ESTUDIO DE LA VARIANZA EN LOS MODELOS ALTERNATIVOS AL PERT CLÁSICO

José García Pérez
Departamento de Economía Aplicada

Salvador Cruz Rambaud
Departamento de Dirección y Gestión de Empresas
UNIVERSIDAD DE ALMERÍA

Resumen.

La estimación de la beta del PERT clásico, a partir de las tres estimaciones aportadas por el experto, se fundamenta en que, de partida, se acepta que la desviación típica de la beta es 1/6 del recorrido (por similitud con la normal).

Utilizando un método alternativo (el de subasta) introducimos un cuarto dato, que permite estimar los cuatro parámetros de la beta y, en consecuencia, trabajar con betas cuya varianza no es constante. Esto permite estudiar la relación entre la varianza y la confianza que el experto deposita en los tres primeros datos aportados por él, de manera que, cuanto mayor es la varianza de la beta, menor es la confianza del experto en sus propios datos.

Los resultados anteriores conducen a un modelo que permite estimar la beta del PERT a partir de la confianza que el experto tiene en sus apreciaciones iniciales. Esta confianza se puede modelizar de forma lineal o cuadrática y establecer comparaciones entre ellas.

La confianza del experto puede convertirse en un índice que aparece de forma natural en el proceso de estimación de la beta.

Palabras-clave: PERT, distribución beta, varianza, confianza.

1. Introducción.

El acrónimo PERT tiene su origen en el nombre dado por Booz, Allen y Hamilton[1] a una ténica ideada por ellos para estimar la duración de la construcción de un misil balístico correspondiendo a las iniciales de *Program Evaluation and Review Technique*.

El fundamento de esta metodología es la utilización de la distribución beta, cuyo modelo probabilístico es:

$$f(x)=\frac{(x-a)^{p-1}(b-x)^{q-1}}{(b-a)^{p+q-1}\beta(p,q)},\ a\leq x\leq b,\ p>1,\ q>1. \qquad [1]$$

Las características estocásticas de esta distribución (Dumas de Rauly, 1968) son las siguientes:

$$\text{moda:}\quad m=\frac{p-1}{p+q-2}b+\frac{q-1}{p+q-2}a. \qquad [2]$$

$$\text{media:}\quad \mu=\frac{p}{p+q}b+\frac{q}{p+q}a. \qquad [3]$$

$$\text{varianza:}\quad \sigma^2=\frac{pq(b-a)^2}{(p+q-1)(p+q)^2}. \qquad [4]$$

En la práctica, el método PERT requiere que el "experto" asigne tres valores distintos (tiempos (T) en el caso de tareas, flujos de caja (Q) en el caso de inversiones, etc.), a saber, T_0 (Q_0) optimista, T_m (Q_m) más probable y T_p (Q_p) pesimista. Cada una de estas estimaciones tiene un sentido claro en el problema y nos permite identificar directamente a y b, haciéndolos coincidir, según el caso, con los valores pesimista y optimista; si además se identifica el valor más probable con la moda (véase la ecuación [2]), se tiene la siguiente expresión que relaciona p con q:

$$T_m=\frac{p-1}{p+q-2}b+\frac{q-1}{p+q-2}a. \qquad [5]$$

Esta expresión, obviamente, no determina exactamente los valores de p y q. El PERT clásico sacrifica en este punto el rigor en favor de la simplicidad aceptando implícitamente que:

$$p=3+\sqrt{2}\quad \text{y}\quad q=3-\sqrt{2}\ ,\ \text{si}\quad m>\frac{a+b}{2} \qquad [6]$$

ó

[1] Tomado del trabajo de Pulido San Román et al., citado en la bibliografía.

$$p=3-\sqrt{2} \quad \text{y} \quad q=3+\sqrt{2}\ , \text{ si } \quad m<\frac{a+b}{2}. \qquad [7]$$

En el caso de que la moda sea $\frac{a+b}{2}$, tendríamos la beta simétrica.

