

Análisis de un modelo dinámico de explotación de un recurso no renovable

Julia Martínez Rodríguez y Juan Pablo Rincón Zapatero

Dpto. Economía Aplicada (Matemáticas)

Universidad de Valladolid

1 Introducción

En este trabajo consideramos un modelo dinámico de explotación de un recurso no renovable, utilizado en régimen de propiedad común por varios agentes. Este modelo fue primeramente estudiado por Levhari y Mirman (1980), en tiempo discreto. Nosotros nos centramos en una versión en tiempo continuo y en horizonte finito, a diferencia de Clemhout y Wan (1994), quienes consideran horizonte infinito. En consecuencia, en nuestro análisis la variable temporal juega un papel primordial y no puede descartarse, como sucede cuando el problema es autónomo y se considera un horizonte temporal ilimitado. Esto conlleva una mayor dificultad del problema y al mismo tiempo una mayor riqueza del modelo, ya que puede tenerse en cuenta el hecho de que los agentes valoren, al final del horizonte temporal, las existencias del recurso.

El nuevo enfoque propuesto en Martínez y Rincón (1995), se muestra especialmente adecuado para tratar el modelo en horizonte finito, ya que en ese trabajo se caracterizan los equilibrios de Nash "feedback" como soluciones de un sistema cuasilineal de ecuaciones en derivadas parciales, con condiciones finales determinadas por las funciones residuales de los jugadores. Dicha caracterización nos permitirá demostrar la existencia y unicidad del equilibrio de Nash, cuando los usuarios del recurso muestran preferencias idénticas respecto al consumo y a la valoración de las existencias en el momento final.

Presentamos condiciones suficientes que garantizan la existencia y unicidad del equilibrio "feedback", mediante la existencia y unicidad de solución, en el sentido clásico, de una ecuación en derivadas parciales. Dichas condiciones afectan únicamente a las funciones que intervienen en el modelo, no a las estrategias óptimas, como ocurre con las obtenidas por Clemhout y Wan (1994), quienes exigen convexidad de las estrategias óptimas del juego en horizonte infinito.

En algunos casos, es posible encontrar una expresión explícita o implícita del equilibrio de Nash. En los casos en los que no disponemos de una expresión explícita, presentamos gráficamente una aproximación obtenida numéricamente.

Realizamos también un análisis cualitativo de la solución, así como de su sensibilidad a variaciones en el número de jugadores y funciones que intervienen, a partir de las ecuaciones de las que surge.

2. Modelo de explotación de un recurso no renovable en régimen de propiedad común

Suponemos que un recurso no renovable es explotado por $N > 1$ agentes, en régimen de propiedad común, los cuales actúan de forma descentralizada y, por tanto, el juego toma un carácter no cooperativo. A continuación detallamos las componentes del juego diferencial. La evolución del recurso está regida por la ecuación diferencial siguiente:

$$\dot{x} = - \sum_{i=1}^N u^i, \quad x(0) = x_0 > 0$$

El pago del jugador i -ésimo, cuando las existencias del recurso en el instante t son $x(t) = x$ unidades, se define por:

$$J_i(t, x, u) = \int_t^T \exp(-r_i t) L_i(u^i(t, x(t))) dt + \exp(-r_i T) S_i(x(T)), \quad 0 < T < \infty, \quad (1)$$

donde $u = (u^1, \dots, u^N) \in U^N$, $u^i \in U^i$, $U^N = U^1 \times \dots \times U^N$ y $U^i = \{u^i : [0, T] \times [0, x_0] \rightarrow (0, \infty) \mid u \text{ de clase } C^1\}$. Las estrategias admisibles son de ciclo cerrado sin memoria, es decir, dependientes del tiempo y del valor de la variable de estado x , en el momento actual.

