

X REUNION ANUAL ASEPELT-ESPAÑA

MODELOS TEORICOS SOBRE DURATION DE TITULOS DE RENTA FIJA CON RIESGO DE INSOLVENCIA

F. ECONOMIA Y EMPRESA

F.2. ESTRATEGIAS EMPRESARIALES Y MERCADO

**Escribano Sotos, Francisco
Gento Marhuenda, Pedro
Navarro Arribas, Eliseo**

Universidad de Castilla-La Mancha
Departamento de Economía y Empresa
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
fsotos@idr-ab.uclm.es / pgento@idr-ab.uclm.es / anavarro@idr-ab.uclm.es

RESUMEN:

El factor determinante del precio de los activos negociados en los mercados de renta fija es el tipo de interés. Si bien el impacto del mismo en los precios de los activos emitidos por el Estado ha sido objeto de numerosos estudios, no es evidente que los resultados sean extrapolables a la renta fija privada como consecuencia del riesgo de insolvencia.

El objetivo de este trabajo es analizar los distintos modelos teóricos que estudian la interrelación entre el riesgo de interés y el riesgo de insolvencia al que están sujetas las emisiones de renta fija de entidades privadas a partir del concepto de *duration* arriesgada.

El estudio del impacto del riesgo de insolvencia en la valoración de este tipo de activos cobra especial relevancia debido al fuerte desarrollo experimentado por los mercados españoles de Deuda Pública y Privada en los últimos años.

MODELOS TEORICOS SOBRE DURATION DE TITULOS DE RENTA FIJA CON RIESGO DE INSOLVENCIA.

I.- Introducción.

De los riesgos que se originan de las variaciones de los tipos de interés, ha sido el riesgo de mercado (entendido como la posible variación en el precio de un activo de renta fija como consecuencia de variaciones de los tipos de interés) el más estudiado. La medida con una base científica más desarrollada para cuantificar este efecto ha sido la *duration*, cuya primera definición se debe a Macaulay (1938).

El reciente desarrollo de los mercados de Deuda Privada hace necesario determinar el efecto de otros factores de riesgo en el precio de los activos que se negocian en estos mercados. En concreto, en este trabajo se analizan aquellas medidas de la *duration* en las que se incorpora el riesgo de insolvencia.

Para ello, en primer lugar se introduce el concepto de *duration* y posteriormente se describen cuatro modelos teóricos que estudian la *duration* arriesgada, abordando en el último apartado las conclusiones que se manifiestan del análisis de estos modelos.

II.- Concepto de *duration*.

El término *duration* se entiende como el periodo de tiempo en el cual algo existe. La primera definición aplicada a un bono se debe a Macaulay, que daba una medida más significativa que el periodo de amortización a la hora de analizar el efecto de las variaciones de la estructura temporal de los tipos de interés en el precio de un título de renta fija, llegando a la siguiente expresión:

$$D = \frac{\sum_{n=1}^m \frac{n C_n}{(1+i)^n} + \frac{m A_m}{(1+i)^m}}{\sum_{n=1}^m \frac{C_n}{(1+i)^n} + \frac{A_m}{(1+i)^m}} \quad [1]$$

Donde: **D** es la Duration del bono, **C_n** la corriente de ingresos del bono debida al pago de cupones, **A_m** el principal del bono que se paga en la fecha de amortización del título e **i** el tanto interno de rendimiento del bono.

La *duration* de Macaulay se puede interpretar como la vida media ponderada de un activo de renta fija. Esta relación se basa, entre otras, en la hipótesis de que los flujos de caja generados por un título de renta fija están determinados a priori y en la consideración de movimientos aditivos (paralelos) de los tipos de interés. Mas tarde, Hicks (1939) da a la

duration un doble enfoque: el de una elasticidad, y el de una variable indicativa de como se distribuyen los capitales en una corriente de pagos.

Hopewell y Kaufman (1973) establecen de forma explícita la relación entre duration y riesgo de interés mediante la siguiente ecuación:

$$\frac{dP(m)}{P(m)} = -D \frac{dy}{(1+y)} \quad [2]$$

donde: **D** es la duration del bono, **y** es la tasa interna de rendimiento del bono y **P(m)** es el precio de cada activo.

De esta manera, se introduce un nuevo concepto de *duration* como una aproximación a la volatilidad de los precios ante variaciones porcentuales de su TIR.

