

# **Planes de Pensiones del Sistema de Empleo: Prestación Definida frente a Aportación Definida**

Francisco José Peláez Feroso \*  
Dpto. Economía Aplicada (Matemáticas)  
Universidad de Valladolid

## **1 Introducción.**

La Ley reguladora de los Planes y Fondos de Pensiones del 8/6/87 y el Reglamento del 30/9/88, definen un Plan de Pensiones, como un conjunto de normas que describen los derechos y obligaciones de quienes intervienen en él y que tiene por objeto garantizar a sus partícipes y beneficiarios determinadas prestaciones a percibir ante el acaecimiento de determinadas contingencias como, jubilación, viudedad, orfandad e invalidez entre otras. Igualmente, especifican un Fondo de Pensiones como un patrimonio creado al exclusivo objeto de dar cumplimiento al Plan de Pensiones.

Entre los diferentes tipos de planes de pensiones existentes analizamos el del Sistema de Empleo, que se caracteriza porque la empresa promotora del plan aporta sistemática y anualmente una determinada cuantía en la cuenta de posición de cada partícipe, trabajador de la empresa afiliado al plan. Este tipo de planes pueden ser de Prestación Definida (PD) y de Aportación Definida (AD).

En los planes de Aportación Definida cada partícipe tiene asignada una cuenta particular en el fondo del plan de pensiones, en la que se materializan las aportaciones sistemáticas realizadas por el promotor del plan o por el mismo partícipe. En nuestro caso las efectúa exclusivamente el empresario. Los niveles de prestación por pensión de jubilación en este tipo

---

\*Agradezco los comentarios realizados en este trabajo por el profesor Dr. Julio G. Villalón. Los posibles errores del mismo son responsabilidad única del autor.

de planes dependen de las aportaciones totales realizadas y de los rendimientos acumulados por las inversiones de las mismas hasta el momento de la jubilación de cada partícipe. Por tanto, las prestaciones de jubilación están totalmente financiadas y la fuente de riesgo más importante para el trabajador reside en el comportamiento de las inversiones del fondo.

En los planes de Prestación Definida la prestación por pensión de jubilación del partícipe se establece previamente y en general, en función del número de años de servicio activo en la empresa y/o del salario medio percibido en los últimos años de actividad. En este caso sí existe riesgo respecto, a las prestaciones a percibir por cada trabajador ,desde el momento de su jubilación.

## **2 Modelo de Optimización Intertemporal de varios períodos**

En este trabajo pretendemos realizar un análisis comparativo de los planes del Sistema de Empleo de Prestación Definida y de Aportación Definida utilizando la teoría tradicional de la elección del consumidor que es perfectamente adecuada para describir la elección intertemporal. Los objetos de la elección son las corrientes de consumo a lo largo del tiempo. Suponemos que el trabajador tiene unas determinadas preferencias respecto al consumo representadas por una determinada función de utilidad que es aditiva respecto del tiempo.

La finalidad de este modelo es analizar el bienestar de cada trabajador asociado al plan, suponiendo que toda la incertidumbre salarial es específica del trabajador y perfectamente diversificable para la empresa promotora del mismo. Según esto, la empresa escogerá aquel plan de pensiones que teniendo el mismo horizonte temporal y el mismo valor actual de los costes, condición de indiferencia para la empresa, maximice la utilidad del trabajador en términos del consumo durante toda su trayectoria laboral.

Con el fin de modelizar el comportamiento de cada trabajador en la empresa a lo largo del tiempo, aplicamos el método de programación dinámica para resolver los problemas de optimización en los que se tienen en cuenta varios períodos, descomponiéndolos en problemas de optimización de dos períodos. Consideramos un horizonte temporal de  $T$  períodos en los que el trabajador, partícipe del plan, realiza una actividad profesional durante los  $(T - 1)$

primeros períodos, se jubila en el momento  $T$  y tiene derecho a recibir una prestación por jubilación únicamente. Para ello, definimos las variables y parámetros más significativas del mismo:

Los salarios que cada trabajador de la empresa devenga durante los  $T$  años de actividad hasta su jubilación vienen dados por  $\bar{S} = (S_0, S_1, \dots, S_{T-2}, S_{T-1})$ .

