

COMUNICACIÓN XIII REUNIÓN ASEPELT-ESPAÑA

TÍTULO:

DESCOMPOSICIÓN DEL ÍNDICE DE GINI EN DOS GRUPOS EXCLUYENTES Y ORDENADOS POR VARIABLE

AUTORES:

BARÓ LLINÀS, JOAN Y GÓMEZ ADILLÓN, M^a JESÚS

INSTITUCIÓN:

UNIVERSIDAD DE LLEIDA

DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA APLICADA

RESUMEN

La concentración de variables indicativas de tamaño en economía permite evaluar el grado de equidad en el reparto. Si efectuamos un truncamiento en la distribución original podemos analizar la concentración de una parte de la población y expresar la en función de la desigualdad de todo el colectivo.

Cuando el truncamiento lo efectuamos en algún punto central de la distribución podemos comparar la desigualdad de dos estratos con pesos similares y presentar la concentración total como combinación lineal de la concentración en cada uno de los dos subgrupos.

Partiendo de la distribución personal de la renta con detalle por municipios hemos considerado los modelos de kakwani, Gupta y Kakwani-Podder, hemos efectuado las respectivas estimaciones y a partir de ellas se han calculado los valores de las funciones que intervienen en la curva de concentración en la Mediana, Medial y Media; obteniendo el índice de Gini para valores inferiores y superiores al de truncamiento así como la descomposición del índice total.

DESCOMPOSICIÓN DEL ÍNDICE DE GINI EN DOS GRUPOS EXCLUYENTES Y ORDENADOS POR VARIABLE

1. Concentración de una distribución truncada

Sea la v.a. renta: ξ con dominio no negativo (tal es el caso de magnitudes de tamaño en economía: ingresos familiares, superficie de las explotaciones agrarias, dimensión de las empresas, tamaño de los municipios, etc.) a la que corresponde funciones de distribución $F_{\xi}(x)$ y de masa acumulada de variable $q_{\xi}(x)$. Sabemos que también poseerá curva de concentración de Lorenz $q_{\xi}(x) = \Phi[F_{\xi}(x)]$ e índice de concentración de Gini $g = 1 - 2E[q_{\xi}(x)]$.

Si restringimos el recorrido de la variable entre dos niveles cualesquiera ω_1 y ω_2 , las funciones de la nueva variable truncada

$\xi_T = \xi / \omega_1 < \xi \leq \omega_2$ se verán afectadas y pueden expresarse en términos de las funciones originales

$$F_{\xi_T}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \omega_1 \\ \frac{F_{\xi}(x) - F_{\xi}(\omega_1)}{F_{\xi}(\omega_2) - F_{\xi}(\omega_1)} & \text{si } \omega_1 < x \leq \omega_2 \\ 1 & \text{si } x \geq \omega_2 \end{cases}$$

$$q_{\xi_T}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \omega_1 \\ \frac{q_{\xi}(x) - q_{\xi}(\omega_1)}{q_{\xi}(\omega_2) - q_{\xi}(\omega_1)} & \text{si } \omega_1 < x \leq \omega_2 \\ 1 & \text{si } x \geq \omega_2 \end{cases}$$

$$q_{\xi_T}(x) = \Phi_T[F_{\xi_T}(x)] = \frac{\Phi \left[F_{\xi_T}(x) (F_{\xi}(\omega_2) - F_{\xi}(\omega_1)) + F_{\xi}(\omega_1) \right] - q_{\xi}(\omega_1)}{q_{\xi}(\omega_2) - q_{\xi}(\omega_1)}$$

El índice de concentración de la distribución truncada será

$$g_T = 1 - 2E[q_{\xi_T}(x)] = \frac{\left[F_{\xi}(\omega_2) - F_{\xi}(\omega_1) \right] \left[q_{\xi}(\omega_2) + q_{\xi}(\omega_1) \right] - 2 \int_{F_{\xi}(\omega_1)}^{F_{\xi}(\omega_2)} q_{\xi}(x) dF_{\xi}(x)}{\left[F_{\xi}(\omega_2) - F_{\xi}(\omega_1) \right] \left[q_{\xi}(\omega_2) - q_{\xi}(\omega_1) \right]}$$

si lo queremos presentar en función del índice de la distribución original resulta la poco operativa expresión

$$g_T = \frac{[F_{\xi}(\omega_2) - F_{\xi}(\omega_1)] [q_{\xi}(\omega_2) + q_{\xi}(\omega_1)] - 1 + g + 2 \int_0^{F_{\xi}(\omega_1)} q_{\xi}(x) dF_{\xi}(x) + 2 \int_{F_{\xi}(\omega_2)}^1 q_{\xi}(x) dF_{\xi}(x)}{[F_{\xi}(\omega_2) - F_{\xi}(\omega_1)] [q_{\xi}(\omega_2) - q_{\xi}(\omega_1)]}$$

