

Control óptimo de pesquerías multiespecies: determinación de las curvas oferta-demanda

Nancy Dávila Cárdenes

Juan Manuel Martín González

Universidad de Las Palmas de G.C.

Resumen

En este trabajo se aborda el problema de la gestión de una pesquería en la que se explotan dos especies entre las cuales existe una relación de interdependencia del tipo predador-presa. El objetivo será tratar de maximizar el valor actualizado neto de la corriente de beneficios de la teoría del control óptimo que nos va a permitir establecer las ecuaciones de equilibrio oferta-demanda para la pesquería.

1 El modelo biológico

En la mayor parte de la literatura que aborda el problema de la gestión de pesquerías multiespecíficas¹, cuando entre las especies implicadas se da una relación de interdependencia del tipo predador-presa, las ecuaciones fundamentales que describen la dinámica de las poblaciones se basan en la versión modificada del modelo de Lotka-Volterra

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (r_1 - a_1 x - b_1 y)x \\ \dot{y} &= (r_2 - a_2 x - b_2 y)y\end{aligned}\tag{1}$$

¹Larkin (1966), Hannesson (1983), Ragozin y Brown (1985), Long (1991), Feichtinger y Novak (1992), entre otros.

Este tipo de ecuación es una representación adecuada de una situación natural, en la cual, un predador, y , no es totalmente dependiente de una especie, presa, como alimento, y en la cual otros factores que no sean los predadores pueden regular la abundancia de la presa, Larkin (1966).

Una formulación alternativa es propuesta por Leslie (1948), cuyas ecuaciones modifican las anteriores en el siguiente sentido

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (r_1 - \frac{x}{K} - \mu y)x \\ \dot{y} &= (r_2 - \frac{y}{sx})y\end{aligned}\tag{2}$$

La principal diferencia entre ambas formulaciones se encuentra en que, si bien el modelo de Lotka-Volterra asume una capacidad de carga fija para las dos especies, en el último caso, la capacidad de carga es variable para el predador.

En definitiva, la capacidad de carga del predador es función de la densidad de presa existente, que viene dada por el parámetro σ . La relación de interdependencia ecológica viene dada por μ . Esta situación es representativa de una amplia clase de sistemas, May (1979).

1.0.1 Análisis de estabilidad local

Cuando el sistema está en su estado original las dos poblaciones se encontrarán en equilibrio si ⁽³⁾

$$\begin{aligned}\dot{x} = 0 &\Leftrightarrow r_1 x (1 - \frac{x}{K}) - \mu xy = 0 \\ \dot{y} = 0 &\Leftrightarrow r_2 y (1 - \frac{y}{sx}) = 0\end{aligned}$$

de donde obtenemos que

$$\begin{aligned}x_E &= \frac{r_1 K}{r_1 + \mu K} \\ y_E &= sx_E\end{aligned}\tag{4}$$

Analíticamente podemos determinar la estabilidad local del equilibrio en función de la matriz jacobiana del sistema (5)

$$J = \begin{pmatrix} r_1(1 - \frac{2x_E}{K}) - \mu y_E & -\mu x_E \\ \frac{r_2 y_E^2}{s x_E^2} & r_2(1 - \frac{2y_E}{sx_E}) \end{pmatrix}_{(x_E, y_E)}$$

Los signos de las raíces de la ecuación característica de la matriz jacobiana nos permiten

determinar la estabilidad, o inestabilidad, del punto de equilibrio. Así tenemos que

$$\text{Traza } J_E = r_1^2 - r_1 r_2 - r_2 m s K < 0 \quad \forall r_1, r_2, m, s, K > 0 \quad (6)$$

es decir, la traza siempre va a ser negativa para cualquier valor positivo de los parámetros.

Respecto al determinante tenemos que

$$|J_E| = r_1 + m s K > 0 \quad (7)$$

el equilibrio será por tanto un nodo o un foco estable. Además la función de Liapunov de Hsu-Harrison demuestra que el modelo es global y asintóticamente estable, Hallam (1986).