Los consumos que realiza el trabajador en cada momento de tiempo del horizonte temporal del modelo son  $\bar{C} = (C_0, C_1, \dots, C_{T-1}, C_T)$ .

Los tantos de interés que rigen en cada uno de los períodos del horizonte temporal analizado son  $\bar{i} = (i_0, i_1, \dots, i_{T-1})$ , donde  $i_0$  expresa el tanto de interés real aplicado en el intervalo  $(0, 1)$  y es conocido en  $(t = 0)$ . Los tantos de interés que actúan en los siguientes períodos son desconocidos e inciertos hasta el comienzo de los mismos. Los factores de capitalización utilizados en el intervalo temporal analizado son  $R_0 = 1 + i_0$ ,  $R_1 = 1 + i_1, \dots$ ,  $R_{T-1} = 1 + i_{T-1}$ .

Los tantos de rendimiento de las inversiones de los activos del plan que rigen en los períodos del análisis temporal son  $\bar{r} = (r_0, r_1, \dots, r_{T-1})$ , donde  $r_0$  expresa el tanto de rendimiento real para el intervalo  $(0, 1)$  y es conocido en  $(t = 0)$ . Los tantos de rendimiento de las inversiones que rigen los siguientes períodos son desconocidos e inciertos hasta el comienzo de los mismos. Los factores de capitalización correspondientes a los distintos períodos para estos rendimientos son  $Z_0 = 1 + r_0$ ,  $Z_1 = 1 + r_1, \dots$ ,  $Z_{T-1} = 1 + r_{T-1}$ .

Las funciones de actualización sin riesgo para los distintos períodos del horizonte temporal del modelo son  $V(0,1) = 1/R_0$ ,  $V(0,2) = 1/(R_0 R_1), \dots$ ,  $V(0,T) = 1/(R_0 R_1 \cdots R_{T-1})$ .

Las funciones de actualización con riesgo para los distintos períodos del modelo analizado son  $V(0,1) = 1/R_0$ ,  $V(0,2) = 1/(R_0 E(R_1)), \dots$ ,  $V(0,T) = 1/(R_0 E(R_1) \cdots E(R_{T-1}))$ . Cuando la incertidumbre salarial para la empresa sea perfectamente diversificable, entonces estas funciones coincidirán con los factores de actualización sin riesgo descritos anteriormente.

Suponemos que cada trabajador dispone de una riqueza inicial de  $M_0$  y que por el efecto del proceso ahorro-inversión, los recursos financieros disponibles de cada trabajador en los diversos períodos son  $\bar{M} = (M_0, M_1, \dots, M_{T-1}, M_T)$ .

La prestación por pensión de jubilación pagadera en  $(t = T)$ , momento en que tiene lugar la jubilación del trabajador, viene expresada por  $B_T$ .

El valor actual en  $(t = 0)$  de las contribuciones anuales de la empresa en los planes de Aportación Definida le denotamos por  $^{AD}B_0$  y su valor final en  $(t = T)$  por  $^{AD}B_T$ .

El valor actual en  $(t = 0)$  de la prestación proyectada de pensión en los planes de Prestación Definida le expresamos por  $^{PD}B_0$  y su valor final en  $(t = T)$  por  $^{PD}B_T$ .

En este modelo, imponemos las siguientes hipótesis para el análisis de los planes de pensiones del Sistema de Empleo en sus modalidades de Prestación y Aportación Definidas:

- Consideramos los mercados de capitales incompletos como, Bodie et al. (1988), de lo que se deduce que existe incertidumbre tanto en los salarios a percibir por cada trabajador como en los tantos de interés utilizados en el modelo, lo que hace que el diseño del plan sea fundamental desde el punto de vista del trabajador. Si los mercados fueran completos en el sentido expuesto por Arrow/Debreu, Varian (1992), la elección del tipo de plan sería irrelevante, puesto que en este caso el trabajador podría hacer uso de títulos-valores para conseguir una posición óptima.

