próximo a cero.

En general, se obtiene que manteniendo constante el grado de integración y degeneración, el problema del sobrerrechazo es más severo cuánto más volátil es el proceso GARCH, además de que la corrección de White es mucho menos efectiva (o necesaria) en presencia de baja volatilidad.

Kim y Schmidt (1993) consideran también la parametrización de Nelson (1990, 1992) como proceso generador de datos, obteniendo como resultado que el comportamiento de los contrastes mejora a medida que el proceso de volatilidad se aproxima a la integración (y con ello a la denegación y a un parámetro de volatilidad pequeño) cuando  $h \rightarrow 0$ , con lo que parece confirmarse que los peores resultados se obtienen para procesos próximos a la degeneración (y a la integración) donde el parámetro de volatilidad ( $\alpha_1$ ) sea demasiado alto.

Siguiendo a Bollerslev (1986) y utilizando las expresiones en (3) y (8), podemos representar alternativamente un proceso IGARCH(1,1) como un proceso IMA(1,1) de la forma

$$\Delta u_t^2 = \alpha_{0h}^* + (1 - \beta_{1h} L) v_t, \quad (9)$$

donde  $v_t = (z_t^2 - 1)\sigma_t^2$  es una variable aleatoria incorrelacionada, con media nula y condicionalmente heterocedástica.

Por tanto, en la medida en que sea válida la parametrización de Nelson (1990, 1992), apoyado además por la evidencia empírica de que en las proximidades de la integración el parámetro  $\alpha_{1h}$  es pequeño y el parámetro  $\beta_{1h}$  se aproxima a la unidad al tiempo que la deriva del proceso tiende a ser muy pequeña, tendremos que el proceso  $\{u_t^2\}$  se distribuye como  $\{v_t\}$ ,

$$u_t^2 = \alpha_{0h}^* + v_t + \alpha_{1h} \sum_{i=1}^{\infty} v_{t-i}, \quad (10)$$

sin afectar por tanto a la estructura dinámica de la serie estudiada,  $y_t$ , que conserva la evidencia de raíz unitaria, mientras que los cambios en la varianza condicional son

<sup>3</sup>La condición para la existencia del cuarto momento incondicional es

$$3\alpha_1^2 + 2\alpha_1\beta_1 + \beta_1^2 < 1,$$

ver Bollerslev (1986).

constantes.<sup>4</sup> En el Gráfico 1, que reproduce la Tabla 4 de Kim y Schmidt (1993), podemos observar como al crecer el parámetro autorregresivo, la serie que genera presenta una tendencia estocástica menos definida, convirtiéndola en más errática y, por tanto, induce a un sobrerrechazo de la hipótesis de raíz unitaria (tamaño del contraste).

Hecq y Urbain (1993) consideran también el caso una distribución leptocúrtica para el término de error ( $\varepsilon_t \sim t(5)$ ) y obtienen que ésta no afectará a los contrastes de raíz unitaria si no hay efectos GARCH, pero amplifica considerablemente las distorsiones en presencia de tales efectos.

Las Tablas 1 y 2 presentan los resultados más relevantes obtenidos con estos dos estudios.

El lo referente al comportamiento de los contrastes DF y DFA en presencia de cambio estructural, se trata de estudiar como indice sobre su tamaño y potencia la aparición de una ruptura espúrea inducida por la presencia de innovaciones GARCH. En el Gráfico 2 observamos que este hecho sólo se producirá en el caso de un proceso de innovación IGARCH(1,1) con parámetro AR grande, aunque en los resultados de simulación de Hecq y Urbain (1993) se observan que las distorsiones en los tamaños son mucho más importantes que en el contraste DF sin ruptura.

En el caso de una distribución normal para las innovaciones, el alejamiento de los tamaños empíricos respecto del tamaño nominal es, sobre todo, función de la amplitud del parámetro de volatilidad,  $\alpha_1$ , mientras que en el caso de una distribución leptocúrtica, un coeficiente AR pequeño induce un incremento considerable del tamaño, al igual que en el caso de innovaciones homocedásticas, donde el tamaño se modifica significativamente.

Hemos tabulado nuestros propios valores críticos correspondientes al número de replicaciones y tamaño muestral en lugar de los de Kwiatkowski *et al* (1992).

A partir de los ejercicios de simulación en estos trabajos y el desarrollado aquí observamos que, en general, para formas débiles de innovaciones GARCH(1,1) los tamaños empíricos se aproximan al nivel nominal para todos los contrastes, confirmando la robustez de los contrastes frente a estas parametrizaciones.

