

GENERACIÓN Y ESTUDIO DE LA DISTRIBUCIÓN ARITMÉTICO GEOMÉTRICA MEDIANTE FUNCIONES HIPERGEOMETRICAS UNIVARIANTES.-

Francisco Herrera Cuadra (U. Almería)

Juan Cuadra Carreño (U. Almería)

I.- INTRODUCCIÓN.-

Existen diversos métodos que permiten construir Distribuciones Discretas Univariantes que generalizan los Sistemas de Pearson. El más conocido consiste en variar los coeficientes de la siguiente Ecuación en Diferencias:

$$G(r).f_{r+1} - L(r).f_r = 0 \quad (r \in \mathbb{Z}^+) \quad (*)$$

siendo $L: \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$; $G: \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}$

funciones cualesquiera.

Se sabe por diversos autores, que si L y G son determinados polinomios en r , entonces las Funciones Generatrices de Probabilidad asociadas a las soluciones de la ecuación (*) vienen expresadas por Series Hipergeométricas.

Concretamente, si en la Ecuación en Diferencias (*) tomamos las funciones L y G como los polinomios:

$$\begin{aligned} G(r) &= (g+r)(r+1) \\ L(r) &= (a+r)(b+r).1 \end{aligned} \quad (**)$$

se obtiene la siguiente Ecuación en Diferencias:

$$(g+r).(r+1).f_{r+1} - (a+r).(b+r).1.f_r = 0$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $\gamma \notin \mathbb{Z}^-$

Dicha Ecuación en Diferencias da lugar a una Familia de Funciones que pertenecen al Sistema dado, y que es conocida como **Familia de Distribuciones Discretas Hipergeométricas**.

Para la obtención de las Funciones de Cuantía y de las Funciones Generatrices de Probabilidad de esta Familia, necesitamos utilizar Funciones Hipergeométricas, concretamente la Función Hipergeométrica de Gauss:

$${}_2F_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{g}; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\mathbf{a}]_n \cdot [\mathbf{b}]_n}{[\mathbf{g}]_n} \cdot \frac{z^n}{n!}$$

con $z \in \mathbf{C}; \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{C} \quad / \quad \gamma \neq 0, -1, -2, \dots;$

siendo $[a]_n$ el símbolo de Pochamer o coeficiente hipergeométrico, tal que

$$[a]_n = a \cdot (a+1) \cdot \dots \cdot (a+n-1) \quad \text{y} \quad [a]_0 = 1$$

La Función de Cuantía f_r Solución del Sistema viene dada para $r = 0, 1, 2, \dots$ por:

$$f_r = f_0 \cdot \frac{[\mathbf{a}]_r \cdot [\mathbf{b}]_r \cdot l^r}{[\mathbf{g}]_r \cdot r!} \quad \text{con} \quad f_0 = \frac{1}{{}_2F_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{g}, l)}$$

Análogamente se tiene, que la Función Generatriz de Probabilidad viene dada por:

$$g(t) = \frac{{}_2F_1[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{g}, lt]}{{}_2F_1[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{g}, l]}$$

II.- GENERACIÓN.-

A continuación vamos a generar la Distribución Aritmético Geométrica a partir de la Ecuación (*), para ello sustituimos en los polinomios G y L (**)

$$\mathbf{a} = \frac{1}{d} + 1 \quad \mathbf{b} = 1 \quad \mathbf{g} = \frac{1}{d} \quad \mathbf{l} = c$$

$$\begin{aligned} {}_2F_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{g}, \mathbf{l}) &= {}_2F_1\left(\frac{1}{d} + 1, 1, \frac{1}{d}, c\right) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left[\frac{1}{d} + 1\right]_r \cdot [1]_r}{\left[\frac{1}{d}\right]_r \cdot r!} \cdot c^r = \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{d} + r\right)}{\frac{1}{d}} \cdot c^r = \sum_{r=0}^{\infty} c^r + d \cdot \sum_{r=0}^{\infty} r \cdot c^r = \end{aligned}$$

pero suponiendo $0 < c < 1$

$$\sum_{r=0}^{\infty} r c^r = \sum_{r=0}^{\infty} c^r + \sum_{r=1}^{\infty} (r-1) \cdot c^r = \frac{1}{1-c} + \sum_{r=0}^{\infty} r \cdot c^{r+1} = \frac{1}{1-c} + c \cdot \sum_{r=0}^{\infty} r \cdot c^r$$

luego

$$(1-c) \sum_{r=0}^{\infty} r c^r = \frac{1}{1-c} \Rightarrow \sum_{r=0}^{\infty} r c^r = \left(\frac{1}{1-c}\right)^2$$

así pues:

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{\infty} c^r + d \sum_{r=0}^{\infty} r \cdot c^r &= \frac{1}{1-c} + d \left(\frac{1}{1-c}\right)^2 = \\ &= \frac{1}{1-c} \left(1 + d \frac{1}{1-c}\right) = \frac{1+d-c}{(1-c)^2} \end{aligned}$$

pero como $f_0 = \frac{1}{{}_2F_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{g}, 1)}$ entonces $f_0 = \frac{(1-c)^2}{1+d-c}$

y por tanto la Función de Cuantía se podrá expresar como:

$$f_r = f_0 \cdot \frac{[\mathbf{a}]_r \cdot [\mathbf{b}]_r}{[\mathbf{g}]_r \cdot r!} \cdot I^r = \frac{(1-c)^2}{1+d-c} \cdot \frac{\left[\frac{1}{d} + 1\right]_r \cdot [1]_r}{\left[\frac{1}{d}\right]_r \cdot r!} c^r =$$

$$= \frac{(1-c)^2}{1+d-c} \cdot \frac{\left(\frac{1}{d} + r\right)}{\frac{1}{d}} \cdot c^r = (1+r.d) \frac{(1-c)^2}{1+d-c} \cdot c^r$$

$$\boxed{f_r = (1+r.d)b.c^r} \quad \text{con} \quad b = \frac{(1-c)^2}{1+d-c}$$

Estudiemos a continuación las restricciones que deben cumplir los parámetros c y d para que f_r sea Función de Cuantía.

Por la forma de construcción, es inmediato que $\sum_{r=0}^{\infty} f_r = 1$.

Como además sabemos que $0 < c < 1$, para que $f_r \geq 0$:

$$f_r \geq 0 \Rightarrow (1+r.d) \cdot \frac{(1-c)^2}{1+d-c} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1+r.d \geq 0 \wedge 1+d-c > 0) \vee (1+r.d \leq 0 \wedge 1+d-c < 0)$$

De la primera parte de la disyunción obtendríamos: $d \geq 0$, y de la segunda llegaríamos a que $1 \leq 0$ para $r = 0$, por tanto no podría verificarse.

Como se puede apreciar fácilmente f_r es la Función de Cuantía de una variable aleatoria cuya distribución es Aritmético Geométrica con $a_r = 1 + r.d$ la parte aritmética y $b_r = b.c^r$ la parte geométrica.

III.- GRÁFICAS.-

Se demuestra analíticamente, que la función

$$f(x) = (1 + dx) \frac{(1-c)^2}{1+d-c} \cdot c^x; \quad x \in \mathbf{R}$$

asociada a f_r presenta un Máximo en el punto de abscisa $x = -\left(\frac{1}{L_n c} + \frac{1}{d}\right)$ $d \neq 0$.

Para conseguir que el Máximo sea apreciable al representar f_r se debe verificar la siguiente relación: $c > e^{-d/(d+1)}$

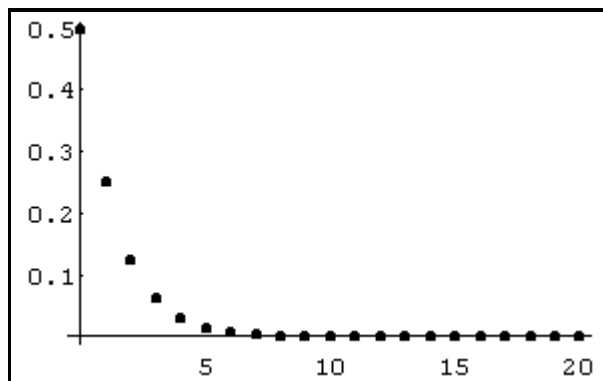
Pasemos a representar esta Función de Cuantía para algunos valores concretos de los parámetros.

I.- Si en $f_r = (1 + r.d) \frac{(1-c)^2}{1+d-c} \cdot c^r$ tomamos $d = 0$, tendremos:

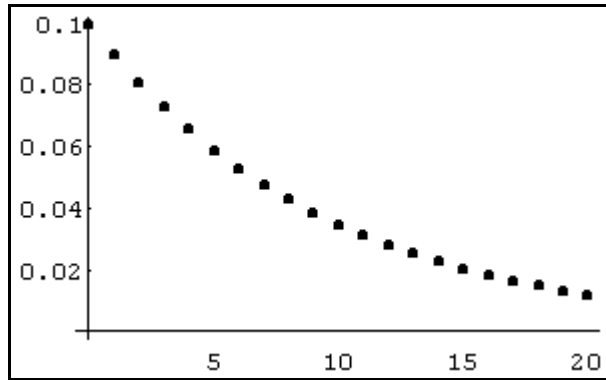
$$f_r = (1-c) \cdot c^r; \quad 0 < c < 1$$

que como sabemos es la Función de Cuantía de una Distribución Geométrica.