- Los salarios explícitos a percibir por el trabajador en ambos tipos de planes son los mismos y al comienzo del plan, por simplicidad, asumimos que  $E_0(S_j) = S_0 \forall j = 1, \dots, T-1$ .

- La prestación por pensión de jubilación para un plan de Prestación Definida,  $^{PD}B^T$ , es el montante equivalente a la cuantía del salario devengado a favor del trabajador en el momento  $(T-1)$  y le representamos por  $S_{T-1}$ . Por contra, la prestación por pensión de jubilación para un plan de Aportación Definida,  $^{AD}B_T$ , es la suma capitalizada de las aportaciones realizadas por el empresario y de los rendimientos generados por las mismas hasta el momento de la jubilación

de cada trabajador,

- La evolución salarial y los rendimientos de las inversiones del plan no están correlacionados sino que son independientes.

- Las prestaciones a percibir por los trabajadores en el momento de su jubilación son inciertas, como consecuencia de que los salarios, los tantos de interés aplicados y los tantos de rendimiento de las inversiones son aleatorios.

- El trabajador afiliado al plan es un decisor adverso al riesgo, por lo que representamos sus preferencias subjetivas respecto al consumo por medio de una función de utilidad logarítmica creciente y cóncava, propiedades que caracterizan adecuadamente a esta clase de inversor.

- La empresa promotora del plan es un inversor financiero que puede ser o no indiferente al riesgo, según que la incertidumbre salarial sea o no diversificable para la misma.

### **3 Análisis de las modalidades de Planes de Pensión.**

Una vez descrito el modelo, las hipótesis y las principales variables y parámetros del mismo, calculamos para ambas modalidades de planes una serie de funciones que los caracterizan.

En un plan de Prestación Definida, la empresa garantiza a cada trabajador una prestación por pensión equivalente al salario percibido en el último año de su actividad profesional, por contra, para un plan de Aportación Definida, no existe garantía alguna respecto a tal prestación, únicamente la empresa se compromete a aportar anualmente a la cuenta del trabajador una fracción predeterminada de su salario  $K_t$ . Esta función la definimos  $\forall t = 0, 1, \dots, T-1$ , como:

$$K_0 = \frac{1}{T} V(0, T), \quad K_1 = \frac{1}{T} \left[ \frac{V(0, T)}{V(0, 1)} \right], \dots, \quad K_{T-1} = \frac{1}{T} \left[ \frac{V(0, T)}{V(0, T-1)} \right]$$

Consideramos los coeficientes de ponderación iguales a  $1/T \quad \forall t = 0, 1, \dots, T-1$ , de tal forma

que su suma sea la unidad, con el fin de garantizar la condición de indiferencia para la empresa, es decir, que el valor actual del coste en un plan de Aportación Definida coincida con el valor actual del coste en un plan de Prestación Definida.

El valor actual de la prestación a percibir por el trabajador en el momento de su jubilación en un plan de Prestación Definida se expresa por:

$${}^{PD}B_0 = E_0(S_{T-1})V(0,T) = S_0V(0,T) \quad (1)$$

Del mismo modo, el valor actual de las aportaciones realizadas por la empresa en la cuenta de posición de cada trabajador en un plan de Aportación Definida viene dado por:

$$\begin{aligned} {}^{AD}B_0 &= K_0S_0 + K_1E_0(S_1)V(0,1) + \dots + K_{T-1}E_0(S_{T-1})V(0,T-1) \\ &= \frac{1}{T}V(0,T)S_0 + \frac{1}{T}\left[\frac{V(0,T)}{V(0,1)}\right]S_0V(0,1) + \dots + \frac{1}{T}\left[\frac{V(0,T)}{V(0,T-1)}\right]S_0V(0,T-1) \\ &= S_0V(0,T) \end{aligned} \quad (2)$$

En base a la hipótesis del modelo de que  $S_0 = E(S_1) = \dots = E(S_{T-1})$ , comprobamos que para ambas modalidades de planes se verifica la condición de indiferencia para la empresa, que es el fundamento del que partimos para analizar ambos planes en términos de utilidad.