2. Truncamiento unilateral

Se obtienen expresiones más simples cuando sólo realizamos un truncamiento en cualquier punto crítico ω

Supongamos un truncamiento por la derecha lo que da sentido a la variable $\xi_T = \xi / \xi \leq \omega$ con dominio a la izquierda de ω y a la que corresponde índice g_I

$$q_{\xi_T}(x) = \Phi_T[F_{\xi_T}(x)] = 1/q_{\xi}(\omega) \Phi[F_{\xi_T}(x)F_{\xi}(\omega)]$$

$$g_I = \frac{F_{\xi}(\omega)q_{\xi}(\omega) - 2 \int_0^{F_{\xi}(\omega)} q_{\xi}(x) dF_{\xi}(x)}{F_{\xi}(\omega)q_{\xi}(\omega)}$$

$$g_I = \frac{\int_{\omega}^{\omega})}{\omega \quad \omega}$$

a la variable $\xi_T = \xi / \xi > \omega$ con dominio a la derecha de ω y a la que corresponde índice g_D

$$q_{\xi_T}(x) = \frac{\Phi[F_{\xi_T}(x)(1 - F_{\xi}(\omega)) + F_{\xi}(\omega)] - q_{\xi}(\omega)}{1 - q_{\xi}(\omega)}$$

$$g_D = \frac{[1-F_\xi(\omega)] [1+q_\xi(\omega)] - 2 \int_0^{F_\xi(\omega)} q_\xi(x) dF_\xi(x)}{[1-F_\xi(\omega)] [1-q_\xi(\omega)]}$$

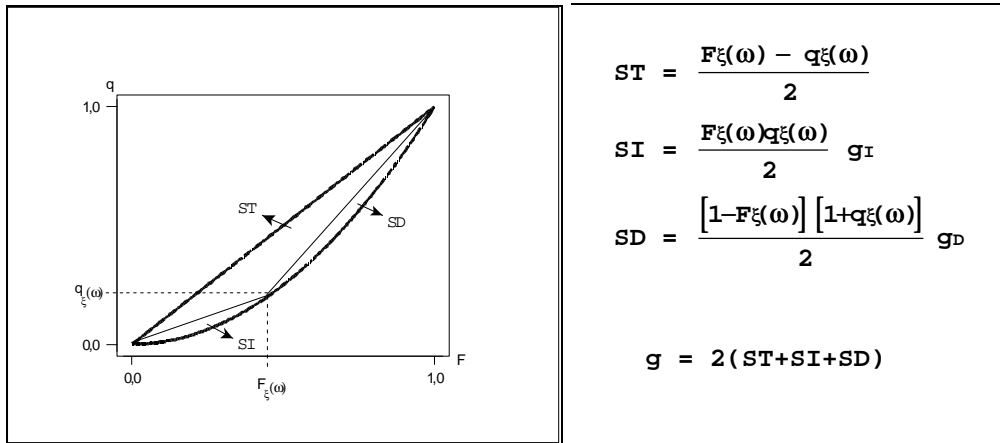
$$g_D = \frac{[1-F_\xi(\omega)] [1+q_\xi(\omega)] - 1 + g + 2 \int_0^{F_\xi(\omega)} q_\xi(x) dF_\xi(x)}{[1-F_\xi(\omega)] [1-q_\xi(\omega)]}$$

3. Descomposición del índice de Gini en una partición dicotómica ordenada

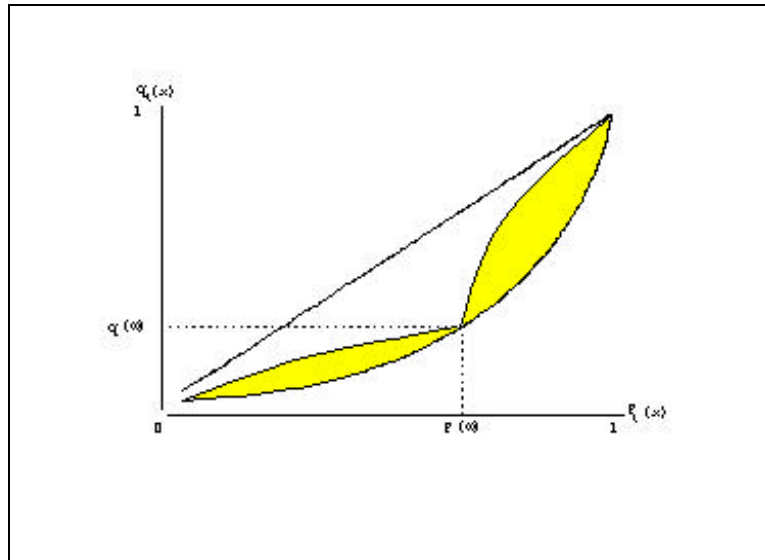
A partir de las expresiones encontradas para g_I y g_D resulta cómodo descomponer el índice de concentración de toda la población

