

# UNA DISCRETIZACIÓN ALTERNATIVA

DAVID PÉREZ ROMÁN

Escuela Universitaria de Estudios Empresariales

Universidad de Valladolid

MARÍA DEL PILAR PÉREZ GONZÁLEZ

MARÍA ROSA ARRANZ SOMBRÍA

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

Universidad de Valladolid

## 1. INTRODUCCIÓN

El estudio de las dinámicas originadas por modelos formulados en tiempo continuo no es tarea sencilla. Menos aún cuando en el modelo aparecen variables exógenas e interesa conocer la evolución de las soluciones cuando éstas se modifican. En otras palabras cuando se estudia la evolución de las soluciones ante cambios de distintos parámetros.

En la práctica, la mayoría de los sistemas de ecuaciones diferenciales se resuelven empleando métodos numéricos. Sin embargo, la resolución numérica implica la asignación de valores fijos a los parámetros; es decir, no se puede realizar un estudio cualitativo completo de las propiedades de las soluciones de forma genérica.

En muchos casos, para facilitar el análisis de las soluciones del sistema continuo o para estimaciones econométricas con datos periódicos se procede a la discretización del sistema. Una práctica común para ello es reemplazar la derivada por la diferencia primera y analizar el sistema de ecuaciones en diferencias originado. Es un hecho conocido que la versión discreta puede tener un comportamiento cualitativo que no se parece en nada al del correspondiente modelo continuo. Este hecho es una consecuencia lógica de lo burdo de la aproximación tomada.

En este trabajo hemos reemplazado la derivada por el cociente  $\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$ . Dado que  $f'(t)$  es el límite cuando  $h \rightarrow 0$  del cociente anterior, nos planteamos la posible existencia de un  $h$  (suficientemente pequeño) para el que la dinámica del modelo discreto refleje la del continuo. Esta idea se basa no sólo en la convergencia del cociente incremental a la derivada sino también en la convergencia del método de Euler.

Para abordar este problema hemos partido del trabajo de Stutzer (1980). Éste es uno de los primeros trabajos en Economía en el que se obtiene un sistema caótico discreto como resultado de la discretización de un sistema continuo (no caótico). Stutzer analiza el sistema discreto obtenido a partir de un modelo macroeconómico planteado por Haavelmo en 1954 mediante la sustitución de la derivada por la diferencia primera. En la sección 2 recogemos ambos sistemas, continuo y discreto, y vemos como el sistema discreto presenta un escenario de Feigenbaum. Esto informa no sólo del comportamiento caótico del sistema, sino también del valor del parámetro a partir del cual se da dicho comportamiento. En la sección siguiente consideramos los sistemas discretos obtenidos al reemplazar la derivada por el cociente incremental, sistemas que llamaremos discretizados de paso  $h$ . Para algunos valores concretos de  $h$ , los diagramas de bifurcación de estos sistemas son del mismo tipo, aunque el valor del parámetro que indica el comienzo del régimen caótico parece aumentar al disminuir  $h$ . Posteriormente analizamos de forma general los resultados obtenidos. Las conclusiones se recogen en la sección 4.

## 2. MODELO DE STUTZER

Stutzer (1980) partió del modelo macroeconómico de crecimiento analizado por Haavelmo (1954):

$$\frac{\dot{N}}{N} = a - b/(Y/N), \quad a, b > 0, \quad (1)$$

$$Y = AN^a, \quad A > 0, 0 < a < 1, \quad (2)$$

donde  $N$  e  $Y$  son funciones dependientes del tiempo, y el punto indica la derivada. Las variables del modelo son:  $Y$ , función de producción tipo Cobb-Douglas, y  $N$  que representa el factor trabajo; el resto son constantes.

Las ecuaciones anteriores pueden escribirse como:

$$\dot{N} = N \left[ a - b N^{1-a} / A \right] \quad (3)$$

Haavelmo resuelve la ecuación anterior obteniendo la solución:

$$N(t) = \left[ 1/A \left( (AN(0))^{a-2} - b/a \right) e^{a(a-1)t} + b/a \right]^{1/(a-1)} \quad (4)$$

que presenta una dinámica muy simple, convergiendo a un estado de equilibrio de forma monótona.

