

ESTUDIO PROBABILÍSTICO EN EL PROCESO ANALÍTICO JERÁRQUICO

ALTUZARRA CASAS, Alfredo

ESCOBAR URMENETA, María Teresa

MORENO JIMÉNEZ, José María

Dpto. Métodos Estadísticos

Facultad de Económicas

Universidad de Zaragoza

RESUMEN

El trabajo aborda uno de los aspectos menos tratados en el Proceso Analítico Jerárquico: su estudio probabilístico. En lo que sigue, se estudia cómo incorporar al modelo la incertidumbre existente en la emisión de juicios por parte del decisor a través de distribuciones de probabilidad recíprocas. Se completa el estudio analizando, mediante una interpretación probabilística de las puntuaciones finales, si existen diferencias estadísticamente significativas entre las alternativas.

PALABRAS CLAVE: Proceso Analítico Jerárquico (AHP), distribuciones recíprocas, estructuras de preferencia.

1. INTRODUCCIÓN

El Proceso Analítico Jerárquico (AHP) es una técnica de decisión multicriterio basada en el principio de agregación jerárquica, que consta de las siguientes etapas (Saaty, 1977, 1980): (1) Modelización, (2) Valoración, (3) Priorización, y (4) Síntesis.

En lo que sigue nos vamos a centrar exclusivamente en la segunda etapa (valoración), en la que el decisor incorpora al modelo, mediante una matriz de comparaciones pareadas $A=(a_{ij})$ $i,j=1,\dots,n$, los juicios o valoraciones que reflejan la importancia relativa de las alternativas. En su formulación inicial los valores a_{ij} pertenecían a la escala $\{1,3,5,7,9\}$. Vargas (1982) considera distribuciones de probabilidad a la hora de estimar los juicios promedio de un grupo de personas, y prueba que, bajo la hipótesis de consistencia débil y distribuciones Gamma para los juicios, el vector de prioridades obtenido por el método del autovector (EM) se distribuye como una Dirichlet. Moreno y Vargas (1993) relajan la hipótesis de precisión o certidumbre en los juicios y proponen la distribución recíproca uniforme en un intervalo $(R[a,b])$.

A continuación vamos a realizar un planteamiento estocástico del problema, considerando que los a_{ij} son observaciones o realizaciones particulares de un suceso A_{ij} cuya distribución de probabilidad debe verificar “la idea de reciprocidad”.

El trabajo ha quedado estructurado como sigue: el siguiente epígrafe (§2) caracteriza las distribuciones recíprocas y recíprocas simétricas, y presenta algunos casos particulares. El epígrafe tercero (§3) analiza las distribuciones recíprocas en AHP, y calcula, cuando los juicios siguen una lognormal, la distribución del vector de prioridades obtenido mediante el método de la media geométrica por filas (RGM). El epígrafe cuarto (§4) compara, en un caso particular y para diferentes distribuciones recíprocas, las probabilidades de las estructuras de preferencia obtenidas mediante los métodos EM y RGM. En el último epígrafe (§5) se destacan las conclusiones más relevantes del trabajo.

2. DISTRIBUCIONES RECÍPROCAS Y RECÍPROCAS SIMÉTRICAS. CASOS PARTICULARES.

Teniendo en cuenta las características de los juicios emitidos en AHP, esto es, $a_{ij} \in \{1, 2, \dots, 9\}$, o en general, en \mathfrak{R}^+ , vamos a definir lo que se entiende por variable aleatoria recíproca y recíproca simétrica, para a continuación recoger una serie de resultados que caracterizan dicho tipo de distribuciones.

Definición 1.- Una variable aleatoria X definida en \mathfrak{R} se dice simétrica si su función de densidad $f(x)$ verifica: $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathfrak{R}$.

Definición 2.- Una variable aleatoria X definida en \mathfrak{R}^+ se dice recíproca (RC) de otra variable aleatoria Y si X y $1/Y$ están idénticamente distribuidas. (Análogamente, si $1/X$ e Y están idénticamente distribuidas).

Definición 3.- Una variable aleatoria X definida en \mathfrak{R}^+ se dice recíproca simétrica (RCS) si es recíproca de sí misma, esto es, si X y $1/X$ están idénticamente distribuidas.

En este caso, tanto los valores de x como los de $1/x$ deben pertenecer al dominio de definición. En el caso continuo el dominio será de la forma $[1/a, a]$, que en lo sucesivo denominaremos dominio recíproco simétrico.