En la Tabla 3 presentamos resultados provisionales para el tamaño del contraste KPSS cuando consideramos errores  $\{u_t\}$  iid y AR(1) condicionalmente heterocedásticos GARCH(1,1).

Para la construcción del estimador consistente de la varianza del estadístico de contraste hemos truncado los retardos para los errores iid en  $l=l_0$  y  $l_4$ , y para los errores AR(1) en  $l=l_0$ .

Las mayores distorsiones del tamaño del contraste se producen para el caso degenerado no integrado, y observamos como la utilización de  $l=l_4$  mejora el comportamiento del contraste al incluir en la estimación de la varianza productos cruzados de los errores que aproximan la estructura de la varianza GARCH(1,1).

### 3. Conclusiones

En general, podemos concluir que cuando tengamos evidencia de un comportamiento heterocedástico tipo GARCH en series de alta frecuencia, sólo en casos muy extremos y muy inusuales en la práctica, debemos tomar ciertas cautelas al contrastar la hipótesis de raíz unitaria en los niveles de la serie.

<sup>4</sup> $\{u_t\} \sim MD \Rightarrow \{y_t\} \sim ARIMA(0,1,0) \Rightarrow \{\Delta y_t\} \sim ARMA(0,0)$ .

**Tabla 1. Tamaño Empírico del Contraste DF al 5% Nominal,  $T=100$**

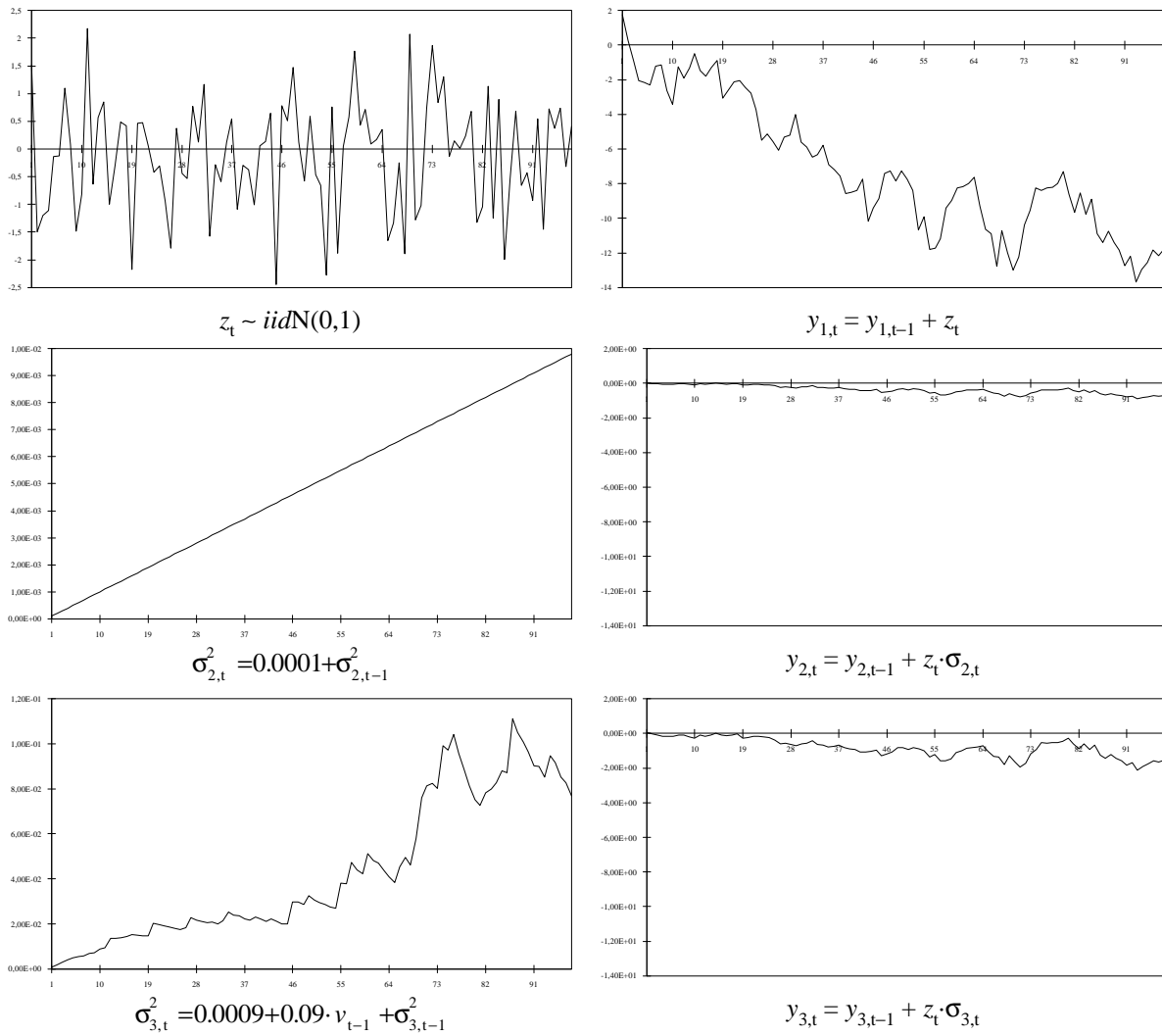
<b>Tabla 1.1. Caso Integrado No Degenerado<sup>a</sup></b>					<b>Tabla 1.2. Caso Integrado y Degenerado<sup>a</sup></b>				
$h$	$l$	0.25	0.09	0.01	$h$	$l$	0.25	0.09	0.01
$\tau_\mu$	0.1208	0.1031	0.0761	0.0699	$\tau_\mu$	0.4125	0.1491	0.0830	0.0520
$\tau_\tau$	0.1165	0.0940	0.0756	0.0565	$\tau_\tau$	0.3531	0.0937	0.1326	0.0804
$\tau_\mu(w)^b$	0.0684	0.0740	0.0721	0.0669	$\tau_\mu(w)$	0.1207	0.0823	0.0752	0.0669
$\tau_\tau(w)$	0.0701	0.0807	0.0851	0.0827	$\tau_\tau(w)$	0.1011	0.0864	0.0861	0.0829

