

Equilibrio de Nash feedback en un juego diferencial no cooperativo de inversión y precio

Julia Martínez Rodríguez y Juan Pablo Rincón Zapatero

Dpto. Economía Aplicada (Matemáticas)

Universidad de Valladolid

1 Introducción

El objeto de este trabajo es estudiar un juego diferencial propuesto por Dockner y Jorgensen (1984), extendiendo el análisis a la clase de estrategias de ciclo cerrado sin memoria. El modelo económico se basa en una empresa que ejerce monopolio sobre un recurso no renovable, y en un competidor que invierte para aumentar su capacidad de producción de un producto sustitutivo. La empresa dominante fija el precio, mientras que la segunda no puede influir en el mismo. La elección del precio determina el nivel de recurso consumido. El objetivo de ambos agentes decisores es maximizar el valor actual de los beneficios netos en un horizonte temporal finito.

En el trabajo determinamos analíticamente el equilibrio de Nash, con hipótesis menos restrictivas que las impuestas por Dockner y Jorgensen (1984), y probamos que verifican la propiedad de consistencia temporal fuerte. Demostramos que son más deseables que las de ciclo abierto, pues proporcionan un mayor pago a ambos jugadores, y que son robustas, en el sentido de que también son óptimas cuando existen perturbaciones estocásticas en el mercado del producto sustitutivo.

Presentamos también aproximaciones numéricas a la solución, en aquellos casos en los que no es posible determinarla de forma explícita.

2 Planteamiento del modelo

Un monopolio posee un recurso no renovable y soporta algún tipo de competición por parte de una industria que produce un producto sustitutivo del recurso. La demanda que afecta al monopolio es una función cóncava del precio que impone, p , y lineal en la tasa de ventas del competidor, x , que suponemos igual a su capacidad:

$$D(p, x) = d(p) - x, \quad d''(p) \leq 0.$$

El funcional objetivo del monopolista es:

$$J_2(u, p) = \int_0^T e^{-r_2 t} ((p - m)D(p))dt + e^{-r_2 T} S_2(y(T)),$$

donde u denota la inversión en capacidad de producción del competidor, $m > 0$ es el coste marginal constante de producción y $r_2 \geq 0$ es el tanto de descuento. Sea $y(t)$ el nivel del recurso gestionado por el monopolio. Su evolución en el tiempo está regida por:

$$\dot{y} = -D(p, x), \quad y(0) = y_0 > 0$$

Por otra parte, el competidor maximiza:

$$J_1(u, p) = \int_0^T e^{-r_1 t} ((p - k(x))x - g(u))dt + e^{-r_1 T} S_1(x(T)),$$

donde k es la función de coste marginal de producción y el coste de la inversión está dado por la función g . Ambas funciones se suponen convexas. La evolución de la capacidad del competidor está determinada por la ecuación diferencial:

$$\dot{x} = u - \mu x, \quad x(0) = x_0 \geq 0,$$

donde se ha considerado posible que exista depreciación de la capacidad, $\mu \geq 0$. Las restricciones que afectan a las variables son: $x \geq 0$, $0 \leq y \leq y_0$, $u \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^+$ y $D \geq 0$.

A continuación consideramos dos bloques diferentes de hipótesis. El primero encaminado a la resolución analítica y el segundo a la resolución numérica, dada la complejidad de las mismas.

Caso A. RESOLUCIÓN ANALÍTICA.

1. $r_1=r_2=0$
2. $d(p)=a-bp$, $a, b > 0$
3. $g(u) = \beta u^2$, $\beta > 0$
4. $k(x) = k > 0$
5. $S_1(x) = s_1 x$, $S_2(y) = s_2 y$, $s_1, s_2 > 0$

Caso B. RESOLUCIÓN NUMÉRICA.

1. $r_1=r_2=0$
2. $d(p)=a-bp-Cp^2$, $a, b, c > 0$
3. $g(u)=e\beta^u - 1$, $\beta > 0$
4. $k(x) = k_1 + k_2 x + k_3 x^2$, $k_1, k_2, k_3 > 0$
- 5- $S_1(x) = s_1 x$, $S_2(y) = s_2 y$, $s_1, s_2 > 0$

Si $s_1 = s_2 = 0$, entonces podría darse la solución analítica sin excesiva dificultad cuando $r_1, r_2 > 0$. También podría considerarse un coste marginal proporcional a la capacidad del competidor y obtener explícitamente la solución. Las hipótesis impuestas en el **Caso A**, generalizan las consideradas por Dockner y Jorgensen (1984): $s_1 = s_2 = \mu = 0$, con la aportación adicional de que mientras estos autores trabajan con estrategias de ciclo abierto, nosotros determinamos las estrategias óptimas de ciclo cerrado sin memoria, que tienen la propiedad de consistencia temporal fuerte.

