

LA DISTRIBUCIÓN TRAPEZOIDAL COMO MODELO PROBABILISTICO PARA LA METODOLOGÍA PERT

Callejón Céspedes, José
Pérez Rodríguez, Eduardo
Ramos Rodríguez, Antonio

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Universidad de Granada

RESUMEN

En el presente trabajo se propone como modelo probabilístico para los fenómenos a los que se les debe aplicar metodología PERT, la distribución trapezoidal que ha sido empleada anteriormente en relación a una estimación subjetiva por intervalo del valor más probable. El criterio utilizado permite la especificación completa de la distribución, a partir de las tres estimaciones periciales clásicas: valor pesimista, optimista y más probable. El estudio se completa con una regla de actuación clara en las situaciones reales.

PALABRAS CLAVE: Estimación subjetiva, PERT, distribución de probabilidad trapezoidal.

1. INTRODUCCIÓN

Es sobradamente conocido que los modelos probabilísticos usados en la metodología PERT, tanto si esta se utiliza en el estudio de la duración de un proyecto de fabricación o realización de un trabajo en función de la duración de las diferentes tareas o actividades, ROMERO (1991), como en analizar la bondad de un proyecto de inversión mediante sus diversos flujos de caja, actualizados según su valor capital SUÁREZ, (1980), son las distribuciones de probabilidad rectangular o uniforme, triangular y beta. La utilización de la primera distribución sólo requiere un primer nivel de información que sea suficiente para estimar los valores mínimo (a) y máximo (b), mientras que el uso de cualquiera de las dos distribuciones restantes precisa de un segundo nivel de información mayor que el anterior, ya que además de estimar los valores a y b,

anteriores, debe proporcionar una información mucho más comprometida, la correspondiente al valor más probable o modas (m).

Las tres estimaciones subjetivas anteriores permiten ajustar perfectamente la distribución triangular, no ocurriendo lo mismo con la distribución beta, debido a que esta es tetraparamétrica.

Para resolver este problema, en la literatura especializada, se recurre bien a hipótesis simplificadoras que permiten la especificación casi completa de dicha distribución, ROMERO (1991), SUÁREZ (1980), o bien se intenta obtener información adicional, con la que pueda realizarse el ajuste con mayor, aunque no total precisión. En esta línea están los trabajos de CHAE y KIM (1990), MOITRA (1990) y PÉREZ RODRÍGUEZ (1995), que agregan información sobre la verosimilitud relativa de la moda, sobre la simetría o sobre el apuntamiento de la distribución, respectivamente.

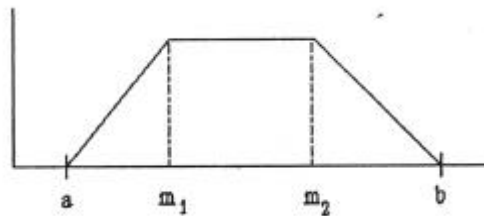
Por otra parte, parece poco conveniente que después de exigir un mayor nivel de información por el compromiso de la estimación del valor modas, dicho valor no aparezca en la expresión de la varianza de la distribución beta usada como modelo tradicional en la metodología PERT. Una manera sencilla de resolver este inconveniente es utilizar las tres estimaciones subjetivas del PERT en la forma que se precisa en HERRERÍAS, (1995), para la distribución beta. Otra solución menos simple es la que se propone en este trabajo, usando una distribución diferente a la beta, tal como la distribución trapezoidal.

2. EL MODELO PROBABILISTICO

El modelo trapezoidal surge como modelo híbrido de las distribuciones rectangular y triangular, HERRERÍAS-CALVETE (1987) y HERRERÍAS-MIGUEL (1989), y ha sido utilizado en relación con la estimación subjetiva por intervalo del valor más probable HERRERÍAS-CALVETE (1987). Su función de densidad responde a la expresión:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \frac{2}{b-a+m_2-m_1} \frac{x-a}{m_1-a} & \text{si } a \leq x \leq m_1 \\ \frac{2}{b-a+m_2-m_1} & \text{si } m_1 \leq x \leq m_2 \\ \frac{2}{b-a+m_2-m_1} \frac{b-x}{b-m_2} & \text{si } m_2 \leq x \leq b \\ 0 & \text{si } x \geq b \end{cases}$$

de cuya gráfica ha tomado el nombre:



siendo (m_1, m_2) el intervalo donde se encuentra la moda m .

