

ALGUNAS PUNTUALIZACIONES SOBRE CUESTIONES DE MATEMÁTICAS CON APLICACIÓN AL ANÁLISIS ECONÓMICO

Manuel Suárez Fernández y María Elisa Amo Saus
Departamento de Economía y Empresa de la U.C.L.M.

Introducción

Es bien conocido que una característica fundamental de las matemáticas, es el rigor. Para expresar que algo es preciso, riguroso, la "vox pópuli" ha consagrado la frase "es matemático", así como el término "exactas" para denominar a las matemáticas.

Consecuentemente, es propio del quehacer matemático efectuar puntualizaciones en cuanto al rigor se refiere, no sólo sobre cuestiones de reciente investigación para consolidarlas, sino también sobre cuestiones clásicas ¹. Y, muy particularmente, ello es propio del quehacer de quienes somos profesores de matemáticas, pues buena parte de nuestra actividad profesional consiste en reflexionar sobre como presentar a nuestros alumnos los contenidos de los programas para que les resulten asequibles, a la vez que rigurosos. En esta tarea consultamos libros, cambiamos impresiones con otros profesores, escuchamos a los alumnos, meditamos sobre lo que hacen en los exámenes y, con la experiencia de un curso para otro, pensamos detenidamente sobre qué axiomática adoptar (para que, con tal de que alcance, sea la más sencilla posible), qué definiciones (más o menos generales) elegir, cómo enunciar los teoremas, cómo demostrarlos, y también cuándo, pues en ocasiones se ha de sopesar si es o no aconsejable incluir en el curso la

¹ Bien entendido que por el hecho de que, al hablar o escribir sobre matemáticas, se utilicen términos "no del lenguaje oficial" y simplificaciones informales del mismo (con el fin, claro está, de que la exposición resulte más sencilla) no tiene por qué implicar mengua de rigor alguna.

demostración de algún teorema con el que interesa contar (bien entendido, que si, por unas u otras causas, no fuese aconsejable efectuar la demostración, antes que una pseudo demostración, lo que se ha de hacer es decir claramente a los alumnos que, en el curso, se admite el teorema sin demostrarlo). Este reiterado "mirar con lupa" unas y otras cuestiones, en su mayoría clásicas, que los profesores de matemáticas hemos de efectuar con el fin de lograr la, no pocas veces nada fácil, armonía entre sencillez y rigor, de manera natural trae consigo que nos encontremos con enunciados o demostraciones ("pasos" de demostraciones) que, a primera vista, pudieran parecer correctos y, sin embargo, mirados con un poco más de atención, es fácil detectarles alguna deficiencia, en cuanto al obligado rigor se refiere. Y otros que, a todas luces, son formalmente erróneos, si bien, no obstante, denotan haber sido inspirados por alguna idea que, debidamente expresada, no dejaría de tener interés. Si estudiamos entonces como "remediar los males" efectuando las oportunas puntualizaciones, en los casos que consideremos haberlo conseguido y supongamos que bien podría "venir al caso" darlas a conocer fuera de nuestro particular entorno, porque, por ejemplo, estimemos que dichas puntualizaciones corresponden a enunciados o demostraciones con alguna falta de rigor que los alumnos muestran tendencia a adoptar, creemos es bueno nos animemos a publicarlas, aunque tales estimaciones, como fruto de la simple experiencia personal, sean claramente subjetivas, y las puntualizaciones, las más de las veces, no pasen de ser modestas, pues, procediendo así y leyendo las que encontremos publicadas, tiene lugar un intercambio de puntos de vista, experiencia, ideas, en suma, lo cual, sin perjuicio de que sean más o menos afortunadas y, a cada lector, unas le interesen más y otras menos, no deja de ser una práctica aconsejable.