Con la hipótesis de linealidad sobre la función de pago final del monopolista, y teniendo en cuenta (2), puede simplificarse su funcional objetivo de una forma conveniente, de manera que la variable y no esté presente en su expresión:

$$y(t) = y(T) - \int_t^T D(p(\mathbf{t}), x(\mathbf{t})) dt,$$

y por tanto el funcional objetivo (1) es:

$$J_2(u, p) = \int_0^T (p - m - s_2) D(p, x) dt + s_2 y_o$$

Los coajuntos de estrategias consideradas son de ciclo cerrado sin memoria:

$$u = \{u : [0, T] \times [0, \infty] \times [0, y_o] \rightarrow IR \mid u \text{ de clase } C^1\}$$

$$p = \{p : [0, T] \times [0, \infty] \times [0, y_o] \rightarrow IR + \mid p \text{ de clase } C^1\}$$

Denotaremos a partir de ahora por $(u^*, p^*) \in U \times P$ el equilibrio de Nash y (u, p) su evolución temporal a lo largo de la trayectoria óptima, x^* .

3 Condiciones necesarias y suficientes de optimalidad

Definiendo los hamiltonianos de los jugadores:

$$H^1(x, y, p, u, I_1^1, I_1^2) = (p - k(x))x - g(u) + I_1^1(u - \mathbf{m}x) + I_1^2(-D(p, x))$$

$$H^2(x, y, p, u, I_2^1, I_2^2) = (p - m - s_2)D(p, x) + I_2^1(u - \mathbf{m}x) + I_2^2(-D(p, x)),$$

las condiciones necesarias de optimalidad son:

$$H_u^1 = -g'(u) + I_{11} = 0$$

$$I_1^1 = -(p - k) + k'(x)x + \mathbf{m}I_1^1 - I_1^2 - (x - I_1^2 d'(p)) \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$I_1^2 = (-x + \mathbf{m}I_1^1 + d'(p)I_1^2) \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$I_1^1(T) = S_1'(x(T))$$

$$I_1^2(T) = 0$$

$$H^2 = D(p, x) + (p - m - s_2)d'(p) - I_2^2 d'(p) = 0$$

$$I_2^1 = (p - m - s_2) + I_2^1 \mathbf{m} - I_2^2 - I_2^1 \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x}$$

$$I_2^2 = -I_2^1 \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial y}$$

$$I_2^1(T) = 0$$

$$I_2^2(T) = 0$$

Puesto que la variable y no interviene en el funcional objetivo de los jugadores, se simplificaría considerablemente el estudio de las estrategias óptimas, suponiendo que estas son independientes de dicha variable. Mantenemos por tanto a partir de ahora la dependencia de las estrategias respecto de x , pero las consideramos independientes de y . En este caso, se verifica:

$$I_1^2 \equiv I_2^2 \equiv 0,$$

y la estrategia del monopolio que maximiza su hamiltoniano es independiente del tiempo:

$$D(p, x) + (p - m - s_2)d'(p) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} p^*(x) = \frac{1}{2b}(a + b(m + s_2) - x) & \text{caso A} \\ p^*(x) = \frac{1}{2}(-A + \sqrt{A^2 + 4(B - \frac{x}{3c})}) & \text{caso B} \end{cases}$$

$$\text{Con } A = -2(b - c(m + s_2))/(3c), B = (a + b(m + s_2))/(3c)$$

Dado que p^* es una función cóncava de x y teniendo en cuenta las hipótesis efectuadas sobre las funciones que intervienen, los hamiltonianos maximizados de ambos jugadores son funciones cóncavas respecto a x , verificándose el Teorema de Arrow-Kurz, Melhmann (1988). Por tanto las condiciones necesarias del principio del máximo son también suficientes, en cada uno de los casos considerados.