A partir de estas medidas básicas de la *duration* se han desarrollado toda una serie de formulaciones alternativas de la misma¹. Utilizar una u otra supone asumir implícitamente distintos comportamientos de los tipos de interés y otros factores como la aversión al riesgo del inversor o las características implícitas de los títulos que se consideren.

El análisis de *duration* se extendió a la gestión de activos y pasivos de entidades financieras y aseguradoras; en este sentido destacan los trabajos de Redington (1952) y Fisher y Weil (1971) que utilizan la duration para el desarrollo de estrategias de inmunización frente al riesgo de variación de los tipos de interés. Básicamente, estas estrategias tratan de garantizar que el valor final de una cartera de bonos sea con independencia de la evolución de los tipos de interés durante el mismo, como mínimo, el que tendría si la función de los tipos de interés permaneciese constante a lo largo de dicho período. De esta manera aparece el concepto de inmunización financiera como estrategia de gestión de carteras de renta fija.

Por último, cabe destacar aquellos trabajos que relacionan la duration con la β o factor que mide el riesgo sistemático en el modelo CAPM y aquellos que desarrollan modelos factoriales en los que el elemento clave es la diferencia entre la *duration* y el

¹Para un análisis más amplio sobre distintos modelos de determinación de la Duration ver Gultekin, N.B. y R.J. Rogalski(1984).

horizonte de planificación del inversor².

A lo largo de todos los trabajos anteriores, la *duration* se manifiesta como una herramienta adecuada para examinar el riesgo de interés. Sin embargo, no son tan numerosos los trabajos que contemplan el riesgo de insolvencia en el cálculo de la *duration*. A continuación se recogen cuatro modelos, y se analiza la forma en que el riesgo de insolvencia se contempla dentro de cada uno de ellos.

III.- Duration Arriesgada.

3.1.- Modelo de Bierwag.

Bierwag, G.O. (1987), parte de la *duration* de Macaulay, a la que introduce una serie de modificaciones derivadas de la inclusión del riesgo de insolvencia.

En primer lugar, los flujos de caja prometidos en títulos emitidos por empresas, F , son transformados en equivalentes ciertos, F^* , debido a la posibilidad de que existan pérdidas por impagos. Se introduce de esta manera el concepto de prima por riesgo, que vendría definida por la diferencia entre los flujos prometidos y los equivalentes de certeza.

En segundo lugar, utiliza dos tasas diferentes de actualización: la tasa libre de riesgo r_f es la tasa de actualización de un título que no está sujeto al riesgo de insolvencia; y la tasa r , que es la tasa interna de rendimiento de un bono privado, y que por tanto incluye la prima de riesgo.

Con esas dos consideraciones, el precio de los bonos sujetos al riesgo de insolvencia, calculado como el valor de los flujos prometidos actualizados al tanto interno de rendimiento sería equiparable al valor actual de los equivalentes de certeza utilizando la tasa libre de riesgo, tal y como muestra la siguiente expresión:

$$P = \sum_t F_t^* (1 + r_f)^{-t} = \sum_t F_t (1 + r)^{-t} \quad [3]$$

A partir de esta igualdad surgen dos medidas de la *duration*, dependiendo de la parte de la ecuación anterior que se utilice.

²Se define el horizonte de planificación del inversor (HPI) como el periodo de tiempo que un inversor desea mantener la inversión realizada.

Si se utilizan los equivalentes de certeza, la duration quedará como:

$$D = \frac{\sum_t t \cdot F_t^* (1 + r_F)^{-t}}{\sum_t F_t^* (1 + r_F)^{-t}} \quad [4]$$

En caso de utilizar los flujos arriesgados, quedaría:

$$D = \frac{\sum_t t \cdot F_t (1 + r)^{-t}}{\sum_t F_t (1 + r)^{-t}} \quad [5]$$

No hay ninguna razón para esperar que ambas sean equivalentes tal y como explica el autor. Esta es una cuestión dudosa y no contrastada. En general, se podría intuir que utilizando la duration ajustada por el riesgo se evita una interacción desconocida entre riesgo de insolvencia y riesgo de interés.

Un problema adicional que se plantea en este modelo es determinar el proceso estocástico que guía el movimiento de la estructura temporal de los tipos de interés de los títulos arriesgados.

3.2.- Modelo de Bierwag y Kaufman.