En este artículo se consideran a continuación algunos ejemplos de puntualizaciones de las referidas, relativas a cuestiones matemáticas todas las cuales se aplican sistemáticamente al análisis económico y, explícita o implícitamente (es decir

figurando o bien fundamentando o complementando a otras que figuran) están incluidas en los programas de matemáticas de cualquier Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales (de una tal Facultad somos profesores los autores) y por ello, el grano de arena que dichas puntualizaciones pudieran aportar en pro de que los alumnos de las mismas, futuros profesionales de la economía y de la empresa, interpreten dichas cuestiones con rigor, lo aportarían, en suma, a la precisión del análisis económico mismo.

Ejemplo 1

Supongamos que \mathbf{A} es un conjunto no vacío, $+$ y $*$ son leyes de composición interna definidas sobre \mathbf{A} , la $(\mathbf{A}, +, *)$ (es decir, la terna de componentes $\mathbf{A}, +, *$) es un anillo y c es el elemento neutro de $+$. El siguiente enunciado para definir (o la siguiente definición de) "divisores de cero" del referido anillo, «Si x, u son elementos (cualesquiera) de \mathbf{A} entonces decimos que " x y u son divisores del anillo $(\mathbf{A}, +, *)$ " si y solo si $x \neq c, u \neq c$ y $x*u=c$ », probablemente, a primera vista parezca conceptualmente riguroso (y, además, éste u otro enunciado con sentido equivalente figure en más de un libro), pero, sin embargo, mirado con un poco de atención, no resulta difícil detectar en el mismo una cierta incoherencia.

En efecto, supongamos, por ejemplo, que $\mathbf{A}=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $+$ es una ley de composición interna, que llamamos "suma", definida sobre \mathbf{A} mediante la siguiente "tabla":

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

y $*$ es una ley de composición interna. que llamamos "producto", definida sobre \mathbf{A} mediante la siguiente tabla:

$*$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

entonces la $(\mathbf{A}, +, *)$ es un anillo conmutativo y unitario, 0 es el elemento neutro de la suma y 1 es el elemento neutro del producto.

Pues bien,

$2 \neq 0$, $3 \neq 0$ y $2*3=0$,

$3 \neq 0$, $4 \neq 0$ y $3*4=0$

$2*4 \neq 0$.

Luego, si consideramos la definición dada de divisores de cero de un anillo, para el anillo en cuestión, entonces resulta que,

«2 y 3 son divisores de cero del anillo $(\mathbf{A}, +, *)$ »,

«3 y 4 son divisores de cero del anillo $(\mathbf{A}, +, *)$ »

«2 y 4 no son divisores de cero del anillo $(\mathbf{A}, +, *)$ ».

Evidentemente, los tres enunciados anteriores son respectivamente equivalentes a los tres siguientes:

«2 es divisor de cero del anillo $(\mathbf{A}, +, *)$ y 3 es divisor de cero del anillo $(\mathbf{A}, +, *)$ »,

«3 es divisor de cero del anillo $(\mathbf{A}, +, *)$ y 4 es divisor de cero del anillo $(\mathbf{A}, +, *)$ »

«no se verifica que «2 es divisor de cero del anillo $(\mathbf{A}, +, *)$ y 4 es divisor de cero del anillo $(\mathbf{A}, +, *)$ ».

Este tercer enunciado , a su vez, es equivalente al enunciado siguiente:

«2 no es divisor de cero del anillo $(\mathbf{A}, +, *)$ o 4 no es divisor de cero del anillo $(\mathbf{A}, +, *)$ »

y también lo es al siguiente:

«al menos uno de los números 2 y 4 no es divisor de cero del anillo $(\mathbf{A}, +, *)$ ».

Estimamos que, sin necesidad de otras explicaciones, la "cierta incoherencia" que se desprende del ejemplo referido, está suficientemente clara.

Una vez llegado a este punto es fácil advertir que el problema ha surgido porque, dado un anillo (cualquiera) $(\mathbf{A}, +, *)$ y elementos cualesquiera x, u de \mathbf{A} , hemos definido "cuando x, u (en conjunto) son divisores de cero (del anillo $(\mathbf{A}, +, *)$)" y que, por tanto, "las cosas pueden arreglarse", si, en lugar de ello, lo que hacemos es definir cuando un elemento x de \mathbf{A} es divisor de cero del referido anillo.

