

Estudio de la coherencia mediante matrices booleanas

José Luis GARCÍA LAPRESTA

Carlos RODRIGUEZ PALMERO

Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

Dep. de Economía Aplicada (Matemáticas)

1. Introducción

En este trabajo se introducen dos clases de relaciones de preferencia: las k -acíclicas y las k -transitivas, con objeto de tratar analíticamente una gran variedad de comportamientos humanos que se enmarcan en lo que los psicólogos de la decisión denominan racionalidad limitada. La primera clase abarca desde la asimetría hasta la aciclicidad y la segunda desde la aciclicidad hasta la cuasitransitividad. Con estas relaciones de preferencia se dispone de una gama ordenada de supuestos de coherencia, correspondientes a niveles crecientes de racionalidad. El trabajo se completa con un programa informático con el que, a partir de la matriz booleana asociada a la relación de preferencia de un agente, sobre un conjunto finito de opciones, se determina el grado de coherencia alcanzado por éste.

Notación

Una relación binaria sobre un conjunto no vacío X es un subconjunto del producto cartesiano $X \times X$. Si $R \subseteq X \times X$, se empleará tanto la notación conjuntista $(x, y) \in R$ como la predicativa $x R y$.

Dadas dos relaciones binarias R, S sobre X , se empleará la siguiente notación:

1. $\Delta = \{(x, y) \in X \times X \mid x = y\}$ es la relación diagonal de X [$x \Delta y \Leftrightarrow x = y$].
2. $R^{-1} = \{(x, y) \in X \times X \mid (y, x) \in R\}$ es la relación inversa de R [$x R^{-1} y \Leftrightarrow y R x$].

3. $R^c = \{(x, y) \in X \times X \mid (x, y) \notin R\}$ es la relación complemento de R [$x R^c y \Leftrightarrow$ no $x R y$].
4. $R \cap S = \{(x, y) \in X \times X \mid (x, y) \in R \text{ y } (x, y) \in S\}$ es la relación intersección de R con S [$x(R \cap S) y \Leftrightarrow (x R y \text{ y } x S y)$].
5. $R \dot{\cup} S = \{(x, y) \in X \times X \mid (x, y) \in R \text{ o } (x, y) \in S\}$ es la relación unión de R con S [$x(R \dot{\cup} S) y \Leftrightarrow (x R y \text{ o } x S y)$].
6. $R \circ S = \{(x, y) \in X \times X \mid (x, z) \in R \text{ y } (z, y) \in S \text{ para algún } z \in X\}$ es la relación composición de R con S [$x(R \circ S) y \Leftrightarrow \exists z \in X (x R z \text{ y } z S y)$].
7. R^n es la relación potencia n -ésima de R y se define por: $R^0 = I$, $R^{k+1} = R^k \circ R$.

Definición

Una relación binaria R sobre un conjunto X es:

1. reflexiva si y sólo si $I \subseteq R$ [$\forall x \in X \ x R x$].
2. irreflexiva si y sólo si R^c es reflexiva [$\forall x \in X$ no $x R x$].
3. simétrica si y sólo si $R = R^{-1}$ [$\forall x, y \in X \ x R y \Rightarrow y R x$].
4. asimétrica si y sólo si $R \cap R^{-1} = \emptyset$ [$\forall x, y \in X \ x R y \Rightarrow$ no $y R x$].
5. acíclica si y sólo si $\forall n \in \mathbb{N} \quad R^n \cap I = \emptyset$ [$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x_1, \dots, x_n \in X$
($x_1 R x_2, x_2 R x_3, \dots, x_{n-1} R x_n$) \Rightarrow no $x_n R x_1$].
6. transitiva si y sólo si $R^2 \subseteq R$ [$\forall x, y, z \in X \ (x R y \text{ y } y R z) \Rightarrow x R z$].
7. negativamente transitiva si y sólo si R^c es transitiva [$\forall x, y, z \in X$ (no $x R y$ y no $y R z$) \Rightarrow no $x R z$].
8. completa si y sólo si $R \cup R^{-1} = X \times X$ [$\forall x, y \in X \ (x R y \text{ o } y R x)$].