La función de utilidad instantánea del jugador i , L_i , es una función no negativa, suficientemente diferenciable en $(0, \infty)$, estrictamente creciente y estrictamente cóncava. El tanto de preferencia es $r_i \geq 0$ y S_i , la función que valora las existencias del recurso al final del juego, es una función no negativa, suficientemente diferenciable en $(0, x]$, creciente y cóncava, que verifica $S_i(0) = 0$.

En lo que sigue, jugará un papel importante la elasticidad de la utilidad marginal:

$$E^i(u^i) = u^i \frac{L_i''(u^i)}{L_i'(u^i)}$$

y el inverso, cambiado de signo, del coeficiente de Arrow-Pratt de la aversión al riesgo:

$$e^i(u^i) = \frac{L_i''(u^i)}{L_i'(u^i)} = \frac{u^i}{E^i(u^i)}$$

Las hipótesis impuestas a las funciones de utilidad indican que todos los agentes son adversos al riesgo.

El criterio de optimalidad que hemos elegido en este contexto es el de equilibrio de Nash "feedback", ya que el juego es no cooperativo.

Definición Una N-upla $\mathbf{u}^* \in \hat{\mathbf{U}}^N$ es un equilibrio de Nash "Teedbak" si y sólo si para cada $i = 1, \dots, N$ y cada par admisible (t, x) se verifica:

$$J_i(t, x, u^*) \geq J_i(t, x, u^{*1}, \dots, u^{*(i-1)}, u^i, u^{*(i+1)}, \dots, u^{*N}), \quad \forall u^i \in U^i.$$

3 Existencia y unicidad del equilibrio de Nash

El hamiltoniano del jugador i-ésimo asociado al juego diferencial (1)-(2) es:

$$H^i(t, x, u, \mathbf{m}^i) = \exp(-r_i t) L_i(u^i) - \mathbf{m}^i \sum_{i=1}^N u^i \quad (3)$$

y, por hipótesis, existe una única estrategia \hat{u}^i que maximiza $H^i : u^i = (L_i')^{-1}(\exp(r_i t) \mathbf{m}^i)$, donde μ^i es la variable de coestado del jugador i-ésimo.

En Martínez y Rincón (1995) se prueba que una N-upla de estrategias que maximiza el hamiltoniano de cada uno de los jugadores, es un equilibrio "feedback" si y sólo si es solución de clase C^1 de un sistema cuasilineal de ecuaciones en derivadas parciales. Dicho sistema de ecuaciones viene dado por:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u^i}{\partial t} + \left(\sum_{j=1}^n u^j \right) \frac{\partial u^i}{\partial x} + e^i(u^i) \sum_{j \neq i} \frac{\partial u^j}{\partial x} &= -r_i e^i(u^i) \\ u^i(0, x) &= f_i(x) \end{aligned} \right\}, \quad i=1, \dots, N,$$

donde $t = T - t, 0 \leq x \leq x_0$ y $f_i(x) = (L_i')^{-1}(S_i''(x))$

Cuando S_i , es una función lineal, $S_i(x) = s_i x$ para todo $i = 1, \dots, N$, con $s_i > 0$, entonces puede existir una solución de (4) independiente de x . En este caso el equilibrio se denomina "feedback" degenerado, y el sistema (4) se convierte en uno de ecuaciones diferenciales ordinarias desacopladas:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du^i}{dt} &= -r_i e^i(u^i) \\ u^i(0) &= (L_i')^{-1}(s_i) \end{aligned} \right\}, \quad i=1, \dots, N \quad (5)$$

Esto significa que si los agentes valoran la cantidad de recurso que no se extrae, al final del horizonte temporal, de forma proporcional a la misma, entonces, para actuar de forma óptima en cualquier situación del juego no es necesario recurrir a la información que ofrece la variable de estado.

En particular, si $r_i = 0$, la estrategia óptima de cada jugador es constante: $u^{*i} = (L_i')^{-1}(s_i)$.