Por otra parte, parametrizando las ecuaciones anteriores (es decir, llamando $k = p+q-2$), Golenko-Ginzburg (1988) obtiene:

$$p=1+k\frac{m-a}{b-a} \quad \text{y} \quad q=1+k\frac{b-m}{b-a} \qquad [8]$$

y, a partir de ellas, deduce unas expresiones más generales para los parámetros del modelo probabilístico del PERT:

$$\text{media:} \quad \mu=\frac{a+km+b}{k+2}, \qquad [9]$$

$$\text{varianza:} \quad \sigma^2=\frac{k^2(m-a)(b-m)+(k+1)(b-a)^2}{(k+3)(k+2)^2}. \qquad [10]$$

Obsérvese que estos modelos probabilísticos ponderan de forma variable el valor más probable determinado por el experto.

Como $p>1$ y $q>1$, es evidente que k variará en el intervalo $(0,\infty)$ y, por tanto, para unos valores dados de a, b y m, existe una distribución beta distinta, para cada valor de k mayor que 0.

Podemos plantear el problema en los siguientes términos: es imposible estimar los cuatro parámetros de la distribución beta (a, b, p, q) partiendo de las tres estimaciones aportadas por el experto (pesimista, optimista y más probable); por lo tanto se necesita más información para determinar estos cuatro parámetros y esa información adicional se puede buscar por dos caminos: con hipótesis simplificadoras, como es el caso del PERT clásico (véanse Sasieni (1986), Littlefield y Randolph (1987)) o recabando mayor información del experto; en esta línea se pueden citar los trabajos de Chae Kim (1990), Moitra (1990), Herrerías y Pérez Rodríguez (1991), Herrerías (1995) y Pérez Rodríguez (1995). Citando a este último, hemos de añadir que la dificultad de este camino reside en que *las preguntas a formular al perito han de reunir un equilibrio entre una interpretación muy intuitiva, lo que hace posible la obtención de respuestas fiables, y una cómoda incorporación de la información así obtenida en el armazón teórico de la distribución beta*.

Por lo tanto, nos estamos enfrentando con un problema que se puede plantear en unos términos algebráicos sencillos: ¿ qué podemos hacer en un caso concreto de aplicación del método PERT para elegir un valor de k que determine una distribución beta particularizada a nuestro problema del cual ya conocemos a, b y

m ?. El problema estaría resuelto si se pudiera preguntar directamente al experto, pero este parámetro k desgraciadamente no reúne las condiciones señaladas por Pérez Rodríguez y que hemos citado en el párrafo anterior.

2. El método de subasta.

El método que vamos a proponer para particularizar una beta a un caso concreto en el que los valores pesimista, optimista y más probable (a, b y m) ya se conocen, es el siguiente: vamos a pedir al experto que apueste por un valor concreto, al que vamos a llamar *valor de subasta* s; este valor lo vamos a igualar a la media:

$$s=\frac{a+km+b}{k+2} \quad . \qquad [11]$$

Esta ecuación nos permitirá despejar el valor de k, que, junto con a, b y m, particulariza una distribución beta que es la que vamos a emplear en nuestro problema concreto.

En primer lugar, debemos preguntarnos si s puede tomar un valor cualquiera, ya que en principio no parecería lógico que después de dar un valor optimista, uno pesimista y un valor más probable, en el momento de dar el valor de subasta se optara por un valor totalmente desvinculado de los anteriores. A tal efecto, veamos las definiciones siguientes:

Definición 1. Llamamos *subasta* a cualquier método que nos permita determinar un valor de s.

Definición 2. Dados a, b y m, decimos que una subasta es *coherente* si, determinado el valor de s, éste nos permite obtener un valor de k comprendido entre 0 e ∞; en cualquier otro caso, diremos que la subasta es *incoherente*.

