

PROCEDIMIENTOS SECUENCIALES PARA LA MONITORIZACION DE MODELOS LINEALES DINAMICOS

MANUEL SALVADOR FIGUERAS
PILAR GARGALLO VALERO
Dto. Métodos Estadísticos
Facultad de Economicas
UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

RESUMEN

Se aplican los estadísticos CUSCORE, presentados por BOX y RAMIREZ(1992) a la monitorización de cambios de nivel, cambios en varianza y de la autocorrelación residual de modelos lineales dinámicos.

Palabras Clave: DLM, Gráficos de Control, *cusums*, *tests secuenciales*

1. INTRODUCCION

Desde el trabajo pionero de Harrison y Stevens (1976) los modelos lineales dinámicos(DLM) se han convertido en una herramienta importante para la modelización de series temporales desde una óptica bayesiana. Esto se debe a que el carácter dinámico de los parámetros de este tipo de modelos le permiten adaptarse a las circunstancias en las que se desarrolla la evolución de la serie, permitiendo, de forma natural, la intervención del analista cuando se producen acontecimientos extraordinarios que puedan alterar su evolución futura (ver West y Harrison (1989) o Pole, West y Harrison (1994)). Dichas intervenciones puede ser de dos tipos: prospectivas, si se detectan acontecimientos futuros, o retrospectivas, si se detecta un deterioro en las predicciones hechas por el modelo. De cara a este tipo de intervenciones es importante monitorizar continuamente si las predicciones hechas por el modelo se ajustan a los datos observados. Esto se realiza utilizando como elemento de información los errores de predicción a un paso estandarizados que, en condiciones de funcionamiento estándar, se distribuyen de forma independiente y según una distribución $N(0,1)$ o T de Student.

Deming (1986) llamó *causas comunes* de variación a aquellas que son inherentes en un proceso y producen variaciones controladas, y *causas especiales* de variación a aquellas que son incontroladas y deberían ser consideradas como anomalías.

De acuerdo con esto, el objetivo principal de la monitorización de un proceso debería ser:

- i) reconocer y *monitorizar* las causas comunes del sistema.
- ii) *identificar* causas especiales de variación que puedan eliminarse.

Es importante ser capaces de detectar rápidamente desviaciones del proceso o causas especiales.

Las desviaciones de interés más comunes son de 3 tipos:

- a) Errores individuales anormalmente altos debidos posiblemente a outliers.
- b) Errores grandes en valor absoluto que no siguen ningún patrón concreto.
- c) Rachas locales de errores del mismo signo o de signo alternante.

En este trabajo se presta atención a las desviaciones de los tipos b) y c) que suelen producirse como consecuencia de la falta de adecuación del modelo propuesto a los datos observados. Dichas desviaciones se manifiestan a través de los cambios en la media o la varianza de los errores predictivos a un paso y/o en el desarrollo de autocorrelaciones entre dichos errores. Para analizar dichas desviaciones se utilizan test secuenciales basados en la monitorización del factor Bayes de la hipótesis nula H_0 : los errores de predicción a 1 paso son ruido blanco, frente a alternativas planeadas para detectar lo más rápidamente posible las presuntas desviaciones en media, varianza o autocorrelación residual haciendo uso de los estadísticos “cuscore” descritos en Box y Ramirez (1992). De cara a calcular los límites de aceptación y rechazo de dichos tests se utilizan las ideas expuestas en Berger et al. (1994) para evaluar las probabilidades condicionadas de los errores tipo I y II y se compara el procedimiento que ellos proponen con otro basado en la acotación de las probabilidades de dichos errores.

El plan del trabajo es el siguiente: en la sección 2 se plantea el problema de la monitorización de los modelos lineales dinámicos (DLM); en la sección 3 se exponen los estadísticos “Cuscore” y se aborda el problema de construir test de significación basados en ellos; en la sección 4 se aplican las ideas de la sección 3 al problema de la monitorización de un cambio en media, varianza o autocorrelación residual; en la sección 5 se realiza un estudio de simulación para comparar los procedimientos deducidos en la sección 4; por último, en la sección 6 se exponen las conclusiones del trabajo.