Teorema 1.- Dos variables aleatorias X e Y son recíprocas si y sólo si:

$$F(x_0) = 1 - \lim_{x \rightarrow x_0^-} G(1/x_0) \quad \forall x_0 \in \mathfrak{R}^+ \text{ con } F(0)=G(0)=0.$$

donde $F(x)$ y $G(y)$ son las respectivas funciones de distribución de las variables aleatorias X e Y .

Demostración:

$$F(x_0) = P(X \leq x_0) = P(1/Y \leq x_0) = P(Y \geq 1/x_0) = 1 - P(Y < 1/x_0) = 1 - \lim_{x \rightarrow x_0^-} G(1/x_0) \quad \#$$

NOTA 1: En el caso discreto, X e Y son variables aleatorias recíprocas si y sólo si $P(X=x_0) = P(Y=1/x_0)$, $\forall x_0 \in \mathfrak{R}^+$.

NOTA 2: En el caso continuo, si X e Y son dos variables aleatorias con funciones de densidad f y g respectivamente, estas variables son recíprocas si y sólo si:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{1/b}^{1/a} g(y)dy \quad \forall a, b \in \mathfrak{R}^+$$

o equivalentemente:

$$P(X \in [a, b]) = P(Y \in [1/b, 1/a])$$

Corolario 1.- (Fichtner, 1983) Una variable aleatoria X es recíproca simétrica si y sólo si:

$$F(x_0) = 1 - \lim_{x \rightarrow x_0^-} F(1/x_0) \quad \forall x_0 \in \mathfrak{R}^+ \text{ con } F(0)=0.$$

donde $F(x)$ es la función de distribución de X .

NOTA 3: En el caso discreto, X variable aleatoria recíproca simétrica si y sólo si $P(X=x_0) = P(X=1/x_0)$,

$$\forall x_0 \in \mathfrak{R}^+$$

NOTA 4: En el caso continuo, X variable aleatoria con función de densidad f es recíproca simétrica si y sólo si:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{1/b}^{1/a} f(x)dx \quad \forall a, b \in \mathfrak{R}^+$$

o equivalentemente:

$$P(X \in [a,b]) = P(X \in [1/b, 1/a])$$

Teorema 2.- Dos variables aleatorias continuas X e Y son recíprocas si y sólo si sus respectivas funciones de densidad f y g cumplen:

$$g(1/x) = x^2 f(x) \quad \forall x \in \mathfrak{R}^+$$

Demostración: En la expresión integral dada en la Nota 2 se hace el cambio de variable $y = 1/x$ en el término de la izquierda de la igualdad. #

Corolario 2.- (Fichtner, 1983) Una variable aleatoria continua X es recíproca simétrica si y sólo si su función de densidad f cumple:

$$f(1/x) = x^2 f(x) \quad \forall x \in \mathfrak{R}^+$$

Teorema 3.- (Fichtner, 1983) Una variable aleatoria X es recíproca simétrica si y sólo si $\log X$ es una variable aleatoria simétrica.

Demostración: El caso discreto es trivial. En el caso continuo, la función de densidad de la variable aleatoria $Y = \log X$ (en lo sucesivo \log representa el logaritmo neperiano) viene dada por $g(y) = f(e^y) e^y$, donde $f(x)$ es la función de densidad de X. Se tiene que $g(-y) = f(e^{-y}) e^{-y}$; y $g(y) = g(-y)$ si y sólo si $f(1/x) = x^2 f(x)$. #

Considerando el axioma de reciprocidad, e intentando flexibilizar las imposiciones restrictivas de valores precisos para la estimación de los juicios, en lo que sigue se van a presentar una serie de distribuciones, o familias de distribuciones, que verifican la propiedad de reciprocidad de las variables aleatorias asociadas a los juicios.