Bierwag y Kaufman (1988), amplían el modelo anterior y desarrollan una metodología para estudiar el efecto del riesgo de insolvencia en el cálculo de la duration y por tanto, poder explicar las diferencias existentes en las sensibilidades de títulos libres de riesgo y títulos arriesgados frente a variaciones de los tipos de los interés y por tanto en su duration.

Afirman que un bono sujeto al riesgo de insolvencia proporciona una TIR más alta que la de un bono libre de riesgo, debido a la compensación que se debe hacer a los inversores por las pérdidas esperadas que pueden sufrir, como resultado de la posibilidad de que se reduzcan o aplacen los pagos prometidos.

El supuesto de partida en la determinación de la Duration con riesgo de insolvencia es que en el momento de la compra de dicho activo solo se conoce la corriente prometida de

pagos, pero la corriente que se produce finalmente puede diferir de la prometida debido a pérdidas por insolvencia y por el ejercicio de amortizaciones anticipadas.

Definen dos posibles escenarios muy simplificados en cuanto a las repercusiones de la insolvencia del emisor de los títulos:

- a) que se pierdan un determinado número de pagos.
- b) que se produzca un aplazamiento en el vencimiento de los pagos prometidos por el título.

Para la primera situación de insolvencia (se pierde un número k de pagos), consideran dos supuestos extremos:

- a.1) que el pago perdido sea el del vencimiento más próximo.
- a.2) que el pago perdido sea el del vencimiento más alejado en el tiempo.

En el caso de que el pago perdido sea el del vencimiento más próximo, el precio del bono sería:

$$P = \sum_{t=1}^N S_t (1 + r_t)^{-t} = \sum_{t=1}^N (S_t - d_t) (1 + r)^{-t} \quad [6]$$

Donde: S_t son los flujos de caja prometidos en t , d_t la insolvencia esperada en t , r^* la tasa interna de rendimiento de mercado, r la tasa interna de rendimiento ajustada por el riesgo y N el vencimiento del bono.

De esta forma, la Duration ajustada por el riesgo de insolvencia sería:

$$D_A = \frac{\sum_{t=1}^N t (S_t - d_t) (1 + r)^{-t}}{P} \quad [7]$$

Del análisis de esta expresión se deduce que la duration ajustada es mayor que la duration de Macaulay, siendo mayor la diferencia conforme se incrementa la prima de riesgo y el período de amortización. El mismo efecto se produce en el caso de considerar un aplazamiento en algún pago.

Por otro lado, si el pago perdido se produce en los vencimientos más alejados se obtiene una duration ajustada menor que la duration de Macaulay. Se produce, por tanto,

una reducción de la duration, donde la diferencia respecto a la duration de Macaulay es mayor a medida que se incrementa la prima de riesgo y el periodo de amortización.

Este modelo puede servir de base para contrastar las expectativas sobre el riesgo de insolvencia de los inversores en un determinado mercado, mediante la comparación de la duration de Macaulay de un título arriesgado y la que correspondería a un título sin riesgo de similares características.

3.3.- Modelo de Abbas y Pluyène.

Abbas y Pluyène (1991) parten de la evaluación del precio de los títulos con riesgo de insolvencia. El precio de un bono arriesgado es inferior al precio de un bono sin riesgo de las mismas características, y por tanto valorado a partir del tipo de interés sin riesgo. El precio del título arriesgado vendrá determinado por el mercado.

Los autores evalúan la probabilidad de insolvencia de la emisión y suponen que cada ingreso futuro, cada flujo de caja, va a estar ponderado por un factor **b** ($b < 1$). Este factor, es interpretado como la probabilidad de que sean efectivamente realizados los pagos prometidos en la emisión de los bonos, obteniendo de esta manera una esperanza de los ingresos futuros.

Esta esperanza de ingresos se considera equivalente a un flujo sin riesgo, cuyo valor actual se determina a partir de los tipos de interés sin riesgo. La diferencia entre el flujo prometido y la esperanza de ingresos es la parte que no sería reembolsada en el supuesto de que se produjese la insolvencia. La variación de esta prima es consecuencia de un cambio en la liquidez del título o de la calidad de la entidad emisora y por lo tanto no es sensible a las variaciones de los tipos de interés. El precio del bono en este caso solamente es sensible a las variaciones de los tipos de interés sin riesgo, lo que hace que la duration sea la correspondiente a un título sin riesgo.