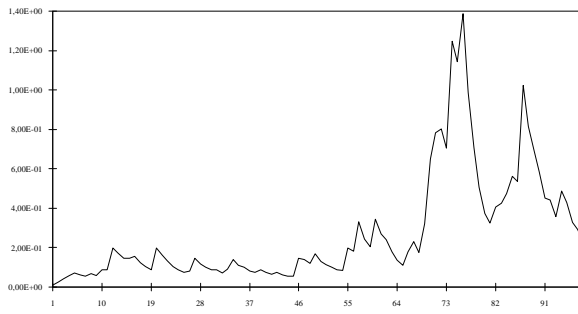
<sup>a</sup> Correspondiente a la aproximación de difusión de Nelson (1990,1992):  $\alpha_0=0.01$ ,  $\alpha_1=0.03$ .

<sup>b</sup> Con corrección por heterocedasticidad y autocorrelación de White (1980)

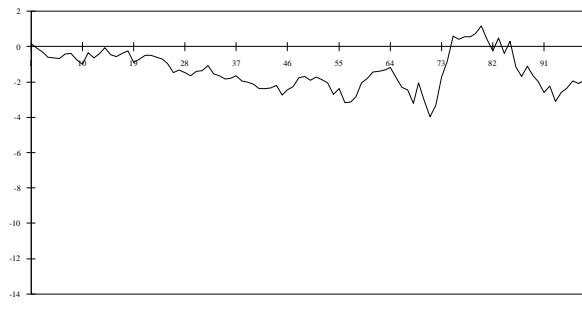
**Fuente:** Kim,K. y Schmidt,P. (1992), Tablas 4 y 5.

**Gráfico 1. Paseo Aleatorio con Innovaciones IGARCH(1,1)**





$$\sigma_{4,t}^2 = 0.01 + 0.3 \cdot \nu_{t-1} + \sigma_{4,t-1}^2$$



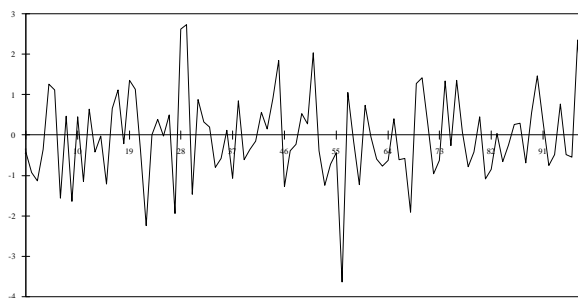
$$y_{4,t} = y_{4,t-1} + z_t \cdot \sigma_{4,t}$$