Definición 4.- Una variable aleatoria se dice uniforme recíproca en $[a,b]$, $R[a,b]$ (Moreno y Vargas, 1993), si su función de densidad viene dada por:

Si $a \geq 1$:

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad x \in [a, b]$$

Si $b \leq 1$:

$$f(x) = \frac{1}{1/a - 1/b} \cdot \frac{1}{x^2} \quad x \in [a, b]$$

Si $a \leq 1 \leq b$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-2+1/a} \cdot \frac{1}{x^2} & x \in [a,1] \\ \frac{1}{b-2+1/a} & x \in [1,b] \end{cases}$$

Definición 5.- Una variable aleatoria se dice uniforme recíproca simétrica en $[1/b,b]$ si tiene la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2b-2} \cdot \frac{1}{x^2} & x \in [1/b,1] \\ \frac{1}{2b-2} & x \in [1,b] \end{cases}$$

La variable aleatoria uniforme clásica en $[a,b]$ es la que da el mismo peso a todos los valores del intervalo en el que está definida. La variable aleatoria uniforme recíproca definida en Moreno y Vargas (1993) pretende incorporar la idea de reciprocidad en la distribución uniforme. Su expresión depende de si el valor 1 pertenece al intervalo, se encuentra por encima, o por debajo. Así, el intervalo $[a,b]$ tendrá la misma probabilidad que el intervalo $[1/b, 1/a]$.

Definición 6.- Una variable aleatoria se dice triangular recíproca en $[a,b]$, $TR[a,b]$, si su función de densidad viene dada por:

Si $a \geq 1$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{(b-a)^2} \cdot (x-a) & \text{si } a \leq x \leq \frac{a+b}{2} \\ \frac{4}{(b-a)^2} \cdot (b-x) & \text{si } \frac{a+b}{2} \leq x \leq b \end{cases}$$

Si $b \leq 1$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{(1/a-1/b)^2} \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x^2} & \text{si } a \leq x \leq \frac{2}{1/b+1/a} \\ \frac{4}{(1/a-1/b)^2} \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{b}\right) \cdot \frac{1}{x^2} & \text{si } \frac{2}{1/b+1/a} \leq x \leq b \end{cases}$$

Si $a \leq 1 \leq b$:

Si $b-1 \geq 1/a - 1$ ($\Leftrightarrow b \geq 1/a$):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{(b+1/a-2)^2} \cdot (b-x) & \text{si } \frac{b-1/a+2}{2} \leq x \leq b \\ \frac{4}{(b+1/a-2)^2} \cdot (x-2+1/a) & \text{si } 1 \leq x \leq \frac{b-1/a+2}{2} \\ \frac{4}{(b+1/a-2)^2} \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x^2} & \text{si } a \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Si $b-1 \leq 1/a - 1$ ($\Leftrightarrow b \leq 1/a$):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{(b+1/a-2)^2} \cdot (b-x) & \text{si } 1 \leq x \leq b \\ \frac{4}{(b+1/a-2)^2} \cdot \left(\frac{1}{x} - 2 + b\right) \cdot \frac{1}{x^2} & \text{si } \frac{2}{1/a-b+2} \leq x \leq 1 \\ \frac{4}{(b+1/a-2)^2} \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x^2} & \text{si } a \leq x \leq \frac{2}{1/a-b+2} \end{cases}$$

Definición 7.- Una variable aleatoria se dice triangular recíproca simétrica $[1/b, b]$ si tiene la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(b-1)^2} \cdot \left(b - \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x^2} & \text{si } 1/b \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{(b-1)^2} \cdot (b-x) & \text{si } 1 \leq x \leq b \end{cases}$$

Definición 8.- Una variable aleatoria se dice que sigue una distribución lognormal $\text{LogN}(\mu, \sigma)$ si su función de densidad viene dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{2} \frac{(\ln x - \mu)^2}{\sigma^2}} \quad 0 \leq x < \infty$$

Si X es una variable aleatoria lognormal $\text{LogN}(\mu, \sigma)$, $Y = \log X$ sigue una distribución normal $N(\mu, \sigma)$ cuya función de densidad es: $g(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(y-\mu)^2}{\sigma^2}} \quad -\infty < y < \infty$.

Teorema 4.- La distribución lognormal $\text{LogN}(0, \sigma)$ es una distribución recíproca simétrica.

Demostración: Si X tiene una distribución lognormal $\text{LogN}(0, \sigma)$, como la distribución de $Y = \log X$ es normal $N(0, \sigma)$ que es simétrica, aplicando el teorema 3 se tiene que X es recíproca simétrica. #

3. DISTRIBUCIONES RECÍPROCAS EN AHP. VECTOR DE PRIORIDADES.

En lo que sigue, se van a aplicar las distribuciones recíprocas anteriores en la obtención de la distribución de probabilidad de las prioridades asociadas a las diferentes alternativas, cuando en procedimiento seguido en la obtención de las mismas es la media geométrica por filas (RGM) (Crawford y Williams, 1985).