2 El modelo económico

El problema de determinar la política económica óptima implicará el tratar de maximizar el valor presente neto de los beneficios futuros², obtenidos por cada especie, i.e maximizar el valor de la integral

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho t} [P_1 h_1 - C_1(x, h_1) + P_2 h_2 - C_2(x, h_2)] dt \quad (8)$$

sujeto a las restricciones sobre la dinamica de los stocks

$$\begin{aligned} \dot{x} &= r_1 x \left(1 - \frac{x}{K}\right) - m x y - h_1 = g(x) - H(x, y) - h_1 \\ \dot{y} &= r_2 y \left(1 - \frac{y}{S_x}\right) - h_2 = F(x, y) - h_2 \end{aligned} \quad (9)$$

Además imponemos las siguientes restricciones sobre las variables, $x > 0$ e $y > 0$. Respecto a la funcional objetivo se asume comportamiento competitivo así que cada empresa (o unidad pesquera) es precio aceptante para los precios de los inputs y outputs. Inicialmente, no hay barreras de entrada o salida. Suponemos que los precios P_i ($i = 1, 2$) están dados y que los costes de capturar los stocks de la presa y el predador a una tasa h_1 , y h_2 Son, respectivamente, $C_1(x, h_1)$ y $C_2(y, h_2)$ y son funciones convexas en los stocks y las capturas, además son decrecientes en los primeros y crecientes en las segundas.

El problema de determinar la trayectoria temporal de las capturas que maximizan el valor de la integral (8) puede resolverse como un problema de control óptimo. Haciendo uso del Principio del Máximo de Pontryagin, definimos el hamiltoniano

²Otras formulaciones alternativas buscan o bien maximizar la producción sostenible, MSY, o bien la máxima producción económica, MEY. En cualquier caso, los conceptos de MSY y MEY son casos particulares del problema de maximizar el valor presente neto de los beneficios (Silvert y Smith, 1977).

$$H = e^{-pt} [P_1 h_1 - C_1 + P_2 h_2 - C_2] + I_1(t) [g(x) - H - h_1] + I_2(t) [F - h_2]$$

No utilizar la versión corriente del hamiltoniano³, en el análisis a seguir, se debe a que con el planteamiento actual llegamos a un sistema de ecuaciones diferenciales en términos de stocks y capturas que será versátil de transformar en un sistema de ecuaciones oferta-demanda que será la base del análisis posterior.

Siguiendo con el desarrollo del principio del máximo la captura óptima entonces maximiza el hamiltoniano en cada instante de tiempo, sujeto a las condiciones subsidiarias $\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial I_2}$ y

$$\dot{I}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x} \text{ y } \dot{I}_2 = -\frac{\partial H}{\partial y} \text{ de donde derivamos las condiciones necesarias en } x, y, h_1, h_2, \lambda_1 \text{ y } \lambda_2.$$

$$\frac{\partial H}{\partial h_1} = 0 \Rightarrow I_1(t) = e^{-pt} [P_1 - C_{1h_1}(x, h_1)] \quad (10)$$

$$\frac{\partial H}{\partial h_2} = 0 \Rightarrow I_2(t) = e^{-pt} [P_2 - C_{2h_2}(x, h_2)]$$

Las ecuaciones adjuntas generan

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 e^{-pt} C_{1x} - I_1 [g'(x) - H_x] - I_2 F_x \\ \dot{I}_1 e^{-pt} C_{1y} - I_2 F_y + I_1 H_y \end{aligned} \quad (11)$$

Derivando (10) respecto al tiempo y sustituyendo e igualando (11) obtenemos las ecuaciones diferenciales que nos permitirán conocer la evolución temporal de las capturas de cada especie

$$\begin{aligned} \dot{h}_1(t) &= \frac{C_{1x} + (r - (g'(x) - H_x))(P_1 - C_{1h_1}) - (P_2 - C_{2h_2})F_x + C_{1h_1x} \dot{x}}{-C_{1h_1h_1}} \\ \dot{h}_2(t) &= \frac{C_{2x} + (r - F_y)(P_2 - C_{2h_2}) + (P_1 - C_{1h_1}) \dot{H}_y + C_{2h_2y} \dot{y}}{-C_{2h_2h_2}} \end{aligned} \quad (12)$$