Relaciones de preferencia

Se define como noción primitiva la de preferencia fuerte o estricta, mediante una relación binaria asimétrica P sobre el conjunto de opciones $X \neq \emptyset$, llamada relación de preferencia, de forma que $x P y$ se interpreta como " x es preferida a y " o " x es mejor que y ". La relación de indiferencia asociada, I , se define como ausencia de preferencia estricta: $I = P^c \cap (P^{-1})^c = (P \dot{\cup} P^{-1})^c$; en otras palabras, " x es indiferente a y " cuando " x es preferida a y ni y es preferida a x ". De esta construcción se sigue que I es reflexiva y

simétrica y que, para cualquier par de opciones $x, y \in X$, se da una y sólo una de las tres situaciones: $x P y$, $y P x$, $x I y$. Por tanto, la relación de preferencia no *estricta*, $P \hat{E} I$, es completa y, en consecuencia, reflexiva. A partir de ahora, siempre que no se especifique lo contrario, se entenderá que las preferencias son estrictas.

En el análisis de la coherencia que se lleva a cabo en este trabajo se consideran, además de las clases de relaciones de preferencia k -acíclicas y k -transitivas, introducidas aquí, otras que son clásicas en la literatura y que vienen definidas de la siguiente forma:

1. *Acíclicas*: P es acíclica.
2. *Cuasitransitivas*: P es transitiva.
3. órdenes de intervalo: $P \text{ o } I \text{ o } P \subseteq P [\forall c_1, c_2, c_3, c_4 \hat{I} X (c_1 P c_2, c_2 I c_3 \text{ y } c_3 P c_4) \Rightarrow c_1 P c_4]$.
4. Semiórdenes: $P \text{ o } I \text{ o } P \subseteq P^2 \cap I^2 = \emptyset$.
5. Preórdenes *completos*: P es negativamente transitiva, lo cual equivale a que la relación de preferencia no estricta, $P \cup I$, sea transitiva y, a su vez, a que sean transitivas P y I .

Cada una de estas clases de relaciones de preferencia contiene a la siguiente, por lo que, salvo en las acíclicas, P es transitiva; en cambio, a excepción de los preórdenes completos, I no es necesariamente transitiva.

Ciclos en las preferencias

Una relación de preferencia P sobre X tiene *ciclos* de orden $m \in \mathbb{N}$ si y sólo si existen $x_1, \dots, x_m, \hat{I} X$ tales que $c_1 P c_2, c_2 P c_3, \dots, c_{m-1} P c_m$ y $c_m P c_1$. Por ser P asimétrica (y por tanto irreflexiva), no tiene ciclos de orden 1 ni de orden 2. Así, P no tiene ciclos de orden $m \geq 3 \Leftrightarrow P^{m-1} \cap \Delta = \emptyset \Leftrightarrow P^{m-1} \cap P^I = \emptyset \Leftrightarrow P^{m-1} \subseteq P \hat{E} I$. Obviamente, P es acíclica cuando no tiene ciclos. Este tema se trata con detalle en nuestro trabajo [5].

2 k -acíclicidad y k -transitividad

A continuación se presentan las clases de relaciones de preferencia k -acíclicas, aquéllas que no tienen ciclos de orden menor o igual que $k + 1$, y las k -transitivas, aquéllas cuyas

potencias de grado mayor o igual que k están contenidas en sí mismas. Mientras que las primeras pueden tener ciclos, las segundas son siempre acíclicas, pero no necesariamente transitivas¹.

Las propiedades matemáticas impuestas a estas relaciones de preferencia no son gratuitas: obedecen al deseo de dar tratamiento analítico a una gran variedad de casos realistas que forman parte de lo que suele denominarse racionalidad limitada². Con este apelativo pueden calificarse comportamientos humanos, tales como los olvidos de declaraciones de preferencia ya hechas, la falta de interés e información por las opciones a contrastar y los descuidos por falta de atención. Las manifestaciones de racionalidad limitada tienden a acentuarse cuando aumenta el número de opciones a comparar. Dicho aumento suele originar un mayor número de preferencias consecutivas encadenadas, lo que puede facilitar la aparición de ciclos en las preferencias, dando lugar a relaciones de preferencia no acíclicas. Con el fin de reflejar los comportamientos relatados, hemos introducido las relaciones de preferencia k -acíclicas. Con ellas se modelizarán y ordenarán, mediante los valores de k , los diversos grados de coherencia asociados.