Si despejamos k en función de s:

$$k=f(s)=\frac{2s-(a+b)}{k+2}=2\frac{s-c}{m-s} \quad , \qquad [12]$$

se verifica la siguiente

Proposición. La función $k = f(s)$ está definida en el intervalo $\left(m, \frac{a+b}{2}\right)$, si $m<\frac{a+b}{2}$, o en el intervalo $\left(\frac{a+b}{2}, m\right)$, si $\frac{a+b}{2}<m$. Es una función continua en todo el intervalo de definición. Además, es una función creciente en el intervalo de

definición, si $m > \frac{a+b}{2}$ y decreciente si $m < \frac{a+b}{2}$.

Ahora bien, estamos interesados en saber cómo se comporta la varianza de la beta a medida que varía *s*, ya que si fuera siempre creciente o decreciente podríamos obtener una cota de la varianza. La dificultad estriba en que la función que relaciona *s* con la varianza es un cociente de polinomios, que puede incluso presentar algunos puntos de discontinuidad (no olvidemos que la dificultad reside en que el estudio hay que hacerlo en función de los valores de *a*, *b* y *m*). En torno a esta cuestión hemos conseguido demostrar los siguientes teoremas.

Teorema 1. La función

$$\frac{d\textbf{ó}^2(k)}{dk} \qquad [13]$$

no se anula en el intervalo $(0,\infty)$ para cualquier conjunto de valores de *a*, *b* y *m* que cumplan $a < m < b$.

Demostración. Partiendo de la expresión

$$\textbf{ó}^2 = \frac{k^2(m-a)(b-m)+(k+1)(b-a)^2}{(k+3)(k+2)^2} \ ,$$

podemos llegar al siguiente resultado:

$$\frac{d\textbf{ó}^2}{dk} = -(m-a)(b-m)\frac{k(k+2)[k-(1-\sqrt{13})][k-(1+\sqrt{13})]}{[(k+3)(k+2)^2]^2} -$$

$$-(b-a)^2\frac{2(k+2)\left(k-\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(k-\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)}{[(k+3)(k+2)^2]^2}. \qquad [14]$$

Para que la expresión anterior se anule deberá ocurrir que

$$\frac{k(k+2)[k-(1-\sqrt{13})][k-(1+\sqrt{13})]}{2(k+2)\left(k-\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(k-\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)} = -\frac{(b-a)^2}{(m-a)(b-m)} < 0. \qquad [15]$$

Para establecer este resultado podemos tipificar el intervalo (*a*,*b*) convirtiéndolo en el intervalo (-1,1), con lo que *m* deberá estar entre -1 y +1.

Si sustituimos estos valores de *a* y *b* en la ecuación [14], obtendremos:

$$-(m+1)(1-m)k(k+2)[k-(1-\sqrt{13})][k-(1+\sqrt{13})]-$$

$$-8(k+2)\left(k-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(k-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)=0. \qquad [16]$$

Realizando las correspondientes transformaciones, llegaríamos a la expresión:

$$m^2=1+\frac{8\left(k-\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(k-\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)}{k[k-(1-\sqrt{13})][k-(1+\sqrt{13})]}. \qquad [17]$$

Es evidente que para valores de $k>1+\sqrt{13}$ el segundo sumando del segundo miembro de la igualdad [17] será siempre mayor que cero, por lo que m será siempre, en valor absoluto, mayor que 1. En conclusión, en el intervalo mencionado no existe solución, pero, además, en el intervalo $(0,1+\sqrt{13})$, realizando algunas transformaciones, podemos conseguir escribir el segundo miembro de la ecuación [17] como:

$$\frac{8[(k+3/2)^2-5/4]}{k[(k-1)^2-13]}. \qquad [18]$$

Evidentemente, para todo k del intervalo $(0,1+\sqrt{13})$ se verifica que:

$$\left|\frac{8[(k+3/2)^2-5/4]}{k[(k-1)^2-13]}\right|>\left|\frac{(k+3/2)^2-5/4}{(k-1)^2-13}\right|>1, \qquad [19]$$

de donde se deduce que, en este caso, es decir, para $0<k<1+\sqrt{13}$, el segundo sumando del segundo miembro de la ecuación [17] será negativo y, en valor absoluto, mayor que la unidad; por lo tanto, la ecuación [17] nunca tendrá solución, con lo que queda demostrada la proposición.

