

CONSIDERACIONES LÓGICAS SOBRE CIERTAS ESTRUCTURAS MATEMÁTICAS CON APLICACIÓN AL ANÁLISIS ECONÓMICO

Manuel Suárez Fernández y María Emilia García Pérez
Departamento de Economía y Empresa de la U.C.L.M.

INTRODUCCIÓN

Cuando se efectúa una definición abstracta (es decir, cuando se caracteriza una clase de cosas mediante propiedades), debe existir algún objeto matemático (o sea, algún conjunto) que la verifique (o, con otras palabras, debe ocurrir que la clase en cuestión no sea vacía), pues, en caso contrario, la definición carecería de interés. Y, a menudo, no deja de ser oportuno complementar tales definiciones con las correspondientes demostraciones de la existencia de los referidos objetos. Sin embargo, cuando una definición abstracta es sencilla y de fácil utilización, mientras que efectuar una demostración de que existe algún objeto matemático que la verifica resultaría, hasta cierto punto, largo y complicado y, por otra parte, es fácil encontrar en libros dicha demostración así como, presumiblemente, es de común conocimiento la existencia de un tal objeto, tiene sentido dar la definición sin acompañarla de la demostración, precisamente con el fin de utilizar aquella para evitar la complicación de ésta¹.

¹Por ejemplo, tal es el caso en que, para estudiar análisis matemático, se introducen los números reales y su estructura, como un cuerpo (conmutativo), totalmente ordenado, arquimediano y completo, cuyo conjunto contiene al de los números naturales, en lugar de efectuar la conocida demostración clásica "constructiva", sin duda más laboriosa.

Así mismo, cuando se efectúan varias definiciones abstractas sobre un mismo tema, en las cuales figura una cierta terminología común, es procedente analizar la relación lógica entre las mismas (entendiendo que ello significa que, dadas dos de tales definiciones, es procedente analizar si una de ellas es más general que la otra o si son equivalentes o si ni lo uno ni lo otro y, en este caso, si existe o no algún objeto matemático que verifique una y otra²).

Nuestro propósito es efectuar, a continuación, consideraciones lógicas como las referidas, sobre definiciones relativas a espacios pretopológicos (comenzando, precisamente, por la de tales espacios), estructuras matemáticas éstas con aplicación al análisis económico para proporcionarle un lenguaje mediante el cual es posible expresar con precisión y analizar, múltiples situaciones características de la economía y la empresa.

[1] Decimos (o sea, definimos) que un par ordenado (E, f) es un espacio pretopológico" si y solo si, E es un conjunto y f es una aplicación de $\mathcal{P}(E)$ en $\mathcal{P}(E)$ (siendo $\mathcal{P}(E)$ el conjunto potencia, o conjunto de los subconjuntos de E), que decimos "adherencia de (E, f) ", tal que,

- $f(\emptyset) = \emptyset$ (siendo \emptyset el conjunto vacío)
- si $A \in \mathcal{P}(E)$ entonces $A \subset f(A)$.

[2] Si (E, f) es un espacio pretopológico y $A \in \mathcal{P}(E)$ (o, lo que es equivalente, $A \subset E$) entonces decimos "adherencia de A " y notamos \mathcal{P}_A , a $f(A)$ (consecuentemente, $\mathcal{P}_\emptyset = \emptyset$, «si $A \subset E$ entonces $A \subset \mathcal{P}_A$ » y $\mathcal{P}_E = E$).

²Entendiendo que si α, β son dos definiciones, entonces,

- * " α es más general que β " si y solo si la clase de objetos (matemáticos) que determina α contiene a la que determina β .
- * " α es equivalente a β " si y solo si ambas definiciones determinan la misma clase de objetos.

- [3] Si E es un conjunto entonces decimos que " f es una aplicación adherencia de una topología sobre E "³ "si y solo si f es una aplicación de $_ (E)$ en $_ (E)$ y existe una topología T sobre E tal que si $A \subset E$ entonces $f(A)$ es la envolvente cerrada de A , o adherencia de A , correspondiente a la topología T .
- [4] Si (E, f) es un espacio pretopológico entonces decimos que,
- " (E, f) es de tipo V " si y solo si, si $A \subset E$, $B \subset E$ y

$$A \subset B \quad \text{entonces} \quad _ A \subset _ B.$$
 - " (E, f) de tipo V_d " si y solo si, si $A \subset E$ y $B \subset E$
entonces $_ (A \cup B) = _ A \cup _ B.$
 - " (E, f) cumple la propiedad P " si y solo si, si $A \subset E$
entonces $_ (_ A) = A.$
- [5] Se demuestra que,
- (1) (E, f) es un espacio pretopológico de tipo V , de tipo V_d y que cumple la propiedad P si y solo si f es la adherencia de una topología T sobre E .
 - (2) Existe algún espacio pretopológico de tipo V , de tipo V_d y que cumple la propiedad P (y, en consecuencia, existe algún espacio pretopológico).
 - (3) Existe algún espacio pretopológico de tipo V , de tipo V_d y que no cumple la propiedad P .
 - (4) Existe algún espacio pretopológico de tipo V , no de tipo V_d y que cumple la propiedad P .
 - (5) No existe espacio pretopológico alguno no de tipo V y de tipo V_d .

