

## METODO DE DETERMINACION DE UNA BANDA DE PRECIOS EN UN ARTICULO CON DIFERENTES POSICIONES DE DEMANDA

Gamero Rojas, Javier

Sánchez Montero, Jesús M<sup>a</sup>

E.U. de Estudios Empresariales, Universidad de Sevilla

Pretendemos estudiar el precio óptimo que origina un beneficio máximo, suponiendo para ello diferentes niveles de demanda previsible según diferentes posiciones de expectativas ( optimistas-pesimistas ). En cierta manera, una posición de expectativa optimista ( demanda previsible "alta" ) se relaciona con un decisor propenso al riesgo; y una posición de expectativa pesimista ( demanda previsible "baja" ) se puede asociar a un decisor "conservador" o adverso al riesgo.

Los elementos que vamos a considerar para la realización del presente estudio son:

a) El beneficio en función de la cantidad vendida "q" es:

$$B(q) = I(q) - C(q)$$

en donde  $I(q) = p \cdot q$  es el ingreso que se obtiene vendiendo "q" unidades del producto a un precio unitario "p" y  $C(q)$  es el coste de "fabricación" ( o adquisición ) de las "q" unidades.

b) La venta "q" coincide con la demanda ( se "fabrica" todo lo que se necesita, con un coste más o menos alto ), y ésta se supone relacionada con el precio con elasticidad constante "b" ( al menos en el rango de precios en donde operemos ). Por tanto:

$$q = Q(p) = a \cdot p^b$$

c) Dado un precio "p" se pueden considerar diferentes niveles de demanda "q" basándose en la anterior función  $Q(p)$  y en diferentes posiciones "h" de expectativas, de tal forma que  $h > 0$  señala una expectativa optimista y  $h < 0$  pesimista. El caso  $h = 0$  vendría a significar una posición "neutra", dándose en este caso el nivel de demanda indicado por la función  $Q(p)$ . Adoptaremos para la demanda previsible dado un precio "p" y una expectativa "h" la notación  $Q(h,p)$ .

Con estos elementos estudiaremos el precio óptimo en función de "h" en varios supuestos:

I) Coste lineal.

II) Coste diferenciable.

III) Coste diferenciable a trozos (continuo o discontinuo).

Y además vamos a considerar dos formas de expresar la expectativa "h", aditiva o multiplicativamente:

a)  $Q(h,p) = Q(p) + h.$

b)  $Q(h,p) = Q(p) (1 + h).$

**CASO I a): COSTE LINEAL, EXPECTATIVA ADITIVA:**

Sea el coste  $C(q) = C_u q + C_F$ , en donde  $C_u$  es el coste variable unitario y  $C_F$  el coste fijo.

Pretendemos obtener el precio que optimiza los beneficios:

$$\begin{aligned} B(p) &= I(q) - C(q) = \\ &= p q - C_u q - C_F = (p - C_u) q - C_F = \\ &= (p - C_u) (a p^b + h) - C_F = \\ &= (p - C_u) a p^b + h(p - C_u) - C_F \end{aligned}$$

Para ello, calculamos:

$$\begin{aligned} B'(p) &= a(b+1) p^b - a C_u b p^{b-1} + h = \\ &= a p^{b-1} \left[ (b+1)p - C_u b + h \frac{1}{a p^{b-1}} \right] \end{aligned}$$

Tenemos que resolver la ecuación:

$$B'(p) = 0, \text{ o sea:}$$

$$a p^{b-1} \left[ (b+1)p - C_u b + h \frac{1}{a p^{b-1}} \right] = 0,$$

que equivale a resolver:

$$(b+1)p - C_u b + h \frac{1}{a p^{b-1}} = 0$$

Si denotamos por  $B = -b$ , si  $b < -1$  entonces  $B > 1$ , y entonces la ecuación a resolver será:

$$(B - 1)p - C_u B = h \frac{1}{a} p^{B+1}$$

donde el primer miembro de la ecuación es una recta con raíz:

$$\frac{B}{B-1} C_u$$

siendo  $B-1 > 0$

Los cortes entre la recta del primer miembro y la curva del segundo miembro de la ecuación a resolver serían:

Si  $h < 0$ , se corta en  $(0, p_0)$ .