Teorema 5.- Si X e Y son dos variables aleatorias recíprocas $\Rightarrow aX$ e Y/a son también variables aleatorias recíprocas.

Demostración. Por ser X e Y recíprocas se tiene que $g(1/x) = x^2 f(x)$.

La función de densidad de $U = aX$ es $h(u) = (1/a) f(u/a)$, y la de $V = Y/a$ es $k(v) = a g(av)$.

$$k(1/v) = a g(a/v) = a (v/a)^2 f(v/a) = v^2 (1/a) f(v/a) = v^2 h(v) \quad (\text{teorema 2})$$

#

Corolario 3.- Si X es una variable aleatoria recíproca simétrica, entonces aX y X/a son recíprocas, pero no simétricas (salvo para el caso trivial $a=1$).

NOTA 5: La distribución de aX no tiene porqué ser de la misma familia que X , como ocurre con la distribución uniforme recíproca. En cambio si la distribución de partida es lognormal, la transformada, aX , también lo es.

Teorema 6.- (Fichtner, 1983) Si X es una variable aleatoria continua recíproca simétrica $\Rightarrow X^a$ ($a \neq 0$) también es recíproca simétrica. Además, si el dominio de X es $(1/c, c)$, el dominio de X^a es $(1/c^a, c^a)$.

Demostración: Por el Teorema 3, sabemos que X es recíproca simétrica $\Leftrightarrow U = \log X$ es simétrica. Entonces se tiene que $V = \log X^a = a \log X$ es simétrica $\Leftrightarrow Y = X^a$ es recíproca simétrica, basta ver que si $U = \log X$ es simétrica $\Rightarrow V = a \log X$ también lo es.

Por otra parte, si $h(u)$ es la función de densidad de U , aplicando el teorema 2 y el corolario 3, la función de densidad de V se puede expresar en función de h como $k(v) = (1/a)h(v/a)$. Si U es simétrica se tiene que $h(u) = h(-u)$, luego $k(v) = k(-v)$, con lo que queda demostrado que V también es simétrica $\Rightarrow X^a$ es recíproca simétrica. #

NOTA 6: La variable aleatoria X^a no tiene porqué ser de la misma familia que X , basta comprobarlo con la variable aleatoria uniforme recíproca simétrica. Pero si X es lognormal, la transformada, X^a , también lo es.

Teorema 7.- Si X e Y son dos variables aleatorias recíprocas simétricas independientes $\Rightarrow Z=XY$ también es una variable aleatoria recíproca simétrica.

Demostración: Por el teorema 3, como la suma de variables aleatorias simétricas sigue también una distribución simétrica, se tiene que $\log Z = \log(XY) = \log X + \log Y$ es simétrica al serlo $\log X$ y $\log Y$, y por tanto Z es recíproca simétrica. #

Teorema 8.- Toda variable aleatoria X definida en un intervalo $[a, b]$ puede expresarse como el producto de una constante y una distribución definida en un dominio recíproco simétrico Z .

Demostración: Trivial, tomando como constante la media geométrica de los extremos del intervalo:

$X = \sqrt{a \cdot b} Z$. Como X es una variable aleatoria en $[a, b]$, el dominio de $Z = \frac{1}{\sqrt{a \cdot b}} X$ es $\left[\sqrt{a/b}, \sqrt{b/a} \right]$ que es recíproco simétrico. #

El dominio de la variable aleatoria $U = \sqrt{a \cdot b} Y$ es el mismo que el de Z , siendo Y la variable aleatoria recíproca de X .

Por el teorema 4, Z y U son distribuciones recíprocas, con el mismo dominio de $[1/c, c]$, aunque no tienen porque ser variables aleatorias recíprocas simétricas. Como contraejemplo, basta tomar la variable aleatoria uniforme en $[a, b]$ con $a \geq 1$. En este caso la variable aleatoria $Z = \frac{1}{\sqrt{a \cdot b}} X$ sigue una distribución uniforme (pero no recíproca) en $\left[\sqrt{a/b}, \sqrt{b/a} \right]$.

Teorema 9.- Toda variable aleatoria X definida en un intervalo $[a,b]$ puede expresarse en terminos de una variable aleatoria Z definida en un intervalo recíproco simétrico dado de antemano $[1/\epsilon, \epsilon]$.