2. MONITORIZACION DE MODELOS LINEALES DINAMICOS

Un DLM viene dado por las ecuaciones:

$$Y_t = X_t' \phi_t + v_t \quad \text{con } v_t \rightarrow N(0, V) \text{ error observacional}$$

$$\phi_t = G \phi_{t-1} + w_t \quad \text{con } w_t \rightarrow N(0, W) \text{ error de evolución}$$

con V y W conocidas y $\phi_0/D_0 \rightarrow N(m_0, C_0)$ información a priori inicial. Además v_t y w_t son independientes $\forall t$ e independientes de ϕ_0/D_0 . La distribución predictiva a un paso en el instante $t-1$ es $Y_t/D_{t-1} \sim N(f_t, Q_t)$ donde D_{t-1} es la información disponible en dicho instante. El error predictivo a un paso viene dado por $e_t = y_t - f_t$ y el error estandarizado un paso adelante en el instante t es $a_t = e_t / \sqrt{Q_t}$.

Los errores estandarizados se utilizan en la monitorización secuencial de la función de predicción y la herramienta matemática básica que se emplea es el Factor Bayes. Denotaremos por M_0 el modelo estándar sometido a evaluación continua; y por M_1 el modelo alternativo que sirve para evaluar M_0 por comparación.

Si el modelo estándar M_0 es un DLM normal se tendría que $(a_t/D_{t-1}) \rightarrow N(0,1)$ (ver West y Harrison (1989)). Existen posibles alternativas M_1 que dependen del tipo de desviación de M_0 esperada. Así, por ejemplo:

- 1) Si se quiere monitorizar un cambio de media se tomaría:

$$M_1 : (a_t/D_{t-1}) \rightarrow N(h, 1) \text{ con } h \neq 0$$

- 2) Si se quiere monitorizar un cambio en la varianza se tomaría:

$$M_1 : (a_t/D_{t-1}) \rightarrow N(0, k) \text{ con } k > 1$$

3) Si se quiere monitorizar un cambio en autocorrelación se tomaría:

$$M_1 : a_t = \rho a_{t-1} + u_t \text{ con } u_t \rightarrow N(0,1) \text{ independientes.}$$

3. ESTADISTICO CUSCORE. TEST SECUENCIAL DE SIGNIFICACION

Se supone que cuando el modelo es exacto, la secuencia de valores $a_t(\theta) = f(y_t, x_t, \theta)$ son v.a.i.i.d $N(0, \sigma_a)$ con y_t valores observados y x_t variables explicativas. Las hipótesis a contrastar en la monitorización son:

$H_0: a$ tiene densidad f_0

$H_1: a$ tiene densidad f_1

siendo f_0 la función de densidad de $a_t(\theta_0)$, cuando M_0 es cierto. y siendo f_1 la función de densidad de $a_t(\theta_1)$ cuando M_1 es cierto. El Factor Bayes se obtiene como:

$$B_n = \frac{f_{0,n}(a^{(n)})}{f_{1,n}(a^{(n)})} = \frac{\prod_{i=1}^n (2\pi)^{-1/2} \sigma_a^{-1} \exp\{-\frac{1}{2\sigma_a^2} a_i^2(\theta_0)\}}{\prod_{i=1}^n (2\pi)^{-1/2} \sigma_a^{-1} \exp\{-\frac{1}{2\sigma_a^2} a_i^2(\theta_1)\}} = \prod_{i=1}^n \exp\{-\frac{1}{2\sigma_a^2} \{a_i^2(\theta_0) - a_i^2(\theta_1)\}\}$$

Tomando logaritmos:

$$S_n = \frac{1}{2\sigma_a^2} \sum_{t=1}^n \{a_t^2(\theta_0) - a_t^2(\theta_1)\} = \frac{1}{2\sigma_a^2} \sum_{t=1}^n \{a_t(\theta_0) - a_t(\theta_1)\} \{a_t(\theta_0) + a_t(\theta_1)\}$$

Desarrollando $a_t(\theta)$ en torno a $\bar{\theta} = \frac{\theta_0 + \theta_1}{2}$ y llamando $d_t(\theta) = -\frac{\partial a_t(\theta)}{\partial \theta}$ la siguiente fórmula es

exacta si el modelo es lineal en θ y aproximada en otro caso:

$$a_t(\theta) = a_t(\bar{\theta}) + (\bar{\theta} - \theta) d_t(\bar{\theta})$$

Por tanto,

$$a_t^2(\theta_0) - a_t^2(\theta_1) = 2a_t(\bar{\theta}) d_t(\bar{\theta})(\theta_1 - \theta_0)$$

llamando $\delta = (\theta_1 - \theta_0)$

$$S_n = \frac{1}{2\sigma_a^2} \sum_{t=1}^n \{2\delta a_t(\bar{\theta}) d_t(\bar{\theta})\} = \frac{\delta}{\sigma_a^2} \sum_{t=1}^n \{a_t(\bar{\theta}) d_t(\bar{\theta})\}$$

al estadístico $Q = \sum_{t=1}^n \{a_t(\bar{\theta}) d_t(\bar{\theta})\}$ se le denomina CUSCORE CENTRADO y cumple que:

$$E[Q] = (\theta - \bar{\theta}) \sum_{t=1}^n d_t^2(\bar{\theta})$$

de donde se deduce que la pendiente del Cuscore aumenta si $\theta > \bar{\theta}$ y disminuye si $\theta < \bar{\theta}$.