Para determinar u^* recurriremos a la metodología expuesta en Martínez y Rincón (1995). En aquel trabajo se prueba que la estrategia óptima es solución de clase C^1 de una ecuación cuasilineal de ecuaciones en derivada parciales, cuya expresión para este modelo es:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (u - m) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{g''(u)} \left(\frac{d}{dx} (x(p^*(x) - x(x))) - mg'(u) \right)$$

donde $t = T - \tau$ la condición inicial dada por (6) en la $\tau=0$ es:

$$u(0, x) = (g')^{-1}(S'_1(x))$$

donde $r = T - t$. La condición inicial dada por (6) en $r = 0$ es:

$$u(0, x) = (g')^{-1}(S'_1(x))$$

Recíprocamente, toda solución de (6)-(7) verifica la propiedad de consistencia temporal fuerte, como se prueba en el Teorema 1 del citado trabajo de Martínez y Rincón (1995).

La aplicación del método de las características conduce a la parametrización de la superficie solución mediante curvas determinadas por el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dr}{dt_1} = 1 \\ \frac{dx}{dt_1} = -(u - \mathbf{m}x) \\ \frac{du}{dt_1} = \frac{1}{g'(u)} \left(\frac{d}{dx} (x(p^*(x) - k(x))) - \mathbf{m}g'(u) \right) \end{array} \right\}$$

con condición inicial:

$$\left\{ \begin{array}{l} t(0, s) = 0 \\ x(0, s) = s \\ u(0, s) = (g')^{-1}(S'_1(s)) \end{array} \right\}$$

Como es bien conocido, John (1971), localmente existe una única solución de clase C^1 de (8), (9).

4 Solución analítica

En el **Caso A** la solución puede determinarse explícitamente:

$$u^*(t, x) = \frac{\frac{1}{l}(lx - \frac{\bar{b}}{l}(1 - \cosh(lt)) + \frac{s_1}{2b} \sinh(lt))(m^2 - l^2) \sinh(lt)}{m \sinh(lt) + l \cosh(lt)} + \frac{s_1}{2bl}(l \cosh(lt) - m \sinh(lt)) + \frac{\bar{b}}{l^2}(m - m \cosh(lt)l \sinh(lt))$$

con trayectoria óptima asociada para la capacidad del competidor:

$$x^*(t) = \frac{i}{l}(s_o(m \sinh(lt) + l \cosh(lt)) - \frac{s_1}{2b} \sinh(lt)) + \frac{\bar{b}}{l^2}(1 - \cosh(lt))$$

donde:

$$s_o = \frac{lx_0 - \frac{\bar{b}}{l}(1 - \cosh(lT)) + \frac{s_1}{2b} \sinh(lT)}{m \sinh(lT) + l \cosh(lT)}$$

$$l = \sqrt{m^2 + 1/(2bb)}, \quad \bar{b} = (a/(2b) + m/2 - k + s/2)/(2b) \text{ y } t = T - t$$

El equilibrio de Nash (u^* , p^*) es afín en la variable de estado x . A medida que aumenta su capacidad, el competidor invierte menos en la misma, dado que:

$$u_x^*(t, x) = \frac{(m^2 - l^2) \sinh(lt)}{m \sinh(lt) + l \cosh(lt)} \leq 0, \quad \forall t \in [0, T]$$

La realización en ciclo abierto de las estrategias de ciclo cerrado es:

$$\begin{aligned}\bar{u}(t) = u^*(t, x^*(t)) &= \frac{s_0}{l}(m^2 - l^2) \sinh(lt) + \frac{s_1}{2bl}(l \cosh(lt) - m \sinh(lt)) \\ &+ \frac{\bar{b}}{l^2}(m - m \cosh(lt) + \sinh(lt)) \\ \bar{p}(t) = p^*(x^*(t)) &= \frac{1}{2b}(a + b(m + s_2) - x^*(t))\end{aligned}$$

A medida que aumenta (resp. disminuye) el precio p^* , disminuye (resp. aumenta) la capacidad productiva del competidor. En cuanto a la variable y :

$$y^*(t) = y_0 + \int_t^T D(p^*(r), x^*(r)) dr.$$

Hay que exigir valores de los parámetros tales que $D(p^*(\tau), x^*(\tau)) \geq 0, \forall \tau \geq 0$

A continuación consideramos la posibilidad de que existan perturbaciones aleatorias en la capacidad productiva del competidor, que ahora está descrita **por** una ecuación diferencial estocástica:

$$dx = (u - \mu x) dt + s(t) dw,$$

donde w denota un movimiento browniano estándar y a es una función no negativa. La interpretación de (10) es que la relación entre inversión y capacidad productiva del competidor no está completamente determinada como en el caso determinista, sino que está sujeta a fluctuaciones externas que no puede controlar la industria.