³ Suponemos que es bien conocido que si E , T son conjuntos, entonces se dice que " T es una topología sobre E ", " (E, T) es un espacio topológico", "los elementos de T son los abiertos de (E, T) " y "los complementarios, respecto de E , de los abiertos, son los cerrados de (E, T) ", si y solo si $T \subset _ (E)$, la unión de un conjunto de un conjunto de abiertos es un abierto, de donde, la intersección de un conjunto de cerrados es un cerrado (consecuentemente, la intersección de los cerrados que contienen a un conjunto, es la envolvente cerrada del mismo) y la unión finita de cerrados es un cerrado.

- (6) Existe algún espacio pretopológico de tipo V, no de tipo V_d y que no cumple la propiedad P.
- (7) Existe algún espacio pretopológico no de tipo V, no de tipo V_d y que cumple la propiedad P.
- (8) Existe algún espacio pretopológico no de tipo V, no de tipo V_d y que no cumple la propiedad P.
- (9) Existe algún espacio pretopológico cuya adherencia no define una topología sobre E.
- (10) (E, f) es un espacio pretopológico de tipo V_d y que cumple la propiedad P si y solo si f es la adherencia de una topología T sobre E.

En efecto,

- (1) Si f es la adherencia de una topología sobre E y $A \subset E$ entonces $f(A)$ es la envolvente cerrada de A. Por tanto, $f(\Phi) = \Phi$, $f(E) = E$ y si $A \subset E$ entonces $A \subset f(A)$ y, en consecuencia, (E, f) es un espacio pretopológico.

Además, si $B \subset E$ y $A \subset B$ entonces $f(A) \subset f(B)$, pues $f(A)$ es el cerrado que contiene a A, contenido en todo cerrado que contiene a A, y $f(B)$ es un cerrado que contiene a B. Y así, el espacio pretopológico (E, f) es de tipo V.

Como ocurre que $f(f(A))$ es la envolvente cerrada de $f(A)$ y, puesto que $f(A)$ es cerrado $f(f(A)) = f(A)$ y, en consecuencia, el espacio pretopológico (E, f) cumple la propiedad P.

Por otra parte,

- $A \subset A \cup B$ y $B \subset A \cup B$, de donde $f(A) \subset f(A \cup B)$ y $f(B) \subset f(A \cup B)$ y, en consecuencia, $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.
- $A \subset f(A)$ y $B \subset f(B)$ y, en consecuencia, $A \cup B \subset f(A) \cup f(B)$, de donde, $f(A \cup B) \subset f(f(A) \cup f(B)) = f(A) \cup f(B)$, pues si f es la adherencia de una topología, entonces la

unión finita de cerrados es un cerrado y $f(A)$ y $f(B)$ son cerrados.

Por tanto, obtenemos que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ y podemos concluir que (E, f) es un espacio pretopológico de tipo V_d .

Recíprocamente, si (E, f) es un espacio pretopológico de tipo V , de tipo V_d y que cumple la propiedad P , sea entonces $T = \{ {}^c(f(A)) \mid A \subset E \}$.

Ocurre que,

· puesto que $f(\emptyset) = \emptyset$, $f(E) = E$, ${}^c\emptyset = E$ y ${}^cE = \emptyset$, resulta que $\emptyset \in T$ y $E \in T$.

· si $G_1 \in T$ y $G_2 \in T$ entonces existen subconjuntos A_1, A_2 de E tales que ${}^c(f(A_1)) = G_1$ y ${}^c(f(A_2)) = G_2$.

Por consiguiente, $G_1 \cap G_2 = {}^c(f(A_1)) \cap {}^c(f(A_2)) = {}^c(f(A_1) \cup f(A_2)) = {}^c(f(A_1 \cup A_2))$ por ser (E, f) de tipo V_d , y, como ${}^c(f(A_1 \cup A_2)) \in T$, resulta que $G_1 \cap G_2 \in T$, lo cual, en virtud del principio de recurrencia, implica que la intersección de un número finito de elementos de T , es un elemento de T .

· si $F \subset T$ entonces para cada elemento G de F existe un subconjunto A_G de E tal que

$$G = {}^c(f(A_G)). \text{ Luego, entonces } \bigcup_{G \in F} G = \bigcup_{G \in F} {}^c(f(A_G)) = {}^c(\bigcap_{G \in F} f(A_G)).$$

Y, para cada elemento G' de F se verifica que

$$\bigcap_{G \in F} f(A_G) \subset f(A_{G'}) \text{ y, en virtud de que } (E, f) \text{ cumple la propiedad } P, f(A_{G'}) = f(f(A_{G'})) \text{ y, en virtud de que } (E, f) \text{ es de tipo } V, f(\bigcap_{G \in F} f(A_G)) \subset f(f(A_{G'})).$$

Luego, entonces $f(\bigcap_{G \in F} f(A_G)) \subset f(A_{G'})$, de donde, $f(\bigcap_{G \in F} f(A_G)) \subset \bigcap_{G \in F} f(A_G)$. Y como, por ser (E, f) un espacio pretopológico,

$\bigcap_{G \in F} f(A_G) \subset f(\bigcap_{G \in F} f(A_G))$ resulta que

$\bigcap_{G \in F} f(A_G) = f(\bigcap_{G \in F} f(A_G))$, de donde,

$\bigcup_{G \in F} G = {}^c(f(\bigcap_{G \in F} f(A_G)))$ y, en consecuencia, $\bigcup_{G \in F} G \in T$.

