

LA VOLATILIDAD: PROBLEMÁTICA Y ESTIMADORES.

Rosa María Lorenzo Alegría

Área de Fundamentos de Análisis Económico

Departamento de Economía y Dirección de Empresas

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

Universidad de La Laguna

INTRODUCCIÓN

La varianza de la tasa de rentabilidad de las acciones, como medida de la volatilidad, es una de las variables cruciales en la teoría moderna de las finanzas. Como dos ejemplos, la varianza es una variable central en el modelo de valoración de activos de capital y análisis de cartera (CAPM) de Sharpe (1964), Lintner (1965) y Mossin (1966) y, de igual manera, juega un papel clave en el modelo de valoración de activos derivados de Black y Scholes (1973).

Mientras que algunos trabajos suponían, fundamentalmente por sencillez, un comportamiento constante en la volatilidad (Black-Scholes [1973]), otros, por el contrario, basaban su análisis en su variabilidad, que llegaba a ser, incluso, estocástica (Wiggins [1987], Hull y White [1987] y otros). Este supuesto se adoptaba una vez que una abundante literatura empírica observaba este comportamiento heteroscedástico para la varianza de la rentabilidad de un activo, como por ejemplo, en Clark (1973), Rosenberg (1972), Blattberg y Gonedes (1974), Black (1975), Epps y Epps (1976) y Kon (1984).

Referido exclusivamente a acciones, se han barajado posibles razones que explican este comportamiento cambiante de la volatilidad en su rentabilidad, entre las que destacamos las siguientes:

- 1.- La llegada de nueva información, Press (1967), Beaver (1968), Merton (1976) y Macbeth y Merville (1980).
- 2.- Cambios en el precio de la acción, Cox (1975), Black (1976), Cox y Ross (1976), Schmalensee y Trippi (1978), Geske (1979), Beckers (1980), MacBeth y Merville (1980) y Christie (1982) ¹.
- 3.- Por innovaciones tecnológicas y/o fusiones y adquisiciones, que pueden afectar a la distribución de las rentabilidades de las acciones de una empresa, y por tanto, a su varianza, Macbeth y Merville (1980).
- 4.- Modificaciones en el nivel de apalancamiento financiero (relación deuda/ valor de mercado de los fondos propios), ya que la volatilidad es una función creciente del apalancamiento financiero, Christie (1982).
- 5.- Variaciones del tipo de interés sin riesgo, ya que tienen un fuerte efecto positivo sobre la volatilidad, lo cual es consistente con el hecho de que el valor de la empresa es una función inversa del tipo de interés, Christie (1982).

PROBLEMÁTICA EN LA VALORACIÓN DE ACTIVOS FINANCIEROS.

La consideración de la volatilidad como estocástica presenta problemas en la valoración de activos financieros. La utilización de la metodología clásica de B-S de cara a lograr la cobertura total de una cartera y obtener así el valor de un activo financiero, eliminando las posibilidades de arbitraje, no es válido cuando la volatilidad del subyacente no es constante.

¹ Christie (1982) calcula la elasticidad de la volatilidad de las acciones y obtiene una relación negativa respecto al valor de la acción.

La razón es que cuando la varianza es estocástica, no pueden utilizarse solamente argumentos de cobertura y arbitraje para obtener el valor del activo derivado. Será necesario, por tanto, introducir argumentos de equilibrio de los precios de los activos, basados en las preferencias de los inversores por el riesgo, para determinar la prima de riesgo requerida sobre una cartera cubierta del activo y la opción.

No obstante, cuando se dan determinados supuestos, sí que pueden obtenerse soluciones para la valoración de una opción cuando la volatilidad es estocástica, sólo con argumentos de arbitraje y sin necesidad de introducir supuestos sobre las preferencias por el riesgo de los inversores.

DIFERENTES MODELIZACIONES

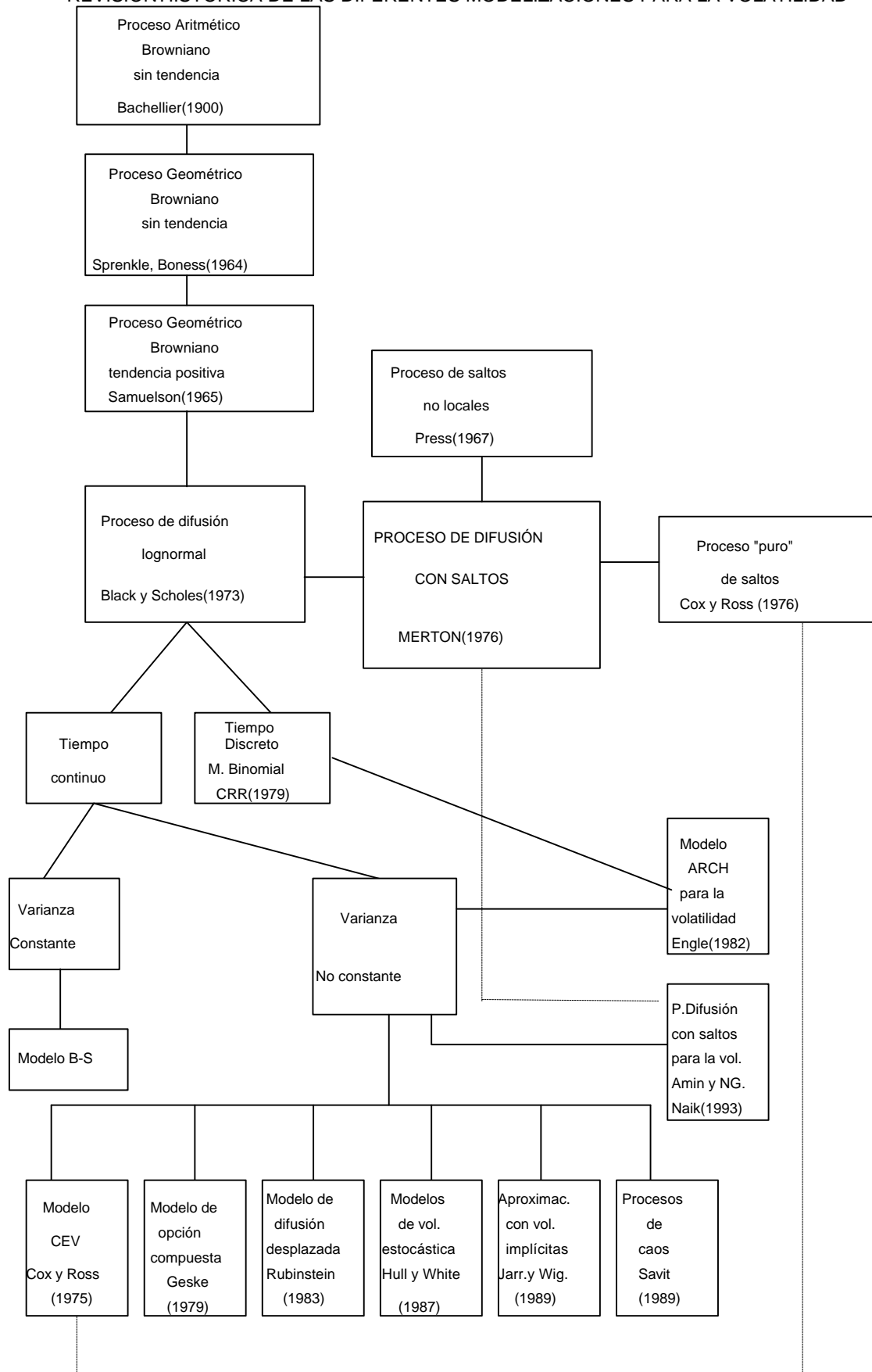
Antes de pasar a enumerar y desarrollar cada una de las diferentes propuestas que describen el comportamiento cambiante de la volatilidad en la rentabilidad de un título, se hace necesario enmarcar estos modelos en la problemática abierta sobre los diferentes procesos estocásticos que se han planteado a lo largo de la historia para describir la rentabilidad del título, que se resumen en la siguiente figura.