$$g = F_\xi(\omega)q_\xi(\omega)g_I + [1-F_\xi(\omega)] [1-q_\xi(\omega)] g_D + F_\xi(\omega)-q_\xi(\omega)$$

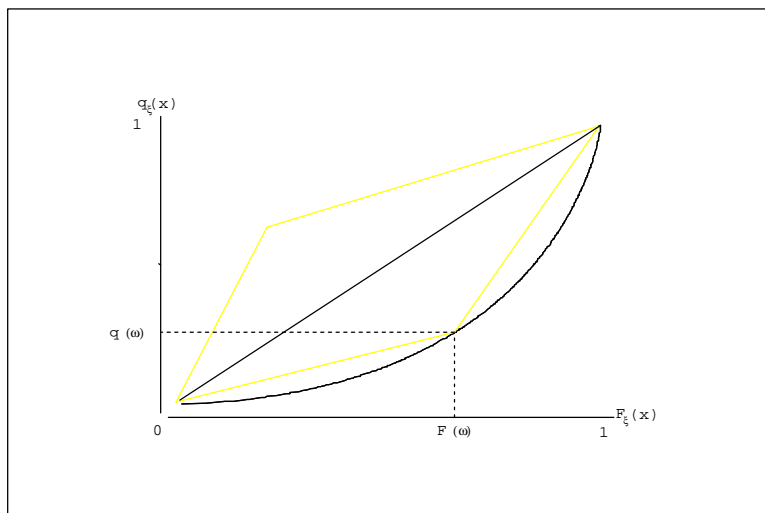
al que también habríamos llegado gráficamente



La primera parte del desarrollo: $F_\xi(\omega)q_\xi(\omega)g_I + [1-F_\xi(\omega)] [1-q_\xi(\omega)] g_D$ es una combinación lineal de los índices parciales g_i y se corresponde con una estimación de la concentración que hay dentro de los dos grupos



La segunda parte: $F_\xi(\omega) - q_\xi(\omega)$ representa la concentración que hay entre los dos grupos i coincide con el doble del área encerrada entre la diagonal principal y la poligonal que pasa por los puntos $[0,0]$, $[F_\xi(\omega)q_\xi(\omega)]$, y $[1,1]$



4. Índice de Gini con truncamiento en puntos centrales

En lo que sigue, sin pretensiones de exhaustividad, consideramos tres puntos notables correspondientes a valores centrales de la distribución

Mediana: Me (nivel de variable que divide la población en dos partes iguales)

$$0,5 = F_{\xi}(Me)$$

La descomposición de g será ahora

$$g = 0,5q_{\xi}(Me) g_I + 0,5[1-q_{\xi}(Me)] g_D + 0,5-q_{\xi}(Me)$$

La primera parte del desarrollo es la mitad de una media ponderada de índices truncados y la segunda parte mide el desajuste que presenta la masa de variable poseída por la mitad de la población, esto es la desigualdad que hay entre los colectivos de igual población.

Mediala: Ml (nivel de variable que divide la masa total en dos partes iguales)

$$0,5 = q_{\xi}(Ml)$$

El índice g se desagrega del modo

$$g = 0,5F_{\xi}(Ml) g_I + 0,5[1-F_{\xi}(Ml)] g_D + F_{\xi}(Ml)-0,5$$

Expresión que recoge la mitad de un promedio ponderado de los índices truncados y la proporción de población que hay entre mediala i mediana.