Teorema 1 Si $r_i > 0$, existe solución única en $[0, \infty)$ de la i -ésima ecuación de (5) si y sólo si $\lim_{t \rightarrow \infty} L_i'(u^i) = 0$. En este caso la solución verifica: $L_i'(u^{*i}(t)) = L_i'(s_i) \exp(-r_i t)$.

Este resultado nos permite afirmar que u^{*i} es una función creciente en τ y, por tanto, decreciente en t .

Consideramos el caso simétrico: $L_i = L$, $S_i = S$, $r_i = r$ y $U^i = U$ para todo $i = 1, \dots, N$,

en el cual el sistema (4) se reduce a una única ecuación:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + (Nu + (N-1)\mathbf{e}(u)) \frac{\partial u}{\partial u} &= -r\mathbf{e}(u) \\ u(0, x) &= f(x) \end{aligned} \right\}, \quad (6)$$

cuyo sistema característico asociado es:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{dr_1} &= 1 \\ \frac{dx}{dt_1} &= Nz + (N-1)\mathbf{e}(z) \\ \frac{dz}{dt_1} &= -r\mathbf{e}(z) \end{aligned} \right\}, \quad (7)$$

con dato inicial

$$\left. \begin{aligned} r(0, s) &= 1 \\ x(0, s) &= s \\ z(0, s) &= f(s) \end{aligned} \right\}, \quad (8)$$

Teorema 2 Si se verifican las condiciones:

$$1. \mathbf{e}'(u) \geq -\frac{N}{N-1} \quad \forall u \in U$$

$$2. r > 0 \Rightarrow \lim_{u \rightarrow +\infty} L'(u) = 0$$

entonces existe una única solución de (6) de clase C^1 , definida en $[0, \infty) \times [0, x_0]$.

La hipótesis $S' \geq 0$ asegura la no negatividad de la solución, mientras que $\phi(0) = 0$ y

$e(0) = 0$ (resp. $e(0) < 0$) implican $u(\tau, 0) = 0$ (resp. $u(r, 0) > 0$) para todo $r \geq 0$.

La desigualdad $e'(u) \geq -\frac{N}{N-1}$ se traduce, en términos de la elasticidad de la utilidad marginal,

en:

$$E' \leq \frac{E}{u} \left(1 + E \frac{N}{N-1} \right) \quad (9)$$

Si los agentes muestran un coeficiente relativo de aversión al riesgo decreciente, es decir, $E' \geq 0$,

entonces debe ocurrir $E < -1 + \frac{1}{N}$ para que se verifique (9). Clemhout y Wan (1994),

establecen la misma condición pero en horizonte infinito y para dos jugadores. En este caso el equilibrio de Nash, que sólo depende de la variable de estado, es convexo. De esta forma, estos autores pueden aplicar un teorema de suficiencia de Mangasarian. Sin embargo, en horizonte finito la desigualdad (9) no garantiza la convexidad del equilibrio respecto a la variable de estado, debido a la influencia que ejerce la variable temporal.

La solución de (5) constituye el único equilibrio perfecto en los sub juegos, de acuerdo con el Teorema 1 de Martínez y Rincón (1995).

A partir del Teorema 2 podemos asegurar existencia y unicidad del equilibrio de Nash del juego simétrico (1)-(2), para una amplia gama de funciones de utilidad y de valores residuales de los jugadores. Algunos casos son especialmente tratables, y puede darse su solución, como se recoge en el siguiente resultado.

Teorema 3 *En, el juego simétrico (1)-(2), existe un único equilibrio de Nash "a feedback", determinado implícitamente como se indica, en cada uno de los casos siguientes:*

1. *Elasticidad marginal de la utilidad constante, $E(u) = r$, $r \in \left[-1, -1 + \frac{1}{N} \right]$:*

$$u^*(r, x) = \exp\left(-\frac{r}{g}t\right) f\left[x + \frac{g}{r}\left(1 - \exp\left(\frac{r}{g}t\right)\right)\left(\frac{N-1}{g} + N\right)u^*(t, x)\right] \quad (10)$$