En este modelo se considera una probabilidad de insolvencia constante para todos los periodos, este supuesto alcanza mayor realismo cuando se opera con una cartera de bonos, ya que en este caso, sí es posible realizar una estimación global de las posibles insolvencias y utilizar un coeficiente constante para cada uno de los periodos considerados.

Para la determinación de la prima de riesgo, consideran que en el mercado francés, (como ocurre en el español), las emisiones de deuda privada no son, en número, muy

elevadas y además estas emisiones por realizarlas grandes grupos empresariales tienen calificaciones crediticias de grado inversión, por lo que el riesgo de insolvencia es muy bajo. Esto hace que los autores propongan descomponer el rendimiento de un título sujeto al riesgo de insolvencia en dos únicos componentes, la remuneración del capital (el tipo de interés sin riesgo para ese plazo determinado) y la prima de riesgo.

Si llamamos y al rendimiento de un título sin riesgo con similares características a las del título arriesgado, s a la prima de riesgo, n al número de flujos, a_k a la cuantía de los flujos y d_k a las fechas en que se producen los pagos, se puede escribir el precio de un título como sigue:

$$P = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{(1+y+s)^{d_k}} \quad [8]$$

De esta expresión se deduce la duration de Macaulay para un bono arriesgado:

$$D = \frac{\sum_{k=1}^n d_k a_k (1+y+s)^{-d_k}}{\sum_{k=1}^n a_k (1+y+s)^{-d_k}} \quad [9]$$

3.4.- Modelo de Chance.

Chance (1990), examina la duration de bonos cupón cero sujetos al riesgo de insolvencia a partir del modelo de valoración de títulos privados de Merton (1974).

Las hipótesis de este modelo son las siguientes:

- 1.- No existen impuestos ni costes de transacción y asume la perfecta divisibilidad de los activos.
- 2.- Los inversores pueden comprar y vender de un activo cualquier cantidad sin límite a los precios de mercado.
- 3.- Se puede prestar y pedir prestado al mismo tipo de interés y tomar posiciones cortas en todos los activos, negociándose los mismos en tiempo continuo.
- 4.- Por otro lado se asume como cierto el teorema de Modigliani y Miller según el cual el valor de la empresa no varía ante cambios en su estructura de capital.
- 5.- La estructura temporal de los tipos de interés es plana y conocida con certeza. Bajo estas

hipótesis, el precio de un bono arriesgado cupón cero con un pago F en T será:

$$B = Fe^{-yT} \quad [10]$$

donde B es el precio del bono, F el valor nominal de la Deuda, T el periodo hasta la amortización e y el TIR de bonos sujetos al riesgo de insolvencia.

6.- El valor de los activos de la empresa, A_t , sigue un proceso de difusión estocástico de la siguiente forma:

$$dA = (aA - C)dt + sAdz \quad [11]$$

donde a es el rendimiento instantaneo de los activos de la empresa por unidad de tiempo, C son los pagos por unidad de tiempo, s^2 es la varianza instantanea del rendimiento de la empresa por unidad de tiempo y dz es un proceso Gauss-Wiener.

A partir de este modelo, las distintas situaciones en las que puede encontrarse un inversor que compre bonos de la empresa depende tanto del valor de los activos de la empresa en T , A_T , como del valor nominal del endeudamiento, F . De esta forma se contemplan distintas situaciones:

-Si $A_T < F$, el valor de los activos de la empresa es menor que el valor nominal de la deuda; la empresa está incurriendo en insolvencia. En este supuesto el comprador de la emisión de bonos (el inversor) se verá compensado recibiendo únicamente los activos de la empresa.

-Si $A_T \geq F$, el valor de los activos es superior al valor nominal de la deuda; la deuda será pagada y el comprador de los bonos recibe el valor nominal de la deuda.

De esta forma es posible considerar que comprar obligaciones de la empresa es equivalente a comprar un bono libre de riesgo amortizable en T y vender una opción de venta sobre los activos de la empresa con un precio de ejercicio F y ejecutable en T .

Cuando la empresa se encuentra en una situación de suspensión de pagos, los accionistas están ejerciendo, de hecho, su opción de venta. El valor de la opción de venta es el valor de la responsabilidad limitada, que es el derecho de los accionistas a abandonar las deudas de la empresa a cambio de dejar los activos a sus acreedores.