El equilibrio determinado anteriormente posee una propiedad notable, pues es robusto i-especto a las perturbaciones consideradas en la ecuación (10), es decir, también es solución en el caso estocástico. La demostración del resultado siguiente puede obtenerse de los autores.

Proposición En el **Caso A**, el par (u^*, p^*) continúa *siendo equilibrio de Nash* del juego cuando *se considera* (10) en lugar de (4).

5 Comparación de los equilibrios de ciclo abierto y de ciclo cerrado

Presentamos una comparación entre el equilibrio de Nash de ciclo cerrado determinado en la sección anterior y el de ciclo abierto obtenido por Dockner y Jorgensen (1984). En la Figura 1 representamos la capacidad de producción, x , la inversión, u , y el precio, p , óptimos, obtenidos

considerando estrategias de ciclo cerrado sin memoria, frente a las mismas variables en el equilibrio de ciclo abierto. Los valores de los parámetros son: $\mu = 0$, $a = 400$, $b = 4$, $m = 40$, $k = 65$, $\beta = 8$, $X_0 = 10$, $s_1 = s_2 = 0$ y $T = 50$.

Se observa que tanto la capacidad de producción como la inversión es menor en ciclo cerrado, mientras que el precio es mayor, respecto al equilibrio de ciclo abierto. Hemos comprobado que este comportamiento es general, válido no sólo para los valores particulares elegidos para la representación gráfica. Por tanto, las ventajas de la utilización de un mayor grado de información son evidentes: permite una menor inversión en capacidad por parte del competidor, reduciendo así el coste de aquélla, al tiempo que el precio que impone el monopolista es mayor, puesto que la cantidad de producto sustitutivo en el mercado es menor. Esto conduce a la obtención de un mayor beneficio para los dos jugadores, como se pone de manifiesto en la Figura 2, donde hemos realizado una comparación entre los valores de los funcionales objetivo de los jugadores con el equilibrio de ciclo cerrado y de ciclo abierto, para distintos valores del parámetro $0, 2 \leq \theta \leq 100$ y de la condición inicial x_0 , $0 \leq x_0 \leq 40$, con los mismos valores del resto de parámetros considerados anteriormente. El pago es mayor para ambos jugadores cuando ponen en práctica el equilibrio de ciclo cerrado, es decir, cuando basan sus decisiones en el valor de la variable de estado y en el tiempo.

6 Solución numérica

En el **Caso B** hemos obtenido una expresión numérica del equilibrio de Nash del modelo presentado, resolviendo el problema (8)-(9) con un método Runge-Kutta implementado en MATLAB. Los valores de los parámetros elegidos son: $\mu = 1$, $a = 4$, $b = 2$, $e = 1$, $m = 2$, $\beta = 8$, $s_1 = 16$, $s_2 = 1$, $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ y $x_0 = 10$.

Presentamos en la Figura 3 la superficie solución así obtenida, y en la Figura 4 secciones de dicha superficie en distintos instantes de tiempo, que representan la inversión óptima del competidor en función de la capacidad, hasta llegar a la exigida por la condición final en $T = 0.5$.

En la Figura 5 se representa la evolución de la capacidad de producción, la inversión y el precio óptimos respecto al tiempo, para distintos valores de la capacidad inicial, x_0 . La capacidad decrece y es una función convexa, mientras que precio e inversión son funciones crecientes y

cóncavas. Para valores de la capacidad inicial elevados, en los momentos iniciales es óptimo desinvertir. A pesar de que la inversión toma valores positivos a medida que el tiempo avanza, el efecto de la depreciación es mayor que la inversión, produciendo la disminución de la capacidad en todo el horizonte temporal. . Por otra parte, el precio se mantiene prácticamente constante en todo el horizonte temporal. El comportamiento observado es sumamente variable y no representativo, pues depende notablemente del valor de los parámetros elegidos.