Teorema 2. Si $\frac{a+b}{2}<m$, entonces para todo s del intervalo $\left(\frac{a+b}{2},m\right)$ se verifica que $\frac{d\sigma^2}{ds}<0$.

Análogamente, si $\frac{a+b}{2}>m$, entonces para todo s del intervalo $\left(m,\frac{a+b}{2}\right)$ se verifica que $\frac{d\sigma^2}{ds}>0$.

Demostración. Si nos fijamos en la expresión

$$\sigma^2(s)=\frac{4(s-c)^2(m-a)(b-m)(m-s)+[2(s-c)+m-s](b-a)^2(m-s)^2}{[2(s-c)+3(m-s)][2(s-c)+2(m-s)]^2}, \qquad [20]$$

no resulta fácil derivar ó^2 en función de *s*; es más, aunque realicemos esta derivada, no resultaría sencillo obtener los valores de *s* (que estarían en función de *a*, *b* y *m*) que anulen la derivada primera. Este camino encierra una gran dificultad, razón por la cual hemos desarrollado el siguiente procedimiento. Nos apoyamos en el resultado de la proposición 2, establecida anteriormente, que nos da el signo de la derivada de *k* respecto de *s*:

$$\frac{dk}{ds}>0 \quad \text{si y sólo si} \quad m>\frac{a+b}{2}$$

y

$$\frac{dk}{ds}<0 \quad \text{si y sólo si} \quad m<\frac{a+b}{2} \ .$$

Vamos a tratar de encontrar el signo de la derivada de la varianza respecto de *s* utilizando la regla de la cadena:

$$\frac{d\textbf{ó}^2}{ds}=\frac{d\textbf{ó}^2}{dk}\cdot\frac{dk}{ds}.$$

Para ello, tendremos que calcular el signo de:

$$\frac{d\textbf{ó}^2}{dk} \ .$$

Como hemos visto en el teorema anterior, esta expresión no se anula en el intervalo $(0,\infty)$. Por otra parte, es fácil demostrar que, para cualquier valor de *k* comprendido en el intervalo anterior, se cumple que:

$$\frac{d\textbf{ó}^2}{dk}<0 \ .$$

Aplicando de nuevo la proposición anterior, sabemos que, cuando $\frac{a+b}{2}<m$, *k* crece desde cero hasta infinito a medida que *s* aumenta desde $\frac{a+b}{2}$ hasta *m* y que, cuando $m<\frac{a+b}{2}$, *k* aumenta desde cero hasta infinito a medida que *s* disminuye desde $\frac{a+b}{2}$ hasta *m*, con lo que podemos concluir:

$$\frac{a+b}{2}<m,\ s\in\left(\frac{a+b}{2},m\right)\Rightarrow\frac{d\textbf{ó}^2}{ds}=\frac{d\textbf{ó}^2}{dk}\cdot\frac{dk}{ds}=-\cdot+=-$$

y

$$\frac{a+b}{2}>m,\ s\in\left(m,\frac{a+b}{2}\right)\Rightarrow\frac{d\textbf{ó}^2}{ds}=\frac{d\textbf{ó}^2}{dk}\cdot\frac{dk}{ds}=+\cdot+=+ \ ,$$

con lo que queda demostrado el teorema.

De este modo, el experto deberá apostar por un valor de subasta que esté comprendido entre el valor medio y el valor más probable. A medida que el valor por el que apueste el experto se aproxime al valor medio, la varianza de la beta particularizada irá aumentando (en cualquier caso) hasta valer la de la distribución uniforme, y a medida que el valor de subasta se aproxime al valor más probable (en cualquier caso), la varianza irá disminuyendo hasta tomar el valor cero.