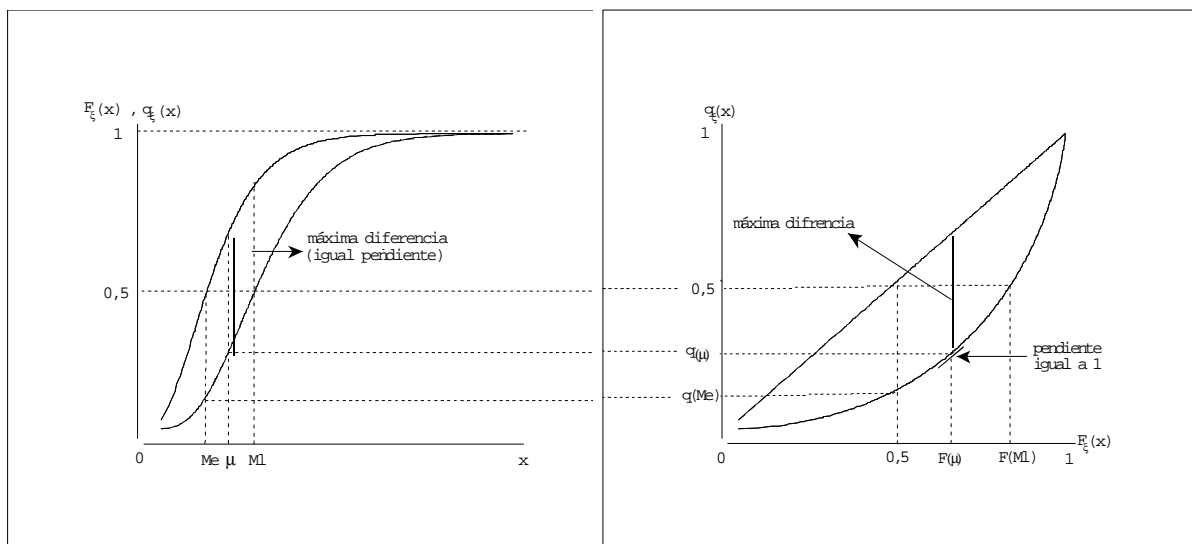
Media: μ (centro de gravedad; la distancia entre las funciones de distribución y de acumulación de variable es mayor; la pendiente de la curva de concentración es igual a 1)

$$\max F_{\xi}(x)-q_{\xi}(x) = F_{\xi}(\mu)-q_{\xi}(\mu) \rightarrow dF_{\xi}(\mu)/dq_{\xi}(\mu) = 1$$

El coeficiente g presenta la siguiente descomposición

$$g = F_{\xi}(\mu)q_{\xi}(\mu)g_I + [1-F_{\xi}(\mu)] [1-q_{\xi}(\mu)] g_D + F_{\xi}(\mu)-q_{\xi}(\mu)$$

La combinación inicial de coeficientes de cada grupo se incrementa con la distancia máxima entre acumulaciones que se corresponde con el índice de Pietra.



5. Estimación de la curva de concentración de la renta en España 1994

sin ánimo de profundizar en el estudio de la desigualdad en España y con la única pretensión de ejemplificar el cálculo del índice de Gini en distribuciones truncadas en un punto central de la distribución de la renta, utilizamos tres modelos:

Kakwani (1980): $q_{\xi}(x) = F_{\xi}(x) - A F_{\xi}(x)^{\alpha} [1 - F_{\xi}(x)]^{\beta}$ con $A, \alpha, \beta > 0$

Gupta (1984): $q_{\xi}(x) = F_{\xi}(x) A^{F_{\xi}(x)-1}$ con $A > 1$

Kakwani-Podder (1973): $q_{\xi}(x) = F_{\xi}(x)^{\alpha} e^{-\beta(1-F_{\xi}(x))}$ con $\alpha, \beta > 0$

Estimaremos dichas funciones con la distribución de la renta por municipios que proporciona el Anuario Comercial de España (1997)

% habitantes	% renta
2,16	1,50
13,48	10,44
22,84	19,57
10,41	9,95
12,66	13,19
17,75	20,03
19,21	23,36
1,15	1,46
0,24	0,32
0,12	0,17

de modo que '% renta' se ha medido a partir de la renta familiar disponible por habitante en cada municipio para el periodo 1993-94 y '% habitantes' representa la proporción de habitantes de los municipios respecto al total.

Conviene aclarar que no se trata propiamente de la distribución personal de la renta si no de una aproximación desde la distribución municipal de la renta y que en todo caso se llegaría a aquella contemplando además la desigualdad que hay dentro de los propios municipios. En conclusión, manejamos los datos con la única finalidad de ilustrar el análisis estadístico propuesto y no la de efectuar un análisis económico de la concentración de las rentas, todo lo cual justifica eludir cualquier lectura económica de los resultados encontrados.