Los primeros procesos que propusieron Bachellier (1900), al que le siguieron Sprenkle (1964) y Boness (1964), no capturaban adecuadamente la trayectoria seguida por la rentabilidad de un activo, y a partir de ahí, el proceso estocástico que mayor aceptación y tratamiento teórico y empírico recibió fue el proceso de difusión lognormal, que constituye, a su vez, el supuesto básico del modelo de B-S. Bajo este proceso, la rentabilidad del activo subyacente tiene una trayectoria constante, que se recogen en la tendencia, con pequeñas modificaciones en intervalos de tiempo relativamente cortos, que se modelizan por un proceso de Wiener. Como un proceso alternativo al clásico lognormal que suponen B-S, se encuentra el proceso de difusión con saltos, proceso que combina elementos de dos: por un lado, del proceso denominado "puro" de saltos, en el que todas las variaciones de la rentabilidad del título se consideran saltos, y, por otro lado, del ya mencionado proceso de difusión lognormal.

Los diferentes modelos que recogen un comportamiento variable para la volatilidad, los hemos clasificado del siguiente modo:

- Modelo de elasticidad de sustitución constante (CEV).
- Modelo de opción compuesta.
- Modelo de difusión desplazada.
- Modelos de volatilidad estocástica.
- Aproximación por volatilidades implícitas.
- Modelos con procesos de difusión con saltos para la volatilidad.
- Modelización tipo ARCH para la volatilidad.
- Procesos de caos para la volatilidad.

REVISIÓN HISTÓRICA DE LAS DIFERENTES MODELIZACIONES PARA LA VOLATILIDAD



1. Modelo de difusión de varianza de elasticidad constante (CEV).

Esta alternativa fue planteada por Cox (1975) y desarrollada más tarde por Cox y Ross (1976). La propuesta que se hace con este modelo para la dinámica del precio del activo, así como para su volatilidad es que los precios del activo para un período no son independientes de los precios de períodos anteriores, por lo que no son, en ningún modo, caminos aleatorios, como se suponía en el proceso de difusión lognormal de B-S. La volatilidad, a su vez, depende del precio del activo, destacando un caso especial en el que la relación entre la volatilidad y el precio del activo es tal que su elasticidad es constante, denominándose en este caso *modelo de varianza de elasticidad constante*.

En el proceso que se propone para la dinámica del precio del título, la varianza de la tasa de rentabilidad del activo varía inversamente con el precio del activo. Este comportamiento ha sido detectado por muchos trabajos, explicado a nivel empírico por los efectos financieros y de apalancamiento en los que incurren las empresas². Concretamente, cuando, por ejemplo, el precio de la acción se reduce (aumenta), el ratio deuda-acciones sube (desciende) y este incremento (descenso) del riesgo se refleja en un incremento (reducción) de la varianza de la rentabilidad de la acción.

En los trabajos de Macbeth y Merville (1980), Beckers (1980), Emanuel y Macbeth (1982) y Lauterbach y Schultz (1990) encontramos aplicaciones empíricas del modelo de varianza de elasticidad constante. En todos ellos se concluye la mejor capacidad del modelo CEV respecto al de Black-Scholes a la hora de predecir el precio de un activo derivado. El único inconveniente de utilizar esta modelización alternativa se encuentra en tener que llevar a cabo la estimación de dos parámetros, además de los problemas ya conocidos de encontrar un método adecuado de estimación³.

2. Modelo de difusión de opción compuesta .

Fue planteado inicialmente por Geske (1979a). Para la obtención de la fórmula de una opción call, Geske considera que una acción es una opción sobre el valor de la empresa, donde el valor de la empresa sigue un camino aleatorio estacionario. Para Geske, la fórmula de Black-Scholes da la relación entre el valor de una acción y el valor de una empresa, donde la acción sería la opción y el valor de la empresa sería el subyacente. Siguiendo los supuestos de Black-Scholes, la volatilidad del valor de la empresa deberá ser constante, sin embargo la acción sigue un camino aleatorio no estacionario con una volatilidad que se incrementa cuando el precio de la acción decrece, efecto empírico ya explicado en el modelo CEV anterior . Desde esta perspectiva, una opción call sobre una acción es una opción sobre una opción, lo que se ha denominado como una *opción compuesta*.

² Para una explicación detallada de estos efectos, véase Beckers (1980, pag. 662] y Cox y Rubinstein (1985, pag. 280).

³ Como destaca Steven Manaster en la discusión a Macbeth y Merville (1980), "¿se justifica el esfuerzo extra requerido para estimar estos parámetros con los mejores resultados relativos al modelo de Black-Scholes, donde sólo hay que estimar uno, σ , la desviación estándar de la rentabilidad del título?".

Un aspecto que habrá de tenerse en cuenta desde esta perspectiva es la influencia de la estructura de capital de la empresa sobre la distribución de la rentabilidad de la acción, por lo que habrán de incorporarse los efectos de apalancamiento derivados de la existencia de deuda en la empresa. Geske demuestra que este modelo es más general, pues recoge como un caso especial el de B-S y el modelo de varianza de elasticidad constante. Del análisis comparativo con el modelo de B-S, Geske (1979a) concluye que su modelo puede corregir varios e importantes sesgos que se derivan del modelo B-S.

3. Modelo de difusión desplazada.

Propuesto por Rubinstein (1983), este modelo parte del supuesto de una empresa que mantiene dos activos, uno con riesgo y otro sin riesgo en una proporción determinada del valor total de la empresa, V . En cualquier instante de tiempo anterior al pago de dividendos, k , donde $k < t$ se producirá el pago de dividendos correspondiente a la porción sin riesgo del valor de la acción, como porcentaje del valor de la acción, dS , y, de igual manera, se pagará un dividendo determinado debido a la parte con riesgo del valor de la acción. **¡Error! Marcador no definido.** De esta observación, Rubinstein obtiene el valor de la acción al final del tiempo t , dividido en dos componentes, un componente de riesgo y un componente sin riesgo.

Con argumentos de arbitraje sin riesgo, y con el razonamiento de Cox y Ross (1976), según el cual se puede obtener el valor de una opción call europea descontando el valor esperado futuro, bajo neutralidad al riesgo, Rubinstein (1983) obtiene la expresión para el valor de una opción .

Este modelo incluye como caso especial el modelo de Black-Scholes, tiene en cuenta la estructura de capital de la empresa, al igual que el modelo de opción compuesta de Geske (1979a). La diferencia con éste, es que en este modelo, la volatilidad del valor de la empresa no es constante, sino estocástica. Una ventaja de este modelo de difusión desplazada es que admite diferentes políticas de dividendos más realistas, como puede ser el pago de un dividendo constante, no dependiente del precio de la acción. Con datos simulados, Rubinstein (1983) demuestra que el modelo de difusión desplazada puede corregir los sesgos que comete el modelo B-S. No obstante, su contrastación presenta problemas adicionales, como puede ser la estimación de varios parámetros.

4.- Modelos más generales de volatilidad estocástica.

Tanto el modelo de Cox (1975) como el de Geske (1979a) y Rubinstein (1983) analizados anteriormente, obtienen el valor de un activo derivado a partir del supuesto de que la varianza de la rentabilidad del activo subyacente es variable y además, dependiente del precio del activo. La diferencia con los modelos más generales que hemos denominado de volatilidad estocástica y que presentamos en este epígrafe es que estos últimos incorporan comportamientos totalmente aleatorios, estocásticos para la volatilidad.