A continuación, determinamos el valor final de la prestación a percibir por el trabajador en el momento de su jubilación en un plan de Prestación Definida:

$${}^{PD}B_T = S_{T-1} \quad (3)$$

Igualmente, el valor final de las contribuciones periódicas realizadas por la empresa en un plan de Aportación Definida y que constituyen la prestación por pensión de jubilación viene dado por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} {}^{PD}B_T &= \frac{1}{T}V(0,T)S_0Z_0E(Z_1)\dots E(Z_{T-1}) + \frac{1}{T}\left[\frac{V(0,T)}{V(0,1)}\right]S_1Z_1E(Z_2)\dots E(Z_{T-1}) \\ &\quad + \dots + \frac{1}{T}\left[\frac{V(0,T)}{V(0,T-1)}\right]S_{T-1}Z_{T-1} \end{aligned}$$

Si los tantos de rendimiento de las inversiones coinciden con los tantos de interés aplicados, la anterior expresión se convierte en:

$${}^{AD}B_T = \frac{1}{T}(S_0 + S_1 + \dots + S_{T-1}) \quad (4)$$

Observamos que aunque se verifique la condición de indiferencia para la empresa de que los valores actuales ex-ante sean iguales, las prestaciones por pensiones esperadas en T sólo serán equivalentes en ambos planes de pensiones si los salarios devengados en favor del trabajador en cada período del horizonte temporal analizado coinciden con los estimados.

Teniendo en cuenta la hipótesis de que los mercados son incompletos y la condición de indiferencia de la empresa, comprobamos de forma independiente la incidencia que tiene la incertidumbre de la evolución salarial y de los tantos de interés respecto de la prestación de jubilación en ambas modalidades de planes y analizamos por separado cada una de ellas suponiendo que la empresa promotora del plan trata de determinar los consumos óptimos que maximizan el bienestar del trabajador en términos utilidad.

### 3.1 Tantos de interés inciertos

En este apartado suponemos que la evolución de los salarios es conocida e independiente de los tantos de interés y que la evolución de los tantos de interés aplicados y de los tantos de rendimiento de las inversiones coinciden y es desconocida en el momento inicial en el que se realiza el contrato de pensión.

El análisis se basa en determinar el bienestar, que en términos de consumo, reporta a cada trabajador cada uno de los tipos de planes. Para ello, utilizamos un modelo de optimización intertemporal en el que se emplea, para representar las preferencias subjetivas del consumo en el tiempo de cada partícipe, un tipo específico de función de utilidad que es la logarítmica, citada anteriormente, que por sus propiedades representa adecuadamente la aversión al riesgo que caracteriza al trabajador. Esta función de utilidad logarítmica viene representada por la siguiente expresión:

$$U_0 = (C_0, \dots, C_T) = \log(C_0) + E_0 \left\{ \sum_{n=1}^T \log(C_n) \right\}$$

Para determinar los niveles de consumo óptimos que maximizan el bienestar del trabajador, resolvemos el problema de optimización intertemporal para T períodos recursivamente, transformándolos en una sucesión de problemas de optimización de dos períodos. En primer lugar, analizamos el período (T - 1, T). Se puede ver que en el momento (t = T - 1) se

resuelve la incertidumbre, ya que tanto  $S_{T-1}$  como  $R_{T-1}$  dejan de ser inciertos para ser conocidos. En este caso, la función de utilidad asociada a este período es:

$$U_{T-1}(C_{T-1}, C_T) = \log(C_{T-1}) + \log(C_T)$$

Igualmente, la función de utilidad asociada al momento final del horizonte temporal de este modelo es:  $U_T(C_T) = \log(C_T)$ . En este momento, el trabajador consumirá todos sus recursos financieros disponibles incluida la prestación por pensión que percibirá en ese momento al jubilarse y que vienen representados por la siguiente restricción presupuestaria :

$$C_T = (M_{T-1} + S_{T-1} - C_{T-1})R_{T-1} + B_T$$

Este problema de optimización se puede resolver por el método directo o bien por el método de los multiplicadores de Lagrange. A continuación, aplicando este último método, determinamos los consumos óptimos para el período (T - 1, T) maximizando la función objetivo condicionada a la restricción presupuestaria:

$$\begin{aligned} \max_{C_{T-1}, C_T} U(C_{T-1}, C_T) &= \log(C_{T-1}) + \log(C_T) \\ \text{s.a. : } M_T = C_T &= (M_{T-1} + S_{T-1} - C_{T-1})R_{T-1} + B_T \end{aligned} \quad (5)$$