Por tanto, S_n puede utilizarse para monitorizar la media, varianza o la autocorrelación en un proceso.

(El procedimiento secuencial más comúnmente utilizado es el SPRT introducido por WALD (1940). Se diseñó para contrastar una hipótesis nula simple frente a una hipótesis alternativa simple a partir de una muestra secuencial $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots)$. La regla de decisión de dicho test es:

Si $B_n(\mathbf{X}) \notin R$ se rechaza H_0 y acepta H_1 .

Si $R \notin B_n(\mathbf{X}) \notin C$ se procede a recabar más información, extrayendo de la población el elemento X_{n+1} .

Si $B_n(\mathbf{X}) \in C$ se acepta H_0 y rechaza H_1

$$\text{con } C \gg \frac{1-\alpha}{\beta} \text{ y } R \gg \frac{\alpha}{1-\beta} \quad a = P[\text{error tipo I}] \text{ y } b = P[\text{error tipo II}]$$

Johnson (1961) demostró que un test CUSUM podía verse como groseramente equivalente a un SPRT (test secuencial de Wald) en el cual la “hipótesis nula” de que el proceso está funcionando correctamente nunca se acepta. En esta situación, y razonando de manera análoga, se decide que ha habido un cambio en θ si ocurre:

$$S_n > \ln \frac{1-\beta}{\alpha}$$

Por tanto, este procedimiento podría verse como equivalente a una secuencia de test de Wald con cotas (0,h) con $h = \frac{\sigma_a^2}{\delta} \ln \frac{1-\beta}{\alpha}$.

Para detectar cambios en el parámetro $\theta = \theta_0$ en la dirección positiva ($\theta_1 > \theta_0$) y en la dirección negativa ($\theta_1' > \theta_0$) se pueden llevar simultáneamente dos Cuscores Q^+ y Q^- evaluados respectivamente en $\bar{\theta}^+ = (\theta_1 + \theta_0)/2$ y $\bar{\theta}^- = (\theta_1' + \theta_0)/2$.

De cara a calcular los límites de aceptación y rechazo de dichos tests Berger et al. (1994) plantean el test T^* del siguiente modo:

Si $B_n(\mathbf{X}) \leq r$ se rechaza H_0

Si $r \leq B_n(\mathbf{X}) \leq c$ no se decide.

Si $B_n(\mathbf{X}) \geq c$ se acepta H_0

y demostraron que, siendo cierta H_0 , la probabilidad condicional de cometer error tipo I viene dada por $\alpha(B_n) = \frac{B_n}{1+B_n}$; así mismo, siendo cierta H_1 , la probabilidad condicional de cometer error tipo II

viene dada por $\beta(B_n) = \frac{1}{1+B_n}$.

Además, de cara a evaluar los límites r y c propusieron los valores:

$$r = R \text{ y } c = F_0^{-1}(1 - F_1(C)) \quad \text{si } F_0(R) \leq 1 - F_1(C)$$

$$r = F_1^{-1}(1 - F_0(R)) \text{ y } c = C \quad \text{si } F_0(R) > 1 - F_1(C)$$

con F_0 y F_1 las funciones de distribución de B_n bajo H_0 y H_1 respectivamente.

En este trabajo se propone otro procedimiento alternativo basado en la acotación de las probabilidades de los errores propuestas por Berger. Por tanto, si se acotan por α y β , se llega a:

$$\alpha(B_n) = \frac{B_n}{1+B_n} \leq \alpha \Leftrightarrow B_n \leq (1+B_n)\alpha \Leftrightarrow B_n \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

$$\beta(B_n) = \frac{1}{1+B_n} \leq \beta \Leftrightarrow 1-\beta \leq \beta B_n \Leftrightarrow B_n \geq \frac{1-\beta}{\beta}$$

$$\text{De modo que: } C \approx \frac{1-\beta}{\beta} \text{ y } R \approx \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

Si $B_n(\mathbf{X}) \leq R$ se rechaza H_0

Si $R \leq B_n(\mathbf{X}) \leq C$ no se decide.