La estimación del modelo de Kakwani una vez transformado

$$\ln [F_{\xi}(x) - q_{\xi}(x)] = \ln A + \alpha \ln F_{\xi}(x) + \beta [1 - F_{\xi}(x)] + \varepsilon_{\text{Kakwani}}$$

nos ha proporcionado los siguientes coeficientes

Predictor	Coef	DesvEst	razón-t	p
Constante	-1,4641	0,1251	-11,70	0,000
lnF	0,91138	0,06160	14,80	0,000
ln(1-F)	0,85604	0,02964	28,88	0,000

El modelo de Gupta transformado para ser operativo

$$\ln [q_{\xi}(x) / F_{\xi}(x)] = \ln A [F_{\xi}(x) - 1] + \varepsilon_{\text{Gupta}}$$

ha dado la estimación

Predictor	Coef	DesvEst	razón-t	p
F-1	0,340020	0,009282	36,63	0,000

y el modelo de Kakwani-Podder, una vez linealizado

$$\ln q_{\xi}(x) = \alpha \ln F_{\xi}(x) - \beta [1 - F_{\xi}(x)] + \varepsilon_{\text{kakwani+Podder}}$$

proporciona el resultado

Predictor	Coef	DesvEst	razón-t	p
lnF	1,02311	0,00276	370,23	0,000
1-F	-0,279867	0,007790	-35,92	0,000

de donde se obtienen las siguientes estimaciones de la masa acumulada de renta para los valores observados de la función de distribución:

		estimaciones de $q_{\xi}(x)$		
$F_{\xi}(x)$	$q_{\xi}(x)$	Kakwani	Gupta	Kakwani-Podder
0,0216	0,0150	0,014712	0,015487	0,015033
0,1564	0,1194	0,119539	0,117399	0,118326
0,3848	0,3151	0,320895	0,312169	0,316865
0,4889	0,4146	0,421076	0,410910	0,416789
0,6155	0,5465	0,549929	0,540069	0,546541
0,7930	0,7468	0,744382	0,739104	0,744364
0,9851	0,9804	0,978871	0,980122	0,980660
0,9966	0,9950	0,994823	0,995448	0,995574
0,9990	0,9982	0,998375	0,998660	0,998697

Hemos prescindido de algunos coeficientes propios de cualquier análisis de la regresión dado el escaso tamaño muestral que resulta al agrupar en intervalos la información inicial.

En cualquier caso la descripción de los errores del ajuste justifica buena adherencia en los tres modelos, muy especialmente en el de Kakwani-Podder

error	Media	Mediana	DesvEst
Kakwani	-0,00129	-0,00014	0,00318
Gupta	0,00240	0,00200	0,00307
Kakwani-Podder	-0,00021	-0,00026	0,00138

6. Índice de Gini de la distribución truncada de la renta

A partir de las estimaciones de los tres modelos y para cada uno de los tres umbrales de renta considerados hemos obtenido el porcentaje de individuos que no los superan $F_{\xi}(w)$ y el porcentaje de renta que absorben $q_{\xi}(w)$

	Kakwani		Gupta		Kakwani-Podder	
ω	$F_{\xi}(\omega)$	$q_{\xi}(\omega)$	$F_{\xi}(\omega)$	$q_{\xi}(\omega)$	$F_{\xi}(\omega)$	$q_{\xi}(\omega)$
Me	0,5	0,432	0,5	0,422	0,5	0,428
Ml	0,567	0,5	0,577	0,5	0,571	0,5
m	0,516	0,448	0,52	0,442	0,509	0,437

Ahora resulta más o menos cómodo el cálculo del índice de Gini para aquellos individuos que no alcanzan o que superan un determinado nivel de ingresos ω

En lo que sigue presentamos la expresión analítica para toda la población y cada uno de los dos estratos y los tres modelos considerados

Kakwani

$$g(\text{Kakwani}) = 2A B[\alpha+1, \beta+1] = \{A=0,23128; \alpha=0,91138; \beta=0,85604\} = 0,0939$$

$$g_I(\text{Kakwani}) = 1 - \frac{F_{\xi}(\omega)}{q_{\xi}(\omega)} + \frac{2A}{q_{\xi}(\omega)F_{\xi}(\omega)} B[F_{\xi}(\omega); \alpha+1, \beta+1]$$

$$g_D(\text{Kakwani}) = \frac{2A}{(1 - q_{\xi}(\omega))(1 - F_{\xi}(\omega))} (B[\alpha+1, \beta+1] - B[F_{\xi}(\omega); \alpha+1, \beta+1]) - \frac{F_{\xi}(\omega) - q_{\xi}(\omega)}{1 - q_{\xi}(\omega)}$$