En ocasiones los agentes pueden cometer intransitividades en sus preferencias sin llegar a tener ciclos en ellas. Sería el caso en el que tras manifestar preferencia entre los diferentes eslabones de una cadena de opciones, al final se mostrara indiferencia entre la primera y la última opción. Por otro lado, parece natural que se acumule la intensidad de preferencia entre opciones preferidas unas a otras, de manera que, a medida que aumente el número de manifestaciones concatenadas de preferencia, disminuyan las declaraciones de indiferencia entre los extremos. Para tener en cuenta ambos fenómenos hemos introducido las relaciones de preferencia k -transitivas, las cuales van a permitir modelizar y ordenar, según sea k , los diferentes niveles de coherencia correspondientes a los citados comportamientos.

¹En nuestro trabajo [6] se lleva a cabo un análisis más completo sobre las relaciones de preferencia k -acíclicas y k -transitivas.

²La noción de racionalidad limitada, establecida por Simon para reflejar los comportamientos humanos en la toma de decisiones, ha sido ampliamente estudiada por los psicólogos Kahnemann y Tversky. A este respecto puede consultarse el trabajo de Uriarte [10].

A continuación, después de definir el concepto de k -aciclicidad, se muestran las relaciones existentes en la clase de preferencias k -acíclicas y se pone de manifiesto que la noción de k -aciclicidad es, en general, distinta para cada valor de k . Abarca desde la asimetría hasta la aciclicidad, modelizando así una gama ordenada de supuestos de coherencia, correspondientes a niveles crecientes de racionalidad limitada. Como en el caso anterior, una vez definida la noción de k -transitividad, se establecen las relaciones que existen en la clase de preferencias k -transitivas, para distintos valores del parámetro k , de manera que se garantiza la existencia de una escala ordenada de modelos, entre la cuasitransitividad y la aciclicidad, relativos a niveles decrecientes de coherencia.

Definición

Sean P una relación de preferencia sobre X y $k \in \mathbb{N}$. Se dice que P es k -acíclica si y sólo si no tiene ciclos de orden menor o igual que $k + 1$, es decir cuando $P^m \subseteq P \circ E^I$ (equivalentemente, $P^{m+1} \not\subseteq P \circ \Delta = \emptyset$) para cualquier $m \leq k$.

Proposición 1

Para cualquier $k \in \mathbb{N}$ se verifica:

1. Toda relación de preferencia es 1-acíclica.
2. Toda relación de preferencia acíclica es k -acíclica.
3. Toda relación de preferencia $(k + 1)$ -acíclica es k -acíclica.
4. Si X tiene al menos $k + 2$ elementos, entonces existen relaciones de preferencia sobre X que son k -acíclicas pero no $(k + 1)$ -acíclicas.

DEMOSTRACIÓN:

Los tres primeros apartados son obviamente ciertos. Respecto al cuarto, sean

$X := \{c_1, \dots, c_{k+2}, \dots\}$ y $P = \{(c_i, c_{i+1}) \mid i \in \mathbb{N} \setminus \{1, \dots, k+1\}\} \cup \{(c_{k+2}, c_1)\}$. Como $P^m \cap \Delta = \emptyset$ para cualquier $m \leq k + 1$ y $P^{k+2} \cap \Delta \neq \emptyset$, por [5, 2.1.2] se tiene que P es k -acíclica, pero no $(k + 1)$ -acíclica.

Definición

Sean P una relación de preferencia sobre X y $k \in \mathbb{N}$. Se dice que P es k -transitiva si y sólo si $P^m \subseteq P$ para todo $m \geq k$, es decir, cuando para cualquier $m \geq k$ y cualesquiera $c_1, \dots, c_m, c_{m+1} \in X$ se verifica: $(c_1 P c_2, c_2 P c_3, \dots, c_m P c_{m+1}) \Rightarrow c_1 P c_{m+1}$.