Dentro de esta clase hemos incluido los trabajos de Wiggins (1987), Scott (1987), Johnson y Shanno (1987) y Hull y White (1987), considerado este último como el más importante y pionero en la obtención de una solución - aunque no analítica- al problema de valoración de opciones con volatilidades estocásticas ⁴. El modelo de Hull y White (1987) considera los siguientes procesos estocásticos para el precio del activo, (S) y su varianza ($\sigma^2=V$):

$$dS = \phi S dt + \sigma S dw$$

$$dV = \mu V dt + \xi V dz$$

donde ϕ es un parámetro que puede depender de S, σ y t. Las variables μ y ξ pueden depender de σ y t, pero se supone que no dependen de S. Los procesos dw y dz son procesos Wiener, con coeficiente de correlación ρ . En contraste a los modelos de Cox (1975), Geske (1979a) y Rubinstein (1983), en esta expresión se recoge la posibilidad de que la volatilidad no esté perfectamente correlacionada con el precio del activo. Según los valores de ρ , este modelo puede ser reducido a cualquiera de aquellos otros modelos ⁵ y también permitiendo que ξ sea una función no estocástica del precio del activo. También se recoge el caso especial de que haya una dependencia intertemporal en la volatilidad, como puede ser la tendencia a revertir en media, que analiza Scott (1987), y que se da cuando ξ y μ dependen de σ y t.

La solución al problema de valoración de opciones cuando la volatilidad es estocástica exige la utilización de una ecuación - propuesta por Garman (1976)-, cuya solución es independiente de las preferencias por el riesgo de los inversores. Hull y White con esta ecuación y bajo los supuestos simplificadores de que la volatilidad no está correlacionada con el consumo agregado, ni con el precio del activo subyacente ⁶, obtienen la fórmula de valoración de una opción bajo consideraciones de cobertura y arbitraje neutral al riesgo, simplemente descontando su valor terminal esperado a la tasa de interés sin riesgo. Su solución expresa que el precio de la opción es la media del precio B-S, evaluada sobre la distribución condicional de la varianza media. Además, presenta la característica de que, igual que la de B-S, es neutral al riesgo, por lo que el uso de esta solución es válida para cualquier función de utilidad respecto al riesgo de los inversores que se consideren.

Utilizando datos simulados para los valores de la distribución normal, los resultados que obtuvieron Hull y White (1987) de la contrastación de esta solución fueron favorables, en tanto que se redujo el sesgo típico que comete la fórmula B-S ⁷. La principal desventaja de estos modelos generales de volatilidad

⁴ No obstante, la consideración de la volatilidad como totalmente estocástica se remonta al trabajo preliminar de Johnson (1979), que, sin embargo, no obtuvo una solución analítica cerrada.

⁵ Cuando $\rho = \pm 1$.

⁶ Como expresan Lamoureux y Lastrapes (1993), Hull y White suponen que el riesgo de volatilidad no afecta al precio de la opción, de manera que el coeficiente de correlación entre dw y dz es cero.

⁷ Ver gráfico Hull y White (1987, pag. 293).

estocástica, es que son difíciles de estimar por máxima verosimilitud. Trabajos que contrastan empíricamente estos modelos son el de Scott (1987), Wiggins (1987) y Melino y Turnbull (1990, 1991)

Trabajos más recientes que recogen un comportamiento estocástico para la volatilidad son el de Eisenberg y Jarrow (1991), Stein y Stein (1991) y Heston (1993). No obstante, las últimas aproximaciones centran la discusión en torno a supuestos adicionales hasta entonces no tenidos en cuenta, como es, considerar dentro del comportamiento estocástico para la volatilidad, un componente sistemático y uno idiosincrático. Dentro de esta aproximación destaca el trabajo de Amin y NG (1993), que obtiene soluciones analíticas al problema de la valoración de opciones sobre acciones cuando la volatilidad de la rentabilidad de la acción subyacente es estocástica con un componente sistemático, que está relacionado con la volatilidad también estocástica del crecimiento del consumo (o cartera de mercado), y un componente "idiosincrático" o no sistemático. Esta nueva aproximación se encuentra avalada por una gran cantidad de trabajos que explican la evidencia empírica de que la volatilidad de la rentabilidad de las acciones no sólo es estocástica, sino que además está altamente correlacionada con la volatilidad del mercado (Wiggins,[1987])

La consideración de la volatilidad del crecimiento del consumo (o cartera de mercado) como estocástica significa que el tipo de interés spot, el cual es determinado por la volatilidad del consumo en equilibrio, sea en general también estocástico. De esta manera, este modelo incorpora de forma simultánea un tipo de interés estocástico y procesos estocásticos para la volatilidad del cambio de precios de las acciones en la valoración de opciones, lo cual constituye, una novedad.

Esta nueva metodología es más general, pues recoge otras fórmulas propuestas en la literatura sobre valoración de opciones, como el modelo de Black-Scholes (1973), el modelo de Merton (1973), de Milne y Turnbull (1991) y de Amin y Jarrow (1992), quienes analizan la valoración de opciones con tipos de interés estocásticos con volatilidad de la acción constante, el modelo de Hull y White (1987), que analiza la valoración de opciones con volatilidades estocásticas, pero con tipos de interés constantes y el modelo de Bailey y Stulz (1989), que analiza la valoración de opciones sobre índices cuando el activo subyacente es la cartera de mercado y con varianza estocástica.

5. Aproximación Black-Scholes usando volatilidades implícitas.

Una aproximación diferente para valorar opciones con volatilidades estocásticas consiste en utilizar volatilidades implícitas en la fórmula de B-S. Este método es el que proponen Jarrow y Wiggins (1989), como alternativo a otros modelos, como por ejemplo el modelo de difusión de varianza de elasticidad constante (CEV) y los modelos de volatilidad estocástica [Hull y White (1987), Wiggins (1987), Scott (1987) y Johnson y Shanno (1987)], que proponen procesos alternativos para el subyacente, procesos estimados de datos de precios históricos (estimación directa), que incluyen muchos parámetros y, por tanto, son más difíciles y caros de estimar.

Incluso a sabiendas de que se están violando los supuestos de B-S, en el que la volatilidad se supone constante ⁸, Jarrow y Wiggins consideran que por razones de simplicidad en el cálculo, el modelo B-S usando volatilidades implícitas, parece preferible a las fórmulas alternativas más complejas de valoración de opciones para volatilidades estocásticas que ya hemos comentado. Concretamente, la aproximación del modelo B-S con volatilidades implícitas que proponen estos autores se basa en el trabajo anterior de Jarrow y Rudd (1982), que haciendo uso de las series de expansión generalizadas de Edgeworth demostraba que podía aproximarse el valor de la opción al valor que daba el modelo de B-S más un término de error, pero donde la volatilidad se modificaba en función del proceso específico al que se creía se ajustaba el precio del activo subyacente.

6. Modelos de difusión con saltos para la volatilidad.

Aproximaciones alternativas no recogidas en trabajos anteriores para reflejar un comportamiento estocástico para la varianza de la rentabilidad de un activo se encuentra en los procesos de difusión y saltos. Bajo este proceso, el comportamiento de la volatilidad se representa por un proceso de difusión en tiempo continuo, intercalándose en instantes discretos variaciones importantes en la volatilidad, que se denominan saltos, que a su vez, pueden considerarse o sistemáticos o no sistemáticos. Este comportamiento es el que se supone en los trabajos de Amin y NG (1993) y Naik (1993).

7. Modelos de opciones GARCH.

Todas las aproximaciones que hemos desarrollado analizan un comportamiento estocástico para la volatilidad en tiempo continuo. El análisis en tiempo discreto aparece recogido en los modelos de varianza condicional heteroscedástica (modelos ARCH). Estos modelos constituyen, por tanto, aproximaciones en tiempo discreto de los procesos estocásticos en tiempo continuo que se suponen para la volatilidad en los diferentes modelos teóricos de valoración de opciones que hemos analizado con anterioridad ⁹. La principal ventaja de estos modelos es que los parámetros se pueden estimar fácilmente, mediante aproximaciones de máxima verosimilitud, a diferencia de los modelos anteriores.

El comportamiento estocástico en el tiempo de la volatilidad se intenta modelizar en tiempo discreto y de ahí la utilización de los modelos de varianza condicional heteroscedástica (ARCH), que se definen como modelos autorregresivos no lineales donde la varianza condicionada a la información disponible en el instante $t-1$ (varianza condicional) no es constante, sino que depende de la información disponible en cada instante y de ahí su variabilidad en el tiempo (heteroscedasticidad).