Stutzer substituyó la derivada por la diferencia primera obteniendo la siguiente ecuación en diferencias:

$$N_{t+1} = N_t \left[ (1+a) - \frac{b}{A} N_t^{1-a} \right] \quad (5)$$

Para simplificar la notación de la ecuación anterior, realizó el cambio de variable lineal:  $N_t = (A(1+a)/b)^{1/(1-a)} x_t$ , obteniendo así la ecuación:

$$x_{t+1} = (1+a)x_t \left[ 1 - x_t^{1-a} \right] \quad (6)$$

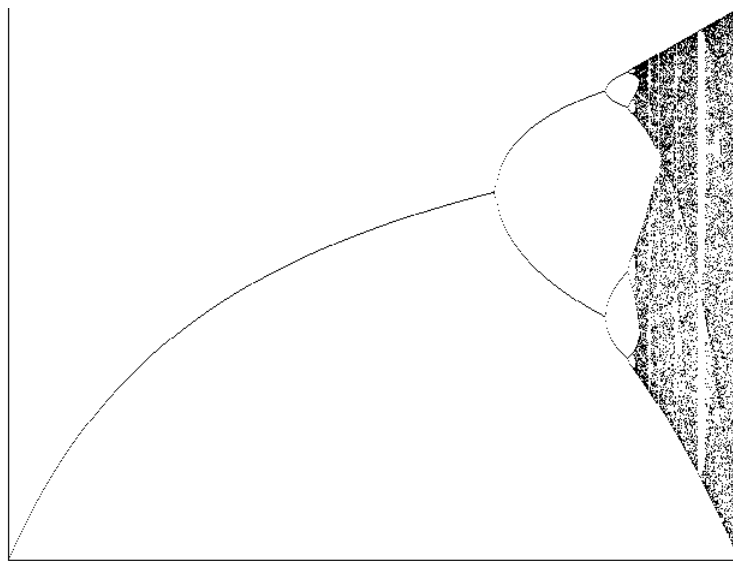


Figura 1: Diagrama de Bifurcación de la ecuación (6),  $a \in [0, 3]$ ,  $a \neq 0$

La ecuación (6) es equivalente a la ecuación logística para  $a = 0$ , presentando al igual que ésta, un escenario de bifurcaciones de doble periodo<sup>1</sup> para distintos valores de  $a$  (fig. 1).

### 3. DISCRETIZACIÓN DE PASO $h$

La aproximación de la derivada por la primera diferencia ocasiona un cambio drástico en el comportamiento del modelo, esto puede ser debido a que se realiza un aproximación muy grosera de la derivada. Con la sustitución de la derivada por el cociente incrementar:

$$\frac{N_{t+h} - N_t}{h}, \quad (7)$$

pretendemos analizar si se mantiene el comportamiento cualitativo del modelo discreto de paso 1, o por el contrario, si la dinámica generada se asemeja más a la del modelo continuo.

La ecuación (3) se transforma entonces en:

$$\begin{aligned} \frac{N_{t+h} - N_t}{h} &= N_t \left[ a - \frac{b}{A} N^{1-a} \right], \\ N_{t+h} &= N_t \left[ 1 + h \left( a - \frac{b}{A} N^{1-a} \right) \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