Para el problema de control de horizonte temporal infinito que estamos tratando, la condición de transversalidad, necesaria para proporcionar una condición frontera en los problemas de

³No obstante, la formulación del problema a partir del valor corriente del hamiltoniano producirá resultados análogos, aunque, el sistema de ecuaciones que genera estaría en términos de stock y precios sombra, por supuesto, los equilibrios que se obtendrían para este caso como en el nuestro resultarían equivalentes.

tiempo finito, es reemplazada por la suposición que la solución óptima se aproxima al estado estacionario, Kamien y Schwartz (1991); calculamos la solución de equilibrio intertemporal donde $\dot{x}=0 = \dot{y}$, lo que genera, por un lado,

$$\begin{aligned} h_1 &= g(x) - H(x, y) \\ h_2 &= F(x, y) \end{aligned} \quad (13)$$

y de igual forma para \dot{h}_i tenemos que $\dot{h}_1 = 0 = \dot{h}_2$ dan lugar a

$$\begin{aligned} (r - (g'(x) - H_x))(P_1 - C_{1h_1}) - (P_2 - C_{2h_2})F_x + C_{1x} &= 0 \\ (r - F_y)(P_2 - C_{2h_2}) - (P_1 - C_{1h_1})H_y + C_{2y} &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

despejando $r(P_i - C_{ih_i})$ $i=1,2$ en ambas ecuaciones.

$$\begin{aligned} r - (P_1 - C_{1h_1}) - C_{2x} + (P_2 - C_{2h_2})F_x + (P_1 - C_{1h_1})(g'(x) - H_x) & \quad (15) \\ r - (P_2 - C_{2h_2}) - C_{2y} + (P_2 - C_{2h_2})F_y + (P_1 - C_{1h_1})H_y & \quad (16) \end{aligned}$$

Estas expresiones se pueden interpretar de la siguiente forma, el término de la izquierda de la ecuación (15) refleja la ganancia resultante de invertir la renta procedente de la captura de una unidad adicional de la especie x. Por su parte, el lado derecho representa la ganancia al dejar de pescar la última unidad de la especie x, este término además se descompone en tres sumandos, el primero representa el ahorro futuro en los costes al disponer de un stock mayor, mientras el segundo y el tercer sumando equivalen al valor neto de la captura de la especie x e y, respectivamente, como resultado del cambio en el stock de la especie x. Luego, esta ecuación expresa la equivalencia entre dos oportunidades de inversión, es decir, invertir la renta de pescar una unidad adicional del recurso frente a invertir en el recurso dejándolo de pescar.

Una interpretación análoga puede hacerse de (16), es decir, refleja el coste de oportunidad de invertir en el recurso y frente a invertir la renta procedente de su captura en un bien alternativo. Si despejamos P_i , ($i = 1, 2$), de las ecuaciones anteriores obtenemos

$$P_1 = C_{1h_1} - \frac{C_{1x} - (P_2 - C_{2h_2})F_x}{r - (g'(x) - H_x)} \quad (17)$$

$$P_2 = C_{2h_2} - \frac{C_{2y} - (P_1 - C_{1h_1})H_y}{r - F_y} \quad (18)$$

Considerando que de (13) h_1 , y h_2 se pueden poner como funciones de x e y , la solución de estas ecuaciones proporciona los valores de equilibrio para ambas poblaciones. Estas ecuaciones nos permiten obtener la evolución de las capturas para variaciones en el precio.