con $B[F_{\xi}(\omega); \alpha+1, \beta+1]$ función Beta de Euler incompleta

Gupta

$$g(\text{Gupta}) = \frac{A \ln^2 A - 2A \ln A + 2A - 2}{A \ln^2 A} = \{A=1,40497\} = 0,1043$$

$$g_I(\text{Gupta}) = 1 - \frac{2}{q_{\xi}(\omega)F_{\xi}(\omega)} \left[\frac{q_{\xi}(\omega)}{\ln A} + \frac{q_{\xi}(\omega)/F_{\xi}(\omega)}{\ln^2 A} + \frac{1}{A \ln^2 A} \right]$$

$$g_{D(Gupta)} = \frac{1+q_{\xi}(\omega)}{1-q_{\xi}(\omega)} - \frac{2}{\ln A (1-F_{\xi}(\omega))} + \frac{2(F_{\xi}(\omega)-q_{\xi}(\omega))}{\ln^2 A F_{\xi}(\omega)(1-F_{\xi}(\omega))(1-q_{\xi}(\omega))}$$

Kakwani-Podder

$$g(\text{Kakwani y Podder}) = 1 - \frac{2}{e^{\beta}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\beta^j}{j! (\alpha+1+j)} = \{\alpha=1,02311; \beta=0,27987\} = 0,0969$$

$$g_I(\text{Kakwani y Podder}) = 1 - \frac{2}{e^{\beta F_{\xi}(\omega)}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\beta^j F_{\xi}(\omega)^j}{j! (\alpha+1+j)}$$

$$g_{D \text{ Kakwani y Podder}} = \frac{1+q_{\xi}(\omega)}{1-q_{\xi}(\omega)} - \frac{2}{e^{\beta} (1-F_{\xi}(\omega))(1-q_{\xi}(\omega))} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1 - F_{\xi}(\omega)^{\alpha+1+j}}{j! (\alpha+1+j)}$$

El cálculo del índice de concentración de toda la población y en cada uno de los grupos es

	Kakwai		Gupta		Kakwani-Podder	
ω	g_I	g_D	g_I	g_D	g_I	g_D
Me	0,0543	0,0493	0,0781	0,0340	0,0556	0,0455
Ml	0,0599	0,0462	0,0877	0,0575	0,0617	0,0386
m	0,0555	0,0488	0,0934	0,0180	0,0564	0,0447

Cabe también la posibilidad de presentar el índice de concentración de la distribución truncada en función del índice de la distribución no censurada $g_T = \text{func}(g)$, tal y como se ha presentado en el primer párrafo. En nuestro caso sería

Modelo de Kakwani

ω	g_I	g_D
Me	4,6296 g - 0,37960	3,5211 g - 0,2813
Ml	3,5273 g - 0,27141	4,6189 g - 0,3875
μ	4,3259 g - 0,35013	3,7430 g - 0,3027

Modelo de Gupta

ω	g_I	g_D
Me	4,7393 g - 0,41621	3,4602 g - 0,3269
Ml	3,4662 g - 0,27383	4,7281 g - 0,4356
μ	4,3509 g - 0,36039	3,7336 g - 0,3714

Modelo de Kakwani-Podder

ω	g_I	g_D
Me	4,6729 g - 0,39720	3,4965 g - 0,2933
Ml	3,5026 g - 0,27770	4,6620 g - 0,4131
μ	4,4957 g - 0,37924	3,6175 g - 0,3058

7. Descomposición del índice de concentración de la renta

Aplicado las expresiones de la descomposición dicotómica en los tres puntos de corte y para cada uno de los modelos estimados encontramos las relaciones

Modelo de Kakwani

ω	$g = f(g_I, g_D)$
Me	$g = 0,2160 g_I + 0,2840 g_D + 0,068$
Ml	$g = 0,2835 g_I + 0,2165 g_D + 0,067$
μ	$g = 0,2312 g_I + 0,2672 g_D + 0,068$

Modelo de Gupta

ω	$g = f(g_I, g_D)$
Me	$g = 0,2110 g_I + 0,2890 g_D + 0,078$
Ml	$g = 0,2885 g_I + 0,2115 g_D + 0,077$
μ	$g = 0,2298 g_I + 0,2650 g_D + 0,078$

Modelo de Kakwani-Podder

ω	$g = f(g_I, g_D)$
Me	$g = 0,2140 g_I + 0,2860 g_D + 0,072$
Ml	$g = 0,2855 g_I + 0,2145 g_D + 0,071$
μ	$g = 0,2224 g_I + 0,2764 g_D + 0,072$