Si $B_n(\mathbf{X}) \geq C$ se acepta H_0

En la siguiente sección se aplican los tres procedimientos a la monitorización de cambios en la media o la varianza de los errores predictivos a un paso y al desarrollo de autocorrelaciones entre dichos errores.

4. MONITORIZACION DE LA MEDIA, VARIANZA Y AUTOCORRELACION RESIDUALES

MONITORIZACION DE LA MEDIA:

Sean a_1, a_2, \dots, a_n v.a.i.i.d. $N(\theta, \sigma)$ y se plantea el contraste:

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

$$H_1 : \theta = \theta_1 \quad (\theta_1 > \theta_0)$$

$$\begin{aligned} \text{Por tanto, } B_n(\mathbf{a}) &= \frac{\prod_{t=1}^n (2\pi)^{-1/2} \sigma^{-1} \exp\{-0.5\{\frac{a_t - \theta_0}{\sigma}\}^2\}}{\prod_{t=1}^n (2\pi)^{-1/2} \sigma^{-1} \exp\{-0.5\{\frac{a_t - \theta_1}{\sigma}\}^2\}} = \\ &= \exp\left\{\frac{\theta_0 - \theta_1}{\sigma^2} \sum_{t=1}^n a_t - \frac{n(\theta_0^2 - \theta_1^2)}{2\sigma^2}\right\} \end{aligned}$$

pero como $B_n(\mathbf{X}) \leq R \Leftrightarrow \ln B_n(\mathbf{X}) \leq \ln R$. Así:

$$\exp\left\{\frac{\theta_0 - \theta_1}{\sigma^2} \sum_{t=1}^n a_t - \frac{n(\theta_0^2 - \theta_1^2)}{2\sigma^2}\right\} \leq R \Leftrightarrow \sum_{t=1}^n a_t - \frac{n(\theta_1 + \theta_0)}{2} \geq \frac{\sigma^2}{\theta_1 - \theta_0} \ln R$$

llamando $\delta = (\theta_1 - \theta_0)$ y $K = \frac{\theta_1 + \theta_0}{2}$, la regla de decisión queda:

$$\text{Si } \sum_{t=1}^n (a_t - K) \leq \frac{\sigma^2}{\delta} \ln C \Rightarrow \text{se acepta } H_0$$

$$\text{Si } \frac{\sigma^2}{\delta} \ln C \leq \sum_{t=1}^n (a_t - K) \leq \frac{\sigma^2}{\delta} \ln R \Rightarrow \text{no se decide}$$

$$\text{Si } \sum_{t=1}^n (a_t - K) \geq \frac{\sigma^2}{\delta} \ln R \Rightarrow \text{se rechaza } H_0$$

MONITORIZACION DE LA VARIANZA:

Sean a_1, a_2, \dots, a_n v.a.i.i.d. $N(0, \sigma)$ y se plantea el contraste:

$$H_0 : \sigma = \sigma_0$$

$$H_1 : \sigma = \sigma_1 \quad (\sigma_1 > \sigma_0)$$

$$\begin{aligned} \text{Por tanto, } B_n(\mathbf{X}) &= \frac{\prod_{t=1}^n (2\pi)^{-1/2} \sigma_0^{-1} \exp\{-\frac{1}{2\sigma_0^2} a_t^2\}}{\prod_{t=1}^n (2\pi)^{-1/2} \sigma_1^{-1} \exp\{-\frac{1}{2\sigma_1^2} a_t^2\}} = \\ &= \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0}\right)^n \exp\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_0^2}\right) \sum_{t=1}^n a_t^2\right\} \end{aligned}$$

llamando $K = \frac{\ln\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}\right)}{\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}}$ y tomando logaritmos, la regla de decisión queda:

$$\text{Si } \sum_{t=1}^n (a_t^2 - K) \leq \frac{\ln C}{\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}} \Rightarrow \text{se acepta } H_0$$

$$\text{Si } \frac{\ln C}{\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}} \leq \sum_{t=1}^n (a_t^2 - K) \leq \frac{\ln R}{\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}} \Rightarrow \text{no se decide}$$

$$\text{Si } \sum_{t=1}^n (a_t^2 - K) \geq \frac{\ln R}{\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}} \Rightarrow \text{se rechaza } H_0$$