Tal como puede observarse, las nociones de I-transitividad, 2-transitividad y cuasitransitividad resultan equivalentes.

Proposición 2

1. Para cualquier $k \in \mathbb{IN}$ toda relación de preferencia k-transitiva es acíclica.
2. Existen relaciones de preferencia acíclicas que no son k-transitivas para ningún $k \in \mathbb{IN}$.
3. Para cualquier $k \in \mathbb{IN}$ toda relación de preferencia k-transitiva es $(k + 1)$ -transitiva.
4. Si X tiene al menos $k + 1$ elementos, con $k \geq 2$, entonces existen relaciones de preferencia sobre X que son $(k + 1)$ -transitivas pero no k-transitivas.

DEMOSTRACIÓN:

1. Por la equivalencia entre 1 y 3 de [5, 3.1.2].
2. Para $X = \mathbb{IN}$, si se define $x P y \Leftrightarrow y = x + 1$, se tiene: $x P^m y \Leftrightarrow y = x + m$; resulta inmediato comprobar que P es acíclica pero no es k-transitiva para ningún $k \in \mathbb{IN}$.
3. Obvia.
4. Para $X = \{c_1, \dots, c_{k+1}, \dots\}$ y $P = \{(c_i, c_{i+1}) \mid i \in \hat{\mathbb{I}} \{1, \dots, k\}\}$ se verifica $P^m = \emptyset$ para cualquier $m \geq k + 1$; luego P es $(k + 1)$ -transitiva. Sin embargo, $c_1 P^k c_{k+1}$ y $c_i, I c_{k+1}$; por tanto P no es k-transitiva.

A continuación se prueba que, cuando el conjunto de opciones es finito, la infinita cadena virtual de supuestos de coherencia, basados en la k-aciclicidad y la k-transitividad, se colapsa en la aciclicidad, estableciéndose así una ordenación finita de niveles de comportamiento racional, cuyo límite es la cuasitransitividad.

Proposición 3

Si X tiene n elementos, P es una relación de preferencia sobre X y $k \geq n - 1$, entonces son equivalentes:

1. P es k -acíclica.
2. P es acíclica.
3. P^m es $(k + 1)$ -transitiva.
4. $P^n = \emptyset$.
5. $P^m = \mathcal{A}$, para algún $m \in \mathbb{N}$.

DEMOSTRACIÓN

$2 \Rightarrow 4$: Por reducción al absurdo, supongamos P acíclica y $P^n \neq \emptyset$; entonces existen $n + 1$ elementos c_1, \dots, c_{n+1} tales que $c_1 P c_2, c_2 P c_3, \dots, c_n P c_{n+1}$, Como X sólo tiene n elementos, al menos uno está repetido, por lo que P tiene ciclos, en contra de lo supuesto.

$4 \Rightarrow 5$: Obvia.

$5 \Rightarrow 2$: Por [5, 3.1.3].

$1 \Rightarrow 2$: Sea P k -acíclica; como $k \geq n - 1$, P no tiene ciclos de orden menor o igual que n . Supongamos, por reducción al absurdo, que P no es acíclica. Tal como ha sido probado, 2 y 4 son equivalentes, luego $P^n \neq \emptyset$; entonces existen $n + 1$ elementos c_1, \dots, c_{n+1} tales que $c_1 P c_2, c_2 P c_3, \dots, c_n P c_{n+1}$, Como X sólo tiene n elementos, al menos uno de ellos está repetido. De aquí que $P^m \cap \Delta \neq \emptyset$ para algún $m \leq n$. Por tanto, existen ciclos de orden menor o igual que n , lo cual es absurdo.

$2 \Rightarrow 1$: Por 2 de Prop. 1.