Demostración: Utilizando la transformación vista en el teorema 8 pasamos a una distribución definida en un intervalo recíproco simétrico. Para llegar a un dominio recíproco simétrico dado $[1/\epsilon, \epsilon]$ utilizaremos una transformación del tipo X^a vistas en el teorema 6. La transformación para llegar a una distribución definida en $[1/\epsilon, \epsilon]$ será:

$$Z = \left(\frac{1}{\sqrt{a \cdot b}} \right)^{\ln \epsilon / \ln c} \cdot X^{\ln \epsilon / \ln c} \quad \text{con } c = \sqrt{b/a} \quad \text{por lo que } X = \sqrt{a \cdot b} \cdot Z^{\ln c / \ln \epsilon} \quad \#$$

Definición 9.- (Crawford y Williams, 1985) Dada una matriz de comparaciones pareadas recíproca $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} > 0$, el vector de prioridades obtenido según el RGM vide dado por:

$$\omega_i = \left(\prod_{j=1, \dots, n} a_{ij} \right)^{1/n}, i = 1, \dots, n$$

Teorema 10.- Si los elementos $a_{ij} \in A$ son variables aleatorias independientes y recíprocas simétricas, entonces, los elementos del vector de prioridades también se distribuyen según una variable recíproca simétrica.

Demostración: Inmediata por los teoremas 6 y 7. #

En general los a_{ij} de la matriz de comparaciones pareadas no tienen porqué seguir una distribución recíproca simétrica. Lo que sí se cumple es que la variable aleatoria a_{ij} y la variable aleatoria a_{ji} son recíprocas.

Teorema 11.- El vector de prioridades ω_i obtenido según el RGM puede expresarse como el producto de una constante y una distribución definida en un dominio recíproco simétrico fijado de antemano.

Demostración: Basta aplicar la transformación vista en teorema 9 para cada a_{ij} , y la definición 9 del vector de prioridades al utilizar el RGM.

Si a_{ij} se distribuye en $[l_{ij}, u_{ij}]$ y su distribución es recíproca de la de a_{ji} , la transformación para cada a_{ij} será:

$$a_{ij} = \sqrt{l_{ij} u_{ij}} \cdot b_{ij} = \sqrt{l_{ij} u_{ij}} \cdot (\epsilon_{ij})^{\ln c_{ij} / \ln \epsilon}, \text{ con } b_{ij} \in \left[\sqrt{\frac{l_{ij}}{u_{ij}}}, \sqrt{\frac{u_{ij}}{l_{ij}}} \right], \epsilon_{ij} \in [1/\epsilon, \epsilon] \text{ y } c_{ij} = \sqrt{\frac{u_{ij}}{l_{ij}}}$$

De esta forma, los elementos del vector de prioridades quedan:

$$\omega_i = \left(\prod_{j=1, \dots, n} a_{ij} \right)^{1/n} = \left(\prod_{j=1, \dots, n} \sqrt{l_{ij} \cdot u_{ij}} \right)^{1/n} \cdot \left(\prod_{j=1, \dots, n} b_{ij} \right)^{1/n} = \left(\prod_{j=1, \dots, n} \sqrt{l_{ij} \cdot u_{ij}} \right)^{1/n} \cdot \left(\prod_{j=1, \dots, n} (\epsilon_{ij})^{\ln c_{ij} / \ln \epsilon} \right)^{1/n}, i = 1, \dots, n$$

La constante es la media geométrica de los extremos de todos los intervalos considerados. #

Teorema 12.- Si los elementos de la matriz de comparaciones pareadas siguen distribuciones lognormales independientes, el vector de prioridades obtenido por el RGM sigue una distribución lognormal.

Demostración: Tenemos que $\omega_i = \left(\prod_{j=1, \dots, n} a_{ij} \right)^{1/n}$, $i = 1, \dots, n$ y hemos supuesto que los a_{ij} se distribuyen según lognormales independientes, que provienen de variables $N(\mu_{ij}, \sigma_{ij})$.

Si definimos $T_i = \ln \omega_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln a_{ij}$, se tiene que: $\sum_{j=1}^n \ln a_{ij} \sim N(\mu, \sigma)$ donde $\mu = \sum_{j=1}^n \mu_{ij}$, $\sigma^2 = \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}^2$; luego $T_i \sim N(\mu/n, \sigma/n)$. Desahaciendo el cambio de variable $\omega_i = e^{T_i} \Rightarrow$ Se tiene que ω_i tiene una distribución lognormal.