Para el modelo general de función de densidad (2.1) se obtiene que la media es:

$$E[TP] = \frac{1}{3} \left(a + m_1 + m_2 + b - \frac{bm_2 - am_1}{b - m_1 + m_2 - a} \right)$$

Y la varianza

$$V[TP] = \frac{1}{18} \left((b - m_1)^2 + (m_2 - a)^2 + (m_1 - a)(b - m_2) - \frac{2(b - a)(m_2 - m_1)(m_2 - a)(b - m_1)}{(b - m_1 + m_2 - a)^2} \right)$$

(Véase HERRERÍAS-MIGUEL, (1989))

Puede observarse que si $m_1, {}^o a$ y $m_2, {}^o b$, dicha distribución coincide con la distribución uniforme o rectangular, mientras que si $m_1, {}^o m_2, {}^o m$ dicha distribución se convierte en la distribución triangular. En cada caso, las expresiones para la media y la varianza, por supuesto, también coinciden.

Cuando la distribución (2.1) es simétrica respecto a la recta $x = c = (a + b) / 2$, ($m_1 - a = b - m_2$, $b - m_1 = m_2 - a$, $a + b - m_1 + m_2$), aparece una simplificación apreciable en la expresión de la función de densidad y, por ende, en las características estocásticas de la distribución. Se tiene:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ k \frac{x - a}{m_1 - a} & \text{si } a \leq x \leq m_1 \\ k & \text{si } m_1 \leq x \leq m_2 \\ k \frac{b - x}{m_1 - a} & \text{si } m_2 \leq x \leq b \\ 0 & \text{si } x \geq b \end{cases}$$

donde: $K = \frac{1}{m_2 - a} = \frac{1}{b - m_1} = \frac{2}{b - m_1 + m_2 - a}$

siendo entonces sus características estocásticas las siguientes:

$$E(x) = \frac{a + b}{2}$$

$$V(x) = \frac{1}{12} [(m_2 - a)^2 + (b - m_1)^2] = \frac{1}{12} [(b - m_1)^2 + (m_1 - a)^2]$$

Un estudio detallado de este caso relevante puede verse en HERRERFAS-CALVETE (1987),

En lo que sigue estudiaremos las distribuciones trapezoidales no simétricas, si bien el punto medio del intervalo de definición va a estar comprendido entre los valores m_1 , y m_2 .

En las siguientes proposiciones se demuestra que, si $m_1 < c = (a + b) / 2 < m_2$, entonces la media de la distribución trapezoidal está en el intervalo (c, m_2) o bien en el intervalo (m_1, c) , según sea la distancia entre c y m_2 mayor o menor, respectivamente, que la distancia entre m_1 y c . Como casos particulares observaremos aquellos en que m_1 , o bien m_2 coincide con el centro c del intervalo.

Proposición 1

Sea X una variable aleatoria, cuya distribución es trapezoidal, definida según (2.1) sobre el intervalo de extremos a y b y centro c , $c = (a + b) / 2$.

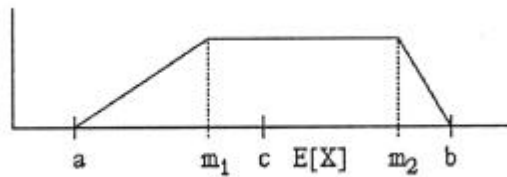
Si se verifica que

$$0 \leq c - m_1 < m_2 - c$$

entonces

$$c < E[X] < m_2$$

La siguiente figura ilustra el enunciado de la proposición: la hipótesis exige que m_1 sea menor que c y este, a su vez, sea menor que m_2 . La distancia entre m_1 y c ha de ser menor que la distancia entre c y m_2 . En este supuesto, la esperanza matemática es un valor comprendido entre c y m_2 .



