

CONSIDERACIONES SOBRE LOS MODELOS CUADRÁTICOS DINÁMICOS MULTIOBJETIVO

IMOB EA. Investigación en Multiobjetivo y Economía Aplicada.¹

La eficacia de la utilización de la Programación Matemática para resolver un problema descansa en la mayor o menor capacidad del modelo matemático para representar la realidad que estudiamos y a la que queremos dar solución y a este respecto hay que hacer notar que, debido a la complejidad del ámbito económico en que nos movemos, son muy pocas las situaciones en que se persiga optimizar una única función. Normalmente los agentes económicos pretenderán conseguir varios objetivos a la vez, objetivos que suelen estar en conflicto entre sí lo cual complica la búsqueda de la solución adecuada puesto que combinaciones que mejoran uno de ellos pueden empeorar otros.

Por otra parte, el interés por un mayor realismo en el conocimiento de los hechos económicos nos lleva a considerar un enfoque que tenga en cuenta la trayectoria temporal que siguen las distintas variables económicas que caracterizan al sistema analizado, o dicho de otra forma, debemos preocuparnos por el estudio de los sistemas dinámicos.

En favor de ellos hay que decir que la mayor parte de los fenómenos económicos (por no decir que todos) son variantes en el tiempo. Los problemas no suelen ser estáticos sino que tienen una evolución de forma que más que saber cuál es el estado de la situación en un instante determinado nos va a interesar más el conocimiento de su evolución pasada y futura.

Hoy en día esta materia tiene una creciente importancia debido, entre otras causas, a una floreciente demanda de nuevas versiones de apoyo a la decisión en el mundo empresarial, ya que, la planificación económica detallada o rígida va siendo abandonada por falta de buenos

¹ Este grupo está formado por los profesores Rafael Caballero, Trinidad Gómez, Mercedes González, M^a del Mar Muñoz, Lourdes Rey y Francisco Ruiz.

frutos en un complejo y cambiante mundo económico. Cada vez se requiere más planificación estratégica a largo plazo, teniendo en cuenta el horizonte temporal.

En resumen, por su escaso desarrollo y por su demanda creciente abordaremos el problema de programación multiobjetivo dinámica, el cual va a consistir, para nosotros, en encontrar aquellos controles admisibles que minimicen varios funcionales objetivo sujetos a un conjunto de restricciones.

En concreto, nosotros vamos a estudiar qué ocurre con los modelos cuadráticos lineales en variable tiempo discreta ya que dentro de los modelos de programación convexa, tal vez el más utilizado en la modelización económica sea, después del lineal, el cuadrático lineal y autónomo, es decir, aquel donde el funcional objetivo viene definido por una función cuadrática lineal donde la matriz de la forma cuadrática es definida positiva y las ecuaciones de movimiento y restricciones son lineales en las variables de estado y control, no apareciendo la variable tiempo de forma explícita fuera de estos elementos.

Así nuestro propósito va a ser determinar las funciones de control que nos ofrezcan:

$$\text{Min } J(u) = (J_1(u), \dots, J_p(u))$$

donde

$$J_i(u) = \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \frac{1}{2} [x(k)^T Q_i(k) x(k) + u(k)^T R_i(k) u(k)] + q_i(k)^T x(k) + r_i(k)^T u(k) \right\} \\ + \frac{1}{2} x(N)^T S_i x(N) + s_i^T x(N)$$

$$s.a. \quad x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k)$$

$$x(0) = x_0$$

$$C(k)x(k) + D(k)u(k) \leq b(k)$$

$$L \leq u(k) \leq U \quad k = 0, \dots, N-1$$

La búsqueda de soluciones eficientes puede realizarse mediante la utilización del método de la ponderación el cual convertiría nuestro problema multiobjetivo en uno escalar mediante la suma ponderada de todos los funcionales objetivo. Tras ello, la resolución analítica puede llevarse a cabo por el principio del Máximo, teniendo asegurado que los puntos que verifiquen las condiciones del mismo son los óptimos, puesto que las condiciones suficientes se verifican.