Supongamos, pues, que para definir divisor de cero de un anillo cualquiera $(\mathbf{A}, +, *)$, siendo c el elemento neutro de la ley de composición interna $+$, en lugar del enunciado anterior, se adopta, por ejemplo, el enunciado siguiente:

«Si x es un elemento (cualquiera) de \mathbf{A} entonces decimos que " x es divisor de cero del anillo $(\mathbf{A}, +, *)$ " si y solo si $x \neq c$ y existe un elemento u de \mathbf{A} tal que $u \neq c$ y « $x*u=c$ o $u*x=c$ »».

Evidentemente este enunciado sirve en todos los casos en los que servía el enunciado antiguo (produciendo ambos el mismo efecto) y sirve también para el caso, considerado como ejemplo, del anillo definido sobre el conjunto $\mathbf{A}=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, en el cual el enunciado antiguo implicaba una cierta incoherencia o confusionismo, resultando que, para el referido nuevo enunciado, sin duda alguna 2 es divisor de cero, 3 es divisor de cero y 4 es divisor de cero, del anillo en cuestión, lo cual está en consonancia con lo que, dicho de una u otra forma, por "divisores de cero" se ha entendido siempre.

Ejemplo 2

Todas las funciones consideradas en este Ejemplo 2, entiéndase que son funciones reales de una variable real. Es decir, funciones de un subconjunto de \mathbf{R} , en \mathbf{R}).

Si a unos u otros alumnos universitarios, con una asignatura de matemáticas que incluya cálculo integral, se les preguntase si les parece correcto el enunciado, «Para toda función $f(x)$ (que es, pues, como siempre en este Ejemplo 2, real, de una variable real) se verifica que si $F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$, entonces el conjunto de las funciones primitivas de $f(x)$, es el $\{F(x)+k \mid k \in \mathbf{R}\}$ » (es decir, si les preguntásemos si creen que se verifica que, dada una función cualquiera $f(x)$, es seguro que dos funciones primitivas cualesquiera de $f(x)$, se diferencian en una constante real), entonces, probablemente, muchos de tales alumnos contestasen afirmativamente, cuando lo que ocurre es que dicho enunciado, sin más, es falso ².

Para "arreglar las cosas", sabemos que es suficiente con añadir al enunciado en cuestión, que la función $f(x)$ se defina en un intervalo real. O, con otras palabras, el enunciado, «Para toda función $f(x)$ definida en un intervalo abierto, se verifica que si $F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$, entonces el conjunto de las funciones primitivas de $f(x)$, es el $\{F(x)+k \mid k \in \mathbf{R}\}$ », es un enunciado verdadero.

Si, en efecto, ocurre que muchos de los referidos alumnos dan

² Fácilmente se ve que, en efecto, es falso, considerando, por ejemplo, que si $f(x)$ es la función (real, de una variable real) definida en $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ (es decir, definida en el conjunto de los números reales distintos de cero) de manera que para cada número real x distinto de cero, $f(x) = -1/x^2$, $F(x)$ es la función (real, de una variable real) definida en $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ de manera que para cada número real x distinto de cero, $F(x) = 1/x$, y $G(x)$ es la función (real, de variable real) definida en $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ de manera que para cada número real negativo x , $G(x) = 1/x$, y para cada número real positivo x , $G(x) = (1/x) + 1$, entonces, ambas funciones, $F(x)$ y $G(x)$ son derivables en todos los "puntos" de su conjunto de definición y son funciones primitivas de $f(x)$ pero, sin embargo, $G(x) \notin \{F(x)+k \mid k \in \mathbf{R}\}$ (es decir, dada una constante real cualquiera k , $G(x)$ no es la función $F(x)+k$).