Corolario. Si s es un valor de subasta coherente, a partir del cual se obtiene un valor de k comprendido en $(0,\infty)$, la varianza de la beta particularizada estará acotada superiormente por la varianza de la distribución uniforme correspondiente a los valores de a, b y m.

3. Conclusiones.

A lo largo de este trabajo se describe un método que permite particularizar la beta del PERT. Este método requiere que el experto opte por un valor, que en el trabajo hemos llamado de subasta, mediante el cual se ajusta una beta perfectamente especificada. Este método, a través de la varianza de la beta particularizada, nos permite obtener un índice de la confianza que el experto tiene en el valor más probable aportado por él; cuanto mayor sea esa confianza, menor será la varianza de la beta particularizada, y cuanto menor sea la confianza, mayor será la varianza de la beta particularizada. Este índice se podría construir dividiendo la varianza de la beta particularizada entre la de la distribución uniforme y podría ser expresado en tanto por ciento. Un índice del 100% significaría una desconfianza total en el valor más probable, y un índice del 0% significaría una confianza total. A medida que disminuye el índice aumenta la confianza. Lo podríamos llamar índice de inseguridad del experto.

4. Bibliografía.

Chae, K. C. and Kim, S. (1990): *Estimating the mean and variance of PERT activity using likelihood-ratio of the mode and the midpoint*. I.I.E. Transaction, Vol. 22, Núm. 3, pp. 198-203.

Dumas de Rauly, D. (1968): *L'estimation statistique*. Gauthier-Villars.

Golenko-Ginzburg, D. (1988): *On the distribution of activity time in PERT*. J. Op. Res. Soc., Vol. 39, Núm. 8, pp. 767-771.

Grubbs, F. E. (1962): *Atempts to validate certain PERT statistic or picking a PERT*. Operations Research 10, pp. 912-915.

Herrerías, R. (1989): *Utilización de modelos probabilísticos alternativos para el método PERT. Aplicación al análisis de inversiones*. Estudios de Economía Aplicada, pp. 89-112.

Herrerías, R. y Pérez, E. (1991): *Estimación de una distribución beta como modelo para su utilización en el método PERT*. Actas de la V Reunión Asepelt-España, pp. 1191-1199.

Herrerías, R. (1995): *Un nuevo uso de las tres estimaciones subjetivas del PERT*. Actas de la IX Reunión Asepelt-España, Vol. IV, pp. 411-416.

Littlefield, T. K. and Randolph, P. H. (1987): *An answer to Sasieni's question on PERT times*. Management Science 33, pp. 1357-1359.

MacCrimmon, K. R. and Ryavec, C. A. (1964): *An analytical study of the PERT assumptions*. Operation Research, Vol. 12, Num. 1, pp. 23.

Moitra, S. D. (1990): *Skewness and the beta distribution*. J. Op. Res. Soc., Vol. 41, Núm. 109, pp. 953-961.

Pérez, E. (1995): *Ajuste de un modelo beta con información adicional sobre su apuntamiento*. Actas de la IX Reunión Asepelt-España, Vol. IV, pp. 445-452.

Pulido, A.; García, J. V. y Cortiñas, G. (1964): *Un método de la I. O.: Teoría de grafos*. Anales de Economía, Núm. 7. Este artículo está incluido en el libro de Doblado Burón, J. M. (1977): *Matemáticas para economistas / 2*. Confederación Española de Cajas de Ahorros, Madrid.

Sasieni, M. W. (1986): *A note on PERT times*. Management Science 32, pp. 1652-1653.

Suárez, A. S. (1980): *Decisiones Optimas de inversión y financiación en la empresa*. Pirámide, Madrid.

Troutt D. M. (1989): *On the generality of the PERT average time formula*. Decision Sciences, Vol. 20, pp. 410-412.

Vazsonyi, A. (1970): *L'histoire de grandeur et de la décadence de la méthode PERT*. Management Science, Vol. 16, Núm. 8, pp. 449-455.