⁸ También analizan el supuesto de tipos de interés estocásticos y fricciones de mercado (impuestos,, requerimientos de margen, costes de transacción, dividendos y ejercicio antes del vencimiento de la opción).

⁹ El trabajo de Nelson (1990) presenta las condiciones bajo las que las ecuaciones en diferencias estocástica ARCH convergen en distribución a un proceso de Ito, cuando la longitud de los intervalos de tiempo discretos tiende a cero, a la vez que introduce una clase de modelos ARCH que puede ser aproximada a una amplia variedad de ecuaciones diferenciales estocásticas.

Dado que muchos estudios econométricos, tales como Officer (1972), Black (1976), Engle y Bollerslev (1986) y French, Schwert y Stambaugh (1987) han contrastado ese comportamiento heteroscedástico en los datos observados de la volatilidad de los activos financieros, la utilización de estos modelos para predecir el riesgo y, en consecuencia, para la valoración de activos ha proliferado en la mayoría de los trabajos de investigación en el área de las finanzas. Muestra de ello son los recientes trabajos de Duan (1991), Engle y Mustafa (1992) y Poon y Ho (1992), que utilizan modelos GARCH para valorar opciones, modificando el modelo de Black-Scholes ¹⁰. En cuanto a los resultados de la contratación de las formulaciones tipo ARCH, destacamos los trabajos de Akgiray (1989), Engle y NG (1993), Peña (1993), Ruiz (1993) y Alegría y Calatayud (1989). En relación a la problemática de la valoración de opciones, el trabajo de Poon y Ho (1992) compara el modelo OGARCH y el clásico B-S, concluyendo que el OGARCH reduce los sesgos de valoración que comete la fórmula de B-S, pero ese sesgo se sigue obteniendo.

8. Procesos de caos determinísticos.

Estos procesos constituyen una alternativa para explicar las fluctuaciones económicas o de alguna variable en cuestión, como puede ser la volatilidad de la serie de rendimientos de un activo. Como define Brock (1986), el proceso de caos determinístico surge de un proceso dinámico no lineal, que es determinístico respecto a las condiciones iniciales, pero donde los errores producidos de la estimación de los parámetros y condiciones iniciales pueden acumularse dentro de los errores de predicción y parecer que el proceso es aleatorio. Los procesos determinísticos que parecen estocásticos son denominados procesos de caos determinísticos.

Savit (1989) propone que las rentabilidades de un activo pueden no seguir un proceso estocástico, sino más bien un proceso de caos determinístico, que además de recoger la leptocurtosis, también tiene en cuenta la dependencia (lineal o no lineal) y, por tanto, la correlación detectada empíricamente en la serie de rendimientos de un activo. Y es que un proceso caótico, aparentemente puede parecer aleatorio, sin embargo, la dinámica subyacente tiene, al menos, parcialmente un carácter determinista.

La consideración de un proceso de caos para los movimientos del activo se analiza en Savit (1989), que estudia los efectos de este supuesto para el valor de una opción, y concluye que aunque las funciones de autocorrelación para este proceso y el clásico lognormal de B-S son las mismas, la consideración de un proceso de caos supone una reconsideración de las técnicas de cobertura y arbitraje de cara a obtener un resultado que sea neutral al riesgo. Un trabajo empírico en relación a este proceso se encuentra en B. Wade Brorsen y Seung-Ryong Yang (1993), quienes comparan el proceso GARCH(1,1) y el de caos determinístico para una muestra de cambios diarios de precios de futuros de mercancías. Los resultados muestran la existencia de heteroscedasticidad condicional, pero aún así el modelo GARCH(1,1) no es totalmente adecuado. No se rechaza ni acepta la posibilidad de procesos de caos determinístico, aunque

¹⁰para una explicación detallada, véase Peña, I. (1993, pag. 11).

para alrededor de la mitad de las mercancías examinadas, los resultados son consistentes con caos determinísticos.

ESTIMADORES DE LA VOLATILIDAD.

Una de las razones que han apuntado French y Martin (1988) a los diferentes, y en muchos casos, contradictorios resultados a la hora de contrastar las fórmulas de valoración de opciones es la utilización de diferentes métodos para estimar la volatilidad. Los diferentes estimadores de la volatilidad son simplemente un reflejo de la variabilidad que se espera (futura) en el movimiento de los precios. El problema se produce cuando hay elevada inestabilidad temporal en la volatilidad ¹¹, en cuyo caso su estimación en base a la información pasada no es muy correcta.

Como se expone en Alegría y Calatayud (1989b), se han presentado diferentes técnicas de estimación de este parámetro, que centran la discusión bien en la utilización de datos de precios históricos del activo (volatilidad histórica) o bien con los datos del precio de las opciones "extraer" de un modelo de valoración el valor de la volatilidad (volatilidad implícita). Como un primer bloque recogemos los estimadores que utilizan datos de precios históricos y entre los que se pueden destacar los siguientes:

1. Volatilidad histórica o muestral ¹²:

Se define como la desviación estándar de la distribución del logaritmo de precios relativos del activo subyacente (tasa de rentabilidad del activo), con una muestra de precios observados correspondiente a un período anterior concreto. Esta desviación estándar se calcula por las técnicas estadísticas ya conocidas:

$$\sigma = \sqrt{(1/n) \sum_{k=1}^n (\ln R_k - \mu)^2}$$

donde R_k son los precios relativos del activo subyacente en el momento k (S_k / S_{k-1}) y **¡Error! Marcador no definido.** es la media de la distribución, cuyo valor es:

$$\mu = (1/n) \sum_{k=1}^n \ln R_k$$

Este podría ser el mejor estimador si las series de rentabilidades del activo fueran "estricto ruido blanco" ¹³ y además sería un estimador insesgado para períodos de tiempo relativamente largos. Este estimador fue propuesto, en un principio, por B-S (1972) para su modelo. Fue utilizado también por Galai (1977) y Finnerty (1978). No obstante, B-S comprobaron que con esta medida de la volatilidad, su modelo tendía a sobrevalorar opciones con volatilidades altas e infravalorar aquellas con volatilidades bajas.

¹¹ Peiró (1992) presenta evidencia de la fuerte variabilidad de la volatilidad a lo largo del tiempo en el mercado de acciones español.

¹² El trabajo de Akgiray (1989) denomina a este estimador "Benchmark forecast", denominación que utilizan otros autores.

¹³ Para Akgiray un proceso "estricto ruido blanco" se define cuando la variable X_{t+S} está incorrelada con sus valores pasados, X_t y además dichos valores son independientes.

2. Volatilidad histórica o muestral corregida:

Para garantizar que las estimaciones de la media y la desviación estándar tienen las propiedades deseadas de parámetros insesgados, Cox y Rubinstein (1985), proponen este estimador, también utilizado por Rogalski (1978), Analistas Financieros Internacionales (1992) y Chamorro (1993). Este estimador sólo añade a la volatilidad histórica unos factores de corrección para la varianza y para la desviación estándar. Estos estimadores insesgados para la varianza y la desviación estándar son

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (\ln R_k - \mu)^2$$

$$\sigma = \left[\frac{\left(\frac{1}{2}n\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}n - \frac{3}{2}\right)!}{\left(\frac{1}{2}n - 1\right)!} \right] \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\ln R_k - \mu)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

3.- Volatilidad histórica con precios altos y bajos.

El cálculo de la volatilidad histórica con los precios de cierre de los activos, aunque muy sencillo, no permite incorporar toda la información disponible y relevante del comportamiento observado de la volatilidad, por lo que reduce su nivel de eficiencia. A lo largo de un día de negociación, el precio de un activo parte de un valor concreto, precio de apertura (O), experimenta diferentes cambios, que oscilan entre un valor máximo (H) y un valor mínimo (L), para terminar en el último precio del día, o "precio de cierre" (C).