Finalmente y sin pretensión de profundizar en los tres modelos estudiados, indiquemos que de la misma manera que se ha presentado la desagregación de Gini en dos subcolectivos excluyentes y ordenados, puede presentarse la descomposición en tres estratos

$$\text{estrato izquierdo: } \xi_I = \xi / \xi \leq \omega_1 \rightarrow g_I$$

$$\text{estrato central: } \xi_C = \xi / \omega_1 < \xi \leq \omega_2 \rightarrow g_C$$

$$\text{estrato derecho: } \xi_D = \xi / \xi > \omega_2 \rightarrow g_D$$

$$g = F_\xi(\omega_1)q_\xi(\omega_1)g_I + [F_\xi(\omega_2) - F_\xi(\omega_1)] [q_\xi(\omega_2) - q_\xi(\omega_1)] g_T + \\ + [1 - F_\xi(\omega_2)] [1 - q_\xi(\omega_2)] g_D + F_\xi(\omega_1)q_\xi(\omega_2) - F_\xi(\omega_2)q_\xi(\omega_1) + F_\xi(\omega_2) - q_\xi(\omega_2)$$

Si generalizamos la estratificación a K grupos ordenados y limitados por las cotas $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_K = \max \xi$, fácilmente llegamos al cálculo del índice a partir de dos componentes

$$g = A + B$$

El sumando A es una combinación lineal de los índices parciales g_i y se corresponde con una estimación de la concentración que hay dentro de los grupos, Zagier (1983)

$$A = \sum_{i=1}^k [q_\xi(\omega_i) - q_\xi(\omega_{i-1})] [F_\xi(\omega_i) - F_\xi(\omega_{i-1})] g_i$$

expresión que Gastwirth (1972) propone sobre estimar a partir de

$$A' = \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^k [F_\xi(\omega_i) - F_\xi(\omega_{i-1})]^2 \frac{(\omega_i - \mu_i)(\omega_{i-1} - \mu_{i-1})}{(\omega_i - \omega_{i-1})}$$

Por otro lado el sumando B representa la concentración que hay entre los diferentes grupos

$$B = 1 - \sum_{i=1}^k [q_\xi(\omega_i) + q_\xi(\omega_{i-1})] [F_\xi(\omega_i) - F_\xi(\omega_{i-1})]$$

i coincide con el doble del área encerrada entre la diagonal principal i la poligonal que pasa por los puntos $[0,0]$, $[F_\xi(\omega_1)q_\xi(\omega_1)]$, $[F_\xi(\omega_2)q_\xi(\omega_2)]$, ..., $[1,1]$, como muestra Kakwani (1980bis).

Anexo: Distribución acumulada de la renta por centilas, según la estimación de los modelos de concentración de Kakwani, Gupta y Kakwani-Podder.