MONITORIZACION DE LA **AUTOCORRELACION**:

Sean a_1, a_2, \dots, a_n v.a. tales que $a_t = \rho a_{t-1} + u_t$ y se plantea el contraste:

$$H_0 : \rho = \rho_0$$

$$H_1 : \rho = \rho_1 \quad (\rho_1 > \rho_0)$$

$$\begin{aligned} \text{Por tanto, } B_n(\mathbf{X}) &= \frac{\prod_{t=1}^n (2\pi)^{-1/2} \exp\{-0.5(a_t - \rho_0 a_{t-1})^2\}}{\prod_{t=1}^n (2\pi)^{-1/2} \exp\{-0.5(a_t - \rho_1 a_{t-1})^2\}} = \\ &= \exp\{(\rho_0 - \rho_1) \sum_{t=1}^n a_t a_{t-1} - 0.5(\rho_0^2 - \rho_1^2) \sum_{t=1}^n a_{t-1}^2\} \end{aligned}$$

llamando $K = \frac{\rho_1 + \rho_0}{2}$ y $\delta = \rho_1 - \rho_0$ tomando logaritmos, la regla de decisión queda:

$$\text{Si } \sum_{t=1}^n \{a_t a_{t-1} - K a_{t-1}^2\} \leq \frac{1}{\delta} \ln C \Rightarrow \text{se acepta } H_0$$

$$\text{Si } \frac{1}{\delta} \ln C \leq \sum_{t=1}^n \{a_t a_{t-1} - K a_{t-1}^2\} \leq \frac{1}{\delta} \ln R \Rightarrow \text{No se decide}$$

$$\text{Si } \sum_{t=1}^n \{a_t a_{t-1} - K a_{t-1}^2\} \geq \frac{1}{\delta} \ln R \Rightarrow \text{Se rechaza } H_0$$

Siendo $C \approx \frac{1-\alpha}{\beta}$ y $R \approx \frac{\alpha}{1-\beta}$ para el método clásico. En el método de Berger R y C se

sustituyen por los valores r y c dados por:

$$r = R \text{ y } c = F_0^{-1}(1 - F_1(C)) \quad \text{si } F_0(R) \leq 1 - F_1(C)$$

$$r = F_1^{-1}(1 - F_0(R)) \text{ y } c = C \quad \text{si } F_0(R) > 1 - F_1(C).$$

Y finalmente, para el método Berger acotando errores $C \approx \frac{1-\beta}{\beta}$ y $R \approx \frac{\alpha}{1-\alpha}$

En la sección siguiente se realiza un estudio comparativo mediante simulación de los tres procedimientos.

5. ESTUDIO DE SIMULACION

En este apartado realizamos un estudio de simulación de los procedimientos detallados en el apartado anterior para monitorizar la presencia de un cambio de media, varianza o de autocorrelación en los errores de predicción a 1 paso estandarizados.

En todos los casos hemos tomado como hipótesis nula $H_0: a_t \sim N(0,1)$ e incorrelados y hemos tomado como hipótesis alternativas $H_1: a_t \sim N(2.5,1)$ e incorrelados en el caso de la monitorización de la media, $H_1: a_t \sim N(0,6.25)$ e incorrelados en el caso de la varianza y $H_1: a_t = \rho_1 a_{t-1} + u_t$ con $u_t \sim N(0,1)$ e incorrelados. Las dos primeras alternativas se han tomado siguiendo las indicaciones dadas en West y Harrison (1989) acerca de cuando un cambio en media o varianza debería ser tomado en consideración. En el caso de la monitorización de la autocorrelación hemos hecho un estudio de sensibilidad con respecto al parámetro ρ_1 con el fin de evaluar la sensibilidad del monitor con respecto a la aparición de autocorrelaciones de ámbito local.

En la tabla 1 aparecen anotados los resultados obtenidos aplicando el procedimiento de monitorización de un cambio de media de Berger et al. (1994) (PROC1) acotando únicamente la probabilidad condicionada de cometer el error tipo I y acotando la probabilidad condicionada de cometer los errores tipo I y II (PROC2) por una probabilidad α . Hemos simulado 10000 series de errores suponiendo cierta la hipótesis nula y alternativa utilizadas y tomando como valores de $\alpha = 0.05, 0.10, 0.15, 0.20$. En dicha tabla hemos detallado el porcentaje de veces que cada procedimiento aceptaba H_0 , la longitud media de racha (ARL) hasta que se tomaba una decisión y su desviación típica, la media y la desviación típica de las probabilidades condicionadas de los errores tipo I (si H_0 es cierta) y II (si H_1 es cierta) obtenidos así como los cuantiles 2.5 y 97.5 de la distribución de las probabilidades dichos errores entre cuyos valores se encuentra el 95% de las probabilidades obtenidas. En la tabla 2 están anotados los resultados obtenidos al aplicar los procedimientos anteriores pero para monitorizar un posible cambio de varianza.