3 Resultados

En esta sección presentamos algunos resultados numéricos. Retornando nuestras ecuaciones

de equilibrio
$$P_1 = C_{1h_1} - \frac{C_{1x} - (P_2 - C_{2h_2})F_x}{r - (g'(x) - H_x)} \quad (19)$$

$$P_2 = C_{2h_2} - \frac{C_{2y} - (P_1 - C_{1h_1})H_y}{r - F_y} \quad (20)$$

donde hemos definido $C_1 = a_1 x^{a_1} h_1^{d_1+1}$ y $C_2 = a_2 x^{a_2} h_2^{d_2+1}$ Empezamos considerando el caso en que no hay diferencias en la estructura social de las poblaciones, lo que se traduce en que los costes de pescar una unidad adicional, tanto del predador como de la presa, aumentan en la misma cantidad. Asimismo, los costes cuando aumentan en una unidad ambas poblaciones se reducen en la misma cuantía. Es decir, los parámetros que aparecen en las respectivas funciones de coste de cada especie son iguales. Haremos uso de los siguientes valores de los parámetros

$$a_1 = a_2 = 1 \quad d_1 = d_2 = 1$$

$$a_1 = a_2 = 2 \quad r_1 = r_2 = 1$$

$$v = 0.2 \quad s = 0.5$$

$$K = 5$$

Como tasa de descuento elegimos dos valores $p = 0.05$ y $p = 0.8$

3.1 Precios variando igual para ambas especies

En primer lugar se supondrá que los precios cambian de forma conjunta para ambas especies y que la tasa de descuento es $p = 0.05$. La figura 1 muestra los efectos del crecimiento en los precios sobre los stocks y sobre las capturas. Inicialmente, para un rango de precios bajo, la captura aumenta con el precio para ambas especies, sin embargo, mientras para el predador alcanza un máximo, después del cual decrece mostrando un tramo de pendiente negativa en el que incrementos del precio llevan a una disminución del nivel de las capturas, lo que es definido como sobrepesca biológica, Copes (1970) y Clark (1973); para la presa este efecto no se observa, sino que se aproxima asintóticamente a un máximo, estas curvas serán equivalentes a la curva de oferta descontada de la pesquería de una especie, Clark (1990). Por supuesto, el comportamiento de la captura tiene un efecto sobre los stocks. Mientras el predador decrece de forma continua, la presa, que está sufriendo los efectos combinados de la captura y la

predación, frena su disminución cuando se alcanza el máximo de la captura de su predador. El aumento de la tasa de descuento tiene importantes consecuencias como queda de manifiesto en la figura 2, en este caso hay tramos de pendiente negativa en la curva de oferta para las dos especies, asimismo se acentúa sobre la población de la presa el efecto del máximo de captura en los predadores.

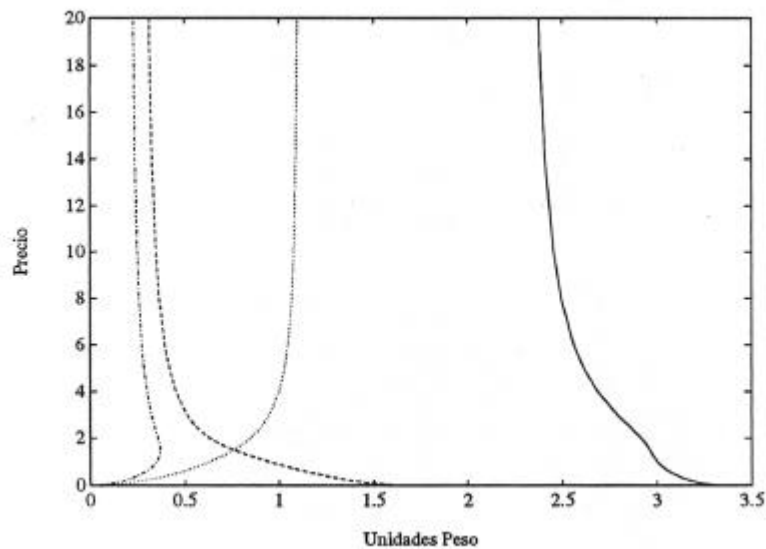


Figura 1: Curva de oferta descontada para el predador.(raya-punto) y la presa (punteada), curva de los stocks, en discontinuo el predador y continuó la presa, cuando $p = 0.05$.