Por ejemplo, para $c = 0.5$ la gráfica de la Función de Cuantía sería:



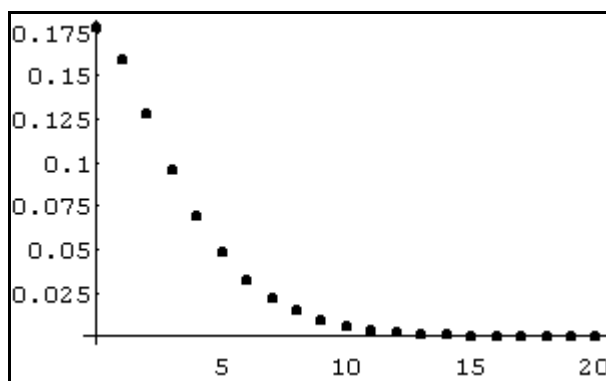
Para $c = 0.9$ la gráfica de la Función de Cuantía sería:



Observemos que en ambas gráficas no se aprecia extremo alguno, como era de esperar por ser $d = 0$.

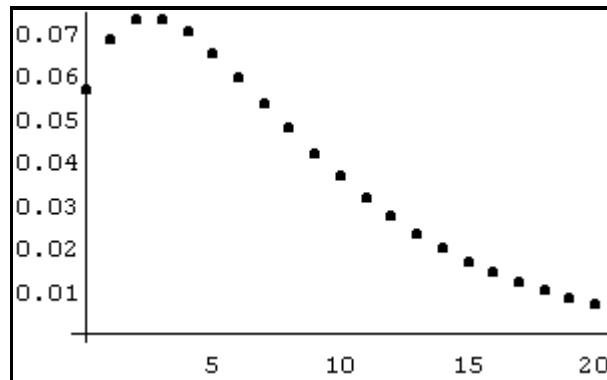
II.- Si en $f_r = (1+r.d) \frac{(1-c)^2}{1+d-c} \cdot c^r$ tomamos $0 < d \leq 1$, tendremos:

Para $d = 0.5$; $c = 0.6$ la gráfica de la Función de Cuantía sería:



Obsérvese que no se aprecia extremo alguno, puesto que los valores de c y d no verifican la relación anterior.

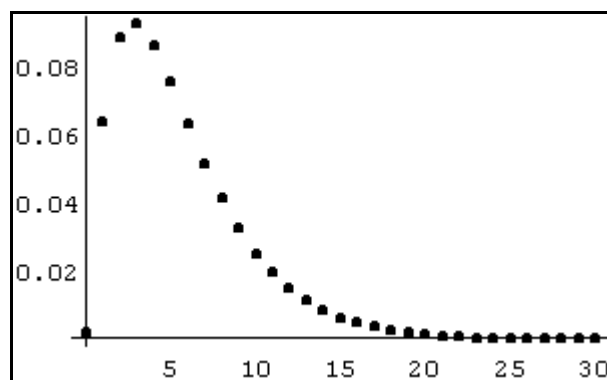
Para $d = 0.5$; $c = 0.8$ la gráfica de la Función de Cuantía sería:



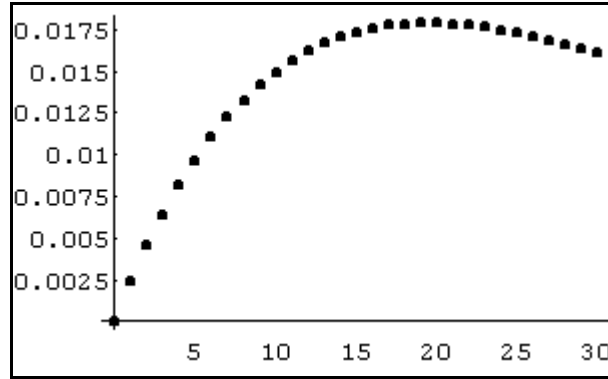
Aquí observamos el extremo, debido a que c y d verifican la relación.

III.- Si en $f_r = (1+r.d) \frac{(1-c)^2}{1+d-c} \cdot c^r$ tomamos $d > 1$, tendremos

Para $d = 50$; $c = 0.7$ la gráfica de la Función de Cuantía sería:



Para $d = 50$; $c = 0.95$ la gráfica de la Función de Cuantía sería:



Observamos que se va desplazando la abscisa del Máximo a la derecha a medida que c se aproxima hacia la unidad