Referencias

- Dockner, E. y S. Jorgensen (1984). "Cooperative and non-cooperative differential game solutions to an investment and pricing problem", *Journal of the Operational Research Society*, 35, pp. 731-739.
- John, F. (1971). *Partial differential equations*, Springer-Verlag, New York.
- Melhmann, A. (1988). *Applied differential games*. Plenum Press, New York.
- Martínez Rodríguez, J. y J. P. Rincón Zapatero (1995). "Caracterización de equilibrios feedback en juegos diferenciales mediante ecuaciones en derivadas parciales", *Estudios de Economía Aplicada*. IX Reunión Anual de la Asociación Científica - Europea de Economía Aplicada (ASEPELT - ESPAÑA) vol. V, Santiago de Compostela, 1995, pp. 321-331.

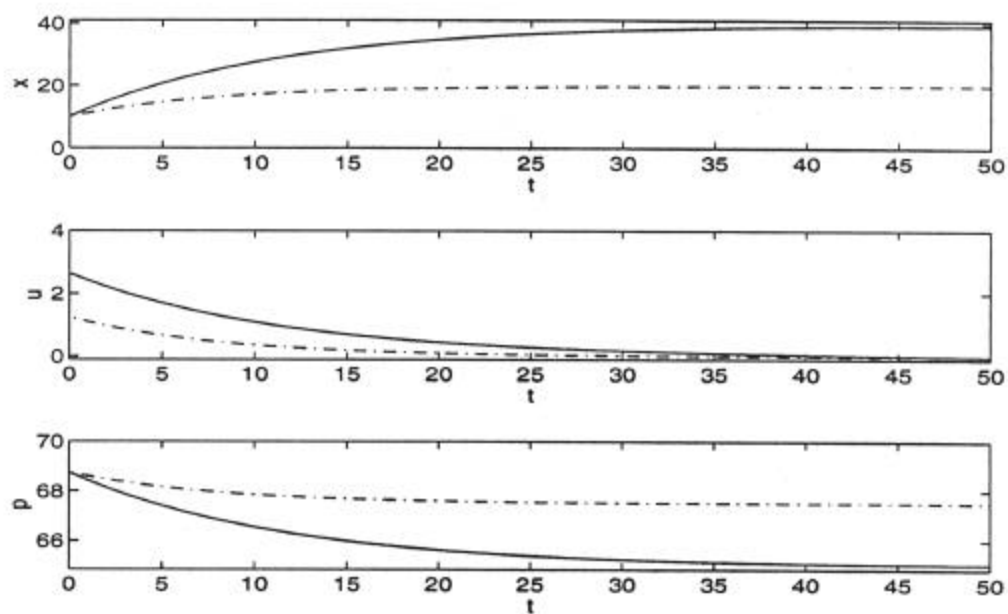


Figura 1: Capacidad de producción, inversión y precio en ciclo abierto (-) y ciclo cerrado (-.)