Centila	Kakwani	Gupta	Kak-Podd	Centila	Kakwani	Gupta	Kak-Podd
1	0,00655	0,00714	0,00681	51	0,44201	0,43173	0,43778
2	0,01357	0,01433	0,01389	52	0,45201	0,44170	0,44781
3	0,02078	0,02157	0,02109	53	0,46206	0,45172	0,45791
4	0,02812	0,02886	0,02838	54	0,47215	0,46181	0,46806
5	0,03557	0,03620	0,03576	55	0,48229	0,47197	0,47826
6	0,04311	0,04359	0,04322	56	0,49248	0,48219	0,48853
7	0,05074	0,05102	0,05074	57	0,50272	0,49247	0,49885
8	0,05845	0,05851	0,05833	58	0,51301	0,50281	0,50923
9	0,06623	0,06605	0,06599	59	0,52335	0,51323	0,51966
10	0,07408	0,07364	0,07371	60	0,53373	0,52370	0,53016
11	0,08200	0,08128	0,08148	61	0,54417	0,53424	0,54071
12	0,08998	0,08897	0,08932	62	0,55466	0,54485	0,55132
13	0,09802	0,09671	0,09721	63	0,56519	0,55553	0,56199
14	0,10613	0,10450	0,10516	64	0,57578	0,56627	0,57272
15	0,11429	0,11235	0,11317	65	0,58642	0,57707	0,58351
16	0,12251	0,12025	0,12124	66	0,59711	0,58795	0,59436
17	0,13078	0,12820	0,12935	67	0,60785	0,59889	0,60526
18	0,13911	0,13620	0,13753	68	0,61864	0,60990	0,61623
19	0,14749	0,14426	0,14576	69	0,62949	0,62097	0,62726
20	0,15593	0,15237	0,15404	70	0,64038	0,63212	0,63834
21	0,16442	0,16053	0,16238	71	0,65134	0,64333	0,64949
22	0,17296	0,16875	0,17077	72	0,66234	0,65461	0,66070
23	0,18155	0,17702	0,17922	73	0,67340	0,66597	0,67197
24	0,19020	0,18535	0,18772	74	0,68452	0,67739	0,68329
25	0,19889	0,19373	0,19628	75	0,69569	0,68888	0,69468
26	0,20764	0,20216	0,20488	76	0,70692	0,70044	0,70614
27	0,21643	0,21065	0,21355	77	0,71820	0,71208	0,71765
28	0,22528	0,21920	0,22226	78	0,72955	0,72378	0,72922
29	0,23417	0,22780	0,23103	79	0,74095	0,73556	0,74086
30	0,24312	0,23646	0,23986	80	0,75242	0,74741	0,75256
31	0,25211	0,24517	0,24874	81	0,76394	0,75933	0,76432
32	0,26115	0,25394	0,25767	82	0,77553	0,77132	0,77615
33	0,27024	0,26277	0,26666	83	0,78718	0,78338	0,78803
34	0,27937	0,27166	0,27570	84	0,79890	0,79552	0,79999
35	0,28856	0,28060	0,28479	85	0,81069	0,80773	0,81200
36	0,29779	0,28960	0,29394	86	0,82255	0,82002	0,82408
37	0,30707	0,29866	0,30314	87	0,83448	0,83238	0,83622
38	0,31640	0,30777	0,31240	88	0,84648	0,84482	0,84843
39	0,32578	0,31695	0,32171	89	0,85857	0,85733	0,86070
40	0,33520	0,32618	0,33108	90	0,87073	0,86991	0,87303
41	0,34468	0,33548	0,34050	91	0,88299	0,88257	0,88543
42	0,35419	0,34483	0,34998	92	0,89533	0,89531	0,89790
43	0,36376	0,35424	0,35951	93	0,90778	0,90813	0,91043
44	0,37338	0,36371	0,36910	94	0,92033	0,92102	0,92303
45	0,38304	0,37325	0,37875	95	0,93301	0,93399	0,93569
46	0,39275	0,38284	0,38844	96	0,94583	0,94703	0,94842
47	0,40251	0,39250	0,39820	97	0,95882	0,96016	0,96121
48	0,41231	0,40221	0,40801	98	0,97202	0,97336	0,97408
49	0,42216	0,41199	0,41788	99	0,98555	0,98664	0,98700
50	0,43207	0,42183	0,42780	100	1,00000	1,00000	1,00000

BIBLIOGRAFIA

Anuario Comercial España (1997). Servicio de Estudios. La Caixa.

BARÓ, J. (1988) "Función e índice de concentración de algunas distribuciones truncadas". Comunicación II reunión ASEPELT-España. Valladolid.

BARÓ, J. (1991) "Aplicaciones del modelo de kakwani al análisis de la distribución de la renta". Document de Treball nº 9101. Institut d'Estudis Laborals. Universitat de Barcelona.

BARÓ, J. y MORATAL, V. (1984). "Concentración y distribuciones truncadas" Qüestió , Vol.8 núm.3 pp.127-132

BARÓ, J. y TORRELLES, E. (1989) "Sobre las medidas de concentración" Document de Treball 8904. Institut d'Estudis Laborals. Universitat de Barcelona.

BARÓ, J. (1989) "Descomposició del índice de Gini". Comunicación en III Reunión ASEPELT-España. Sevilla

GASTWIRTH, J.L. (1972) "Estimation of the Lorenz Curve and Gini Index". Review of Economics and Statistics, Vol.LIV nú.3 pp. 306-316

GIORGI, G. y PALLINI, A. (1986) "Di talune soglie inferior e superiore del rapporto di concentrazione". Metron, Vol XLIV, nº1-4

GUPTA, M.R. (1984). "Notes and comments. Functional Form for Estimation the Lorenz Curve". Econometrica , 52, pp. 1313-1314.

KAKWANI, N.C. y PODDER, N. (1973) "On the Estimation of Lorenz Curves from Grouped observations". International Economic Review, 14 pp.278-292.

KAKWANI,N.C.(1980)"On a class of Poverty Measures".Econometrica
n°48.

KAKWANI,N.C.(1980bis)."Income inequality and poverty".Oxford
University Press.

SHORROCKS,C. (1988). "Aggregation Issues in Inequality
Measurement" en W.Eichhorm (ed) Measurement in Economics, New
York: Springer-Verlag.

ZAGIER,D.(1983).Inequalities for the Gini coefficient of
Composite Populations". J.Mathematical Economics, Vol 12.n°12
pp.103-108.