Así, el valor del bono arriesgado es igual al valor de la obligación sin riesgo menos el valor de una opción de venta, por ello si denotamos por $R = F - P(i, T)$ el valor actual de un

bono cupón cero libre de riesgo de insolvencia con vencimiento en T y con un precio de amortización F , el valor de la deuda de la empresa, B vendrá dado por la siguiente expresión:

$$B = R - p(A, F, T) \quad [12]$$

donde $p(A, F, T)$, es valor de la prima de una opción de venta sobre los activos de la empresa con fecha de ejercicio T y precio de ejercicio F .

El comprador de los bonos arriesgados de la empresa acepta el riesgo de los activos de la empresa y recibe la compensación en forma de una prima sobre la opción de venta.

De cara a analizar las repercusiones de las variaciones de los tipos de interés sobre el valor de la deuda privada (B), es necesario valorar como afectan dichas variaciones tanto a F como a $p(A, F, T)$, por lo que resulta necesario algún modelo de valoración de opciones. En la medida en que el modelo de Black-Scholes (1973) asume un tipo de interés determinista, no resulta adecuado para analizar los efectos de las variaciones de los tipos de interés por lo que el modelo de valoración de opciones a aplicar va a ser el de Merton (1973) en el que se supone que tanto el precio del activo subyacente como el precio de los bonos cupón cero amortizable en T siguen un proceso de difusión Lognormal, hipótesis que es incorporada al modelo de Chance, obteniendo la siguiente expresión para el valor de la opción de venta:

$$p(A, F, T) = F \cdot e^{-i \cdot T} \cdot [1 - N(d_2)] - A \cdot [1 - N(d_1)] \quad [13]$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln(A/F) - \ln P(i, T) + (\mathbf{s}^2 / 2) \cdot T}{\mathbf{s} \cdot \sqrt{T}} \quad [14]$$

$$d_2 = d_1 - \mathbf{s} \cdot \sqrt{T} \quad [15]$$

siendo $N(\cdot)$ la función de distribución de una variable aleatoria $N(0,1)$. La volatilidad $\mathbf{s}^2 \cdot T$ tiene una interpretación diferente a la del modelo de Black-Scholes, definiéndose como:

$$\mathbf{s}^2 - T = \int_0^T [\mathbf{s}_A^2 + \mathbf{s}_p^2(t) - 2\mathbf{r}\mathbf{s}_A\mathbf{s}_p(t)]dt \quad [16]$$

donde \mathbf{s}_A^2 es la varianza del rendimiento (expresado en tanto nominal capitalizable continuamente) del activo subyacente $\mathbf{s}_p^2(t)$ es la varianza del rendimiento (expresado en los mismos términos que el anterior) del bono libre de riesgo y \mathbf{r} es la correlación entre los rendimientos del activo y el bono.

A partir de las expresiones anteriores es posible determinar la duration derivando la ecuación [10] respecto de \mathbf{i} y dividiendo por el valor de \mathbf{B} :

$$\frac{\partial B}{\partial i} = -RT + RT [1 - N(d_2)] = -RTN(d_2) \quad [17]$$

$$D_B = \frac{-(\partial B / \partial i)}{B} \quad - \quad D_B = TN(d_2) \left(\frac{R}{B} \right) \quad [18]$$

donde $N(d_2)$ se interpreta como la probabilidad de ejercicio de la opción de venta, D_B la duration del bono arriesgado, B el precio del bono, T el periodo hasta la amortización y R el valor actual del valor nominal de la deuda. Aunque $N(d_2) < 1$ y $R/B > 1$ se puede demostrar que $N(d_2)R/B < 1$ por lo que según este modelo el riesgo de insolvencia provoca una disminución en la duration.

IV.- Resumen y conclusiones.

Los estudios empíricos realizados hasta el momento no permiten dar una conclusión determinante acerca del efecto que tiene el riesgo de insolvencia sobre la duration. Por otra parte, si está contrastada la validez de esta medida para la gestión del riesgo de interés en el caso de los bonos libres de riesgo.

En la medida que las tasas internas de rendimiento de los bonos empresariales, sujetos al riesgo de insolvencia, sean semejantes en sus movimientos a los bonos del gobierno, la duration será una buena medida del riesgo. Si por el contrario, el diferencial de insolvencia específico para el bono es muy variable frente a movimientos del mercado en distintos niveles de rendimiento, la duration no sería una medida adecuada del riesgo.

Los modelos teóricos planteados utilizan una metodología que interrelaciona ambos factores de riesgo permitiendo obtener la duration de los títulos arriesgados.