Además, la media y varianza de los a_{ij} es: $E(a_{ij}) = e^{\mu_{ij} + \frac{\sigma_{ij}^2}{2}}$ y $\text{Var}(a_{ij}) = e^{2\mu_{ij} + \sigma_{ij}^2} (e^{\sigma_{ij}^2} - 1)$, por lo que la media y varianza de ω_i es:

$$E(\omega_i) = e^{\frac{\mu}{n} + \frac{\sigma^2}{2n^2}} = e^{\frac{1}{n} \sum_j \mu_{ij} + \frac{1}{2n^2} \sum_j \sigma_{ij}^2} \quad \text{y} \quad \text{Var}(\omega_i) = e^{2\frac{\mu}{n} + \frac{\sigma^2}{n^2}} (e^{\frac{\sigma^2}{n^2}} - 1) = e^{2\frac{1}{n} \sum_j \mu_{ij} + \frac{1}{n^2} \sum_j \sigma_{ij}^2} (e^{\frac{1}{n^2} \sum_j \sigma_{ij}^2} - 1). \quad \#$$

4. ESTRUCTURAS DE PREFERENCIA MÁS PROBABLES. CASO PARTICULAR.

Entendiendo por estructura de preferencia cada una de las posibles ordenaciones de las prioridades ω_i de las alternativas, vamos a obtener mediante simulación para el caso particular propuesto en Moreno y Vargas (1993), cuáles son las probabilidades de las estructuras de preferencia cuando utilizamos en RGM y distintas distribuciones recíprocas para obtener los juicios. Estos resultados se comparan con los obtenidos en el trabajo anteriormente citado en el que se empleaban el método del EM y la distribución uniforme recíproca.

Dada la matriz de intervalos de juicio:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & [1/4, 4] & [2, 6] \\ [1/4, 4] & 1 & [1, 2] \\ [1/6, 1/2] & [1/2, 1] & 1 \end{bmatrix}$$

se han realizado 10^4 simulaciones para cada una de las distribuciones consideradas. Estas han sido: (1) la uniforme recíproca, y (2) la triangular recíproca definidas en los intervalos que aparecen en la matriz anterior; (3) la distribución lognormal (con media y varianza las de la triangular) truncada en el intervalo considerado; la recíprocas simétricas consideradas, (4) uniforme recíproca simétrica y (5) triangular recíproca simétrica, son las alcanzadas al aplicar el teorema 8.

Los resultados obtenidos son:

Tabla 1. Resultados de la simulación

		Mínimo	Media	Máximo	D. Típica
(1)Uniforme recíproca	ω_1	0.2349	0.4778	0.7079	0.1291
	ω_2	0.1585	0.3548	0.5799	0.1202
	ω_3	0.1076	0.1675	0.2552	0.0275
(2)Triangular recíproca	ω_1	0.2612	0.4815	0.6914	0.0998
	ω_2	0.1705	0.3519	0.5607	0.0934
	ω_3	0.1156	0.1666	0.2416	0.0190
(3)Lognormal	ω_1	0.2425	0.4465	0.7021	0.0936
	ω_2	0.1678	0.3845	0.5701	0.0892
	ω_3	0.1174	0.1691	0.2430	0.0173
(4)Uniforme recíproca simétrica	ω_1	0.2362	0.4699	0.7080	0.1286
	ω_2	0.1607	0.3522	0.5790	0.1194
	ω_3	0.1082	0.1779	0.2604	0.0307
(5)Triangular recíproca simétrica	ω_1	0.2519	0.4696	0.6945	0.1010
	ω_2	0.1649	0.3509	0.5589	0.0938
	ω_3	0.1157	0.1795	0.2516	0.0227

En cuanto a las estructuras de preferencia que se presentan se tiene:

Tabla 2. Probabilidades de las estructuras de preferencia.