Sin embargo, dadas las características de este problema, no es necesario resolver directamente el problema dinámico como hemos indicado, sino que es posible su transformación de forma directa en un problema del mismo tipo pero estático y formulado únicamente en las variables de control.

Así, el sistema en diferencias puede ser resuelto mediante la matriz de transición como

$$x(k) = \Phi(k,0)x_0 + \sum_{l=0}^{k-1} \Phi(k, l+1)B(l)u(l)$$

con

$$\begin{aligned}\Phi(k, l) &= A(k-1)A(k-2)\dots A(l) \\ \Phi(k, k) &= I\end{aligned}$$

que al sustituir en cada uno de nuestros funcionales objetivo tenemos:

$$\begin{aligned}J_i(u) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (\Phi(k,0)x_0 + \sum_{l=0}^{k-1} \Phi(k, l+1)B(l)u(l))^T Q_i(k) (\Phi(k,0)x_0 + \sum_{l=0}^{k-1} \Phi(k, l+1)B(l)u(l)) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} u(k)^T R_i(k) u(k) + \\ &+ \sum_{k=0}^{N-1} q_i(k)^T (\Phi(k,0)x_0 + \sum_{l=0}^{k-1} \Phi(k, l+1)B(l)u(l)) + \sum_{k=0}^{N-1} r_i(k)^T u(k) +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} (\Phi(N,0)x_0 + \sum_{l=0}^{N-1} \Phi(N,l+1)B(l)u(l))^T S_i (\Phi(N,0)x_0 + \sum_{l=0}^{N-1} \Phi(N,l+1)B(l)u(l)) + \\
& + s_i^T (\Phi(N,0)x_0 + \sum_{l=0}^{N-1} \Phi(N,l+1)B(l)u(l))
\end{aligned}$$

y puede ser reescrito como un problema cuadrático lineal en las variables de control de la forma

$$J_i(u) = \frac{1}{2} \tilde{u}(N)^T \mathbf{H}_i \tilde{u}(N) + \mathbf{h}_i^T \tilde{u}(N)$$

siendo $\tilde{u}(N) = (u(0)^T, u(1)^T, \dots, u(N-1)^T)^T$, un vector columna que recoge todas las decisiones de control y \mathbf{H}_i una matriz por bloques

$$\mathbf{H}_i = \begin{pmatrix} H_{00} & H_{01} & \cdots & H_{0,N-1} \\ H_{01}^T & H_{11} & \cdots & H_{1,N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{0,N-1}^T & H_{1,N-1}^T & \cdots & H_{N-1,N-1} \end{pmatrix}$$

donde $H_{\alpha\beta}$ y su traspuesta son las matrices que multiplican a los vectores $u(\mathbf{a})$ y $u(\mathbf{b})$ en la forma cuadrática para $\mathbf{a}, \mathbf{b} = 0, 1, \dots, N-1$, y vienen dadas por

$$\begin{aligned}
H_{aa} = & \sum_{l=a+1}^{N-1} [B(\mathbf{a})^T \Phi(l, \mathbf{a}+l)^T Q_i(l) \Phi(l, \mathbf{a}+l) B(\mathbf{a})] + \\
& + B(\mathbf{a})^T \Phi(N, \mathbf{a}+l)^T S_i \Phi(N, \mathbf{a}+l) B(\mathbf{a}) \quad \text{para } \mathbf{a} = 0, 1, \dots, N-1
\end{aligned}$$

mientras que en los bloques no diagonales nos encontramos con

$$H_{ab} = \sum_{l=b+1}^{N-1} [B(\mathbf{a})^T \Phi(l, \mathbf{a}+1)^T Q_i(l) \Phi(l, \mathbf{b}+1) B(\mathbf{b})] + \\ + B(\mathbf{a})^T \Phi(N, \mathbf{a}+1)^T S_i \Phi(N, \mathbf{b}+1) B(\mathbf{b}) \quad \text{para } \mathbf{a} < \mathbf{b}$$