Se observa que si se monitoriza un cambio de media el procedimiento 1 tiene una longitud de racha 1 puesto que en este caso, se puede demostrar que no hay zona de indecisión, por lo tanto, le basta la primera observación para decidir con qué hipótesis quedarse; su comportamiento con respecto al error tipo I es bueno debido a que lo controlamos mediante α pero este hecho junto con que no haya zona de indecisión provoca un comportamiento malo con respecto al error tipo II que tiende a aminorarse conforme α se hace más grande. El procedimiento 2, sin embargo, no tiene longitudes de racha excesivamente grandes tendiendo a disminuir éstas con α y muestra un comportamiento excesivamente conservador con probabilidades de error condicionales e incondicionales mucho más pequeñas que α . Esto lleva a aconsejar su uso pero con cotas α mayores que el nivel de significación que se pretende alcanzar. Como regla general se puede decir que si se quiere una probabilidad de ambos tipos de error en torno a un 100α % es conveniente aplicar el procedimiento 2 con una cota 4α o 5α .

Si se monitoriza un cambio de varianza, se puede demostrar que aparecen zonas de indecisión en ambos procedimientos siendo más conservador el procedimiento 2 (ver tabla 2). Las longitudes de racha son mayores que en el caso de la media tendiendo a disminuir con α y siendo menores las del procedimiento 1 que las del 2 debido a que se exigen menos restricciones. Esto lleva, por otro lado a un comportamiento peor del procedimiento 1 con respecto a la probabilidad del error tipo II tanto a nivel condicional como incondicional. mejorando dicho comportamiento conforme aumenta α . El procedimiento 2 vuelve a tener un comportamiento conservador con respecto a dichas probabilidades aunque menor que en el caso de la media pudiendo aplicarse la regla general expuesta en el caso de la media pero con valores 2α o 3α .

En las tablas 3,4 y 5 aparecen anotados los resultados obtenidos al aplicar el procedimiento 2 con $\alpha = 0.10$ para monitorizar un cambio en la autocorrelación residual. También se probaron otros valores de α que no se exponen por brevedad. En este caso simulamos 10000 series de errores con una autocorrelación R_s a los que aplicamos el procedimiento 2 tomando p_1 los valores 0.5, 0.6, 0.7, 0.8 y 0.9. En la tabla 3 aparecen detalladas las longitudes de racha media hasta que se toma una decisión y su desviación típica, en la tabla 4 las probabilidades de aceptar H_0 y en la tablas 5 las probabilidades condicionales de los errores tipo I y II suponiendo ciertas las hipótesis nula y alternativa respectivamente.

Se observa que la ARL tiende a disminuir conforme aumenta el valor de p_1 y que, para un valor de p_1 dado, el peor caso se produce en valores de R_s en torno a $p_1/2$ (ver tabla 3). El procedimiento tiende a aceptar H_0 más a menudo conforme p_1 crece (ver tabla 4) y su comportamiento con respecto a las probabilidades condicionales (ver tabla 5) e incondicionales (ver tabla 4) es conservador sin que haya grandes diferencias entre los distintos valores de p_1 . Nuestro consejo sería, por lo tanto, aplicar dicho procedimiento con valores de p_1 altos de cara a tomar decisiones lo antes posible y aplicar la regla general descrita en el caso de la varianza a la hora de elegir el valor de α .

6. CONCLUSIONES

Hemos estudiado el problema de la monitorización secuencial de los errores predictivos a 1 paso estandarizados de un DLM aplicando el procedimiento de monitorización descrito en Berger et al. (1994) acotando las probabilidades condicionales de los errores tipo I y II. Esta monitorización se llevaría a cabo, en general, utilizando los estadísticos "cuscore" de Box y Ramirez (1992). Hemos particularizado dichos procedimientos a la monitorización de un cambio de media, varianza o autocorrelación residuales. Es aconsejable aplicar dichos procedimientos acotando las probabilidades de los errores tipo I y II simultáneamente. Si se monitoriza un cambio de media y se quiere una probabilidad de ambos tipos de error en torno a un 100α % es conveniente tomar una cota igual a 4α o 5α . En el caso de que se monitorice un cambio de varianza o de autocorrelación la cota deberá tomarse igual a 2α o 3α y en el caso de la autocorrelación, además, deberán utilizarse como hipótesis alternativa un valor de la autocorrelación alto para evitar que la longitud de la racha hasta llegar a una decisión sea excesivamente grande.