Si  $h > 0$ , se corta (o no se corta) en  $p > p_0$  ( 2 veces ).

Estudiemos más detenidamente el caso  $h > 0$ .

La curva:

$$\frac{h}{a} p^{B+1}$$

es paralela a la recta en:

$$\frac{d}{dp} \left[ \frac{h}{a} p^{B+1} \right] = \frac{h}{a} (B+1) p^B = B-1$$

$$\text{luego: } \bar{p} = \left( \frac{B-1}{B+1} \frac{a}{h} \right)^{\frac{1}{B}}$$

Veamos a partir de que valor de  $h$  deja de cortarse la recta con la curva y por lo tanto no existe solución de la ecuación:

$$\bar{p} (B-1) - C_u B = \frac{h}{a} \bar{p}^{B+1}$$

Sustituyendo  $p$  tenemos:

$$\left( \frac{B-1}{B+1} \frac{a}{h} \right)^{\frac{1}{B}} (B-1) - C_u B =$$

$$= \frac{h}{a} \left( \frac{B-1}{B+1} \frac{a}{h} \right)^{\frac{B+1}{B}}$$

De donde:

$$\frac{(B-1)^{1+\frac{1}{B}}}{(B+1)^{\frac{1}{B}}} a^{\frac{1}{B}} \frac{1}{h^{\frac{1}{B}}} - C_u B =$$

$$= h^{\frac{1}{B}} a^{\frac{1}{B}} \left( \frac{B-1}{B+1} \right)^{1+\frac{1}{B}}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \left( \frac{B-1}{B+1} \right)^{\frac{1}{B}} (B-1) a^{\frac{1}{B}} - C_u B h^{\frac{1}{B}} &= \\ &= a^{\frac{1}{B}} \left( \frac{B-1}{B+1} \right)^{1+\frac{1}{B}} \end{aligned}$$

Despejando h, tenemos:

$$h^{\frac{1}{B}} = \frac{a^{\frac{1}{B}} \left( \frac{B-1}{B+1} \right)^{\frac{1}{B}} \left[ (B-1) - \frac{B-1}{B+1} \right]}{C_u B}$$

Luego:

$$\begin{aligned} h &= \frac{a \frac{B-1}{B+1} \left[ \frac{B^2-B}{B+1} \right]^B}{C_u^B B^B} = \\ &= \frac{a \left( \frac{B-1}{B+1} \right)^{B+1}}{C_u^B} \end{aligned}$$

Para h mayor que ese valor no hay solución a la derivada, ya que ésta es siempre  $> 0$ , por lo tanto el precio óptimo es infinito.

Por otro lado si h tiende a - infinito, el precio óptimo tiende a cero, y se puede dar la paradoja de que sea  $<$  que el coste unitario ( pérdidas ).

Veamos la solución para  $h < 0$ , mediante un método iterativo:

$$(B-1)p - C_u B = h \frac{1}{a} p^{B+1}$$

Lo resolvemos mediante el "metodo de la telaraña", si llamamos F (p) al primer miembro y G (p) al segundo, partiendo de un  $p_0$  inicial buscamos p tal que:

$$F(p) = G(p_0) \text{ y obtenemos } p_1 ;$$

*después buscamos p tal que:*

$$F(p) = G(p_1) \text{ y obtenemos } p_2$$

*y así sucesivamente.*

Es decir, buscaríamos el punto fijo de:

$$p = F^{-1}(G(p))$$

*o alternativamente:*

$$p = G^{-1}(F(p))$$

Las iteraciones convergerían a la solución en el primer caso si la derivada de  $F^{-1}(G(p))$  es, en valor absoluto, menor que 1 ( en un entorno de la solución que contenga a las iteraciones. Y convergerían en el segundo caso si la derivada de  $G^{-1}(F(p))$  ( que es la inversa de la derivada del caso anterior ) tiene un valor absoluto menor que 1 en un entorno del mismo tipo (teóricamente puede suceder que tanto en un caso como en otro las derivadas sean mayor y menor que 1 en valor absoluto en un entorno de la solución y, por tanto, no ser convergente ninguno de los dos casos, sin embargo, para ello tendría que suponerse una función coste patológica y no lineal.