y los términos lineales vendrán dados por

$$\mathbf{h}_i = (h_0, h_1, \dots, h_{N-1})$$

siendo h_α el vector que multiplica al control $u(\mathbf{a})$

$$h_a = r_i(\mathbf{a}) + \sum_{l=a+1}^{N-1} [x_0^T \Phi(l, 0)^T Q_i(l) \Phi(l, \mathbf{a}+1) B(\mathbf{a}) + q_i(l)^T \Phi(l, \mathbf{a}+1) B(\mathbf{a})] + \\ + x_0^T \Phi(N, 0)^T S_i \Phi(N, \mathbf{a}+1) B(\mathbf{a}) + s_i^T \Phi(N, \mathbf{a}+1) B(\mathbf{a})$$

Si aplicamos el método de la ponderación al problema obtenido, tendremos un problema monoobjetivo cuadrático lineal estático que puede ser resuelto mediante técnicas de conjunto activo en programación cuadrática, una vez que las restricciones también se escriban bajo el mismo esquema, lo cual es posible de forma análoga, pues

$$C(k) \left[\Phi(k, 0) x_0 + \sum_{l=0}^{k-1} \Phi(k, l+1) B(l) u(l) \right] + D(k) u(k) \leq b(k) \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

queda expresado como $\mathbf{A} \tilde{u}(N) \leq \mathbf{b}$ siendo \mathbf{A} una matriz por bloques definida como

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} D(0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ C(1)B(0) & D(1) & 0 & \dots & 0 \\ C(2)\Phi(2,1)B(0) & C(2)B(1) & D(2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C(N-1)\Phi(N-1,1)B(0) & C(N-1)\Phi(N-1,2)B(1) & C(N-1)\Phi(N-1,3)B(2) & \dots & D(N-1) \end{pmatrix}$$

y el término independiente viene dado por un vector por bloques de la forma

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b(0) - C(0)x_0 \\ \hline b(1) - C(1)\Phi(1,0)x_0 \\ \hline b(2) - C(2)\Phi(2,0)x_0 \\ \hline \vdots \\ \hline b(N-1) - C(N-1)\Phi(N-1,0)x_0 \end{pmatrix}$$

Tras convertir nuestro problema multiobjetivo dinámico en uno monoobjetivo estático se hace necesario la resolución numérica mediante procedimientos algorítmicos y computacionales de los problemas de control monoobjetivo que son obtenidos para valores fijados del vector de parámetros. Para ello elaboramos un algoritmo que pretende generar un conjunto de soluciones eficientes que sea lo suficientemente representativo como para ayudar al decisor en su toma de decisiones de forma que le resulte más fácil la ardua tarea de elegir aquel control que más se ajuste a sus preferencias. Por tanto, no pretendemos con dicho algoritmo obtener la solución del problema multiobjetivo dinámico sino, sólomente, dar información al decisor sobre la estructura del conjunto eficiente, y será éste, de acuerdo con criterios personales, el que finalmente elija la solución entre un conjunto de trayectorias eficientes no comparables desde un punto de vista objetivo.

Al final del trabajo se expone una tabla de resultados sobre la implementación realizada en el método de la ponderación, para problemas cuadráticos lineales. Con el fin de observar el comportamiento de la misma, y para generar problemas aleatorios de dimensiones elegidas por el usuario hemos diseñado un programa con ese objetivo concreto, basado en el esquema formulado en **Rosen** y **Suzuki** (1965).

Todas las implementaciones se han desarrollado en lenguaje FORTRAN, con el uso de la librería N.A.G. versión 15, y con un ordenador VAX con coprocesador Alfa. Los resultados, de forma agregada, se han resumido en la tabla, que nos muestra en columnas las siguientes características:

En la primera aparece el número de variables de estado del problema dinámico variando de 10 a 40, en la segunda el correspondiente a las de control con rango relacionado con el de estado, mientras que la siguiente nos indica el número de funcionales objetivo considerados que ha fluctuado entre dos y cinco. La columna titulada Periodos, nos muestra el intervalo de planificación considerando 5 y 10 periodos. La columna Restricciones recoge el número de estas, debiendo observar que incluye tanto mixtas como puras de estado y puras de control, todas en igual número, estando las de tipo cotas no incluidas. Por último, la sexta columna incluye los tiempos de proceso medidos en segundos, donde siempre hemos procurado la existencia de restricciones activas en los óptimos con el fin de encontrar una mayor fiabilidad de los tiempos dados.