2. Elasticidad marginal de la utilidad lineal,. $E(u) = -\gamma u$, $\gamma < 0$:

$$u^*(r, x) = -\frac{r}{g} \mathbf{f} \left[x + \frac{N-1}{r} \mathbf{t} - N \frac{r}{2g} r^2 - Nru^*(\mathbf{t}, x) \right] \quad (11)$$

3. Elasticidad marginal de la utilidad verificando (9) y tanto nulo de preferencia del consumo, $r=0$:

$$u^*(\mathbf{t}, x) = \mathbf{f} \left[x - \mathbf{t} \left((N-1) \mathbf{e}(u^*(\mathbf{t}, x)) + Nu^*(\mathbf{t}, x) \right) \right] \quad (12)$$

Si los agentes manifiestan aversión al riesgo independiente del consumo, entonces $\epsilon(0) < 0$ y, por tanto, $u(r, 0) > 0$ como se ha comentado anteriormente. Cuando el horizonte temporal es suficientemente grande, la estrategia puede no ser factible, si en algún instante las existencias del recurso se agotan.

4 Análisis cualitativo del equilibrio de Nash

En esta sección realizamos un análisis cualitativo de la solución, considerando un tanto nulo de preferencia, $r = 0$. Presentamos para ello un resultado que permite comparar soluciones de ecuaciones en derivadas parciales conservativas.

Teorema 4 Sean las ecuaciones en derivadas parciales:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{t}} + f(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u(0, x) = \mathbf{f}(x) \end{array} \right\} [1] \quad \left. \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{t}} + g(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ v(0, x) = \mathbf{y}(x) \end{array} \right\} [2]$$

con $r \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ compacto, f, g, \mathbf{f} y \mathbf{w} funciones de clase C^1 , crecientes y tal que las condiciones iniciales verifican: $\mathbf{f} \leq \mathbf{w}$. Sean u y v las únicas soluciones de clase C^1 de [1] y [2] respectivamente. Entonces:

$$1. \max_{x \in \mathbb{R}} x \mathbf{f} \leq \min_{x \in \mathbb{R}} x \mathbf{j} \Rightarrow u \leq v$$

$$2. \max_{x \in \mathbb{R}} x \mathbf{f} > \min_{x \in \mathbb{R}} x \mathbf{j} \Rightarrow (u \leq v \Leftrightarrow f \geq g \text{ en } [\min_{x \in \mathbb{R}} x \mathbf{j}, \max_{x \in \mathbb{R}} x \mathbf{f}])$$

Como consecuencia inmediata tenemos los siguientes resultados.

Corolario 1 *Supongamos que se verifican (9) y $r = 0$. Entonces el consumo de cada uno de los jugadores aumenta (resp. disminuye) a medida que aumenta (resp. disminuye) el número de extractores del recurso si y sólo si la elasticidad de la utilidad marginal es mayor (resp. menor) que -1 . Si la elasticidad de la utilidad marginal es -1 , entonces el consumo es independiente del número de jugadores.*

Consideramos a continuación dos modelos diferentes, pero con el mismo número de jugadores:

- Modelo 1: Elasticidad de la utilidad marginal: E_1 . Condición final: $\emptyset 1$.
- Modelo 2: Elasticidad de la utilidad marginal: E_2 . Condición final: $\emptyset 2$.

Corolario 2 *Supongamos que se verifican (9) y $r = 0$. Entonces:*

1. *El consumo de cada uno de los jugadores es mayor (resp. menor) cuanto mayor (resp. menor) es la elasticidad de la utilidad marginal.*
2. *El consumo de cada uno de los jugadores es mayor (resp. menor) cuanto mayor (resp. menor) es la condición inicial.*
- 3- *Si $f_1 < f_2$ y $E_1 > E_2$, entonces en puntos próximos a la condición inicial se consume más en el Modelo 2 que en el Modelo 1, pero si el horizonte temporal es suficientemente grande, esta relación se invierte.*

Cuando el tanto de preferencia del consumo es positivo, no disponemos de un resultado análogo al Teorema 3 para ecuaciones no conservativas.