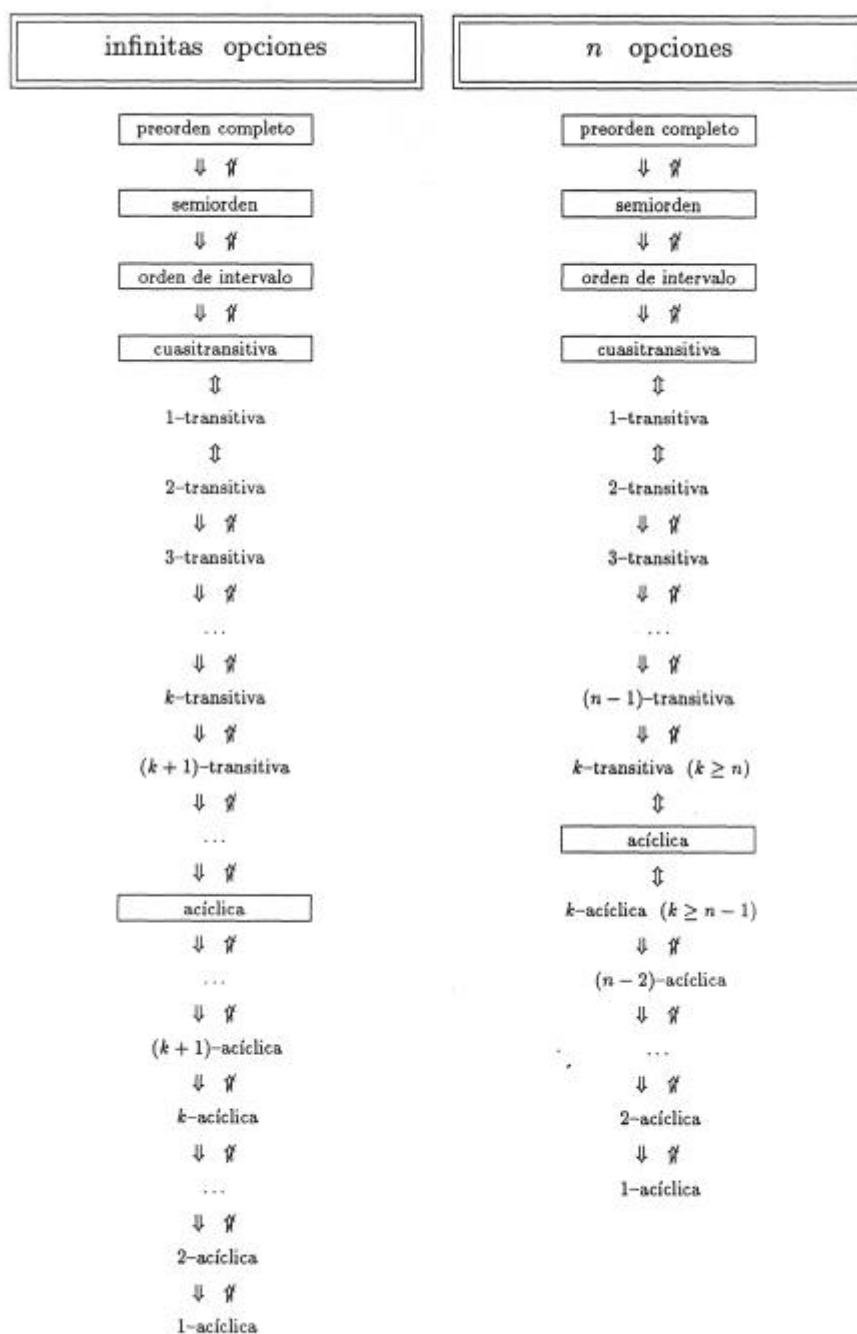
$4 \Rightarrow 3$: Si $P^n = \emptyset$, entonces cualquier potencia de P de grado mayor o igual que n también es vacía, luego está contenida en P .

$3 \Rightarrow 2$: Por 1 de Prop. 2.

Síntesis

A continuación se muestran, a modo de resumen, dos cadenas de aplicaciones y equivalencias, una para el caso general y otra para el caso finito, relativas a las propiedades de las relaciones de preferencia. Ambas comienzan en la 1-aciclicidad (toda relación de preferencia goza de esta propiedad), siguen por la k -aciclicidad, para valores crecientes del parámetro k , pasan por la aciclicidad, la cual establece la frontera entre las propiedades de k -aciclicidad y de k -transitividad, siguen por la k -transitividad, para valores decrecientes del parámetro k , hasta llegar a la cuasitransitividad, pasan por los órdenes de intervalo y por los semiórdenes y acaban en los preórdenes completos, los

cuales constituyen el modelo convencional, aunque en muchos casos no el más realista, de coherencia.