La función lagrangiana del problema de optimización de (5) es:

$$\begin{aligned} L(C_{T-1}, C_T, I) &= U(C_{T-1}, C_T) - I[C_T - (M_{T-1} + S_{T-1} - C_{T-1})R_{T-1} - B_T] \\ &= \log(C_{T-1}) + \log(C_T) - I[C_T - (M_{T-1} + S_{T-1} - C_{T-1})R_{T-1} - B_T] \end{aligned}$$

donde  $\lambda$  es el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción presupuestaria.

La condición necesaria de óptimo viene dada por las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial L}{\partial C_{T-1}} = \frac{1}{C_{T-1}} - IR_{T-1} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial C_T} = \frac{1}{C_T} - I = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial I} = C_T - (M_{T-1} + S_{T-1} - C_{T-1})R_{T-1} - B_T = 0$$

De las dos primeras condiciones obtenemos que  $C_T^* = R_{T-1}C_{T-1}^*$  y sustituyendo ésta expresión en la última condición de óptimo determinamos los consumos del período:

$$R_{T-1}C_{T-1}^* - (M_{T-1} + S_{T-1} - C_{T-1}^*)R_{T-1} - B_T = 0$$

$$\begin{cases} C_{T-1}^* = \frac{(M_{T-1} + S_{T-1})R_{T-1} + B_T}{2R_{T-1}} = \frac{(M_{T-1} + S_{T-1}) + \frac{B_T}{R_{T-1}}}{2} \\ C_T^* = R_{T-1} \frac{\left((M_{T-1} + S_{T-1}) + \frac{B_T}{R_{T-1}}\right)}{2} = \frac{(M_{T-1} + S_{T-1})R_{T-1} + B_T}{2} \end{cases}$$

Si sustituimos respectivamente en estas expresiones el valor de las prestaciones dadas por (3) y (4) para cada tipo de plan tenemos:

$$\begin{cases} {}^{PD}C_{T-1}^* = \frac{M_{T-1} + S_{T-1} + \frac{S_{T-1}}{R_{T-1}}}{2} \\ {}^{PD}C_T^* = \frac{(M_{T-1} + S_{T-1})R_{T-1} + S_{T-1}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} {}^{AD}C_{T-1}^* = \frac{M_{T-1} + S_{T-1} + \frac{1}{T}(S_0 + \dots + S_{T-1})}{2} \\ {}^{AD}C_T^* = \frac{(M_{T-1} + S_{T-1})R_{T-1} + \frac{1}{T}(S_0 + \dots + S_{T-1})}{2} \end{cases}$$

La diferencia entre estas ecuaciones refleja la característica de diversificación salarial de los planes de Prestación Definida respecto de los de Aportación Definida, en los que el consumo depende de la suma ponderada de los salarios percibidos por el trabajador durante toda su trayectoria profesional. En este tipo de planes el riesgo para el trabajador es más reducido al depender la prestación de jubilación de los salarios medios y no exclusivamente del percibido en el momento anterior al de su jubilación.

Una vez determinados los niveles de consumo óptimos para este período, los sustituimos en la función objetivo y calculamos la correspondiente función de utilidad indirecta, Varian (1.992), que representa la utilidad máxima percibido por el trabajador en términos de bienestar y que está en relación con su riqueza disponible en este período.