IV.- MOMENTOS.-

A partir de la Función Generatriz de Probabilidad obtendremos los Momentos más importantes. Dada

$$\begin{aligned}
 g(t) &= \frac{{}_2F_1[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{g}, It]}{{}_2F_1[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{g}, I]} = \frac{\sum_{r=0}^{\infty} \frac{[a]_r \cdot [b]_r}{[g]_r \cdot r!} \cdot (It)^r}{{}_2F_1[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{g}, I]} \\
 &= \frac{(1-c)^2}{1+d-c} \cdot \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left[\frac{1}{d}+1\right]_r \cdot [1]_r}{\left[\frac{1}{d}\right]_r \cdot r!} \cdot (ct)^r = \frac{(1-c)^2}{1+d-c} \cdot \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{d}+r\right)}{\frac{1}{d}} \cdot (ct)^r = \\
 &= \frac{(1-c)^2}{1+d-c} \cdot \sum_{r=0}^{\infty} (1+r \cdot d) \cdot (ct)^r = \frac{(1-c)^2}{1+d-c} \cdot \left(\sum_{r=0}^{\infty} (ct)^r + d \cdot \sum_{r=0}^{\infty} r \cdot (ct)^r \right) = \\
 &= \frac{(1-c)^2}{1+d-c} \cdot \left(\frac{1}{1-ct} + \frac{d}{(1-ct)^2} \right) = \frac{(1-c)^2}{1+d-c} \cdot \frac{1+d-ct}{(1-ct)^2}
 \end{aligned}$$

tendremos que

$$\begin{aligned}
 g'(t) &= \frac{(1-c)^2}{1+d-c} \cdot \frac{-c(1-ct)^2 - (1+d-ct)(-2c)(1-ct)}{(1-ct)^4} = \\
 &= \frac{(1-c)^2}{1+d-c} \cdot \frac{-c(1-ct) - (1+d-ct)(-2c)}{(1-ct)^3} = \\
 &= \frac{(1-c)^2}{1+d-c} \cdot \frac{c(1-ct) + 2cd}{(1-ct)^3}
 \end{aligned}$$

de donde

$$g'(1) = \frac{(1-c)^2}{1+d-c} \cdot \frac{c(1-c) + 2cd}{(1-c)^3} = \frac{c(1-c+2d)}{(1+d-c)(1-c)}$$

análogamente

$$\begin{aligned}
 g''(t) &= \frac{(1-c)^2}{1+d-c} \cdot \frac{-c^2(1-ct)^3 - (c(1-ct) + 2cd)(-3c)(1-ct)^2}{(1-ct)^6} = \\
 &= \frac{(1-c)^2}{1+d-c} \cdot \frac{-c^2(1-ct) - (c(1-ct) + 2cd)(-3c)}{(1-ct)^4} = \frac{(1-c)^2}{1+d-c} \cdot \frac{2c^2(1-ct) + 6c^2d}{(1-ct)^4}
 \end{aligned}$$

de donde

$$g''(1) = \frac{(1-c)^2}{1+d-c} \cdot \frac{2c^2(1-c) + 6c^2d}{(1-c)^4} = \frac{2c^2(1-c+3d)}{(1-c)^2(1+d-c)}$$

como

$$E[X] = g'(1); \quad E[X^2] = g''(1) + g'(1) \quad \text{Var}[X] = g''(1) + g'(1) - [g'(1)]^2$$

La Esperanza Matemática y la Varianza de las Distribuciones pertenecientes a este Sistema vienen dadas por:

$$E[X] = \frac{c(1-c+2d)}{(1+d-c)(1-c)}$$

$$Var(X) = \frac{2c^2(1-c+3d)}{(1-c)^2(1+d-c)} + \frac{c(1-c+2d)}{(1+d-c)(1-c)} - \left[\frac{c(1-c+2d)}{(1+d-c)(1-c)} \right]^2;$$

$$Var(X) = \frac{(1+3d)(1-c)^2 + 4cd(1-c) + 2d^2}{(1+d-c)^2(1-c)^2} c$$

BIBLIOGRAFÍA.-

ERDELYI, A. (1953). **Higher transcendental functions**. Vol. I, II, III, Mc. Graw Hill. New York.

FAJARDO CALDERA, M.A. (1985). **Generalización de los sistemas de Pearson discretos**. Universidad de Extremadura.

HERRERIAS PLEGUEZUELO, R. (1976). **Extensión del sistema de distribuciones discretas de Pearson**. Cuadernos Departamento Estadística Matemática. Serie A. nº 3. Facultad de Ciencias. Granada.
Statist. Soc. A, 138, 18-31. , 204-227, 374-384.

JOHNSON, N.L. , KOTZ, S. y KEMP, A.W. (1992). **Univariate Discrete Distributions..** Wiley. New York

KEMP, A.W. (1968). **A wide class of discrete distributions and the associated differential equations**. Sankhya, serie A, 30, 401-410.

ORD, J.K. (1972). **Families of frequency distributions**. Griffin. London.