Parkinson (1980), Garman y Klass (1980), Beckers (1983) y Kunitomo (1992) estiman la volatilidad histórica usando los precios intradía, pues estos precios contienen más información referente a la volatilidad que simplemente los precios de apertura y cierre del día. La hipótesis subyacente es que el uso de un conjunto de información más amplio producirá un estimador más eficiente.

Para Parkinson (1976, 1980), el estimador usado para la volatilidad diaria debe ser el siguiente:

$$\sigma^2 = \frac{0,361}{n} \sum_{i=1}^n (H_i - L_i)^2$$

donde H_i y L_i son los precios máximos y mínimos correspondientes a cada día de negociación, n . Este estimador, según demuestran Garman y Klass (1980) es cinco veces más eficiente que el clásico que utiliza sólo los precios de cierre. De otro modo, produce estimaciones equivalentes a la utilización de precios de cierre con una muestra cinco veces mayor.

Garman y Klass (1980) mejoran el estimador de Parkinson añadiendo los precios de cierre de cada día, proponiendo entonces el siguiente:

$$\sigma^2 = 0.511(H_t - L_t)^2 - 0.019[(C_t - C_{t-1})(H_t + L_t - 2C_t) - 2(H_t - C_t)(L_t - C_t)] - 0.383(C_t - C_{t-1})^2$$

que incluye los valores de C , que representa los precios de cierre de cada día.

Garman y Klass (1980) ¹⁴ demuestran que este estimador es casi ocho veces más eficiente que el estimador clásico que usaba tan solo la diferencia de los precios de cierre de cada día. Otra mejora respecto al estimador inicial de Parkinson se presenta en Beckers (1983) ¹⁵ y Kunitomo (1992) ¹⁶.

4. Aproximación Bayesiana para la estimación de la volatilidad:

Desarrollada por Karolyi (1993), este método estadístico bayesiano hace uso de la información anterior de los datos de corte transversal de las volatilidades de todas las acciones, clasificadas por el tamaño (valor de capitalización de la empresa), nivel de apalancamiento financiero y volumen de negociación. De forma implícita, esta aproximación se basa en el hecho empírico observado por diversos autores, como Black (1976), Epps y Epps (1976), Morgan (1976), Christie (1982) y Pitts y Tauchen (1983), de que la volatilidad está relacionada con esas tres variables mencionadas anteriormente. Un supuesto restrictivo de este método es que los procesos estocásticos que describen la rentabilidad de las acciones deben ser independientes y lineales, que para la mayoría de los activos financieros no suele ser frecuente.

Una vez que obtiene las estimaciones bayesianas de la volatilidad, Karolyi (1993) hace uso del modelo de valoración de opciones sobre acciones de Roll (1977), Geske (1979b) y Whaley (1981) con otros diferentes estimadores para la volatilidad (varianza implícita, histórica y ex post ¹⁷). Los resultados son esperanzadores, pues la media del error al cuadrado se reduce con la estimación bayesiana, además de que se reducen los sesgos sistemáticos respecto a la volatilidad de la acción. No obstante, se observan pequeños sesgos respecto al tiempo a la expiración y según la opción esté "sin dinero" o "en dinero".

Otros estimadores para la volatilidad con información histórica de precios son el estimador de máxima verosimilitud de Lo (1986), el estimador "encogido" (shrinkage) de Geske y Roll (1984) y el estimador robusto de Geske y Torous (1987). No obstante, aunque más eficientes, la dificultad en su cálculo hace que su utilización práctica sea limitada.

El otro gran bloque de estimadores, se expresa en términos del concepto de volatilidad implícita, estimadores que pasamos a comentar a continuación:

1. Volatilidad implícita (ISD):

Utilizada por primera vez por Latané y Rendleman (1976), se define como aquel valor de la volatilidad que iguala el valor de mercado de la opción (valor observado) al valor teórico de dicha opción haciendo

¹⁴ No obstante, Beckers (1983) considera que en la práctica el estimador propuesto por Garman y Klass (1980) es una media ponderada entre el estimador de Parkinson (1980) y el tradicional de los precios de cierre.

¹⁵ Beckers (1983) propone el denominado estimador "empírico", que viene a ser una transformación lineal del estimador de valores extremos de Parkinson.

¹⁶ Una explicación detallada del método clásico, del de Parkinson y de Kunitomo, se presenta en Chamorro (1993), en el que además se calculan los tres estimadores para la determinación de la prima de garantía de los depósitos en los bancos españoles más grandes en el período que va desde el 1 de Julio de 1990 al 30 de Junio de 1992.

¹⁷ Para el cálculo de la volatilidad ex post usa las rentabilidades de las acciones disponibles hasta la maduración de la opción.

uso de un modelo de valoración, donde los más utilizados tradicionalmente han sido el modelo de B-S y el binomial de Cox-Ross-Rubinstein (1979). Por tanto, conociendo el valor observado de la opción y el resto de las variables que intervienen en la formación del precio de estos activos derivados (precio de ejercicio, tipo de interés, tiempo hasta la expiración y precio del activo subyacente), el modelo de valoración produce un único valor para la volatilidad, valor que se denomina "volatilidad implícita" o como denominan Cox y Rubinstein (1985) "estimación de mercado de la volatilidad". La volatilidad así obtenida hace referencia, de alguna manera, a la volatilidad futura que se intenta estimar.

La volatilidad implícita dependerá, fundamentalmente, de los cambios en las expectativas que los flujos de información provoquen en el mercado. Las principales fuentes de información que afectan a las expectativas sobre el precio de los activos provienen de anuncios sobre determinadas variables económicas o financieras, acontecimientos de divisa índole o decisiones de política monetaria o fiscal. Entre otros factores, los cambios de la volatilidad histórica parecen influir en los cambios en las expectativas sobre la volatilidad implícita [Analistas Financieros Internacionales (Marzo,1992)].

Las fórmulas de valoración de opciones a menudo no pueden invertirse analíticamente, y para el cálculo de la volatilidad implícita se requiere, por tanto, el uso de métodos numéricos, tales como el método de bisección y el algoritmo de Newton-Raphson ¹⁸ para su obtención. Hay sin embargo, otras opciones, donde no pueden encontrarse valores para la varianza implícita que justifiquen los precios observados de las opciones. En relación a esta observación, el trabajo de Manaster y Koehler (1982) presenta las condiciones necesarias y suficientes para que exista una varianza implícita positiva; concretamente se presenta un algoritmo que converge al valor único de la varianza implícita, cuando ésta existe. En último caso, los procedimientos numéricos no son siempre necesarios; para el caso especial de opciones at-the-money, se puede invertir la fórmula de B-S para derivar la volatilidad implícita [Brenner y Subrahmanyam (1988)].

2. Desviación estándar implícita ponderada (WISD).

En la medida en que puede haber diferentes opciones sobre el mismo activo con diferentes vencimientos y diferentes precios de ejercicio en un momento del tiempo, se deberían obtener diferentes volatilidades implícitas según sea el vencimiento y el precio de ejercicio. Incluso si los participantes en el mercado valoraran las opciones de acuerdo al modelo de B-S, las volatilidades implícitas observadas diferirían entre las opciones por muchas otras causas como por diferentes costes de transacción, por el hecho de tratarse de precios en términos discretos, por no ser sincrónica la negociación, etc.¹⁹

¹⁸ Para una revisión de cómo aplicar ambos métodos el de bisección y el de Newton-Raphson, ver Kritzman (1991).

¹⁹ Cox y Rubinstein (1985) plantean que diferentes opciones sobre el mismo activo pueden tener diferentes volatilidades implícitas, incluso para opciones con el mismo día de expiración: puede existir alguna diferencia que haga que el ejercicio anticipado sea óptimo, por lo que el tiempo de vida de esa opción no es el mismo. Por ejemplo, si una call está "muy en dinero" y el día más próximo de pago de dividendos es dentro de un mes, en el que se ejercitará probablemente, la volatilidad implícita reflejará la estimación de mercado de la volatilidad para sólo un mes, aunque el día de expiración sea dentro de más meses.