La utilidad indirecta para un plan de Prestación Definida se denota por:

$$\begin{aligned} {}^{PD}V_{T-1}(M_{T-1}, S_{T-1}) &= \log({}^{PD}C_{T-1}^*) + \log({}^{PD}C_T^*) \\ &= \log \frac{1}{2} \left( M_{T-1} + S_{T-1} + \frac{S_{T-1}}{R_{T-1}} \right) + \log({}^{PD}C_{T-1}^* R_{T-1}) \\ &= 2 \log \frac{1}{2} \left( M_{T-1} + S_{T-1} + \frac{S_{T-1}}{R_{T-1}} \right) + \log(R_{T-1}) \end{aligned} \quad (6)$$

La utilidad indirecta para un plan de Aportación Definida se representa por:

$$\begin{aligned}
 {}^{AD}V_{T-1}(M_{T-1}, S_{T-1}) &= \log({}^{AD}C_{T-1}^*) + \log({}^{AD}C_T^*) \\
 &= \log \frac{1}{2} \left( M_{T-1} + S_{T-1} + \frac{1}{TR_{T-1}} \sum_{j=0}^{T-1} S_j \right) + \log({}^{AD}C_{T-1}^* R_{T-1}) \\
 &= 2 \log \frac{1}{2} \left( M_{T-1} + S_{T-1} + \frac{1}{TR_{T-1}} \sum_{j=0}^{T-1} S_j \right) + \log(R_{T-1})
 \end{aligned} \tag{7}$$

Para calcular el consumo óptimo para el período (T - 2, T - 1) procedemos de igual forma, pero en este caso la utilidad correspondiente viene dada por la función de utilidad indirecta. Si el trabajador decide consumir  $C_{t-1}^*$  en el momento (t = T - 2), en el momento (t = T - 1) tendrá una riqueza expresada por:

$$M_{T-1} = (M_{T-2} + S_{T-2} - C_{T-2}^*)R_{T-2}$$

Para el plan de Prestación Definida, esta riqueza le reportará al trabajador una utilidad indirecta representada por:

$${}^{PD}V_{T-2}(M_{T-2}, S_{T-2}) = \max \left\{ \log({}^{PD}C_{T-2}^*) + E_0 \left[ {}^{PD}V_{T-1}(M_{T-1}, S_{T-1}) \right] \right\} \tag{8}$$

Reemplazando la función de utilidad indirecta ya calculada  ${}^{PD}V_{T-1}(M_{T-1}, S_{T-1})$  en la expresión anterior resulta:

$${}^{PD}V_{T-2}(M_{T-2}, S_{T-2}) = \max \left\{ \log({}^{PD}C_{T-2}^*) + E_0 \left[ 2 \log \frac{1}{2} \left( M_{T-1} + S_{T-1} + \frac{S_{T-1}}{R_{T-1}} \right) \right] + E_0 \left[ \log(\tilde{R}_{T-1}) \right] \right\}$$

Sustituyendo  $M_{T-1}$  por su valor, calculamos la condición necesaria de óptimo:

$$\frac{1}{{}^{PD}C_{T-2}^*} + \frac{-R_{T-2}}{\frac{1}{2} \left[ (M_{T-2} + S_{T-2} - {}^{PD}C_{T-2}^*)R_{T-2} + S_{T-1} + \frac{S_{T-1}}{R_{T-1}} \right]} = 0$$

De esta ecuación obtenemos  ${}^{PD}C_{T-2}^*$  :

$${}^{PD}C_{T-2}^* = \frac{(M_{T-2} + S_{T-2})R_{T-2} + S_{T-1} + \frac{S_{T-1}}{R_{T-1}}}{3R_{T-2}} \tag{9}$$

Procediendo del mismo modo para el plan de Aportación Definida tenemos que:

$${}^{AD}V_{T-2}(M_{T-2}, S_{T-2}) = \max \left\{ \log({}^{AD}C_{T-2}^*) + E_0 \left[ {}^{AD}V_{T-1}(M_{T-1}, S_{T-1}) \right] \right\} \tag{10}$$