	Uniforme recíproca	Triangular recíproca	Lognormal	Uniforme recíproca simétrica	Triangular recíproca simétrica
$\{\omega_1 \geq \omega_2 \geq \omega_3\}$	0.5955	0.6914	0.5934	0.5828	0.6704
$\{\omega_2 \geq \omega_1 \geq \omega_3\}$	0.3949	0.3084	0.4063	0.3909	0.3281
$\{\omega_1 \geq \omega_3 \geq \omega_2\}$	0.0096	0.0002	0.0003	0.0263	0.0015

Los resultados obtenidos utilizando la distribución uniforme recíproca son similares a los obtenidos en Moreno y Vargas (1993), como debía ocurrir ya que para matrices 3x3 los vectores de prioridades obtenidos utilizando EM y RGM coinciden (Crawford y Williams, 1985). Los recorridos de los ω_i son similares para todas las distribuciones consideradas.

Si comparamos los resultados obtenidos utilizando las distribuciones uniforme y triangular recíprocas ((1) y (2)) y los alcanzados con las recíprocas simétricas de la misma familia ((4) y (5)), se observa que en el segundo caso hay menores diferencias entre los elementos del vector de prioridades, así como en las probabilidades de las estructuras de preferencia.

En general se aprecia que las mayores diferencias se presentan con la distribución triangular recíproca (3). En cuanto a la distribución lognormal (5), las probabilidades de las estructuras de preferencia son similares a las obtenidas con la uniforme recíproca, mientras que los valores de las prioridades presentan menores diferencias que con las otras distribuciones, pero con una menor variabilidad.

Para terminar, señalar que puede darse una interpretación probabilística de las puntuaciones finales que permita determinar si hay diferencia significativa entre dos alternativas. Denotando por $P[\omega_i]$ la suma de las probabilidades de todas las estructuras de preferencia en las que $\omega_i = \max\{\omega_j, j \neq i\}$, y considerando α como la probabilidad de error tipo I (Rosembloom, 1995) puede establecerse:

Definición 10.- Se dice que la alternativa A_i es más preferida que la alternativa A_j con un nivel de significación α , ($0 \leq \alpha \leq 1$) $\Leftrightarrow P(\omega_i \geq \omega_j) \geq 1-\alpha$, donde $P(\omega_i \geq \omega_j)$ es la suma de todas las probabilidades de las estructuras de preferencia en las que $\omega_i \geq \dots \geq \omega_j$.

En el ejemplo anterior, A_1 es preferida a A_2 con un nivel de significación de 0.41 para cualquier tipo de distribución, al tomar el mayor de los α para cada tipo de distribución.

Definición 11.- La alternativa A_i es la más preferida al nivel α si $P[\omega_i] = \max\{P[\omega_j], j=1, \dots, n\} \geq 1-\alpha$ ($0 \leq \alpha \leq 1$).

En el ejemplo anterior, A_1 es la alternativa más preferida con un nivel de significación de 0.41 cualquiera que sea la distribución elegida.

5. CONCLUSIONES

El trabajo presenta una serie de resultados relativos a las distribuciones recíprocas y recíprocas simétricas en AHP. Así mismo, proporciona la distribución de probabilidad correspondiente a las prioridades de las alternativas cuando el método utilizado en su obtención es el RGM y se suponen distribuciones lognormales para los juicios.

Concluye con un estudio de simulación en el que se calculan las diferentes estructuras de preferencias que se presentan en un caso particular, sus probabilidades y una interpretación probabilística de las puntuaciones finales basada en el error tipo I.

BIBLIOGRAFÍA

- CRAWFORD, G. Y WILLIAMS, C. (1985): "A Note on the Analysis of Subjective Judgment Matrices", J. of Mathematical Psychology, 29, pp. 387-405.
- FICHTNER, J. (1983): "Some Thoughts about the mathematics of the Analytic Hierarchy Process", Hochschule der Bundeswher Munchen.
- MORENO-JIMÉNEZ, J.M. Y VARGAS, L.G. (1993): "A Probabilistic Study of Preference Structures in the Analytic Hierarchy Process with Interval Judgments", Mathematical Computer Modelling, vol. 17, 4/5 pp. 73-81.
- ROSENBLOOM E.S. (1995): "A Probabilistic approach to the Analytic Hierarchy Process" (en evaluación).
- SAATY, T.L. (1977): "A scaling method for priorities in hierarchical structures", J. of Mathematical Psychology, 15(3), pp.234-281.
- SAATY, T.L. (1980): The Analytic Hierarchy Process. Mc Graw-Hill, New York.
- VARGAS L.G. (1982): "Reciprocal Matrices with Random Coefficients", Mathematical Modelling, 3, pp. 69-81.