por bueno, sin serlo, al primero de los dos enunciados, quizás un motivo sea que los estudiantes acostumbran a no prestar la atención debida a los correspondientes conjuntos originales de las funciones que consideren y otro motivo bien pudiera ser que, con cierta frecuencia, los libros de matemáticas que incluyen algún capítulo dedicado al cálculo integral, presenten la cuestión omitiendo decir que las referidas funciones $f(x)$ y sus correspondientes primitivas, se consideran definidas en un intervalo, omisión quizás debida a que los correspondientes autores suponen que ello (es decir, que las funciones están definidas en un intervalo) no es necesario que explícitamente se diga, porque debe interpretarse por los lectores como consecuencia de que, para probar (en el capítulo de cálculo integral) que dos funciones primitivas de una función dada se diferencian en una constante, el libro remite al cálculo diferencial y, más concretamente, al teorema de los incrementos finitos (figure o no en algún capítulo anterior del libro en cuestión) en el cual, lo que se dice sobre una función, es relativo a un intervalo cerrado en el que la función está definida (es decir, a un intervalo cerrado contenido en el conjunto original de la función, coincida o no con éste).

Ejemplo 3

En cuanto a los razonamientos matemáticos, ni qué decir tiene, deben ser lógicamente rigurosos, lo que, en definitiva, viene a significar válidos, pues dicha condición es su razón de ser. Ello supone que cada "paso" de un razonamiento matemático ha de ser correcto y, en caso contrario, el razonamiento (total) deberá ser calificado como "no válido", incluso cuando el resultado final del mismo sea correcto.

Precisamente son los razonamientos cuyo resultado final es correcto, si además es conocido de antemano, los que, cuando incluyen algún "paso" no deseable, presentan más dificultad para detectarlo y ello, claro está, porque al concluir el razonamiento en cuestión, no suena el "timbre de alarma" que

significaría un final sabido erróneo.

Para concretar las ideas referidas, consideremos, por ejemplo, el razonamiento siguiente:

«Si

$$x_1 = a_1 + (b_1 - a_1) \cdot \lambda$$

$$x_2 = a_2 + (b_2 - a_2) \cdot \lambda$$

son unas ecuaciones paramétricas de una recta afín **r** en un plano, entonces despejando el parámetro en ambas ecuaciones e igualando, resulta,

$$\frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2 - a_2}$$

de donde,

$$(b_2 - a_2) \cdot (x_1 - a_1) - (b_1 - a_1) \cdot (x_2 - a_2) = 0$$

Luego,

$$(b_2 - a_2) \cdot x_1 + (a_1 - b_1) \cdot x_2 + (a_2 - b_2) \cdot a_1 + (b_1 - a_1) \cdot a_2 = 0$$

Y, haciendo

$$b_2 - a_2 = c_1 \quad a_1 - b_1 = c_2 \quad (a_2 - b_2) \cdot a_1 + (b_1 - a_1) \cdot a_2 = c_0$$

resulta finalmente la fórmula,

$$c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + c_0 = 0.$$

que decimos es una ecuación implícita de la recta **r** en cuestión».

El resultado final es correcto, pero, sin embargo, el razonamiento no, porque incluye un, digamos, "paso conflictivo", que es el siguiente:

« . . . , despejando el parámetro en ambas ecuaciones e igualando resulta,

El razonamiento no es correcto porque, en el mismo, no se está considerando que uno de los dos denominadores pudiera ser 0.

$$\frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2 - a_2}, \dots \text{«}$$

Una manera de "arreglar las cosas", puede ser, por ejemplo, prescindir del referido "paso conflictivo" (o "poco afortunado") y, en su lugar, hacer figurar el siguiente:

« . . . , considerando que $b_1 - a_1 \neq 0$ o bien $b_2 - a_2 \neq 0$,
supongamos, para fijar ideas, que $b_1 - a_1 \neq 0$. Luego, despejando en la primera ecuación y sustituyendo en la segunda, resulta,

$$x_2 = a_2 + \frac{x_1 - a_1}{b_2 - a_2} \cdot (b_2 - a_2), \dots \text{«}$$

Y haciendo operaciones resulta finalmente, como antes, una ecuación de la forma,

$$c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + c_0 = 0.$$

Ejemplo 4

Creo que a los profesores de matemáticas no nos resulta extraño encontrarnos, cuando calificamos exámenes, con algún que otro disparate formal que, sin embargo, mirado con detenimiento y "espíritu constructivo", deja entrever que detrás del mismo hay una idea que, utilizada con el atrevimiento y desenfado (aunque también con la intuición) propias del joven que "empieza", está, desde luego, mal utilizada (formalmente, un disparate) pero que, convenientemente presentada, no dejaría de tener interés.

Por ejemplo, calificando exámenes, en ocasiones los autores del artículo nos hemos encontrado con que, para solucionar un ejercicio como el siguiente:

«Determinar el límite de la sucesión de números reales r_1, r_2, r_3, \dots tal que para cada número natural $n > 0$,

$$r_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$$

algún que otro alumno había aplicado la regla de L'Hôpital y así, pues, había derivado por separado las expresiones del numerador y del denominador de r_n , respecto de la variable discreta n (definida, claro está, en el conjunto \mathbf{N}^+ de los

números naturales positivos), como si se tratase de una variable continua.

Ni que decir tiene que, formalmente hablando, tal cosa es un disparate. No obstante, cuando, procediendo de tal manera, las operaciones son efectuadas sin error, el resultado final es correcto.

En nuestra opinión, ante situaciones del tipo de las referidas (que se presentan sin que se las busque y algo parece que pretenden insinuar) no es aconsejable "pasar de largo" dando por bueno, sin más, que son fruto de la casualidad y, por el contrario, lo es suponerlas merecedoras de que se les preste toda la atención que requiera llegar a la génesis de aquello que había despertado nuestra curiosidad.

En el caso del ejemplo, tras un momento de reflexión, es fácil apreciar que si $f(x)$ es la función real de variable x , definida en el conjunto de los números reales mayores o iguales que 1 y tal que

$$f(x) = \frac{Lx}{\sqrt{x}}$$

(para cada número real $x \geq 1$), entonces $f(x)$ es derivable en todo punto y tiene sentido determinar el límite de $f(x)$ cuando x tiende a ∞ , aplicando la regla de L'Hôpital, resultando que dicho límite es 0. Y, puesto que cualquier sucesión de números reales es una función de \mathbf{N}^+ (conjunto de los números naturales positivos) en \mathbf{R} (conjunto de los números reales) y, en particular, la sucesión r_1, r_2, r_3, \dots (del Ejercicio) es la función restricción de $f(x)$ al conjunto \mathbf{N}^+ , resulta que el límite de dicha sucesión cuando x tiende a ∞ , coincide con el de $f(x)$ cuando n tiende a ∞ . Así, pues, el límite de la referida sucesión puede determinarse aplicando a la función $f(x)$ la regla de L'Hôpital, lo cual es correcto.

Además, a partir del ejemplo referido fácilmente se induce la siguiente aplicación de la regla de L'Hôpital al cálculo de límites de sucesiones de números reales (la cual, a su vez,

fácilmente podría generalizarse):

«Si r_1, r_2, r_3, \dots es una sucesión cualquiera de números reales y $f(x)$ es una función real de variable real x , derivable en todo punto, de la cual la sucesión referida es una restricción (es decir, el conjunto original de $f(x)$ contiene a \mathbf{N}^+ y si $n \in \mathbf{N}^+$ entonces $r_n = f(n)$) y tal que, aplicando la regla de L'Hôpital, es válido determinar el límite de $f(x)$ cuando (la variable real) x tiende a ∞ , entonces dicho límite lo es también de la sucesión r_1, r_2, r_3, \dots , cuando (la variable natural) n tiende a ∞ ».