3 Determinación de la coherencia con matrices booleanas

Para determinar en la práctica qué propiedades, de las aparecidas en el cuadro anterior, verifica una relación de preferencia sobre un conjunto finito de opciones, tendremos en cuenta el isomorfismo existente entre relaciones binarias y matrices booleanas. Así, el análisis de la coherencia de los agentes que muestran sus preferencias sobre pares de opciones se llevará a cabo de forma computacional, mediante las matrices booleanas asociadas.

El álgebra de matrices booleanas

A partir del álgebra de Boole $(\{0, 1\}, +, \cdot, ^c)$, cuyas operaciones vienen dadas en las siguientes tablas:

+	0	1
0	0	1
1	1	1

.	0	1
0	0	0
1	0	1

	^c
1	0
0	1

Se define el álgebra de matrices booleanas $(M_{n \times n}(\{0, 1\}), +, \cdot, ^t, ^c, 0_n, I_n)$, que es de tipo $(2, 2, 2, 1, 1, 0, 0)$, donde $M_{n \times n}(\{0, 1\})$ es el conjunto de matrices cuadradas de orden n sobre $\{0, 1\}$, 0_n es la matriz nula, I_n es la matriz identidad y las operaciones entre matrices booleanas se definen como siguen³:

suma: $(M + N)(i, j) = M(i, j) + N(i, j),$

producto lógico: $(M \square N)(i, j) = M(i, j) \cdot N(i, j),$

producto: $(M \cdot N)(i, j) = \sum_{k=1}^n M(i, k) \cdot N(k, j),$

trasposición: $M^t(i, j) = M(j, i),$

complemento: $M^c(i, j) = (M(i, j))^c$

Proposición 4

Sea $R(X)$ el conjunto de relaciones binarias sobre $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. La aplicación $\varnothing : R(X) \rightarrow M_{n \times n}(\{0, 1\})$, definida por $\varnothing(R) = M_R$, con $M_R(i, j) = 1$, si $x_i R x_j$ y $M_R(i, j) = 0$, en

caso contrario, es un isomorfismo entre el álgebra $\langle R(X), \cup, \cap, o, ^{-1}, ^c, \emptyset, \Delta \rangle$ y el álgebra $\langle M_{n \times n}(\{0,1\}), +, \Theta, \cdot, ^t, ^c, O_n, I_n \rangle$.

En otras palabras, \emptyset es biyectiva y, para cualquier par de relaciones binarias R y S sobre X , se verifican las siguientes propiedades:

$$MR \cup S = M_R + M_S, \quad M_{R \cap S} = M_R \cdot M_S, \quad M_{R \setminus S} = M_R - M_S,$$

$$M_{R^{-1}} = M_R^t, \quad M_{RC} = M_R^c, \quad M_{\emptyset} = O_n, \quad M_D = I_n.$$

DEMOSTRACIÓN: Si R y S son dos relaciones binarias sobre X tales que $M_R = M_S$, entonces $x_i R x_j \iff M_R(i, j) = 1 \iff M_S(i, j) = 1 \iff x_i S x_j$, es decir $R = S$; por otra parte, dada una matriz booleana $M \in M_{n \times n}(\{0, 1\})$, se tiene que $M = M_R$, con R la relación binaria sobre X definida por $x_i R x_j \iff M(i, j) = 1$. La justificación de que \emptyset es un morfismo de álgebras de tipo $(2,2,2, 1, 1, 0, 0)$ es rutinaria.

La matriz $M \in M_{n \times n}(\{0, 1\})$ es una aplicación $M: \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\} \rightarrow \{0, 1\}$, de forma que $M(i, j)$ es el elemento de M situado en la fila i columna j .

Corolario

Si R y S son dos relaciones binarias sobre $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, entonces:

$$R \subseteq S \iff M_R + M_S = M_S \iff M_R \cdot M_S = M_R$$

DEMOSTRACION: Se deduce de la Prop. 4 y por ser equivalentes $R \subseteq S$, $R \cup S = S$ y $R \cap S = R$.