5 Análisis numérico

En esta sección determinamos numéricamente el equilibrio de Nash "feedback" e ilustramos los

resultados presentados en la Sección 4.

-

En la Figura 1 se representa la superficie solución, determinada a partir de las soluciones del sistema característico (7) con condiciones iniciales (8). Estas soluciones las hemos determinado numéricamente mediante un método Runge-Kutta implementado en MATLAB, con las siguientes especificaciones: $L(u) = \tanh(u)$, $S(x) = 1 - \exp(-x)$, $r = 0.5$ y $N = 2$.

En la Figura 2 se observa que la relación entre la tasa de extracción y las existencias del recurso, para distintos instantes de tiempo, es prácticamente constante, y disminuye a medida que crece el tiempo. Dado que para este caso $\lim_{u \rightarrow 0} \epsilon(u) = -\infty$ la solución es positiva cuando $x = 0$; si a lo largo de la trayectoria óptima llega a agotarse el recurso, entonces esta estrategia puede no ser factible.

A continuación ilustramos los resultados obtenidos en la Sección 4. Para ello consideraremos dos funciones de utilidad:

$$L(u) = u^{1+g}, \quad g \in \left(-1, -1 + \frac{1}{N0}\right) \quad (13)$$

$$L(u) = 1 - \exp(gu), \quad g < 0, \quad (14)$$

con valor residual $S(x) = x^{1/2}$. La solución está dada por (12). En la Figura 3 se compara la tasa de extracción para la función de utilidad (13) con $\gamma = -0.95$ cuando el número de jugadores es $N = 2$ (línea continua) y $N = 10$ (línea discontinuo). En la Figura 4 se realiza la misma comparación con la función (14) para $\gamma = -1$. Dado que en este caso la elasticidad de la utilidad marginal depende de la solución, se observa que para $t = 99$, las gráficas se cortan cuando la solución hace que la elasticidad de la utilidad marginal tome el valor -1. Las gráficas reflejan el comportamiento establecido en el Corolario 1.

Con el fin de ilustrar los resultados obtenidos en el Corolario 2, presentamos en la Figura 5 las soluciones cuando el número de jugadores es $N = 4$ y la función de utilidad es (13), para los valores $\gamma = -0.8$ (línea continua) y $\gamma = -0.9$ (línea discontinuo). De la misma forma, en la Figura 6 presentamos las soluciones para el mismo número de jugadores, función de utilidad

(14) y para $\gamma = -1$ (línea continua) y $\gamma = -2$ (línea discontinua).

Referencias

Clemhout, y H. Y. Wan (1994). "Differential games-economic applications", en *Handbook of game theory*. Volumen 2. Editado por R. J. Aumann y S. Hart, pp. 802-825.

Levhari, D. y L. J. Mirman (1980). "The great fish war: an example using a dynamic CournotNash solution", *The Bell Journal of Economics*, 11, pp. 322-334.

Martínez Rodríguez, J. y J. P. Rincón Zapatero (1995). "Caracterización de equilibrios feedback en juegos diferenciales mediante ecuaciones en derivadas parciales", *Estudios de Economía Aplicada*. IX Reunión Anual de la *Asociación Científico - Europea de Economía Aplicada (ASEPELT - ESPAÑA)* vol. V, Santiago de Compostela, 1995, pp. 321-331.