**Tabla 2. Tamaños Empíricos y Potencias al 5% Nominal**

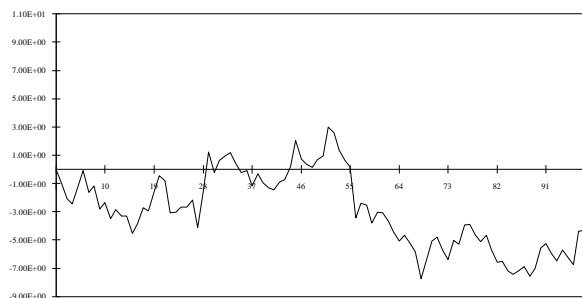
	Tamaños Empíricos $[\alpha_1, \beta_1]$ , $\alpha_0=0.01$						Potencias ( $\rho=0.9$ ) $[\alpha_1, \beta_1]$ , $\alpha_0=0.01$					
	[0,0]	[0.5,0]	[0.99,0]	[0.5,0.5]	[0.9,0.1]	[0.9,0.9]	[0,0]	[0.5,0]	[0.99,0]	[0.5,0.5]	[0.9,0.1]	[0.9,0.9]
<b>Tabla 2.1.a. Contrastes DF y PP Modelo con Constante y Distribución Normal, T=100</b>												
DF	5.00	6.52	10.62	8.18	10.32	5.36	35.24	38.20	42.94	40.50	42.64	36.22
Z(1)	5.30	6.50	9.96	7.92	9.76	5.38	36.32	39.70	43.26	41.16	43.48	37.64
<b>Tabla 2.1.b. Contrastes DF, PP y SP Modelo con Constante y Tendencia y Distribución Normal, T=100</b>												
DF	5.00	7.44	12.62	9.14	12.38	5.80	20.68	24.14	31.00	26.84	30.70	21.50
Z(1)	5.62	7.58	12.00	9.58	12.24	6.26	22.40	24.84	31.78	27.96	31.50	23.22
SP	5.00	6.80	11.34	8.50	11.40	5.38	24.18	26.80	33.20	29.66	32.72	24.84
<b>Tabla 2.2.a. Contrastes DF y PP Modelo con Constante y Distribución Leptocúrtica, T=100</b>												
DF	5.46	9.22	16.14	12.90	16.70	6.46	33.72	41.14	47.52	44.52	47.80	35.84
Z(1)	5.56	8.90	15.50	12.78	16.28	6.42	34.88	40.86	47.44	44.86	47.90	37.18
<b>Tabla 2.2.b. Contrastes DF, PP y SP Modelo con Constante y Tendencia y Distribución Leptocúrtica, T=100</b>												
DF	5.40	10.84	19.06	15.16	19.46	7.04	20.28	29.30	37.62	34.02	38.60	23.00
Z(1)	5.74	10.20	18.40	14.98	18.90	7.46	22.04	29.56	37.84	34.72	38.70	24.20
SP	4.76	9.96	16.96	12.76	16.42	6.56	24.48	31.20	36.66	34.54	37.18	26.90
<b>Tabla 2.3.a. Contraste DF con Cambio Estructural y Distribución Normal, T=100</b>												
DF	5.00	14.23	35.53	22.50	34.67	6.77	14.53	21.93	36.53	27.23	35.87	16.33
<b>Tabla 2.3.b. Contraste DF con Cambio Estructural y Distribución Leptocúrtica, T=100</b>												
DF	7.53	29.40	55.50	44.30	57.47	13.00	15.50	31.70	47.47	40.23	48.17	20.03

Fuente: Hecq,A. y Urbain,J-P.(1993), Tablas 1,2,4 y 5.

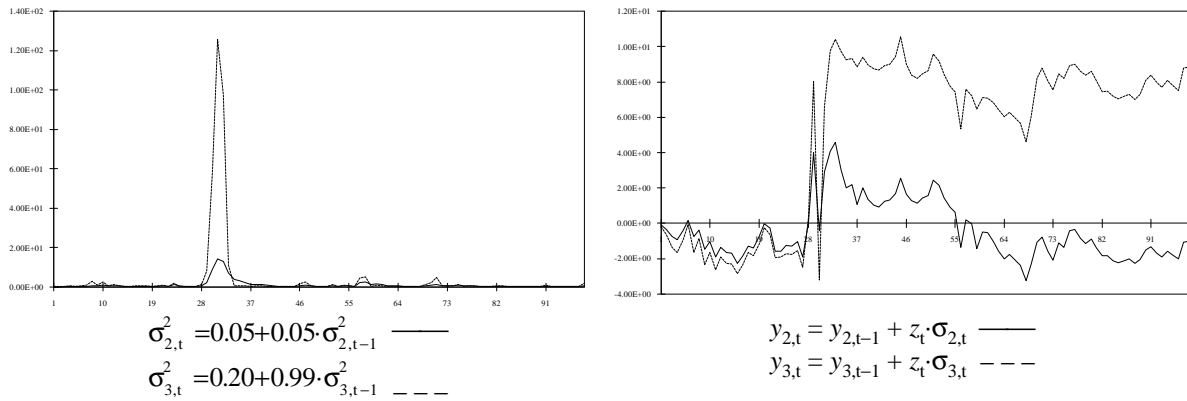
**Gráfico 2. Cambio Estructural Espúreo**