Bierwag introduce el concepto de equivalentes de certeza, sustituyendo los flujos arriesgados por flujos ciertos. Sin embargo, no plantea el momento en el que se puede producir la insolvencia, al tiempo que considera que existe un movimiento paralelo de los tipos de interés arriesgados frente a los tipos de interés libres de riesgo.

El modelo anterior es ampliado por Bierwag y Kaufman introduciendo distintas posibilidades sobre el momento en el que se puede producir la insolvencia, lo que permite obtener distintos valores de la duration, posibilitando la contrastación de los resultados obtenidos en distintos mercados.

El modelo de Abbas y Pluyène se caracteriza por considerar la probabilidad de insolvencia, que supone constante para todos y cada uno de los periodos. Al igual que los dos modelos anteriores opera con el diferencial de rendimiento (diferencia entre la TIR de los bonos sujetos al riesgo de insolvencia y la TIR de los bonos libres de riesgo), y considera movimientos paralelos de la estructura temporal de los tipos de interés.

Por último, Chance, se basa en un modelo estocástico que tiene en cuenta las variaciones de valor por unidad de tiempo e introduce también la teoría de opciones para la valoración de la deuda con riesgo. Trabaja con bonos cupón cero y supone que la insolvencia solamente se produce en el momento de la amortización del título si el valor de la empresa es menor al valor nominal de la deuda. El modelo, a su vez supone una estructura temporal de los tipos de interés plana.

La decisión sobre la duration que se ha de utilizar en la gestión de una cartera de bonos con riesgo de insolvencia no es la única cuestión a plantearse. Es necesario considerar también los movimientos de la estructura temporal con riesgo de impago, es decir, puede que las primas por insolvencia sean independientes de los movimientos de los tipos de interés libre de riesgo, de forma que el riesgo de insolvencia añadido al riesgo de interés puede representar fuentes adicionales de riesgo.

V. Bibliografía.

- Abbas, M. y J.M. Pluyène**(1991):*La Duration et le Risque de Taux*. Edit. Matif, Paris.
- Bierwag, G.O.**(1991):*Análisis de la Duración. La Gestión del riesgo de tipos de interés*, Ed. Alianza Economía y Finanzas. Madrid.
- Bierwag, G.O. y G.G. Kaufman**(1988):"Durations of non-default-free securities" en *Financial Analysts Journal*, Julio-Agosto.
- Black, F. and M. Scholes**(1973):"The pricing of options and corporate liabilities" en *Journal of Political Economy*", nº 81.
- Chance, D.M.**(1990):"Default Risk and the duration of zero coupon bonds", en *The Journal of Finance*, Vol. XLV, nº 1, Marzo.
- Duvall, R.M. y J.M. Cheney**(1984):" Bond Beta and Default risk", en *The Journal of Financial Research*, Vol. VII, nº 3, Fall.
- Escribano, F.; P. Gento y E. Navarro**(1995):"Duration y riesgo de insolvencia" en *III Foro de Finanzas*, Deusto, 30 Nov-1 Dic, Bilbao.
- Fisher, L. y R.L. Weil**(1971): "Coping with the risk of interest rate fluctuations: Returns to bondholders from Naïve and optimal strategies", *Journal of Business*, octubre.
- Gultekin, N.B. y R.J. Rogalski**(1984):"Alternative Duration specifications and the measurement of basic risk: empirical test" en *Journal of Business*, vol. 57, nº 2.
- Hicks, J.R.**(1939):*Value and Capital*, Clarendon Press, Oxford.
- Hopewell, M.H. y G.G. Kaufman**(1973):"Bond price volatility: a generalized respecification" en *The American Economic Review*, Septiembre.
- Macaulay, F.**(1938):*Some theoretical problems suggested by the movement of interest rates, bond yields and stocks prices in the United States since 1856*, Columbia University Press, Nueva York.
- Merton, R.C.**(1973):"Theory of rational option pricing" en *Bell Journal of Economics and Management Science*, nº4.
- Merton, R. C.**(1974):"On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates, en *The Journal of Finance*, nº 29.
- Navarro, E. y J.M. Nave**(1994):"Dynamic immunization and transaction costs" en *4th AFIR International Colloquium*, 20-22 Abril, Orlando.
- Redington, F.M.** (1952): "Review of the Principle of Life-Office Valuations", *Journal of the Institute of Actuaries*, vol. 18.