En efecto:

a) Primero queremos demostrar que $c < E(X)$, es decir, que se verifica:

$$c < \frac{1}{3} \left(a + b + m_1 m_2 - \frac{b m_2 - a m_1}{b - m_1 + m_2 - a} \right)$$

Si en la desigualdad (2.7) sustituimos $a+b$ por $2c$ y operamos convenientemente, obtenemos:

$$c(b - m_1) + c(m_2 - a) < m_1((b - m_1) + m_2(m_2 - a))$$

que se puede escribir como:

$$(c - m_1) (b - m_1) < (m_2 - a) (m_2 - c)$$

De la hipótesis (2.5) se deducen las desigualdades $c - m_1 < m_2 - c$ y $b - m_1 < m_2 - a$, que implican la veracidad de la desigualdad (2.9) y por tanto se verifica (2.7).

Para la regla de actuación que más adelante se propone, resulta importante la siguiente observación: si m , coincide con el centro del intervalo, la desigualdad (2.9) sigue siendo cierta pues, en este caso, el primer miembro vale cero, mientras el segundo sigue siendo positivo.

b) En segundo lugar hay que demostrar que $E(X) < m_2$, es decir, que se verifica:

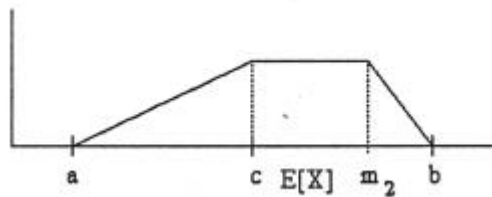
$$\frac{1}{3} \left(a + b + m_1 + m_2 - \frac{bm_2 - am_1}{b - m_1 + m_2 - a} \right) < m_2$$

Sustituyendo, también en este caso, $a + b$ por $2c$, y operando, la desigualdad (2.8) es cierta si y sólo si se verifica:

$$2(b - m_1 + m_2 - a)(c - m_2) < (m_2 - m_1)(b - m_1) \quad (2.11)$$

Pero (2.11) es cierta puesto que, por hipótesis, $c - m_2$ es negativo, en tanto que los demás factores que intervienen en la desigualdad son positivos.

En el caso de que $m_1 = c$, la media de la distribución está comprendida entre centro c y m_2 ,



Proposición 2

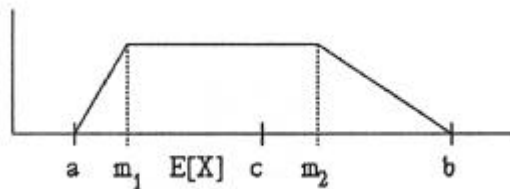
Sea X una variable aleatoria, cuya distribución es trapezoidal definida según (2. 1) sobre el intervalo de extremos a y b y centro c , $c = (a + b) / 2$. Si se verifica que

$$0 \leq m_2 - c < c - m_1$$

entonces

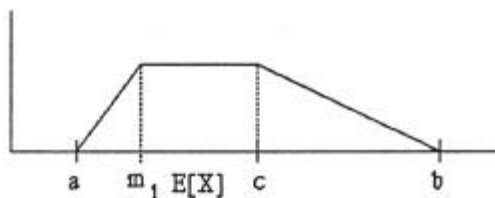
$$m_1 < E[x] < c$$

Del mismo modo que en la proposición anterior, la hipótesis exige que m_1 sea menor que c y este, a su vez, sea menor que m_2 . La diferencia está en que, en este caso, la distancia entre m_1 y c ha de ser mayor que la distancia entre c y m_2 . Entonces la esperanza matemática es un valor comprendido entre m_1 y c .



La demostración es análoga a la realizada en la proposición anterior.

Obsérvese que, de forma análoga a la primera proposición, si m_2 coincide con el centro del intervalo, el valor esperado de la distribución está comprendido entre m_1 y dicho centro.



3. REGLAS DE ACTUACIÓN

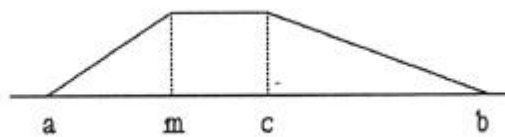
Es conocido, ROMERO (1991), que la distribución beta es asimétrica a la derecha cuando $m < \mu < c$, mientras que si la asimetría es a la izquierda entonces $c < \mu < m$, y en el caso de que $c = m$ la distribución es simétrica, coincidiendo μ con c y con m . En los casos de asimetría, el valor esperado pertenece al intervalo determinado por la moda y el centro o bien entre el centro y la moda, según sea esta, respectivamente, menor o mayor que aquel.