$$z_t \sim iidN(0,1)$$



$$y_{1,t} = y_{1,t-1} + z_t$$



**Tabla 3. Tamaño Empírico del Contraste KPSS al 5% Nominal**

$[\alpha_0, \alpha_1, \beta_1]$	[0.01,0.1,0.1]	[0.01,0.5,0.5]	[0.01,0.9,0.1]	[0.01,0.1,0.9]	[0,0.1,0.1]
<b>Tabla 3.1. Errores iid, <math>T=100</math></b>					
$\eta_\mu$					
$l_0$	7.1	61.3	6.3	5.9	29.6
$l_4$	6.6	6.4	5.4	6.1	1.5
$\eta_\tau$					
$l_0$	8.9	7.9	8.9	7.5	43.2
$l_4$	7.3	6.9	5.2	6.1	30.1
<b>Tabla 3.2. Errores AR(1), <math>T=100, l=l_0</math></b>					
$\rho=-0.8$	$\eta_\mu$ 6.8	6.8	6.3	5.1	3.1
	$\eta_\tau$ 9.6	10.3	14.2	32.6	9.7
$\rho=-0.5$	$\eta_\mu$ 4.3	6	5.4	4.9	1.0
	$\eta_\tau$ 6.4	6.8	12.8	17.2	7.3
$\rho=-0.2$	$\eta_\mu$ 4.3	5.4	4.8	5.2	0.6
	$\eta_\tau$ 6.2	6.7	7.1	19.4	5.6
$\rho=0.2$	$\eta_\mu$ 3.1	4.8	4.3	4.4	0.1
	$\eta_\tau$ 4.6	4.8	15.3	6.4	3.9
$\rho=0.5$	$\eta_\mu$ 3.0	4.7	4.0	4.2	0.4
	$\eta_\tau$ 4.9	4.9	14.2	4.3	3.4
$\rho=0.8$	$\eta_\mu$ 2.6	3.5	4.4	3.4	1.4
	$\eta_\tau$ 4.5	5.5	5.1	4.1	2.9

$(r_0, \beta) = (3, 0.7)$

### Referencias Bibliográficas

Engle, R.F. y T. Bollerslev (1986), "Modeling the Persistence of Conditional Variances", *Econometric Reviews*, 5(1), pp.1-50.

Hecq, A. y J-P. Urbain (1993), "Impact d'Innovations IGARCH sur les Tests de Racine Unite: Comparaison des Procédures "Traditionnelles" et des Tests Permettant une Cassure Déterministe sous l'Alternative", AEA International Conference, Luxemburgo.

Kim, K. y P. Schmidt (1993), "Unit Roots with Conditional Heteroskedasticity", *Journal of Econometrics*, 59, pp.287-300.

Kwiatkowski, D., P. C. B. Phillips, P. Schmidt y Y. Shin (1992), "Testing the Null Hypothesis of Stationarity against the Alternative of a Unit Root. How Sure are we that Economic Time Series have a Unit Root?", *Journal of Econometrics*, vol.54, pp.159-178.

León, A. e I. Mauleón (1996), "Misspecification and the GARCH Model", Forecasting Financial Markets Conference: New Advances for Exchange Rates, Interest Rates and Asset Management, Londres 27-29 Marzo.

Nelson, D.B. (1992), "Filtering and Forecasting with Misspecified ARCH Models I: Getting the Right Variance with the Wrong Model", *Journal of Econometrics*, 52, pp.61-90.

Nelson, D.B. (1990), "ARCH Models as Diffusion Approximations", *Journal of Econometrics*, 45, pp.7-38.

Nichols, D.F. y A.R. Pagan (1983), "Heteroskedasticity in Models with Lagged Dependent Variables", *Econometrica*, vol.51, pp.1233-1242.

Noriega-Muro, A.E. (1993), *Nonstationarity and Structural Breaks in Economic Time Series. Asymptotic Theory and Monte Carlo Simulations*. Avebury, Ashgate Publishing Limited, England.

White, H. (1980), "A Heteroskedasticity Consistent Covariance Matrix Estimator and a Direct Test for Heteroskedasticity", *Econometrica*, vol.48, pp.817-838.