TABLA 1: CONTRASTE PARA LA MEDIA:

H0: $\mu = 0$ y H1: $\mu = 2.5$

	ALFA	0. 20		0. 15		0. 10		0. 05	
	Procedimiento	PROC1	PROC2	PROC1	PROC2	PROC1	PROC2	PROC1	PROC2
Bajo H0 cierta	P(Aceptar H0)	0.9628	0.9547	0.9733	0.9652	0.9829	0.9753	0.9919	0.9878
	ARL (Desv. Típica)	1.00 (0.00)	1.27 (0.58)	1.00 (0.00)	1.35 (0.66)	1.00 (0.00)	1.47 (0.78)	1.00 (0.00)	1.68 (0.91)
P(el)	Media (Desv. Típica)	0.004 (0.023)	0.005 (0.025)	0.002 (0.015)	0.003 (0.016)	8.8E-4 (0.008)	0.001 (0.009)	0.022 (0.003)	3.3E-4 (0.003)
	Q0.025	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	Q0.975	0.070	0.094	0.015	0.046	0.000	0.000	0.000	0.000
Bajo H1 cierta	P(Aceptar H0)	0.2396	0.045	0.2830	0.0336	0.3495	0.0229	0.4754	0.0135
	ARL (Desv. Típica)	1.00 (0.00)	1.27 (0.58)	1.00 (0.00)	1.35 (0.66)	1.00 (0.00)	1.47 (0.78)	1.00 (0.00)	1.68 (0.91)
P(ell)	Media (Desv. Típica)	0.118 (0.239)	0.005 (0.025)	0.154 (0.277)	0.003 (0.012)	0.212 (0.326)	0.001 (0.009)	0.328 (0.388)	3.4E-4 (0.003)
	Q0.025	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	Q0.975	0.766	0.095	0.824	0.044	0.883	0.000	0.943	0.000

TABLA 2: CONTRASTE PARA LA VARIANZA:

H0: $\sigma = 1$ y H1: $\sigma = 2.5$

	ALFA	0. 20		0. 15		0. 10		0. 05	
	Procedimiento	PROC1	PROC2	PROC1	PROC2	PROC1	PROC2	PROC1	PROC2
Bajo H0 cierta	P(Aceptar H0)	0.9447	0.9509	0.9525	0.9629	0.9500	0.9761	0.9537	0.9896
	ARL (Desv. Típica)	2.03 (0.44)	3.16 (1.60)	1.97 (0.25)	3.96 (1.91)	2.93 (0.46)	4.93 (2.32)	3.88 (0.60)	6.59 (2.91)
P(el)	Media (Desv. Típica)	0.009 (0.042)	0.006 (0.029)	0.008 (0.040)	0.003 (0.019)	0.008 (0.040)	0.001 (0.010)	0.008 (0.038)	3.1E-4 (0.003)
	Q0.025	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	Q0.975	0.181	0.128	0.168	0.071	0.168	0.000	0.154	0.000
Bajo H1 cierta	P(Aceptar H0)	0.3442	0.1724	0.4110	0.1199	0.2875	0.0779	0.2346	0.0376
	ARL (Desv. Típica)	1.73 (0.788)	2.42 (1.67)	1.62 (0.552)	2.81 (2.08)	2.09 (1.06)	3.24 (2.47)	2.39 (1.39)	3.87 (3.02)
P(ell)	Media (Desv. Típica)	0.109 (0.167)	0.027 (0.060)	0.163 (0.233)	0.014 (0.039)	0.105 (0.200)	0.006 (0.021)	0.097 (0.217)	0.001 (0.007)
	Q0.025	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	Q0.975	0.509	0.187	0.756	0.141	0.680	0.086	0.792	0.033