Es fácil comprobar que para la distribución triangular se verifican idénticas circunstancias:

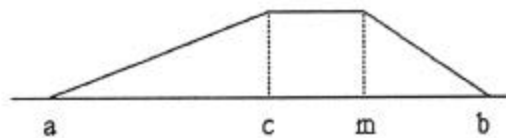


Estos hechos, así como las proposiciones antes estudiadas, nos llevan a enunciar las siguientes reglas de actuación para el caso en que el experto proporcione un valor más probable distinto del centro del intervalo.

Proponemos como modelo probabilístico la distribución trapezoidal, definida por los extremos del intervalo, (valores pesimista, a , y optimista, b), por el centro del intervalo, c , y el valor más probable, m . Es decir, a partir de la definición dada en (2.1), tomaremos $m_1 = m$; $m_2 = c$ en la asimetría a la derecha,



Y $m_1 = c$; $m_2 = m$ en la asimetría a la izquierda

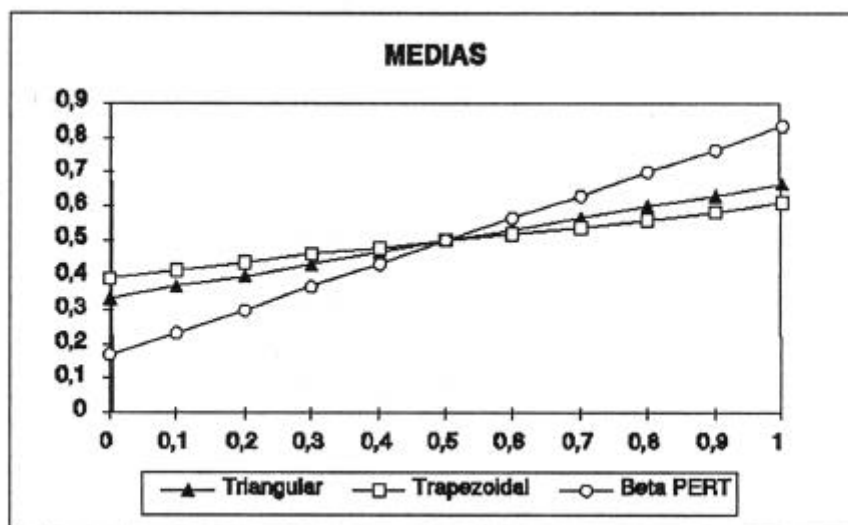


4. COMPARACIÓN CON OTROS MODELOS.

Este trabajo concluye con dos gráficos donde se comparan la media y la varianza de los modelos correspondientes a la distribución triangular, a la beta utilizada en el método PERT y a este modelo trapezoidal, propuesto.

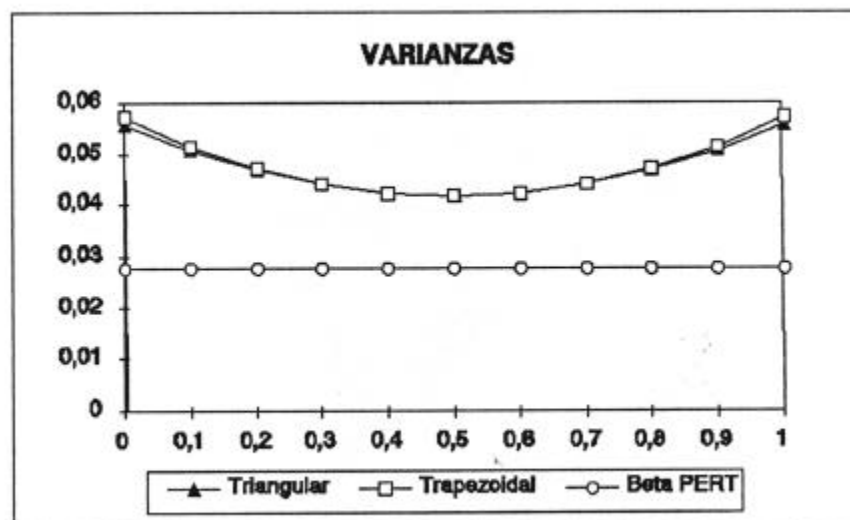
La comparación entre estos tres modelos se justifica porque, en cada uno de ellos, sólo se requieren las tres estimaciones periciales del experto a , m y b , quedando entonces totalmente especificada la distribución.