En respuesta a este problema, una extensa literatura sugiere calcular la volatilidad implícita para cada opción y entonces usar una media ponderada de esas volatilidades implícitas como una estimación de la volatilidad futura. La idea detrás de esta aproximación es simple: si el modelo es correcto, entonces las desviaciones respecto de los precios que da el modelo se pueden reducir utilizando un mayor número de observaciones. Si hay "n" opciones sobre una acción en un momento del tiempo, habrá que proceder al cálculo de las correspondientes desviaciones estándar implícitas para los diferentes vencimientos de las opciones sobre el mismo activo; **Error! Marcador no definido.**, siguiendo el cálculo que se proponía con anterioridad para la obtención de la volatilidad implícita.

Las estimaciones obtenidas se han ponderado de diferentes formas. Por ejemplo, Latané y Rendleman (1976) ponderan y promedian del siguiente modo:

$$\hat{\sigma} = \sum_{j=1}^n \omega_j \sigma_j / \sum_{j=1}^n \omega_j$$

donde **Error! Marcador no definido.** es la ponderación aplicada a la j-ésima estimación, se obtiene la desviación estándar implícita ponderada (WISD), que proponen Latané y Rendleman (1976). Es más, dado que los valores de las opciones call "at-the-money" son más sensibles a la volatilidad que las "out-of-the-money" y las "in-the-money", en lugar de estudiar las ponderaciones, se podría utilizar como volatilidad implícita la correspondiente a aquellas opciones que están "at-the-money".

Mejor aún, y como hacen Latané y Rendleman (1976) y Rogalski (1978), es ponderar de acuerdo a la derivada parcial del valor de la opción call que da la ecuación B-S respecto a cada desviación estándar implícita, la "vega" **Error! Marcador no definido.** de la opción, es decir:

$$\omega_j = \partial C_j / \partial \sigma_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

de manera que las opciones más sensibles a la desviación estándar son ponderadas más fuertemente que aquellas que no lo son. No obstante, esta estimación tiene la desventaja de que es sesgado en la medida de que las ponderaciones no suman la unidad.

Chiras y Manaster (1978) y Resnick, Sheikh y Song (1993), siguiendo un razonamiento similar, utilizan como ponderación la elasticidad del precio de la opción call de B-S con respecto a cada desviación estándar implícita, es decir:

$$\omega_j = (\partial C_j / \partial \sigma_j)(\sigma_j / C_j), \quad j = 1, \dots, n$$

Latané y Rendleman (1976), después de una importante evidencia empírica, concluyen que la desviación estándar implícita ponderada (WISD) es, generalmente, un mejor predictor de la volatilidad futura del activo que las predicciones de desviaciones estándar basadas en datos históricos ²⁰.

²⁰ La crítica más común que se hace a la varianza implícita ponderada como estimador de la volatilidad y que se menciona en Rogalski (1978) es que, la media de WIV es una función inversa del vencimiento. El procedimiento es decir, cuando el tiempo a la maduración se incrementa, la WIV en media declina. Esto es contrario al supuesto intuitivo de volatilidad creciente para más amplios intervalos de tiempo y también viola el modelo B-S que

En un trabajo reciente, Resnick, Sheikh y Song (1993) proponen un cálculo de la WISD que mejora los resultados en la valoración de opciones, respecto a la WISD tradicional de Latané y Rendleman. La "WISD de vencimiento específico" se calcula clasificando la totalidad de opciones que hay sobre un mismo activo en diferentes fechas de expiración para posteriormente calcular las WISD para cada clase de opciones con iguales fechas de vencimiento. Dado que las varianzas no son estacionarias, como en la mayoría de los trabajos empíricos se ha puesto de manifiesto ²¹, se podrá hacer el análisis de cómo varía la volatilidad para un mismo tamaño de empresa en diferentes meses y para diferentes tamaños de empresa, en un mes dado. Este estimador parece reflejar mejor las expectativas de mercado respecto a la volatilidad y recoge, en especial, las diferencias mensuales y según la capitalización de mercado de la empresa que se han detectado en el cálculo de la volatilidad y que la WISD tradicional, así como otros métodos de estimación no tenían en cuenta.

Un procedimiento alternativo para obtener la volatilidad implícita es el propuesto por Beckers (1981) y Whaley (1982) que difiere de los anteriores en que en lugar de utilizar ponderaciones ya prefijadas (ad hoc), se calculan ponderaciones "implícitas" que permiten estimar la desviación estándar implícita, de forma que se minimice :

$$\sum_{i=1}^N \omega_i [C_i - BS_i(\hat{\sigma})]^2$$

donde C_j es el precio de mercado de la opción, BS_i es el precio que da el modelo B-S de la opción i (donde se conocen todos los argumentos excepto σ ¡Error! Marcador no definido.) y ω_i son las ponderaciones.

CONTRASTACIÓN EMPÍRICA DE LOS DIFERENTES ESTIMADORES

Una vez definidos los diferentes estimadores para predecir la volatilidad, ¿cuál de ellos predice mejor la volatilidad futura observada?. Los resultados obtenidos después de la utilización de diferentes estimadores y una vez comparados con la volatilidad observada, no son unánimes. Los primeros trabajos en su mayoría concluían que la volatilidad implícita parecía ser un mejor predictor de la volatilidad futura que los estimadores basados en datos históricos [Latané y Rendleman (1976), Schmalensee y Trippi (1978), Chiras y Manaster (1978), Beckers (1981)]. En otras palabras, la volatilidad implícita explica más la variación que experimenta en el futuro la desviación estándar de las rentabilidades de un

mantiene que la tasa de varianza debe estar positivamente relacionada con el precio de la opción. Una posible explicación que da Rogalski (1978) a esta crítica es que la medida de varianza de WIV implícita en su fórmula es una estimación de la valoración de mercado de la incertidumbre de la opción respecto al tiempo que queda hasta la maduración. De manera que el mercado asigna a las opciones a corto plazo mayor grado de incertidumbre que a las de largo plazo.

²¹ B-S (1972), Blattberg y Gonedes (1974), Black (1976), Schmalensee y Trippi (1978) y Christie (1982).

activo que lo que explican las volatilidades obtenidas de datos históricos de rentabilidades. Sin embargo, los trabajos más recientes, aunque en términos generales mantienen la misma conclusión, obtienen resultados que parecen estar mezclados.

Por un lado, la utilización de los precios intradía (bajo, alto, apertura y cierre) y no sólo los precios de cierre mejoró el poder de estimación de la volatilidad usando datos históricos ²². Por otro lado, la aproximación de describir las series temporales de rentabilidades del subyacente usando modelos GARCH [Day y Lewis (1992)] concluye que ambas, volatilidad implícita y volatilidad histórica, contienen información importante sobre la volatilidad futura ²³. Después de la comparación de tres diferentes estimadores de la volatilidad (varianza histórica, varianza implícita obtenida del modelo de volatilidades estocástica de Hull y White y finalmente, varianza de un modelo GARCH), Lamoureux y Lastrapes (1993) concluyen que el modelo GARCH genera, en términos generales, menos errores en la predicción de la volatilidad futura que la varianza implícita, y que, la volatilidad histórica puede mejorar la estimación de mercado de la volatilidad.

Más contundente es el trabajo de Canina y Figlewski (1993), que para opciones OEX y para el período marzo de 1983 a marzo de 1987 encuentran que las volatilidades implícitas no contienen información para predecir volatilidades futuras y, es más, las volatilidades históricas pueden explicar algunas variaciones producidas en la volatilidad observada. No obstante, consideran razonable el uso de ambas para obtener un mayor grado de fiabilidad.

Aunque el debate sigue abierto, las nuevas tendencias apuestan por la utilización de ambos estimadores, basados en la relación intertemporal que se observa entre la volatilidad implícita y la dinámica del precio del subyacente [Sheikh (1993)]. Analistas Financieros Internacionales (1992) encuentran que los cambios en las volatilidades históricas afectan de modo importante a los cambios de las expectativas sobre la volatilidad implícita con datos del futuro sobre el Bono Nocional a 3 años durante el período de vida del contrato de diciembre 91. Por tanto, estos resultados abren un debate en relación al uso de la volatilidad histórica o volatilidad implícita. Como apunta Mayhew (1995), quizá la propia elección de si usar una u otra volatilidad dependa del horizonte de estimación.