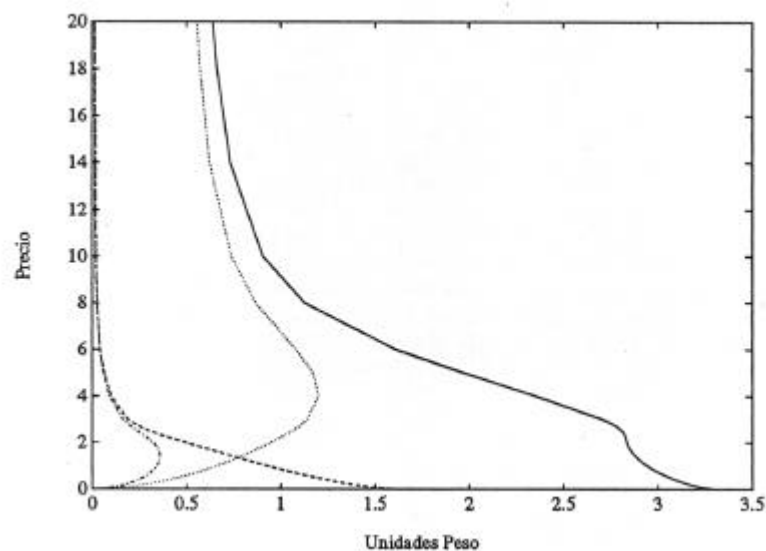


Figura 2: Curva de oferta descontada para el predador (raya-punto) y la presa (punteada), curva de los stocks, en discontinuo el predador y continuo la presa, cuando $p = 0.8$.

Referencias Bibliográficas.

- [1] CLARK, C.W. *Supply and Demand Relationships in Fisheries Management*. Control Theory, Numerical Methods and Computer Systems. Springer-Verlag, 107, (1975).
- [2] CLARK, C.W. "Mathematical *Bioeconomics: The Optimal Management of Renewable Resources*". New York: Wiley (1990, 2 ed.)
- [3] Copes, P. *The Backward-Bending Supply Curve of the Fishing Industry*. Scottish Journal of Political Economy, 40, pp. 69-77 (1970)
- [4] FEICHTINGER, G., NOVAK, A. *A Note on The Optimal Exploitation of Migratory Fish Stocks*. Dynamics and Control, 2, 255-263 (1992)
- [5] HALLAM, T. *Community Dynamics in a Homogeneous Environment*. Mathematical Ecology. Springer-Verlag, (1986)
- [6] HANNESSON, R. *Optimal Harvesting of Ecologically Interdependent Fish Species*. Journal of Environmental Economics and Management, 10, pp.329-345 (1983)
- [7] KAMIEN, M.I., SCHWARTZ, N. "Dynamic Optimization: The *Calculus of Variations* and Optimal Control in Economies and Management". Advances Textbooks in Economics. In Bliss, C.J. e Intriligator, M.D. eds. North-Holland (1991, 2 ed.)
- [8] LARKIN, P.A. *Exploitation in a Type of Predator-Prey Relationship*. Journal of the Fisheries Research Board of Canada, 3, 23, pp. 349-356 (1966)
- [9] LESLIE, P.H. *Some Further Notes on the Use of Matrices in Population Mathematics*. Biometrika, 35 pp.213-245, (1948)
- [10] LONG, N.V. *Optimal Exploitation of Migratory Fish Stocks: The Multiple Species Case*. Essays on the Economics of Migratory Fish Stocks. Studies in Contemporary Economics, pp.55-68 (1991)

- [11] MAY, R.M., **BEDDINGTON**, J.R. **CLARK**, C.W. HOLT, S.J., LAws, R.M.
Management of *Multispecies Fisheries*. Science, 205, 4403, pp. 267-277 (1979)
- [12] RAGOZIN, D.L., BROWN, G.JR. *Harvest Policies* and Nonmarket Valuation in a
Predator-Prey System. Journal of Environmental Economics and Mangement, 12,
pp.155-168 (1985)
- [13] SILVERT, W., SMITH, W.R. Optimal *Exploitation of a* Multi-Species Community.
Mathematical Biosciences, 33, 121-134 (1977)