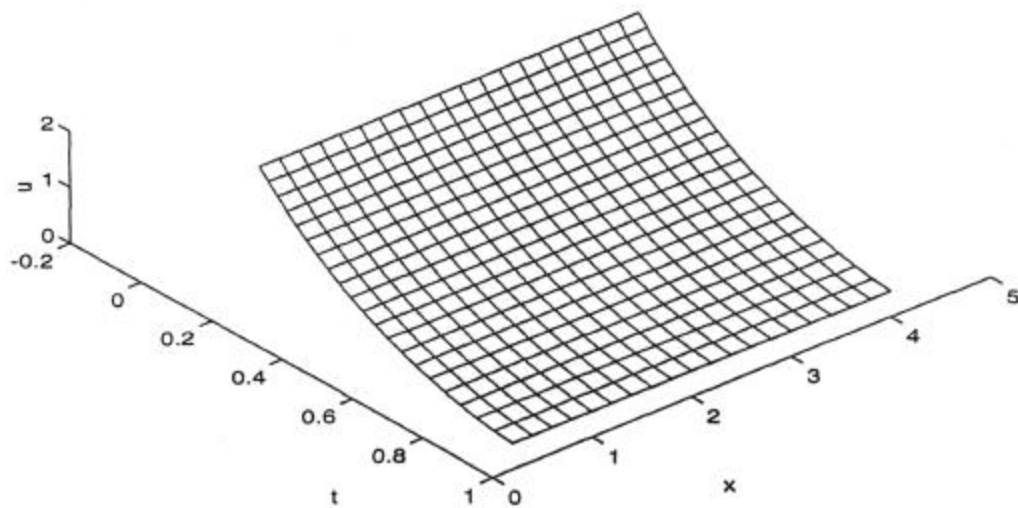


Figura 1: Tasa de extracción en función de las existencias del recurso y del tiempo

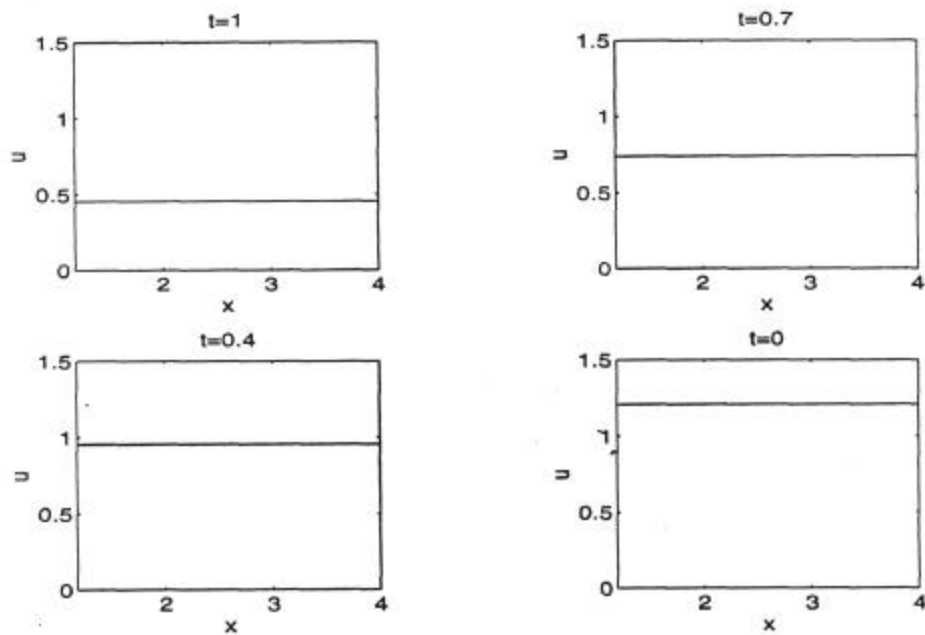


Figura 2: Evolución de la tasa de extracción dependiente de las existencias del recurso