BIBLIOGRAFÍA

²² Aún más, Beckers (1983) sugería añadir a estos estimadores denominados de "valor extremo", la volatilidad implícita para incrementar su poder de explicación. No obstante, haciendo esto no pareció incrementarse de modo importante la predicción de este estimador.

²³ No obstante, extendiendo la aproximación tipo GARCH, Xu y Taylor (1993) encuentran que la volatilidad implícita es el mejor predictor, mientras que la volatilidad histórica no añade poder de explicación de la volatilidad futura.

ALEGRÍA, R. M.L. y F. P CALATAYUD (1989a). "Modelos ARMA con errores ARCH aplicados a la valoración de opciones sobre acciones", Documento de Trabajo, N° 13, Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, Universidad de La Laguna.

ALEGRÍA, R. M.L. y F. P CALATAYUD (1989b): "Valoración de opciones: una formulación alternativa", Documento de Trabajo, N° 19, Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, Universidad de La Laguna.

AMIN, A. I. y JARROW, R. A. (1992): "Pricing Options on Risky Assets in a Stochastic Interest Rate Economy", *Mathematical Finance*, Vol. 2, N° 4, pp. 217-237.

AMIN, K. I. y V. K. NG (1993): "Option Valuation with Systematic Stochastic Volatility", *Journal of Finance*, 48, N° 3, pp. 881-910.

ANALISTAS FINANCIEROS INTERNACIONALES (1992): "La estimación de la volatilidad en la valoración de opciones", *Análisis Financiero Internacional*, febrero-marzo, pp. 45-54.

BACHELLIER, L. (1900): "Theorie de la Speculation", traducido a inglés por A. J. Boness en *The Random Character of Stock Market Prices*, ed. P. H. Cootner, pp. 17-78. Cambridge, Mass.: M.I.T. Press, 1967.

BAILEY, W. y R. M. STULZ (1989): "The Pricing of Stock Index Options in a General Equilibrium Model", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 24, N° 1, pp. 1-12.

BEAVER, W. H. (1968): "The Information Content of Annual Earnings Announcement", *Empirical Research in Accounting; Selected Studies* *Journal of Accounting Research*, Vol. 6, pp. 67-92.

BECKERS, S. (1980): "The Constant Elasticity of Variance Model and its Implications for Option Pricing", *Journal of Finance*, Vol. 35, pp. 661-673.

BECKERS, S. (1981): "A Note on Estimating the Parameters of the Diffusion-Jump Model of Stock Returns", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 16, N° 1, pp. 127-139.

BLACK, F. (1975): "Fact and Fantasy in the Use of Options", *Financial Analysts Journal*, 31, pp. 36-41 y 61-72.

BLACK, F. y SCHOLES, M. (1972): "The Valuation of Option Contracts and Test of Market Efficiency", *Journal of Finance*, Vol. 27, pp. 399-417.

BLACK, F. y SCHOLES, M. (1973): "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, 81, pp. 637-659.

BLATTBERG, R. C. y GONEDDES, N. J. (1974): "A Comparison of the Stable and Student Distribution of Statistical Models for Stock Prices", *Journal of Business*, 47, pp. 244-280.

BONESS, A. J. (1964): "Elements of a Theory of Stock-Option Value", *Journal of Political Economy*, 72, pp. 163-175.

BRENNER, M. Y SUBRAHMANYAN, M.G. (1988): "A Simple Formula to Compute the Implied Standard Deviation", *Financial Analysts Journal*, Vol. 44, N° 5, pp. 80-83.

BROCK, W. A. (1986): "Distinguishing Random and deterministic Systems: Abridged Version", *Journal of Economic Theory*, Vol. 40, pp. 168-195.

BROSEN, B. W. y S-R YANG (1993): "Nonlinear Dynamics of Daily Futures Prices: Conditional Heteroskedasticity or Chaos?", *Journal of Futures Markets*, Vol. 13, N° 2, pp. 175-191.

CANINA, L. y FIGLEWSKI, S. (1993): "The Informational Content of Implied Volatility", *The Review of Financial Studies*, Vol. 6, N° 3, pp. 659-681.

CHAMORRO, J. M. (1993): "Volatilidad de las acciones y garantía de los depósitos", Documento de Trabajo 93.14, Facultad de Ciencias Económicas, Bilbao.

CHIRAS, D. P. Y S. MANASTER (1978): "The Informational Content of Option Prices and a test of Market Efficiency", *Journal of Financial Economics*, Vol. 6, pp. 213-234.

CHRISTIE, A. A. (1982): "The Stochastic Behavior of Common Stock Variances", *Journal of Financial Economics*, 10, pp. 407-432.

CLARK, P. K. (1973). "A Subordinated Stochastic Process Model with Finite Variance for Speculative Prices", *Econometrica*, Vol. 41, pp. 135-156.

COX, J. C. (1975): "The Pricing of Options for Jump Processes", Rodney L. White Center Working Paper N° 2-75. University of Pennsylvania, Philadelphia.

COX, J. C. y ROSS, S. A. (1976): "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes", *Journal of Financial Economics*, 3 (Enero-Marzo), pp. 145-166.

COX, J. C., ROSS, S. A. y RUBINSTEIN, M. (1979): "Option Pricing. A Simplified Approach", *Journal of Financial Economics*, 7, pp. 229-263.

COX, J. C. y RUBINSTEIN, M. (1985) *Option Markets*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.

DAY, F. y LEWIS, C. M. (1992): "Stock Market Volatility and the Information Content of Stock Index Options", *Journal of Econometrics*, Vol. 52, N° 1/2, pp. 267-287.

DUAN, J. C. (1991): "The GARCH Option Pricing Model", *Proceedings 18th European Finance Association Conference*, Vol. II. Rotterdam.

EISENBERG, L. K. y R. A. JARROW (1991): "Option Pricing with Random Volatilities in Complete Markets", Federal Reserve Bank of Atlanta Working Paper 91-16.

EMANUEL, D. C. y J. D. MACBETH (1982): "Further Results on the Constant Elasticity of Variance Call Option Pricing Model", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 17, pp. 533-554.

ENGLE, R. (1982): "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of U.K. Inflation", *Econometrica*, 50, pp. 987-1008.

ENGLE, R. F. y T. BOLLERSLEV (1986): "Modelling the Persistence of Conditional Variances", *Econometric Reviews*, 5, pp. 1-50, 81-87.

ENGLE, R. F. y C. MUSTAFA (1992): "Implied ARCH Models from Options Prices", *Journal of Econometrics*, 52, pp. 289-311.

EPPS, T. W. y M. L. EPPS (1976): "The Stochastic Dependence of Security Price Changes and Transactions Volume: Implications for the Mixture-of-Distribution Hypothesis", *Econometrica*, 44, pp. 305-321.

FINNERTY, J. E. (1978): "The CBOE and Market Efficiency", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 13, pp. 29-38.

FRENCH, D. W. y L. J. MARTIN. (1988): "The Measurement of Options Misspricing", *Journal of Banking and Finance*, 12, N° 4, pp. 537-550.

FRENCH, K. R., G. W. SCHWERT, y R. F. STAMBAUGH (1987): "Expected Stock returns and Volatility", *Journal of Financial Economics*, 19, pp. 3-29.