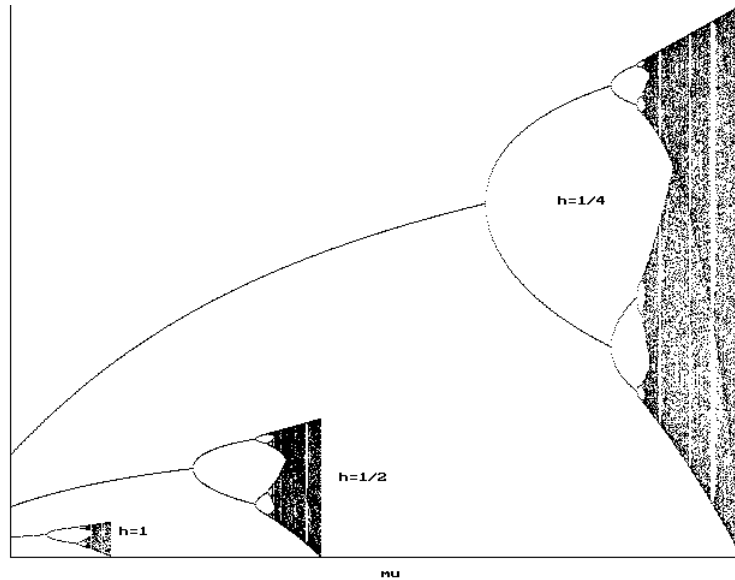


Figura 2: Diagramas de Bifurcación de la ecuación (10) para distintos valores de  $h$ ,  $a = 1/2$

<sup>1</sup>Puede verse un estudio detallado del escenario de bifurcación doble periodo en Baumol/Benhabib (1989) y en Devaney (1992).

Siguiendo los pasos de Stutzer, realizamos el cambio de variable lineal:

$$N_t = \left[ (A(1 + ha)/b)^{1/(1-a)} \right] x_t \quad (9)$$

que transforma el sistema (8) en:

$$\begin{aligned} x_{t+h} &= x_t \left[ 1 + h(a - (1 + ha)x_t^{1-a}) \right] \\ &= (1 + ha)x_t \left[ 1 - hx_t^{1-a} \right] \end{aligned} \quad (10)$$

En el análisis del modelo discretizado de paso  $h$  podemos observar que se presenta un escenario de bifurcaciones de características similares al obtenido para  $h = 1$ . Sin embargo, al estudiar las bifurcaciones que se producen al modificar el parámetro  $a$ , observamos que una disminución de  $h$  (o sea, realizar una aproximación más fina de la derivada), aumenta el valor del parámetro  $a$  en el que aparecen las bifurcaciones, además, también aumenta el intervalo en el que podemos variar dicho parámetro, es decir, el diagrama de bifurcación se "desplaza" a la derecha (ver fig. 2).

Hemos visto como al disminuir  $h$  el diagrama de bifurcación se traslada a la derecha manteniendo la misma estructura. Dicho desplazamiento es consecuencia del siguiente resultado:

Dado un sistema continuo  $\dot{\bar{x}}_t = \bar{f}(\mathbf{m}, \bar{x}_t)$ , si el sistema discreto resultante de sustituir la derivada por el cociente incremental se puede escribir, mediante un cambio de variable, de la forma:

$$\bar{y}_{t+h} = \bar{y}_t + h \cdot a \cdot \bar{g}(\bar{y}_t), \quad (11)$$

entonces la dinámica del sistema discreto obtenido al reemplazar la derivada por la diferencia primera es cualitativamente equivalente a cualquier discretizado de paso  $h$ .

En principio, la escritura del sistema (10) no coincide con la del resultado anterior (11). Sin embargo, si en lugar del cambio de variable (9), hacemos:

$$N_t = \left( \frac{Aa}{B} \right)^{1/(1-a)} x_t, \quad (12)$$

la ecuación (8) se transforma en:

$$x_{t+h} = x_t + h\alpha[1 - x_t^{1-a}] \quad (13)$$

Por el resultado anterior sabemos entonces que cualquier discretizado de paso  $h$  presenta un escenario de bifurcaciones en cascada y por tanto caos; es decir, no existe  $h$  suficientemente pequeño de forma que el discretizado de paso  $h$  tenga una dinámica similar a la del sistema continuo.