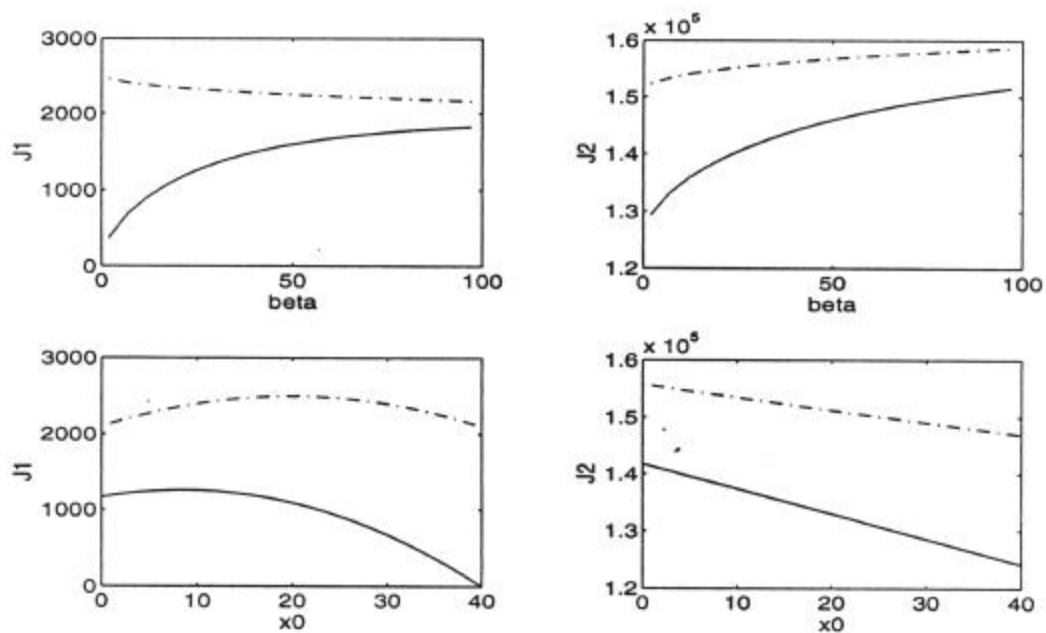


Figura 2: Valores óptimos de los funcionales en ciclo abierto (-) y ciclo cerrado (-.)

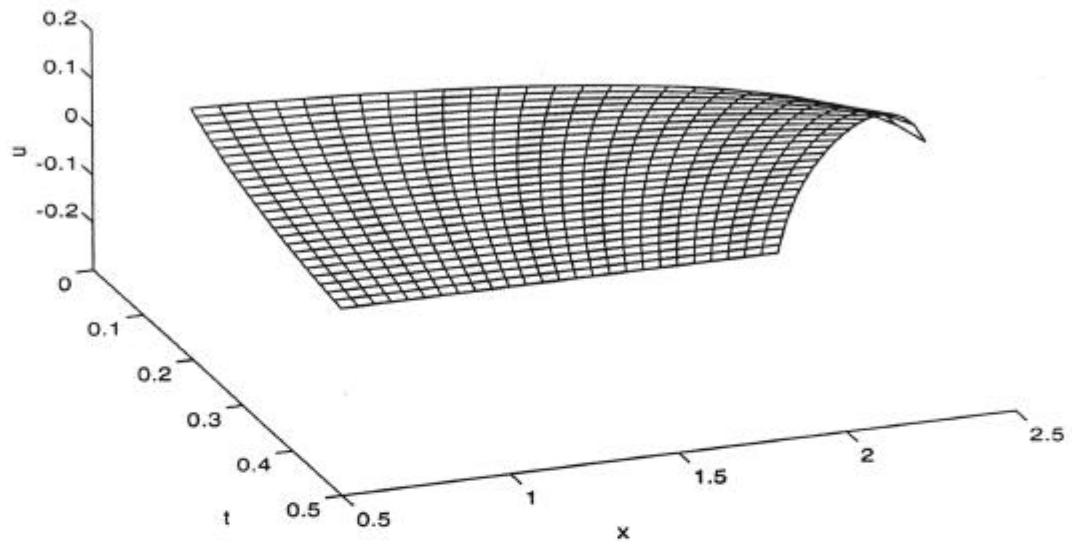


Figura 3: Inversión del competidor en función de la capacidad de producción y del tiempo