En las siguientes gráficas, fijados a y b , que en este caso han sido cero y uno, se hace variar m entre dichos valores. En la primera de ellas se calcula la esperanza matemática, para cada uno de los tres modelos, en función de la moda; en la segunda se repite el procedimiento para la varianza.



Se observa, como era de esperar, que las medias de los tres modelos coinciden cuando la moda es igual al centro del intervalo.

En todo caso, la media proporcionada por esta distribución trapezoidal está más próxima al centro del intervalo que cualquiera de las otras dos. Este modelo proporciona una esperanza más "centrada".



Como puede apreciarse, la varianza de la distribución trapezoidal propuesta coincide con la varianza del modelo triangular, si bien la primera de ellas es ligeramente superior cuando la moda está próxima a los extremos del intervalo.

Como aplicaciones futuras, pensamos que esta distribución trapezoidal puede ser utilizada para el estudio de los modelos aleatorios para el tipo de interés real, de forma análoga a la desarrollada en HERRERÍAS-PÉREZ (1992). Aportaría un modelo obtenido unívocamente para cada tres observaciones facilitadas por el experto: valor pesimista, valor optimista y valor más probable, tal como ocurre en las distribuciones triangular y beta del modelo PERT, pero esta distribución trapezoidal supone una modelización en la que el valor esperado está más próximo al centro del intervalo.

BIBLIOGRAFIA

CHAE, Ic-C. y KIM, S. (1990). Estimating the Mean and Variance of PERT Activity Time Using Likelihood-Ratio of the Mode and the Midpoint. I.I.E. Transaction, vol 22, nº 3, pp 198-203

GOLENKO-GINZBURG, D. (1988). On the Distribution of Activity Time in PERT. J. Opi. Res. Soc., vol 39, nº8, pp 767-771.

HERRERÍAS, R. (1989). Utilización de Modelos Probabilísticos Alternativos para el método PERT. Aplicación al Análisis de Inversiones. Estudios de Economía Aplicada. Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Valladolid, pp. 89-112.

HERRERIAS, R. (1992). Utilización de los Modelos Probabilísticos para el PERT, que permiten una ponderación variable del valor más probable, en Análisis de Inversiones. Ponencias de la 111 Reunión Anual de ASEPELT-FSPAÑA. Biblioteca de Socioeconomía Sevillana. Diputación de SevWa, pp 557-562.

HERRERIAS, R. (1995). Un nuevo uso de las tres estimaciones subjetivas del PERT. IX Reunión ASEPELT-ESPAÑA. Vol. IV, pp. 411-416.

HERRERIAS, R. y CALVETE, H. (1987). Una ley de probabilidad para el estudio de los flujos de caja de una inversión. Libro Homenaje al Profesor Gonzalo Arnaiz Vellando. INE, Madrid, pp. 279 - 296.

HERRERIAS, R. y MIGUEL, S. (1989). Expresiones alternativas para la varianza de la distribución trapezoidal. Estudios de Economía Aplicada. Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Valladolid, pp. 55-59.

HERRERÍAS, R. y PÉREZ, E. (1992). Modelos aleatorios para el tipo de interés real. Estudios de Economía Aplicada. VI Reunión ASEPELT-ESPAÑA. Universidad de Granada. Vol I, pp. 141-149.

MOITRA, S.D. (1990). Skewness and the Beta Distribution. **J. Opl. Res. Soc.**, vol 41, nº 10, pp. 953-961.

PÉREZ RODRIGUEZ, E. (1995). Ajuste de un modelo beta con información adicional sobre su apuntamiento. IX Reunión ASEPELT-F-SPA-ÑA. Vol. IV, pp. 445-451.

ROMERO LÓPEZ, C. (1991). Técnicas de programación y control de proyectos. Ed. Pirámide. (41 edición).

SUÁREZ SUÁREZ, A. (1980). Decisiones óptimas de inversión y financiación en la empresa. Ed. Pirámide.