- GALAI, D. (1977): "Tests of Market Efficiency of the Chicago Board Options Exchange", *Journal of Business*, 50, pp. 167-197.
- GARMAN, M. (1976): "A General Theory of Asset Valuation Under Diffusion State Processes", Working Paper N° 50, University of California, Berkeley.
- GARMAN, M. B. y M. J. KLASS (1980): "On the Estimation of Security Price Volatilities from Historical Data", *Journal of Business*, 53, N° 1, pp. 67-78.
- GESKE, R. (1979a): "The Valuation of Compound Options", *Journal of Financial Economics*, 7, pp. 63-81.
- GESKE, R. (1979b): "A Note on an Analytical Formula for Unprotected American Call Options on Stocks with Known Dividends", *Journal of Financial Economics*, 7, pp. 375-380.
- GESKE, R. y R. ROLL (1984): "On Valuing American Call Options with the Black-Scholes European Formula", *Journal of Finance*, 49, N° 2, pp. 443-455.
- GESKE, R. y W. TOROUS (1987): "Volatility and Misspricing: Robust Variance Estimation and Black-Scholes Call Options pricing", UCLA Finance Working Paper, 10-87.
- HESTON, S. L. (1993): "A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options", *Review of Financial Studies*, 6, N° 2, pp. 327-343.
- HULL, J. y WHITE, A. (1987): "The Pricing of options on Assets with Stochastic Volatilities", *Journal of Finance*, 42, N° 2, pp. 281-300.
- JARROW, R. y RUDD, A. (1982): "Approximate Option Valuation for Arbitrary Stochastic Processes", *Journal of Financial Economics*, 10, pp. 347-369.
- JARROW, R. A. y J. B. WIGGINS (1989): "Option Pricing and Implicit Volatilities", *Journal of Economic Surveys*, 3, N° 1, pp. 59-81.
- JOHNSON, H. E. y D. SHANNO (1987): "Option Pricing when the Variance Is Changing", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22, N° 2, pp. 143-151.
- KAROLYI, G. A. (1993): "A Bayesian Approach to Modelling Stock Return Volatility for Option Valuation", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 28, N° 4, pp. 579-594.
- KON, S. J. (1984): "Models of stock Returns: A Comparison", *Journal of Finance*, 39, N° 1, pp. 147-165.
- KUNITOMO, N. (1992): "Improving the Parkinson Method of Estimating Security Price Volatilities", *Journal of Business*, 65, N° 2.
- LAMOREUX, C. G. y W. D. LASTRAPES (1993): "Forecasting Stock-Return Variance: Toward an Understanding of Stochastic Implied Volatilities", *Review of Financial Studies*, 6, N° 2, pp. 293-326.
- LATANÉ, H. A. y RENDLEMAN, R. J. (1976): "Standard Deviations of Stock Price Ratios Implied in Option Prices", *Journal of Finance*, Vol. 31, N° 2, pp. 369-382.
- LAUTERBACH, B. y P. SCHULTZ (1990): "Pricing Warrants: An Empirical Study of the Black-Scholes Model and Its Alternatives", *Journal of Finance*, 45, N° 4, pp. 1181-1209.
- LINTNER, J. (1965): "The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets", *Review of Economics and Statistics*, 47, pp. 768-783.
- LO, A. W. (1986): "Statistical Tests of Contingent Claims Asset Pricing Models: A New Methodology", *Journal of Financial Economics*, 17, pp. 143-174.

- MACBETH, J. D. y MERVILLE, L. J. (1980): "Tests of the Black-Scholes and Cox Call Option Valuation Models", *Journal of Finance*, 35, pp. 285-300.
- MANASTER, S. y G. KOEHLER (1982): "The Calculation of Implied Variances from the Black-Scholes Model: A Note", *Journal of Finance*, 37, Nº 1, pp. 227-230.
- MAYHEW, S. (1995): "Implied Volatility", *Financial Analyst Journal*, Julio-Agosto, pp. 8-20.
- MELINO, A. y S. TURNBULL (1990): "The Pricing of Foreign Currency Options with Stochastic Volatility", *Journal of Econometrics*, 45, pp. 239-265.
- MERTON, R. (1976): "Option Pricing When Underlying Returns are Discontinuous", *Journal of Financial Economics*, 3, pp. 125-144.
- MILNE, F. y S. M. TURNBULL (1991): "A Simple Approach to Interest-Rate Option Pricing", *Review of Financial Studies*, 4, Nº 1, pp. 87-120.
- MORGAN, I. (1976): "Stock Prices and Heteroscedasticity", *Journal of Business*, 49, pp. 496-508.
- MOSSIN, J. (1966): "Equilibrium in a Capital Asset Market", *Econometrica*, 34, pp. 768-783.
- NAIK, V. (1993): "Option Valuation and Hedging Strategies with Jumps in the Volatility of Asset Returns", *Journal of Finance*, 48, Nº 5, pp. 1969-1984.
- OFFICER, R. R. (1972): "The Distribution of Stock Returns", *Journal of American Statistical Association*, 67, pp. 211-232.
- PARKINSON, M. (1980): "The Extreme Value Method for Estimating the Variance of the Rate of Return", *Journal of Business*, 53, Nº 1, pp. 61-65.
- PEÑA, I. (1993): "Medidas de volatilidad en mercados financieros", Documento de Trabajo, departamento de Economía, Universidad Carlos III de Madrid.
- PITTS, M. y G. TAUCHEN (1983): "The Price Variability-Volume Relationship of Speculative Markets", *Econometrica*, 51, pp. 485-505.
- PONN, S. y T. HO (1992): "The GARCH Option Pricing Model: U.K. Evidence", *Proceedings 19th European Finance Association Conference*, IV. Lisboa
- PRESS, S. J. (1967): "A Compound Events Model for Security Prices", *Journal of Business*, 40, pp. 317-335.
- RESNICK, B. G., A. M. SHEIKH y Y-S SONG (1993): "Time Varying volatilities and calculation of the Weighted Implied Standard Deviation", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 28, Nº 3, pp. 417-430.
- ROGALSKI, R. J. (1978): "Variances and Option Prices in Theory and Practice", *Journal of Portfolio Management*, pp. 43-51.
- ROLL, R. (1977): "An Analytic Valuation Formula for Unprotected American Call Options on Stocks with Known Dividends", *Journal of Financial Economics*, 5, pp. 251-258.
- RUBINSTEIN, M. (1983): "Displaced Diffusion Option Pricing", *Journal of Finance*, 38, Nº 1, pp. 213-217.
- RUIZ, E. (1993): "Stochastic Volatility Versus Autoregressive Conditional Heteroscedasticity", Documento de Trabajo 93-44, Departamento de Estadística y Econometría, Universidad Carlos III de Madrid.
- SAMUELSON, P. A. (1965): "Rational Theory of Warrant Pricing", *Industrial Management Review*, 6, pp. 13-31.
- SAVIT, R. (1989): "Nonlinearities and Chaotic Effects in Options Prices", *Journal of Futures Markets*, 6, pp. 507-518.

- SCHMALENSEE, R. y TRIPPI, R. R. (1978): "Common Stock Volatility Expectations Implied by Option Premia", *Journal of Finance*, 33, pp. 129-147.
- SCOTT, L. O: (1987): "Option Pricing when the Variance Changes Randomly: Theory, Estimation and a Application", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22, N° 4, pp. 419-438.
- SHARPE, W. F. (1964): "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk", *Journal of Finance*, 19, pp. 425-442.
- SHEIKH, A. (1993): "The Behavior of Volatility Expectations and Their Effect on Expected Returns", *The Journal of Business*, Vol. 66, N° 1, pp. 93-116.
- SPRENKLE, C. M. (1962): "Warrant Prices as Indicators of Expectations and Preferences", *Yale Economic Essays*, 1, pp. 172-231.
- STEIN, E. M. y J. C. STEIN (1991): "Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: An Analitic Approach", *Review of Financial Studies*, 4, pp. 727-752.
- WHALEY, R. E. (1981): "On the Valuation of American Call Options on Stocks with Know Dividends", *Journal of Financial Economics*, 9, pp. 207-212.
- WHALEY, R. E. (1982): "Valuation of American Call Options on Dividend-Paying Stocks: Empirical Tests", *Journal of Financial Economics*, 10, pp. 29-58.
- WIGGINS, J. B. (1978): "Option Values Under Stochastic Volatility: Theory and Empirical Estimates", *Journal of Financial Economics*, 19, pp. 351-372.