Supuesto un conjunto finito de opciones sobre el que un agente muestra sus preferencias, una vez conocida su relación de preferencia, quedan determinadas las matrices asociadas a sus relaciones de preferencia, P , y de indiferencia, $I = (P \hat{E} P^{-1})^c$: M_P y $M_I = (M_P +$

$M_p)^c$. A partir de ella,s, conocer el nivel de coherencia alcanzado pasa a ser un problema puramente computacional, tal como se pone de manifiesto en la siguiente proposición, en la que se caracterizan mediante matrices booleanas las clases de relaciones de preferencia aparecidas en el cuadro resumen. Esto se evidencia, aun más, con el programa informática con el que finaliza el trabajo.

Proposición 5

Si P una relacion de preferencia sobre $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ entonces:

1. P es k -acíclica $\Leftrightarrow M_p^{m+1} \ominus I_n = O_n \ \forall m \in \{2, \dots, k\}$.
2. P es acíclica $\Leftrightarrow M_p^n = O_n$.
3. P es k -transitiva $\Leftrightarrow M_p^m + M_p = M_p \ \forall m \in \{k, \dots, n-1\}$.
4. P es cuasitransitiva $\Leftrightarrow M_p^2 + M_p = M_p$.
5. P es orden de intervalo $\Leftrightarrow M_p - M_I - M_p + M_p = M_p$.
6. P es semiorden $\Leftrightarrow M_p - M_I - M_p + M_p = M_p$ y $M_p^2 \ominus M_I^2 = O_n$.
7. P es preorden completo $\Leftrightarrow M_p^2 + M_p = M_p$ y $M_I^2 + M_I = M_I$.

DEMOSTRACIÓN: Es consecuencia inmediata de la Prop. 4 y su corolario, al considerar las caracterizaciones de las diferentes clases de relaciones de preferencia que se detallan a continuación:

1. P es k -acíclica $\Leftrightarrow P^{m+1} \cap \Delta = \emptyset \ \forall m \in \{1, \dots, k\}$. No es necesario comprobar el caso $m = 1$, por ser P asimétrica.
2. P es acíclica $\Leftrightarrow P^m = \emptyset$, por la equivalencia entre 2 y 4 de la Prop. 3.
3. P es k -transitiva $\Leftrightarrow P^m \subseteq P \ \forall m \geq k$. Por la Prop. 3 no es necesario verificar los casos en los que $m \geq n$, ya que en ellos la k -transitividad coincide con la aciclicidad.
4. P es cuasitransitiva $\Leftrightarrow P^2 \subseteq P$, por definición.
5. P es un orden de intervalo $\Leftrightarrow P \text{ o } I \text{ o } P \subseteq P$, por definición.

6. P es un semiorden $\Leftrightarrow P \circ I \circ P$ symbol 205 $\backslash f$ "Symbol" \s 12 $\subseteq P$ y $P^2 \cap I^2 = I$ symbol 198 $\backslash f$ "Symbol" \s 12 \mathcal{A} , por definición.
7. P es un preorden completo $\Leftrightarrow P^2$ symbol 205 $\backslash f$ "Symbol" \s 12 $\subseteq P$ y I^2 symbol 205 $\backslash f$ "Symbol" \s 12 $\subseteq I$.