Una vez escrito el sistema de la forma (13), el hecho de que al disminuir  $h$  el diagrama de bifurcación se desplace a la derecha es consecuencia de la relación existente entre el discretizado de paso 1 y el discretizado de paso  $h$ . Si en (13) denotamos por  $b$  a  $h\alpha$ , para un  $h$  fijo, el discretizado de paso  $h$  coincide con el discretizado de paso 1 cambiando el nombre del parámetro  $a$  por  $b$ . Así, el sistema discreto de paso 1 para un valor fijo del parámetro  $\alpha_0$ , es el mismo sistema que el discretizado de paso  $h$  para el valor del parámetro  $h\alpha_0$ . Si  $h = h^*$  y el régimen caótico comienza en  $a_0$  para el sistema discreto de paso 1, entonces para el sistema discreto de paso  $h^*$  comienza en  $(1/h^*)\alpha_0$ .

Por otra parte, escrito el sistema de la forma:

$$\bar{x}_{t+h} = \bar{x}_t + h \cdot a \cdot \bar{g}(\bar{x}_t),$$

si el sistema continuo:

$$\dot{\bar{x}}_t = a \cdot \bar{g}(\bar{x}_t)$$

tiene un punto fijo  $x^*$  para un valor  $a^*$  del parámetro, entonces  $x^*$  es punto fijo del sistema discreto para  $a^*$  independientemente de  $h$ .

Esta situación se tiene también en otros modelos. Por ejemplo, el sistema estudiado por Benhabib y Day (1981) es:

$$x_{t+1} = amx_t(m - bx_t).$$

Si en esta ecuación realizamos el cambio de variable

$$x_t = \frac{am^2 - 1}{amb}(y_t + 1),$$

la ecuación resultante es

$$y_{t+1} = y_t + (1 - am^2)y_t(1 + y_t).$$

Hemos analizado también algunos modelos en dos variables. Considerado el modelo de Henon como discretizado de un sistema continuo, hemos comprobado que en los discretizados de paso  $h$ , al disminuir  $h$  el diagrama de bifurcación se desplaza a la derecha al disminuir  $h$ , si bien no hemos encontrado un cambio de variable que nos permita asegurar que esto es cierto para cualquier  $h$ .

#### **4. CONCLUSIONES**

En este trabajo hemos comprobado como al discretizar el modelo en tiempo continuo planteado por Haavelmo, sustituyendo la derivada por el cociente incrementar con incremento  $h < 1$ , no se consigue que desaparezca el comportamiento caótico obtenido por Stutzer al tomar  $h = 1$ . Por tanto, una mejor aproximación de la derivada, no elimina el cambio drástico cualitativo producido en el sistema discreto.

Sin embargo, se consigue aumentar el rango de valores que puede tomar el parámetro del modelo en el que el sistema discreto tiene un comportamiento similar al continuo.

Esto ocurre en cualquier sistema que admita un cambio de variable que transforme el sistema original a un sistema como (11).

Por otra parte, si queremos estudiar qué ocurre en el modelo continuo cuando el parámetro toma unos valores determinados, es posible elegir un  $h$  de forma que el sistema en tiempo continuo y el discreto tengan el mismo comportamiento en ese rango de valores.

## 5. BIBLIOGRAFÍA

BAUMOL, W.J. Y BENHABIB, J. (1989): "Chaos: Significance, Mechanism, and Economic Applications." Journal of Economic Perspectives, 3, pp. 77-105.

BENHABIB, J. y DAY, R.H. (1981): "Rational Choice and Erratic Behaviour." Review of Economic Studies, 48, pp. 459-471.

DEVANEY, R.L. (1992): A First Course in Chaotic Dynamical Systems. Theory and Experiment. Reading, MA.: Addison-Wesley.

HAAVELMO, T. (1954): A Study in the Theory of Economic Evolution. North-Holland, Amsterdam.

LORENZ, H.W. (1993): Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion. Springer-Verlag.

STUTZER, M.J. (1989): "Chaotic Dynamics and Bifurcation in a Macro-Model." Journal of Economic Dynamics and Control, 2, pp. 353-376.