Asimismo, por filas, hemos considerado los tiempos medios de proceso para un conjunto de cinco problemas de características muy similares.

Cada uno de los problemas escalarizados será, en cuanto al número de variables, el resultante de multiplicar el número de variables de control por el de períodos, mientras que el número de problemas a resolver depende del número de funcionales objetivo y de puntos de la partición del intervalo unidad para cada componente del vector paramétrico. Con el fin de unificar los datos, hemos considerado 10 puntos, es decir con incremento 0.1. Así, en el caso de dos funcionales tendremos 11 problemas, en el de tres funcionales, 66, y en el caso de cinco serán 1001 problemas.

Aunque los resultados mostrados en la tabla son bastante elocuentes, sobre todo en lo reducido de los tiempos, deseamos realizar diversas consideraciones:

En primer lugar, el incremento en el número de variables de estado, aunque aumenta el tiempo de proceso, no es significativo, pues al crecer éstas también lo hacen el número de restricciones. Un crecimiento superior viene dado con el de número de controles ya que el tiempo aumenta de manera superior al lineal, debido a que se incrementan el número de variables.

El crecimiento del número de funcionales objetivo sí genera un aumento muy fuerte del tiempo C.P.U., pues al pasar de 2 funcionales a 3 y a 5 pasamos de resolver 11 problemas a resolver 66 y 1001 respectivamente. Por otro lado, el crecimiento de períodos, pasar de cinco a diez, aumenta entre cinco y ocho veces el tiempo, pues crece el número de variables y el número de restricciones.

Por último, no se han estudiado distinto número de restricciones, pues el comportamiento respecto de ellas ya es conocido teniendo en cuenta que son métodos de programación cuadrática de conjunto activo y si existen múltiples restricciones activas o “cuasi activas” en el óptimo, crece el tiempo de C.P.U., mientras que en caso contrario no son significativas.

BIBLIOGRAFÍA.

GONZÁLEZ, M. (1995). *Decisiones Intertemporales con Criterios Múltiples. Aplicación a las Políticas de Equilibrio entre Departamentos Universitarios*. Tesis Doctoral. Málaga.

KHARGONEKAR, P.P. y ROTEÁ, M.A. (1991). “*Multiple Objective Optimal Control of Linear Systems: The Quadratic Norm Case*”. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 36, 1, 14-24.

KOUSSOULAS, N.T. y LEONDES, C.T. (1986). “*The Multiple Linear Quadratic Gaussian Problem*”. International Journal of Control, vol. 43, 337-349.

ROSEN, J.B. y SUZUKI, S. (1965). “*Construction of Nonlinear Programming Test Problems*”. Communications of ACM, 113.

Estado	Control	Func. Obj.	Períodos	Restricciones	C.P.U.
10	5	2	5	30	0.16
10	5	2	10	30	0.82
10	5	3	5	30	0.97
10	5	3	10	30	2.61
10	5	5	5	30	9.91
10	5	5	10	30	29.12
10	10	2	5	30	0.26
10	10	2	10	30	1.43
10	10	3	5	30	1.84
10	10	3	10	30	5.22
10	10	5	5	30	23.35
10	10	5	10	30	68.96
25	15	2	5	60	1.07
25	15	2	10	60	8.53
25	15	3	5	60	5.98
25	15	3	10	60	28.81
25	15	5	5	60	76.12
25	15	5	10	60	400.88
25	25	2	5	60	2.08
25	25	2	10	60	16.67
25	25	5	5	60	149.78
25	25	5	10	60	805.78
40	20	3	5	60	6.08
40	20	3	10	60	43.25
40	20	5	5	60	87.80
40	20	5	10	60	503.22
40	40	3	5	120	31.62
40	40	3	10	120	236.38
40	40	5	5	120	427.78
40	40	5	10	120	3315.23