Programa informático

El programa informática que se presenta a continuación ha sido elaborado en MATLAB y está basado en la Prop. 5. A partir de la matriz booleana asociada a una relación de preferencia sobre un conjunto finito de opciones, el programa detecta el cumplimiento o no de cada una de las propiedades aparecidas en el cuadro resumen. Si la relación es k -acíclica, $kaci$ señala el valor máximo de k para el que lo es y, si es k -transitiva, $ktran$ indica el valor mínimo para el que lo es.

```
function y=coher(a)
x=size(a,l);
i=ones(x)-min(a'+a,ones(x));
i2=min(i^2,ones(x));
P2=min(a^2,ones(x));
pip=min (a* i*a, ones (x))
p2i2=min(a^2).*(i-2),ones(x));
kaci=x-1;
ktran=2;
%-----
% Verificación de: aciclicidad(aci), cuasitransitividad (cuasitran),
% orden de intervalos (oi), semiorden (semior) y preorden completo (preorcom).
% -----
aci=all(all(a^x==0))
cuasitran=all(all(p2<=a));
oi=all(all(pip<=a));
semior=all([oi,all(all(p2i2==0))]);
preorcom=all([cuasitran,all(all(i2<=i))]);
```

```

% -----
% Cálculo de la k-transitividad (ktran) y de la k-aciclicidad (kaci).
% -----
if cuasitran == 0;
    if aci == 1;
        k=size(a,1);
        while (min(a-k,ones(x»<=a);
            k=k-1;
        end;
        ktran=k+1;
    else;
        ktran=0;
        k=3
        while (trace(a-k) == 0);
            k=k+1;
        End;
        kaci=k-2;
    end;
end;
y=[kaci, aci, ktran, cuasitran, o], semior, preorcom, x];

```

4 Consideraciones finales

Tanto en el análisis económico como en la teoría de la decisión se han utilizado varios supuestos de comportamiento racional, basados en diversas estructuras preferenciales: los preórdenes completos, que constituyen la hipótesis convencional y que reflejan una capacidad perfecta de discriminación, al suponer transitivas tanto la relación de preferencia como la de indiferencia; los semiórdenes, órdenes de intervalo y las estructuras cuasitransitivas, donde la relación de preferencia es transitiva, pero no lo es necesariamente la de indiferencia, que captan la existencia de umbrales en la percepción; y las estructuras acíclicas, que permiten intransitividades tanto en la relación de preferencia como en la de indiferencia.

En este trabajo se han introducido dos clases de relaciones de preferencia: las k-acíclicas, más débiles que las acíclicas, y las k-transitivas, que son acíclicas pero no necesariamente cuasitransitivas. Con ellas se dispone de una gama de modelos de coherencia, tanto más amplia cuanto mayor es el número de opciones a contrastar por los agentes. Los resultados teóricos obtenidos y el programa informática elaborado establecen un puente entre la teoría normativa de la decisión y la descriptiva, permitiendo utilizar supuestos de coherencia más realistas que los habituales y su contrastación empírica.

BIBLIOGRAFÍA

- [11] VAN ACKER, P.: "Transitivity revisited". *Annals of Operations Research* 23, pp. 1-35, 1990.
- [2] BARBERÁ, S.: "Algunos modelos de comportamiento racional en Economía". *Inv'tación a la Teoría Económica*, eds. X. Calsamiglia y R. Marimon. Ariel Economía. Barcelona, 1991, pp. 211-230.
- [3] BURRIS, S. - SANKAPPANAVAR, H.P.: *A Course in Universal Algebra*. Springer Verlag Nueva York, 1981.
- [4] FISHBURN, P.C.: "Intransitive indifference in preference theory: a survey". *Operations Research* 18, pp. 207-228, 1970.
- [5] GARCÍA LAPRESTA, J.L. - RODRÍGUEZ PALMERO, C.: "Análisis de la ausencia de ciclos en las preferencias". *Actas de la IX Reunión ASEPELT-ESPAÑA*, vol. V, pp. 237-245. Santiago de Compostela, 1995.
- [6] GARCÍA LAPRESTA, J.L. - RODRÍGUEZ PALMERO, C.: "Some models of rational behaviour around acyclicity". Mimeo. 1996.

- [7] Kim, K.H. - ROUSH, F.W.: *Introduction to Mathematical Consensus Theory*. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekker. Nueva York, 1980.
- [8] SIMON, H.: "Theories of bounded rationality". En *Decision and Organization* (eds. C.B. Radner y R. Radner). North Holland. Amsterdam, 1972.
- [9] TVERSKY, A. - KAHNEMANN, D.: "The framing of decisions and the psychology of choice". *Science* 211, pp. 453-458, 1981.
- [10] URIARTE Ayo, J.R.: "Teoría de la decisión normativa versus teoría de la decisión descriptiva". *Revista de Economía Pública* 13, pp. 85-112, 1991.