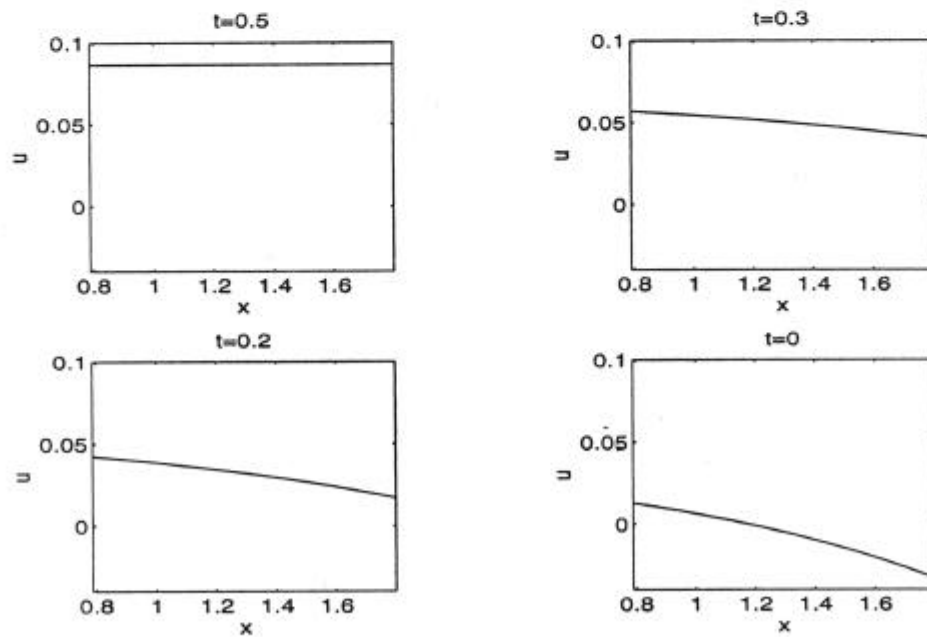


Figura 4: Evolución de la inversión dependiente de la capacidad de producción

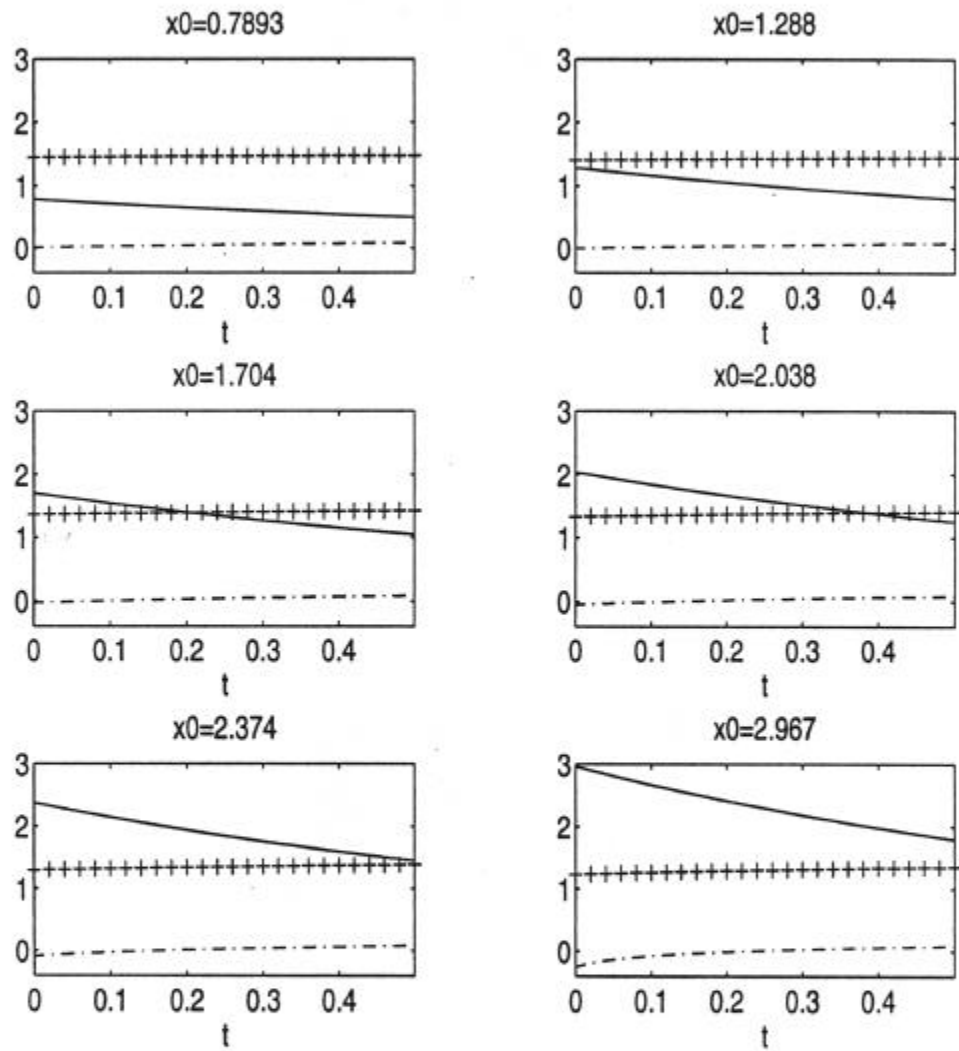


Figura 5: Evolución de la capacidad de producción (-), de la inversión (.-) y del precio (+)