**TABLA 3: ARL CUANDO SE CONTRASTA H0: $\rho = 0.0$ vs H1: $\rho = \rho_1$
Y LOS ERRORES SIGUEN UN PROCESO AR(ρ_s)**

$\alpha = 0.10$

$\rho_1 \backslash \rho_s$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.5	20.8 (15.17)	25.48 (19.34)	29.27 (23.25)	28.36 (23.24)	23.85 (19.28)	18.43 (14.44)	14.32 (10.87)	10.98 (8.34)	8.56 (6.62)	6.29 (5.25)
0.6	15.61 (10.91)	18.58 (13.98)	21.11 (16.40)	22.08 (17.68)	20.18 (16.28)	16.94 (13.56)	13.48 (10.48)	10.66 (8.43)	8.37 (6.59)	4.50 (3.68)
0.7	12.42 (8.22)	14.44 (10.46)	16.22 (12.03)	17.71 (13.86)	17.05 (13.68)	14.98 (11.88)	12.50 (10.01)	10.23 (8.25)	8.02 (6.47)	5.97 (4.47)
0.8	10.36 (6.85)	11.83 (8.13)	13.20 (9.51)	14.20 (10.75)	14.46 (11.55)	13.40 (10.83)	11.76 (9.25)	9.88 (7.89)	7.83 (6.32)	5.74 (4.94)
0.9	8.94 (5.73)	9.78 (6.65)	11.00 (7.74)	11.66 (8.51)	12.14 (9.16)	11.80 (9.09)	10.82 (8.56)	9.32 (7.48)	7.61 (6.25)	5.88 (5.13)

(entre paréntesis la desviación típica de la distribución de longitudes de rachas)

**TABLA 4: PROBABILIDAD DE ACEPTAR H0
CUANDO SE CONTRASTA H0: $\rho=0.0$ vs H1: $\rho = \rho_1$
 $\alpha = 0.10$**

$\rho_1 \backslash \rho_0$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.5	0.9388	0.8374	0.6423	0.3811	0.1693	0.0713	0.0285	0.0106	0.0032	0.0013
0.6	0.9433	0.8634	0.7088	0.4994	0.2990	0.1441	0.0705	0.0292	0.0107	0.0043
0.7	0.9457	0.8847	0.7800	0.6209	0.4086	0.2444	0.1267	0.0607	0.0266	0.0100
0.8	0.9556	0.9052	0.8270	0.6890	0.5195	0.3461	0.2019	0.1119	0.0579	0.0272
0.9	0.9540	0.9161	0.8507	0.7398	0.6022	0.4294	0.2864	0.1694	0.0957	0.0434

**TABLA 5: PROBABILIDADES CONDICIONALES
DE LOS ERRORES TIPO I Y II PARA CONTRASTAR H0: $\rho=0.0$ vs H1: $\rho=\rho_1$
HIPOTESIS CIERTA: H0
 $\alpha = 0.10$**

		ρ_1	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
P(el) Bajo H0 cierta	Media (Desv. Típica)		0.45 (1.84)	0.41 (1.74)	0.38 (1.65)	0.29 (1.44)	0.29 (1.43)
	Q0.025		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	Q0.975		8.39	8.04	7.62	6.56	6.25
P(ell) Bajo H1 cierta	Media (Desv. Típica)		7.37 (2.13)	7.14 (2.24)	6.91 (2.38)	6.63 (2.50)	6.40 (2.61)
	Q0.025		2.25	1.91	1.50	1.07	0.88
	Q0.975		9.93	9.91	9.91	9.88	9.88

(todas las probabilidades aparecen en %)

7. BIBLIOGRAFIA

- BERGER, J. O. , BROWN, L.D. and WOLPERT, R.L. (1994). 'A Unified Conditional Frequentist and Bayesian Test for Fixed and Sequential Simple Hypothesis Testing'. The Annals of Statistics., Vol. 22, N° 4, 1787-1807.
- BOX, G. E. P. and RAMIREZ, J. (1992). 'Cumulative Score Charts'. Qual. & Rel. Eng. Int., Vol. 8, 17-27.
- DEMING, W.E. (1986). *Out of the Crisis*. Cambridge, MA: MIT, Center for Advanced Engineering Study.
- JOHNSON, N. L. (1961). 'A Simple Theoretical Approach to Cumulative Sum Control Charts'. Journal of the American Statistical Association., Vol. 56, 835-840.
- POLE,A., WEST, M. and HARRISON, J. (1994). *Applied Bayesian Forecasting and Time Series Analysis*. Chapman and Hall.
- WALD, A. (1947). *Sequential Analysis*. New York: Wiley.
- WEST, M. and HARRISON, J. (1989). *Bayesian Forecasting and Dynamic Models*. Springer Verlag.