Sustituyendo la función de utilidad indirecta ya calculada  ${}^{AD}V_{T-1}(M_{T-1}, S_{T-1})$  en la expresión

anterior nos queda:

$${}^{AD}V_{T-2}(M_{T-2}, S_{T-2}) = \max \left\{ \log({}^{AD}C_{T-2}^*) + E_0 \left[ 2 \log \frac{1}{2} \left( M_{T-1} + S_{T-1} + \frac{1}{T\tilde{R}_{T-1}} \sum_{j=0}^{T-1} S_j \right) \right] \right. \\ \left. + E_0 [\log(\tilde{R}_{T-1})] \right\}$$

Reemplazando MT-1 por su valor, calculamos la condición necesaria de óptimo:

$$\frac{1}{{}^{AD}C_{T-2}^*} = \frac{-R_{T-2}}{\frac{1}{2} \left[ (M_{T-2} + S_{T-2} - {}^{AD}C_{T-2}^*) R_{T-2} + S_{T-1} + \frac{1}{T\tilde{R}_{T-1}} \sum_{j=0}^{T-1} S_j \right]}$$

De esta ecuación obtenemos  ${}^{AD}C_{T-2}^*$

$${}^{AD}C_{T-2}^* = \frac{(M_{T-2} + S_{T-2})R_{T-2} + S_{T-1} + \frac{1}{T\tilde{R}_{T-1}} \sum_{j=0}^{T-1} S_j}{3R_{T-2}} \quad (11)$$

Estas condiciones, a su vez, pueden utilizarse para determinar  ${}^{AD}V_{T-2}(M_{T-2}, S_{T-2})$ . Por consiguiente, dada la función de utilidad indirecta para cualquier momento  $t \in \{0, \dots, T\}$ , el problema de la optimización intertemporal para T períodos es una secuencia de problemas de optimización de dos períodos.

### 3.2 Evolución salarial incierta

En este caso los rendimientos de las inversiones pueden asegurarse invirtiendo los activos de las pensiones en obligaciones o bonos sin riesgo, por lo que los tanto  $r_0, r_1, \dots, r_{T-1}$  son conocidos en el momento inicial. También suponemos que toda la incertidumbre salarial para la empresa es perfectamente diversificable, por lo que las funciones de actualización con riesgo se traducen en funciones de actualización para los futuros cash-flows sin riesgo. Según estas hipótesis los tantos de interés utilizados coinciden con los tantos de rendimiento de las inversiones por lo que se verifica que  $R_0 = Z_0, R_1 = Z_1, \dots, R_{T-1} = Z_{T-1}$ . En este contexto, las prestaciones por pensión de jubilación para ambos tipos de planes vienen dadas por:

$$\begin{cases} {}^{PD}B_T = S_{T-1} \\ {}^{AD}B_T = \frac{1}{T}(S_0 + S_1 + \dots + S_{T-1}) \end{cases}$$

A su vez, si los salarios reales coinciden con los supuestos las prestaciones esperadas son iguales para ambas modalidades. Bajo estas hipótesis, el plan Aportación Definida aporta un menor riesgo a los partícipes como consecuencia de que su prestación por pensión se calcula en función del salario promedio a recibir por el trabajador durante toda la trayectoria profesional. En este tipo de plan, la diversificación salarial reduce el riesgo del trabajador con respecto al plan de Prestación Definida y permite combinar la incertidumbre salarial a través de la propia empresa y del mercado de valores para limitar el riesgo, lo que no sucede en el otro tipo de plan. Para este caso, la única fuente existente de incertidumbre proviene de la evolución de los salarios ( $S_1, \dots, S_{T-1}$ ).

A modo de ilustración de los desarrollos teóricos anteriores proporcionamos dos ejemplos numéricos tanto en el caso cierto como en el que existe incertidumbre sobre los tantos de interés. En ambos casos hemos supuesto  $M_0 = 100$ ,  $T = 2$ ,  $S_1 = 40$  Y  $S_2 = 50$ . En el caso cierto se han obtenido los siguientes resultados:

$^{PD}V_0(M_0, S_0) = 13.7479$	$^{PD}C_0 = 66.2859$	$^{PD}M_0 = 100$
$^{PD}V_1(M_1, S_1) = 9.5539$	$^{PD}C_1 = 96.9522$	$^{PD}M_1 = 110.571$
$^{PD}V_2(M_2, S_2) = 4.97968$	$^{PD}C_2 = 1453428$	$^{PD}M_2 = 145.428$
$^{AD}V_0(M_0, S_0) = 13.7134$	$^{AD}C_0 = 65.9807$	$^{AD}M_0 = 100$
$^{AD}V_1(M_1, S_1) = 9.52402$	$^{AD}C_1 = 95.5145$	$^{AD}M_1 = 111.029$
$^{AD}V_2(M_2, S_2) = 4.96474$	$^{AD}C_2 = 143.272$	$^{AD}M_2 = 1430272$

A continuación suponemos que el tanto de interés puede tomar únicamente dos valores en cada período, con probabilidad constante. Concretamente, toma el valor 1.5 con probabilidad 0.8 y el valor 1.2 con probabilidad 0.2. En este caso los resultados son:

$^{PD}V_0(M_0, S_0) = 13.6718$	$^{PD}C_0 = 66.7764$	$^{PD}M_0 = 100$
$^{PD}V_1(M_1, S_1) = 9.4265$	$^{PD}C_1 = 95.1656$	$^{PD}M_1 = 105.442$
$^{PD}V_2(M_2, S_2) = 4.955782$	$^{PD}C_2 = 142.283$	$^{PD}M_2 = 142.283$
$^{AD}V_0(M_0, S_0) = 13.6348$	$^{AD}C_0 = 66.4535$	$^{AD}M_0 = 100$
$^{AD}V_1(M_1, S_1) = 9.44061$	$^{AD}C_1 = 93.6577$	$^{AD}M_1 = 105.907$
$^{AD}V_2(M_2, S_2) = 4.94584$	$^{AD}C_2 = 140.588$	$^{AD}M_2 = 140.588$

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] Alexander, G.J. - Sharpe, W. F. (1.989). *Fundaamentals of Investments*. Prentice-Hall, New Yersey.
- [2] Antrás, A. (1.992). *Planes y Fondos de Pensiones*. Eada Gestion, Barcelona.
- [3] Betzuen, Z.A. - Blanco, I.F. (1.989). *Planes y Fondos de Pensiones, su Cálculo y Valoración*. Ediciones Deusto, Bilbao.
- [4] Bodie, Z. - Marcus, A. - Merton, R. (1.988). "Defined Benefit versus Defined Contribution Pension Plans": *Pension in the USA Econoixly*. Bodie, Z. - Shoven, J. - Wise, D. NBER, 139-160. University of Chicago Press, Chicago.
- [5] Charreaux, G. (1.991). *Gestion Financière*. Litec, París,
- [6] Deaton, A. (1.995). *El Consumo*. Alianza Editorial, Madrid.
- [7] Deaton, A. - Muellbauer, J. (1.980). *Econoulics and Consumer Behavior*. Cambridge Unjversity Press, New York.
- [8] Martin, J. D. - Cox, S.H. - MacMinn, R.D. (1.988). *The Theory of Finance: Evidence and Applications*. The Dryden Press, New York.
- [9] Merton, R. C. (1.990). *Continuos-Time Finance*. Basil Blackwell, Massachusetts.
- [10] Pan.ier, H.H. - Willmot, G.E. (1.992). *Insurance Risk Models*. Society of Actuaries, Schaumburg.
- [11] Sundaresan, S. - Zapatero, F. (1.991). "Valuation, Optimal Asset Allocation and Retirement Incentives of Pension Plans". Working Paper. Graduate School of Business. Columbia University, New York.
- [12] Varian, H. R. (1.992). *Análisis Microeconómico*. Antoni Bosch, Barcelona.
- [13] Villalón, J.G. (1.992). *Matemática de las Decisiones Financieras y sus Aplicaciones. TomoI.- Decisiones de Inversión*. Centro de Estudios Ramón Areces, Madrid.
- [14] Winklevoss, H. E. (1.977). *Pension Matheilatics: With Numerical Illustratíons*. Richard D. Irwin, Illinois.