En el primer caso nos quedaría:

$$\begin{aligned} p_n &= \left( \frac{h}{a} p_{n-1}^{B+1} + C_u B \right) \frac{1}{B-1} = \\ &= C_u \frac{B}{B-1} + \frac{h}{a} p_{n-1}^{B+1} \frac{1}{B-1} \end{aligned}$$

y en el segundo caso quedaría:

$$p_n = \left[ \frac{a}{h} [(B-1) p_{n-1} - C_u B] \right]^{\frac{1}{B+1}}$$

**CASO I b): COSTE LINEAL, EXPECTATIVA MULTIPLICATIVA:**

$$Q(h, p) = Q(p) (1 + h)$$

En este caso:

$$\begin{aligned} B(p) &= I(q) - C(q) = \\ &= p q - C_u q - C_F = \\ &= p Q(p) (1 + h) - C_u Q(p) (1 + h) - C_F = \\ &= (p - C_u) Q(p) (1 + h) - C_F = \\ &= (p - C_u) a p^b (1 + h) - C_F \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} B'(p) &= (1 + h) [a(b + 1) p^b - C_u a b p^{b-1}] = 0 \\ \text{de donde: } &a(b + 1) p^b - C_u a b p^{b-1} = 0 \end{aligned}$$

Que tiene como solución:

$$p_0 = C_u \frac{b}{b + 1} = C_u \frac{B}{B - 1}$$

Por lo tanto en este supuesto el nivel de "optimismo-pesimismo"  $h$  no repercute en la política de precios óptima.

**CASO II b): COSTE DIFERENCIABLE, EXPECTATIVA MULTIPLICATIVA:**

Nos limitaremos al caso multiplicativo por razón de espacio. El caso aditivo se trataría de forma similar.

$$Q(p) = Q(p) (1 + h)$$

En este caso hacemos las siguientes hipótesis:

$$\begin{aligned} C(q) &= C_V(q) + C_F ; \\ \text{donde: } C_V(q) &= C_u(q) q \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} B(p) &= I(q) - C(q) = \\ &= p q - C_u(q) q - C_F = \\ &= p Q(p) (1 + h) - C_u Q(p) (1 + h) - C_F = \\ &= p a p^b (1 + h) - C_u a p^b (1 + h) - C_F \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
B'(p) &= a(1+h)(b+1)p^b \\
&- a(1+h)b p^{b-1} C_u((1+h)a p^b) \\
&- a p^b (1+h) C'_u((1+h)a p^b) (1+h)a b p^{b-1} = 0
\end{aligned}$$

Tendremos que resolver la ecuación:

$$\begin{aligned}
a(1+h)p^{b-1} [(b+1)p - b C_u((1+h)Q(p)) \\
- a p^b (1+h)b C'_u((1+h)Q(p))] = 0
\end{aligned}$$

Es decir:

$$\begin{aligned}
b(1+h)Q(p) C'_u((1+h)Q(p)) &= (b+1)p - b C_u((1+h)Q(p)) \\
\text{que equivale a:}
\end{aligned}$$

$$p = \frac{B}{B-1} [C_u((1+h)Q(p)) + (1+h)Q(p) C'_u((1+h)Q(p))]$$

### CASO III b): COSTE DIFERENCIABLE A TROZOS, EXPECTATIVA MULTIPLICATIVA:

Supondremos ahora que:

$$\begin{aligned}
C(q) &= C_1(q), \text{ si } q \in [0, q_1] \\
C(q) &= C_2(q), \text{ si } q \in [q_1, q_2] \\
&\vdots \quad \quad \quad \vdots
\end{aligned}$$

siendo:

$$C_i(q) = C_{u_i}(q)q + C_{F_i}, \text{ funciones diferenciables.}$$

Sea:

$$C(q) = C_u(q)q + C_F$$

La manera de proceder sería la siguiente:

i) Se halla el precio óptimo relativo para cada  $C_i(q)$  suponiendo que  $C(q) = C_i(q)$ , para todo  $q$ , aplicando el proceso descrito en los casos I y II. A continuación se comprueba si la solución de dicho proceso corresponde al intervalo  $[q_{i-1}, q_i]$ . Si no es así se desecha dicho resultado por salirse del rango de definición de  $C_i$ . Por otro lado hallamos el beneficio resultante en los precios  $p_{i-1} = Q^{-1}(h, q_{i-1})$  y  $p_i = Q^{-1}(h, q_i)$  extremos de la definición de  $C_i$ . Entre estos dos precios y el óptimo relativo (si no se desechó) se elige aquel que tenga beneficio mayor. Este será el precio óptimo para el tramo  $C_i$ .

ii) Se halla el precio que da el beneficio mayor entre todos los precios óptimos de los  $C_i$ .

**CONCLUSION:** Hemos visto que con expectativa aditiva se origina un precio óptimo que depende del nivel  $h$  de expectativa sobre la demanda. En el caso de expectativa multiplicativa, por el contrario, con un coste lineal el precio óptimo es independiente del nivel de expectativa.

En general, con un coste diferenciable a trozos y una expectativa multiplicativa (y con una demanda potencial) hemos comprobado que se puede obtener el nivel de precio de beneficio óptimo con relativa facilidad. Esta misma conclusión se puede aplicar a un contexto más general con demanda-precio no potencial y otras formalizaciones  $Q(h,p)$  de la expectativa de demanda, que no incluimos en la presente comunicación por razones de extensión.

EJEMPLOS.-

Caso II b): Coste diferenciable y expectativa multiplicativa.-

En este primer ejemplo, vamos a considerar un coste diferenciable no lineal dado por la expresión:  
y una función de demanda:

$$\begin{aligned} Q(p) &= 500 p^{-1/5} \\ C(q) &= 50 + 5'5 q - \frac{q^2}{60} \\ \text{con una expectativa } h &= -0'1 \end{aligned}$$

*(expectativa pesimista en un 10% )*

lo que nos da una demanda prevista de:

$$Q(h,p) = 500 p^{-1/5} (1-0'1) = 450 p^{-1/5}$$

Apliquemos la ecuación iterativa deducida anteriormente.  
Para ello, necesitamos el coste unitario variable:

$$C_u(q) = \frac{C(q) - C_F}{q} = 5'5 - \frac{q}{60}$$

$$C_{u'}(q) = -\frac{1}{60}$$

Escojamos un precio  $p_0$  inicial. En una situación real lo escogeríamos a partir de nuestra información sobre el contexto en el que se desenvuelve el producto. En nuestro caso vamos a utilizar otra estrategia posible: tomamos el precio inicial igual al coste unitario para  $q = 0$ , o sea,  $p_0 = 5'5$ .

Con ese precio obtenemos una demanda  $q_0 = 34'89$ , que a su vez origina, sustituyendo en la ecuación iterativa, un precio  $p_1 = 13'01$ . Continuando con este proceso se obtienen las siguientes iteraciones:

$$p_0 = 5'5, p_1 = 1'301, p_2 = 1'554, p_3 = 1'577, p_4 = p_5 = 1'578$$

con lo cual el precio óptimo sería de aproximadamente 15'78 u.m.  
Caso III b): Coste diferenciable a trozos y expectativa multiplicativa.-

Consideremos ahora un coste discontinuo pero diferenciable a trozos:

$$C_1(q) = 6q + 100, q < 30$$

$$C_2(q) = 4q + 190, 30 \leq q < 60$$

$$C_3(q) = 2q + 350, q \geq 60$$

y una demanda con expectativa  $h = -0'4$ :

$$Q(h, p) = 2000 p^{-1'5} (1 - 0'4) = 1200 p^{-1'5}$$

lo que a su vez nos da el precio en función de la demanda prevista:

$$p = \left( \frac{q}{1200} \right)^{\frac{2}{3}}$$

Primer tramo:

En este tramo  $q$  está entre 0 y  $30^-$  (queriendo indicar con esta notación un valor infinitamente próximo y menor que 30), lo que se corresponde con un precio entre  $11'70^+$  e infinito (usando la función precio-demanda). El óptimo relativo se obtendría mediante la fórmula descrita en el caso I b):  $p = 18$ , que resulta válido por estar en el intervalo antes citado, con el que se obtiene un beneficio de  $B(18) = 88'52$ . Los valores extremos serían los siguientes:

$p = 11'70^+$ ,  $q = 30^-$ , con un beneficio de  $B(11'70) = 71'00$

$p = \text{infinito}$ ,  $q = 0$ , con un beneficio de  $B(\text{infinito}) = -100$ .

Se deduce que el precio óptimo global en el intervalo ( $11'70^+$ , infinito) es 18, por ser el que alcanza mayor beneficio.

Segundo Tramo:

La demanda está entre 30 y  $60^-$  y, por tanto, el precio está entre  $7'37^+$  y  $11'70$ . El precio óptimo relativo sería 12 que al estar fuera del intervalo anterior no es válido como solución.

Valores extremos:

$p = 7'37^+$ ,  $q = 60^-$ ,  $B(7'37^+) = 12'20$

$p = 11'70$ ,  $q = 30$ ,  $B(11'70) = 41'00$ .

Por lo tanto, el óptimo global en este tramo es  $11'70$ .

Tercer tramo:

En esta ocasión la demanda está entre 60 e infinito y el precio entre 0 y  $7'37$ . El óptimo relativo resulta 6 (válido), con un beneficio  $B(6) = -23'40$ . Valores extremos:

$p = 0$ ,  $q = \text{infinito}$ ,  $B(0) = -\text{infinito}$

$p = 7'37$ ,  $q = 60$ ,  $B(7'37) = -27'80$ .

En este tramo no se llega nunca a beneficios positivos, siendo el precio óptimo global 6.

En resumen tenemos como óptimo absoluto el precio de 18 u.m. con el que se alcanza el máximo beneficio de 88'52 u.m.

Fig.1: Diferentes tipos de Coste

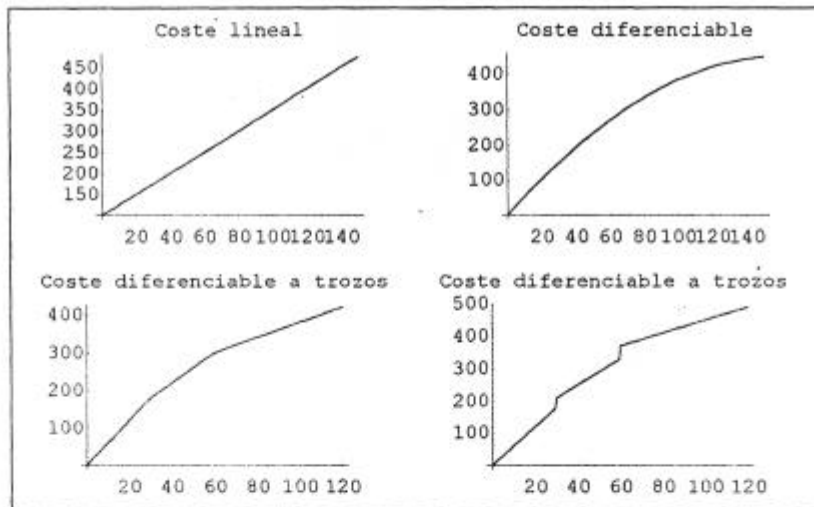


Fig.2: Banda de Beneficios

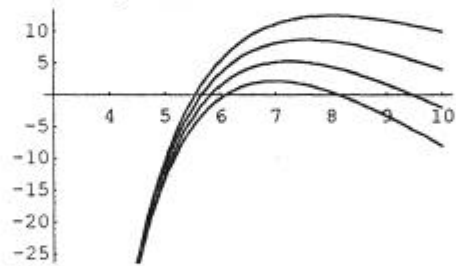


Fig.3: Banda de Beneficios (IIIb)