Así pues, la unión de los elementos de un conjunto cualquiera F contenido en T , es un elemento de T .

Luego, T es una topología sobre E y, en consecuencia, la aplicación f es la adherencia de una topología sobre E .

(2) Considerando que existen espacios topológicos⁴, resulta, en virtud de ([5], (1)), que existe algún espacio pretopológico de tipo V , de tipo V_d y que cumple la propiedad P .

(3) Si un espacio pretopológico (E, f) es tal que $E = \{a, b, c\}$, $_ \{a\} = \{a, b\}$, $_ \{b\} = \{b, c\}$, $_ \{c\} = \{a, c\}$, $_ \{a, b\} = \{a, b, c\}$, $_ \{a, c\} = \{a, b, c\}$, $_ \{b, c\} = \{a, b, c\}$, $_ \emptyset = \emptyset$ y $_ \{a, b, c\} = \{a, b, c\}$, entonces fácilmente puede comprobarse que (E, f) es de tipo V , es de tipo V_d y no cumple la propiedad P .

(4) Si un espacio pretopológico (E, f) es tal que $E = \{a, b, c\}$, $_ \{a\} = \{a\}$, $_ \{b\} = \{b\}$, $_ \{c\} = \{c\}$, $_ \{a, b\} = _ \{b, c\} = _ \{a, c\} = \{a, b, c\}$ con $_ \emptyset = \emptyset$ y $_ \{a, b, c\} = \{a, b, c\}$, entonces fácilmente puede comprobarse que (E, f) es de tipo V , no es de tipo V_d y cumple la propiedad P .

(5) Si (E, f) es un espacio pretopológico de tipo V_d entonces si $A \subset E$, $B \subset E$ y $A \subset B$ entonces

⁴ Por ejemplo, siendo R el conjunto de los números reales, si T es el conjunto de los subconjuntos de R tal que un conjunto A es elemento de T si y solo si para cada elemento x de A existe un número real positivo r tal que $[x-r, x+r] \subset A$, entonces T es una topología sobre R .

$A \subset A \cup (B \setminus A) = B$. Luego, $A \subset B$ y, en consecuencia, si (E, f) es de tipo V_d entonces es de tipo V , o, lo que es equivalente, no existe espacio pretopológico alguno de tipo V_d y que no sea de tipo V .

- (6) Si un espacio pretopológico (E, f) es tal que $E = \{a, b, c\}$, $_ \{a\} = \{a, b\}$, $_ \{b\} = \{b\}$, $_ \{c\} = \{c\}$, $_ \{a, b\} = _ \{b, c\} = _ \{a, c\} = \{a, b, c\}$ y, como siempre, $_ \emptyset = \emptyset$ $_ \{a, b, c\} = \{a, b, c\}$, entonces fácilmente puede comprobarse que (E, f) es de tipo V , no es de tipo V_d y no cumple la propiedad P .
- (7) Si un espacio pretopológico (E, f) es tal que $E = \{a, b, c\}$, $_ \{a\} = \{a, b, c\}$, $_ \{b\} = \{b\}$, $_ \{c\} = \{c\}$, $_ \{a, b\} = \{a, b\}$, $_ \{b, c\} = \{b, c\}$, $_ \{a, c\} = \{a, c\}$ $_ \emptyset = \emptyset$ y $_ \{a, b, c\} = \{a, b, c\}$, entonces fácilmente puede comprobarse que (E, f) no es de tipo V , no es de tipo V_d y cumple la propiedad P .
- (8) Si un espacio pretopológico (E, f) es tal que $E = \{a, b, c\}$, $_ \{a\} = \{a, b, c\}$, $_ \{b\} = \{b, c\}$, $_ \{c\} = \{c\}$, $_ \{a, b\} = \{a, b\}$, $_ \{b, c\} = \{a, b, c\}$, $_ \{a, c\} = \{a, c\}$ y, claro está, $_ \Phi = \Phi$ y $_ \{a, b, c\} = \{a, b, c\}$, entonces fácilmente puede comprobarse que (E, f) no es de tipo V , no es de tipo V_d y no cumple la propiedad P .
- (9) En virtud de $([5], (1))$ y, por ejemplo, $([5], (8))$, es trivial que existe algún espacio pretopológico cuya adherencia no define una topología sobre E .
- (10) En virtud de $([5], (1))$ y $([5], (5))$, es trivial que (E, f) es un espacio pretopológico de tipo V_d y que cumple la propiedad P si y solo si f es la adherencia de una topología sobre E .

BIBLIOGRAFÍA

AURAY J. P. (1978), Éléments de pretopologie. Documento de trabajo nº 7819, G.R.E.M. Universidad de Besançon.