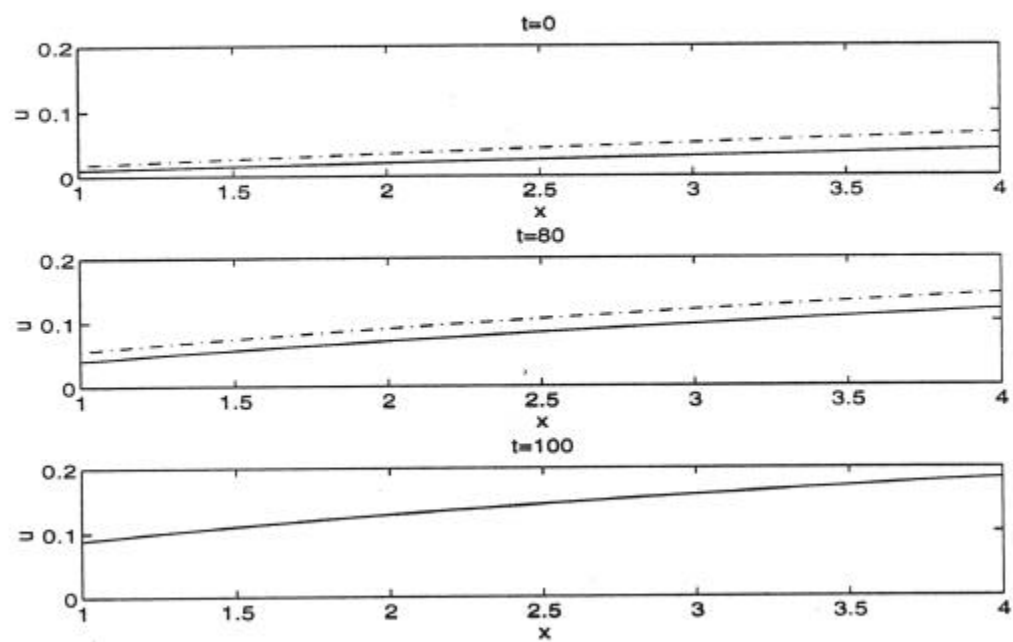


Figura 3:

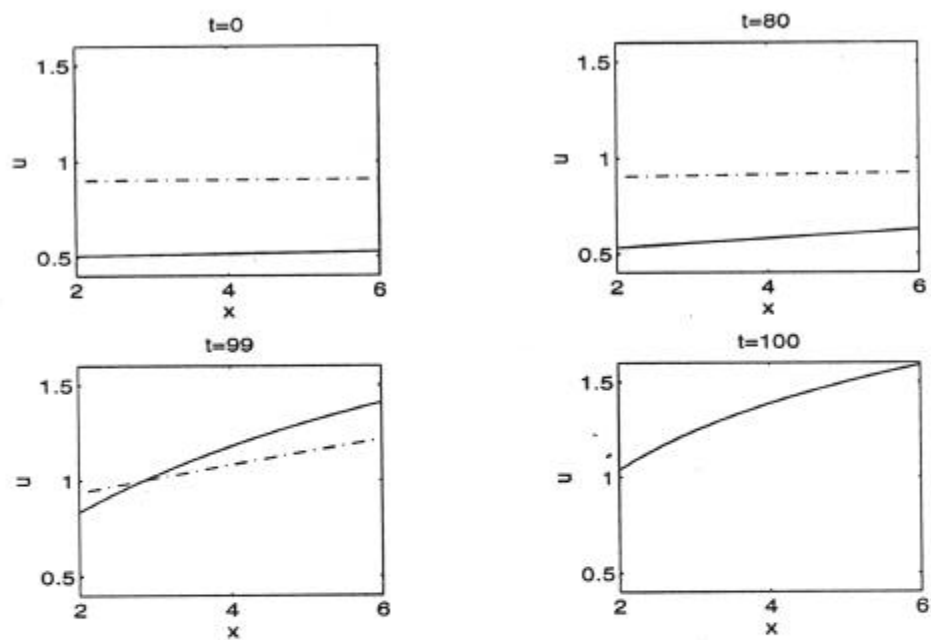


Figura 4:

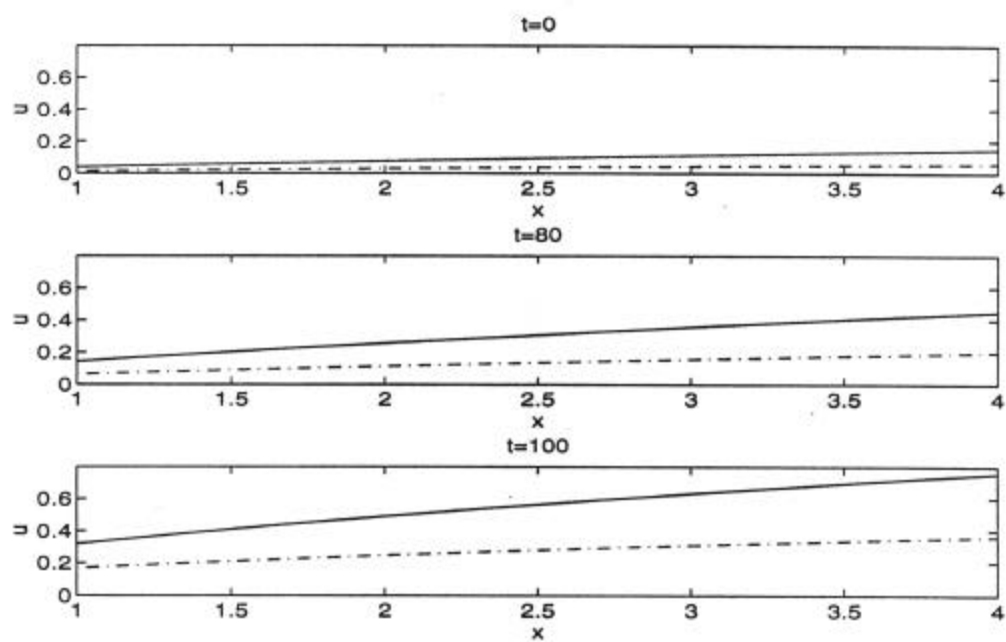


Figura 5:

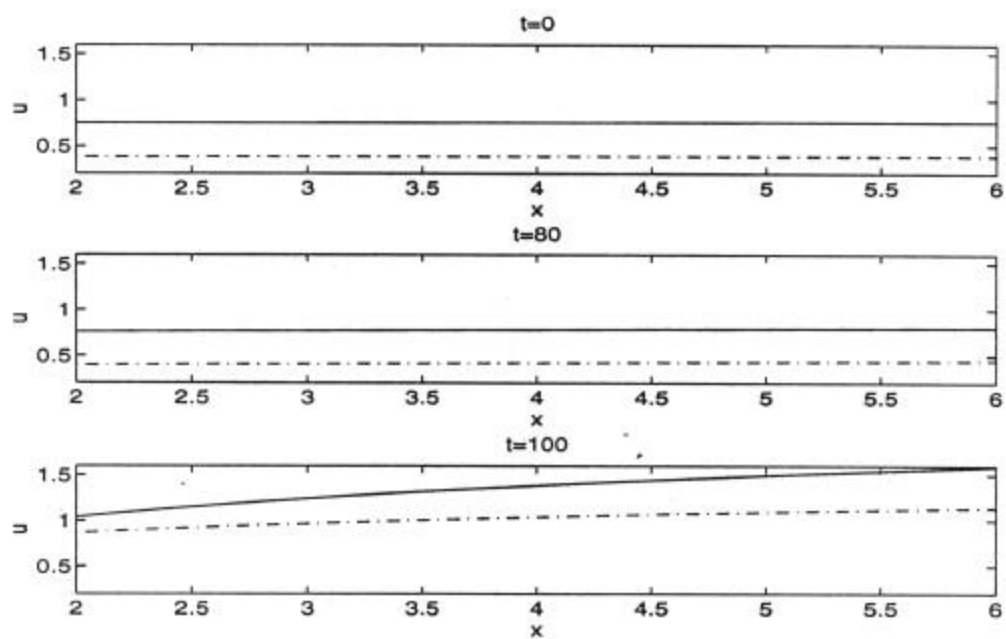


Figura 6: