EL PESAR EN EL PROCESO ANALÍTICO JERÁRQUICO

María Teresa ESCOBAR URMENETA
Juan AGUARÓN JOVEN
José María MORENO JIMÉNEZ

Dpto. Métodos Estadísticos, Facultad de Económicas, Universidad de Zaragoza
Gran Vía 2, 50005 Zaragoza, Spain.
Tel.: 976-761000 ext. 4674; e-mail: mescobar@posta.unizar.es

RESUMEN

Este trabajo plantea una interpretación de las prioridades obtenidas en el Proceso Analítico Jerárquico (AHP) a la hora de seleccionar entre un conjunto discreto de alternativas en términos del 'pesar' asociado a las mismas. Este concepto es utilizado para establecer la relación entre AHP y otra técnica de decisión multicriterio, la Programación Jerárquica por Compromiso (PJPC).

PALABRAS CLAVE: Proceso Analítico Jerárquico (AHP), Pesar, Prioridades, Programación Jerárquica por Compromiso (PJPC).

1. INTRODUCCIÓN

El Proceso Analítico Jerárquico (AHP) (Saaty, 1977, 1980) es una técnica de decisión multicriterio que combina aspectos tangibles e intangibles para obtener, en una escala de razón, las prioridades asociadas con las alternativas del problema. Básicamente, el método original de AHP consta de cuatro etapas: (1) Modelización, (2) Valoración, (3) Priorización, y (4) Síntesis.

Las prioridades en AHP representan la importancia relativa de los elementos de un nivel con respecto a un elemento del nivel superior (prioridades locales) o respecto a la meta (prioridades totales). En este trabajo se obtiene, como sugieren Loomes y Sudgen (1982) de considerar interpretaciones en términos del pesar esperado en general para la Toma de Decisiones, una expresión de las prioridades de AHP en términos de la pérdida de pesar esperado.

La idea central en la que se basa la Teoría del Pesar esperado (Loomes y Sudgen, 1982, 1987) es que, en la Toma de Decisiones, los individuos tienen en cuenta, no solamente las consecuencias que pueden experimentar como resultado de la alternativa elegida, sino también de la comparación con las consecuencias que se hubieran derivado de haber seleccionado otra alternativa bajo el mismo estado. Esta teoría es consistente con algunas situaciones, frecuentemente observadas, que violan los axiomas de la Teoría de Utilidad Esperada. Una de estas situaciones se conoce con el nombre de cambio de rango.

El empleo de esta filosofía ha permitido relacionar tres enfoques multicriterio, el Proceso Analítico Jerárquico, la Programación Jerárquica por Compromiso y la Programación por Compromiso. La relación que liga estas tres aproximaciones está basada en la interpretación en términos del pesar esperado dada a las prioridades.

La Programación por Compromiso (PPC) desarrollada por Zeleny (1973, 1974, 1982) y Yu (1973, 1985) es una técnica de Decisión Multicriterio que busca la obtención de la mejor solución mediante la minimización de la distancia de las alternativas a un punto de referencia que es el punto ideal. En su formulación original, la PPC consideraba un conjunto continuo de alternativas, un conjunto de criterios tangibles, y no suponía la existencia previa de una estructura que permitiera modelizar el problema considerando que todos los aspectos relevantes del mismo vendrían representados, por así decirlo, en un mismo nivel aunque con diferente importancia. No obstante, es evidente que un mejor conocimiento de las relaciones entre los elementos del problema de decisión, esto es, de la estructura o modelo asociado al problema de decisión, y la inclusión de aspectos o criterios intangibles, permite una modelización y resolución más cercana a la realidad.

Basado en el Método de Programación por Compromiso y en la metodología propuesta por Saaty (1977, 1980) para el Proceso Analítico Jerárquico (AHP), la Programación Jerárquica por Compromiso (PJPC), esbozada en Aguarón, Escobar y Moreno-Jiménez (1994), y recogida en Escobar y Moreno-Jiménez (1997), combina: (1) una modelización jerárquica del problema, y (2) la minimización de la distancia a un punto ideal como procedimiento de resolución. Este método propuesto permite la aplicación de un modelo basado en la minimización de una función distancia con aspectos tangibles e intangibles.

El trabajo está estructurado de la siguiente manera: en el siguiente epígrafe (§2) se obtiene una interpretación de las prioridades de AHP en términos del pesar esperado y, en el tercer epígrafe (§3) se aplican las expresiones obtenidas en el epígrafe anterior a un ejemplo sencillo. En el epígrafe cuarto (§4) se presenta la Programación Jerárquica por Compromiso, así como algunos resultados que la relacionan con la Programación por Compromiso, y, en el quinto epígrafe (§5) se obtiene la relación entre las tres técnicas de decisión multicriterio consideradas, PJPC, PPC y AHP. Por último en el sexto epígrafe (§6) se destacan las conclusiones más interesantes.

2. PÉRDIDA DE LA PRIORIDAD ESPERADA EN AHP

En el Proceso Analítico Jerárquico se comparan las alternativas entre sí de forma pareada para obtener la prioridad relativa de cada una de las mismas. Una vez obtenidas las prioridades globales, las alternativas se ordenan de mayor a menor a partir de la prioridad que reciben. Un enfoque alternativo consiste en trabajar con la pérdida de prioridad, también llamada *coste de oportunidad* o *pesar*, por no obtener la máxima prioridad posible.

Veamos cómo se puede definir una expresión que recoja la pérdida de prioridad esperada. Para ello se utilizará la notación siguiente. Sea una jerarquía con tres niveles (meta, criterios, subcriterios) además del último nivel correspondiente a las alternativas. Sea m el número de criterios, n_j el número de subcriterios para el criterio j ($j = 1,\ldots,m$) y $nalt$ el número de alternativas. Sea $w_{ji}(k)$ la prioridad de la alternativa k en el subcriterio i (que a su vez cuelga del criterio j), w_{i_j} la prioridad del subcriterio i con respecto al criterio j y w_j la prioridad del criterio j con respecto a la meta.

La pérdida de prioridad (local) de la alternativa k ($k = 1,\ldots,nalt$) en el subcriterio i_j ($i_j = 1,\ldots, n_j$) es: $r_{ji}(k) = w_{ji}^* - w_{ji}(k)$, donde $w_{ji}^* = \text{Max}\{w_{ji}(k);\ k = 1,\ldots,nalt\}$. Partiendo del criterio j se calcula la pérdida de prioridad esperada de la alternativa k con respecto a dicho criterio, agregando los términos de las pérdidas de prioridad de dicha alternativa correspondientes a los subcriterios que cuelgan del criterio j:

$$r_j(k) = \sum_{i_j=1}^{n_j} w_{i_j} \left| w_{ji}^* - w_{ji}(k) \right| \quad j = 1,\ldots, m \tag{2.1}$$

En un último paso se obtendrá la pérdida de prioridad esperada global de cualquier alternativa con respecto a la meta sin más que componer los términos anteriores para todos los criterios considerados en la jerarquía, aplicando el principio de composición jerárquica.

$$r(k) = \sum_{j=1}^{m} w_j r_j(k) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i_j=1}^{n_j} w_{i_j} w_j \left| w_{ji}^* - w_{ji}(k) \right| \tag{2.2}$$

Aunque se haya considerado una jerarquía con tres niveles es sencillo ver que este procedimiento puede extenderse a cualquier jerarquía, sin más que aplicar el Principio de Composición Jerárquica a los términos que miden las pérdidas de prioridad de las alternativas con respecto a los elementos del último nivel de la jerarquía.

Si se utiliza la pérdida de prioridad esperada para la ordenación o selección de las alternativas, éstas deberán ser ordenadas de menor a mayor pérdida de prioridad. Si el problema planteado busca la selección de una alternativa (problema P.α) se selecciona aquella que proporcione una menor pérdida de prioridad global.

Aplicando el Proceso Analítico Jerárquico al problema planteado en los términos anteriores, las expresiones de la prioridad local de la alternativa k respecto al criterio j ($w_j(k)$) y la prioridad total o respecto a la meta ($w(k)$) vienen dadas por:

$$w_j(k) = \sum_{i_j=1}^{n_j} w_{i_j} w_{ji}(k) \quad j = 1,\ldots, m \tag{2.3}$$

$$w(k) = \sum_{j=1}^{m} w_j w_j(k) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i_j=1}^{n_j} w_j w_{i_j} w_{ji}(k) \tag{2.4}$$

En los siguientes resultados se demuestra que la ordenación que se obtiene de aplicar el Proceso Analítico Jerárquico por un lado, y la que se obtiene de minimizar la pérdida de prioridad global por otro, es la misma, y por tanto, los procedimientos son equivalentes.

Teorema 2.1. $w(k) = r^* - r(k)$.

Demostración:

Sin pérdida de la generalidad, este resultado se demuestra para el caso de una jerarquía con cuatro niveles. El caso general se tiene extendiendo la expresión de la pérdida de prioridad global mediante la agregación jerárquica.

Para cada alternativa k (k = 1,…,$nalt$) la pérdida de prioridad con respecto al criterio j (j = 1,…,m) puede expresarse tal y como se ha desarrollado en la expresión 2.1. como $r_j(k) = \sum_{i_j=1}^{n_j} w_{i_j} \left| w_{ji}^* - w_{ji}(k) \right|$ = $\sum_{i_j=1}^{n_j} w_{i_j} w_{ji}^* - \sum_{i_j=1}^{n_j} w_{i_j} w_{ji}(k)$.

El primer término es independiente de la alternativa que se esté considerando y únicamente depende del criterio j, y se ha denotado por r_j^*. Representa la suma ponderada de las prioridades máximas de los subcriterios que cuelgan del criterio j. El segundo término corresponde a la prioridad de la alternativa k con respecto al criterio j, $w_j(k)$. Por tanto, $r_j(k) = r_j^* - w_j(k)$. Esta expresión indica que la relación que se intenta demostrar para las prioridades globales se verifica para cada uno de los criterios.

Si a continuación se consideran las expresiones correspondientes a las prioridades (2.4) y pérdidas de prioridad globales (2.2), se tiene que

$$r(k) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j} w_{i_j} w_j \left| w_{ji}^* - w_{ji}(k) \right| = \sum_{j=1}^{m} w_j r_j(k) = \sum_{j=1}^{m} w_j \left(r_j^* - w_j(k) \right) = \sum_{j=1}^{m} w_j r_j^* - \sum_{j=1}^{m} w_j w_j(k) \ .$$

El primer término no depende de las alternativas, ni de los criterios y por tanto es una constante que es denominada r^*. El segundo término corresponde a la prioridad global de la alternativa k, $w(k)$. Por tanto se puede expresar la relación anterior como:

$r(k) = r^* - w(k)$, o lo que es lo mismo, $w(k) = r^* - r(k)$. #

Por tanto, la prioridad global de una alternativa al aplicar el Proceso Analítico Jerárquico es igual a una constante menos la pérdida de prioridad global de dicha alternativa. El valor de la constante r^* representa la composición jerárquica de los valores máximos de las prioridades de las alternativas respecto de los elementos del nivel inmediatamente superior al de las alternativas (en el desarrollo anterior, los subcriterios). Esta constante es igual a la suma de la prioridad global y la pérdida de prioridad esperada global para cualquier alternativa, $r^* = w(k) + r(k)$.

Corolario 2.1. La alternativa con mayor prioridad total es la alternativa con menor pérdida de prioridad esperada global.

Corolario 2.2. Ordenando las alternativas de mayor a menor prioridad global, y ordenándolas de menor a mayor pérdida de prioridad global, se tiene que ambas ordenaciones coinciden.

Estos dos últimos corolarios muestran que la resolución del problema P.α (selección de la mejor alternativa) y P.γ (ordenación del conjunto de alternativas) por los dos procedimientos descritos, AHP y minimización de la pérdida de prioridad esperada, conducen a los mismos resultados.

Además, los valores obtenidos en las condiciones anteriores proporcionan la pérdida de prioridad relativa esperada de cada alternativa, justificando una interpretación de las prioridades basada en el pesar esperado como se sugiere en Loomes y Sudgen (1982).

Algunos autores consideran que al utilizar prioridades es más adecuado utilizar cocientes en lugar de diferencias. Siguiendo esta idea se puede definir la pérdida de prioridad (local) de la alternativa k ($k = 1,\ldots,nalt$) en el subcriterio i_j ($i_j = 1,\ldots, n_j$) como el cociente entre el valor máximo de la prioridad y el valor de la misma: $r'_{ji}(k) = w_{ji}^*/w_{ji}(k)$, donde $w_{ji}^* = \text{Max}\{w_{ji}(k);\ k = 1,\ldots,nalt\}$. La pérdida de prioridad esperada de la alternativa k con respecto al criterio j se obtendrá multiplicando los términos de las pérdidas de prioridad de dicha alternativa correspondientes a los subcriterios que cuelgan del criterio j:

$$r_j^{'}(k) = \prod_{i=1}^{n_i}\left(\frac{w_{ji}^{*}}{w_{ji}(k)}\right)^{w_{i_j}} \quad j = 1,\ldots, m. \tag{2.5}$$

En este caso parece tener más sentido utilizar el método de Síntesis de Razones para obtener el pesar total.

$$r'(k) = \prod_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n_j}\left(\frac{w_{ji}^{*}}{w_{ji}(k)}\right)^{w_j w_{i_j}} = \prod_{j=1}^{m}\left(r_j^{'}(k)\right)^{w_j} \tag{2.6}$$

Tomando logaritmos en la expresión anterior, se tiene que esta forma de medir el pesar es equivalente a utilizar la expresión del pesar esperado obtenida utilizando el principio de composición jerárquica para los logaritmos de las prioridades de las alternativas:

$$\log r'(k) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j} w_{i_j} w_j \left(\log w_{ji}^{*} - \log w_{ji}(k)\right) \tag{2.7}$$

Siguiendo un razonamiento similar al anterior, este procedimiento de cálculo del pesar proporciona el mismo resultado que si se aplica el método de síntesis de razones (Aguarón, Escobar y Moreno-Jiménez, 1995; Barzilai y Lootsma, 1997) para la obtención de las prioridades globales a partir de las prioridades globales.

A continuación se presenta un ejemplo sencillo en el que se aplican las expresiones anteriores para la obtención de la alternativa para la que se tiene una mayor prioridad, y una menor pérdida de pesar esperado.

Se considera un problema en el que el número de criterios es $m = 2$, para cada criterio el número de subcriterios es también $n_1 = n_2 = 2$; y el número de alternativas es igual a 3. En la siguiente tabla se muestran las prioridades de los distintos elementos con respecto a los elementos del nivel superior.

Tabla 2.1. Efectos relativos

	C1 2/5		**C2** 3/5	
	SC1,1 1/3	**SC1,2** 2/3	**SC2,1** 2/3	**SC2,2** 1/3
A1	0.1	0.2	0.2	0.4
A2	0.3	0.5	0.2	0.4
A3	0.6	0.3	0.6	0.2

Aplicando AHP (principio de composición jerárquica), se tiene que las prioridades de las alternativas con respecto a cada uno de los criterios y con respecto a la meta son:

Tabla 2.2. Composición de las prioridades

	C1	**C2**	**Meta**
A1	5/30	8/30	34/150
A2	13/30	8/30	50/150
A3	12/30	14/30	66/150

La ordenación de las alternativas es, por tanto, A3, A2 y A1.

Para construir la tabla de pesar relativo, se buscan los valores máximos de las prioridades de las alternativas con respecto a cada uno de los subcriterios en la tabla de efectos relativos. Estos valores máximos son 0.6, 0.5, 0.6 y 0.4 respectivamente para cada uno de los cuatro subcriterios. La tabla de pesar relativo queda:

Tabla 2.3. Pesar relativo

	C1 2/5		**C2** 3/5	
	SC1,1 1/3	**SC1,2** 2/3	**SC2,1** 2/3	**SC2,2** 1/3
A1	0.5	0.3	0.4	0
A2	0.3	0	0.4	0
A3	0	0.2	0	0.2

Volviendo a aplicar el principio de composición jerárquica, pero ahora a los términos que miden el pesar de cada alternativa, se tienen los siguientes resultados:

Tabla 2.4 Composición del pesar relativo

	C1	**C2**	**Meta**
A1	11/30	8/30	46/150
A2	3/30	8/30	30/150
A3	4/30	2/30	14/150

La ordenación de las alternativas al tomar el pesar esperado de menor a mayor es: A3, A2 y A1, que coincide con el obtenido directamente de las prioridades. El valor de r^* es igual a 80/150 y como se puede observar es el valor que resulta de sumar la prioridad relativa y el pesar esperado de cada alternativa.

3. LA PROGRAMACIÓN JERÁRQUICA POR COMPROMISO

La Programación Jerárquica por Compromiso (Escobar y Moreno-Jiménez, 1997) combina la estructura jerárquica en la modelización del problema con la Programación por Compromiso (PPC), técnica de decisión multicriterio que utiliza información a priori sobre la estructura de preferencias del decisor. La PPC formula la *búsqueda de metas* (Yu, 1985) en términos de una función distancia. Para ello, se toma como punto de referencia el denominado punto ideal $z^* = (z_1^*, \ldots, z_m^*)$, donde $z_j^* = \text{Opt}\ \{z_j(x),\ x \in X\}$. Se minimiza la distancia a este punto, medida en norma L_p, desde cualquier otro punto del espacio de criterios, $z(x) \in Z$:

$$d(x, p, l) = \left\| z(x) - z^* \right\|_{p,l} = \left(\sum_{j=1}^{m} l_j^p \left| z_j^* - z_j(x) \right|^p \right)^{1/p}$$

$$d(x, \infty, l) = \left\| z(x) - z^* \right\|_{\infty,l} = \underset{j=1,\ldots,m}{\text{Max}} \left\{ l_j \left| z_j^* - z_j(x) \right| \right\}$$

En los modelos de PPC la información proporcionada por el decisor corresponde al orden de la norma (p), cuya interpretación puede verse en Yu (1973, 1985), Zeleny (1982) y Romero (1993), y a la importancia dada a la desviación respecto al punto ideal para cada criterio (l_j). Aunque estos valores suelen ser conocidos a priori, la utilización práctica del modelo sugiere su obtención, en concreto la de los l_j, dentro del propio proceso de resolución. De esta manera, la información que localmente pueda ir obteniéndose permite una mejor evaluación de los parámetros. Generalmente, los valores de los l_j tienen un efecto normalizador (Zeleny, 1982; Romero, 1991). No obstante, recientemente se está intentando analizar, incluso desde un punto de vista filosófico, su importancia y contribución en el modelo. A continuación, se va a seguir la propuesta de Moreno-Jiménez, Santamaría y Aguarón (1993), que sugieren la descomposición de los pesos en dos partes: una subjetiva, o a priori, que pretende capturar la subjetividad del decisor en los aspectos menos estructurados del problema; y otra objetiva, o a posteriori, que pretende incorporar el poder discriminatorio de los datos para cada criterio. En este sentido, se puede ver también Zeleny (1982, capítulo 7) y Barba-Romero y Pomerol (1997, p.106).

Uno de los inconvenientes de la PPC es la cuantificación de la distancia para atributos intangibles. Para solventarlo, la PJPC asocia a cada alternativa su prioridad relativa en cada uno de los aspectos o atributos intangibles considerados. Estos valores se obtienen mediante comparaciones pareadas entre los diferentes niveles del atributo (Saaty, 1980).

La propuesta de un modelo jerárquico para la modelización del problema y la utilización de la minimización a un punto ideal cuando se consideran tanto aspectos tangibles como intangibles, permite a la PJPC un mayor realismo y un mejor aprovechamiento del conocimiento existente del problema.

Para una mejor comprensión del procedimiento seguido, se especifican los pasos seguidos en el caso particular de una jerarquía con tres niveles. El caso general puede verse en Escobar y Moreno-Jiménez (1997).

El proceso seguido en la PJPC consta de cuatro pasos: (1) Modelización; (2) Valoración; (3) Composición; y (4) Explotación. En el primer paso se construye la jerarquía. En el nivel superior se tiene un solo elemento que es la meta global; en el nivel 2, los criterios (m elementos); y en el nivel 3, los subcriterios (n_j elementos para cada criterio j). Las alternativas ($x \in X$) se colocan en la parte inferior de la jerarquía.

En el paso 2.1, se obtienen las prioridades de los subcriterios con respecto a los criterios w_{i_j} ($i_j = 1,\ldots, n_j$), y las de los criterios con respecto a la meta, w_j ($j = 1,\ldots, m$). Estas prioridades forman la parte subjetiva de los pesos. En el paso 2.2, se miden las alternativas con respecto a los subcriterios ($z_{ji}(x)$; $j = 1,\ldots,m$, $i = 1,\ldots,n_j$) que proporcionan el punto ideal $z_j^* = (z^*_{j1},\ldots, z^*_{j,n_j})$, donde $z^*_{ji} = \mathrm{Opt}\{z_{ji}(x), x \in X\}$.

En el paso 3 se calculan las distancias: Para cada criterio j, se calcula en la primera iteración la distancia de cada alternativa al punto ideal obtenido en el paso 2.2, z_j^*:

$$d_j(x) = \left(\sum_{i=1}^{n_j} p_{ji}^{p} \left| z^*_{ji} - z_{ji}(x) \right|^p \right)^{1/p} \quad j = 1,\ldots,m \tag{3.1}$$

En la expresión anterior los pesos (p_{ji}) vienen dados por el producto de la parte subjetiva de los pesos, w_{i_j} y la objetiva, d_{i_j}, $p_{ji} = w_{i_j} d_{i_j}$. Las prioridades obtenidas en el paso 2.1 de forma interactiva mediante comparaciones pareadas de los subcriterios con respecto a los criterios proporcionan la parte subjetiva de los pesos. La parte objetiva suele tomar un valor que permita eliminar el efecto de las unidades, como por ejemplo: $d_j = \frac{1}{\mathrm{Rango}(}$.

En la siguiente iteración se calcula la distancia desde cada alternativa $x \in X$, al nuevo punto ideal $d^* = (d_1^*,\ldots, d_m^*)$, con $d_j^* = \mathrm{Min}\{d_j(x); x \in X\}$ $j = 1,\ldots,m$:

$$J_p(x) = \left(\sum_{j=1}^{m} m_j^p \left| d_j^* - d_j(x) \right|^p \right)^{1/p} \qquad (3.2)$$

Esta expresión, en la que los pesos vienen dados directamente por las prioridades de los criterios con respecto a la meta del problema $m_j = w_j$, proporciona la distancia en PJPC (se ha considerado que la parte objetiva sea igual a la unidad).

La mejor alternativa, x^*, es aquella para la que $J_p(x^*) = J_p^* = \text{Min}\{J_p(x);\, x \in X\}$.

Con la notación anterior, la expresión para la distancia en el caso de la PPC viene dada por:

$$D_p(x) = \left(\sum_{j=}^{m} \sum_{i=}^{n_j} n_{ji}^p \left| z_{ji}^* - z_{ji}(x) \right|^p \right)^{/p} \qquad (3.3)$$

A continuación se enuncia un resultado en el que se relaciona la PJPC y la PPC en el caso particular de un modelo jerárquico con tres niveles: meta, criterios y subcriterios. Para el modelo no jerárquico, la distancia se obtendría directamente a partir de los subcriterios (expresión 3.3).

Teorema 3.1. Dadas las expresiones para la distancia en PPC y en PJPC (3.1 a 3.3), si $n_{ji} = m_j p_{ji}$ $\forall\ i,j$, entonces $\forall p < \infty$, $\forall x \in X$:

$$\left[D_p(x)\right]^p - \left[J_p(x)\right]^p \geq \sum_{j=1}^{m} m_j^p d_j^{*p} \geq 0 \qquad (3.4)$$

Demostración: ver Escobar y Moreno-Jiménez, 1997. #

Observación 3.1. La hipótesis que se hace sobre los pesos ($n_{ji} = m_j p_{ji}$ $\forall\ i,j$), implica, según el procedimiento seguido, que $n_{ji} = w_j w_{i_j} d_{i_j}$. Esta expresión para los pesos en PPC tiene sentido, ya que supone que el peso que recibe cada subcriterio en el modelo sin jerarquía tiene dos partes. La parte subjetiva es obtenida a partir de la composición de la prioridad del subcriterio i con respecto al criterio j (w_{i_j}), y la prioridad del criterio j con respecto a la meta (w_j). La parte objetiva (d_{i_j}) toma el mismo valor que en el modelo jerárquico para cada criterio.

Observación 3.2. Se puede ver fácilmente que para $p = 1$ la relación dada en el Teorema 3.1 es de igualdad. Esto implica que la distancia en el modelo jerárquico y la distancia en el modelo no jerárquico difieren en una cantidad constante ($\sum_{j=1}^{m} m_j d_j^*$), y por tanto los dos enfoques siempre proporcionarán la misma ordenación de las alternativas.

4. PROGRAMACIÓN JERÁRQUICA POR COMPROMISO Y EL PROCESO ANALÍTICO JERÁRQUICO

En este epígrafe se demuestra que las expresiones recogidas en el epígrafe 2 para medir la pérdida de prioridad esperada y las de la programación por compromiso presentadas en el epígrafe 3, coinciden cuando la norma utilizada es $p = 1$, y cuando las valoraciones de las alternativas con respecto a los elementos del último nivel de la jerarquía vienen dadas en términos de prioridades.

En primer lugar, se centra el caso particular de la Programación Jerárquica por Compromiso con el que se va trabajar, y que, por simplicidad en la notación, se desarrolla solamente para una jerarquía de tres niveles.

Se parte de la hipótesis de que las alternativas están medidas en términos de las prioridades con respecto a los elementos o atributos del último nivel de la jerarquía (subcriterios en el caso particular de tres niveles). Se está considerando por tanto, que en vez de utilizar los valores de los subcriterios en las alternativas $z_{ji}(x)$, se considera su prioridad, que, para diferenciar, se denominará $w_{ji}(x)$. Esta forma de proceder sería la utilizada si todos los subcriterios fueran de tipo no cuantitativo, pues como se propone en el algoritmo de la Programación Jerárquica por Compromiso (Escobar y Moreno-Jiménez, 1997), en estos casos se toma la prioridad obtenida a partir de comparaciones pareadas entre las alternativas.

En cuanto a la parte objetiva de los pesos, para el último nivel de la jerarquía se suele tomar $d_{i_j} \neq 1$, mientras que para los demás niveles el valor siempre se toma igual a la unidad (Escobar y Moreno-Jiménez, 1997), por afectar a distancias que representan cantidades medidas en las mismas unidades. Como ahora las alternativas están medidas en términos de prioridades, toman valores entre 0 y 1, y se puede considerar que éstas también están medidas en las mismas unidades y no es necesario considerar un efecto normalizador en los pesos, y por tanto, que $d_{i_j} = 1$ para el último nivel de la jerarquía. Así, los pesos quedan constituidos únicamente por la parte subjetiva.

Además, el estudio se centra en el caso discreto, es decir, se considera que el conjunto de alternativas X es un conjunto discreto de cardinal *nalt*, y las alternativas se denominan por k, con $k = 1,\ldots,nalt$. Esta última hipótesis podría eliminarse, y la generalización al caso continuo se tiene de forma inmediata.

Las expresiones de la programación por compromiso (PPC) y de la programación jerárquica por compromiso (PJPC) (3.1 a 3.3) para el caso particular que se está considerando quedan:

(PJPC) $$d_j(k) = \left(\sum_{i=1}^{n_j} w_{i_j}^p \left| w_{ji}^* - w_{ji}(k) \right|^p \right)^{1/p} \quad j = 1,\ldots, m.$$

$$J_p(k) = \left(\sum_{j=1}^{m} w_j^p \left| d_j^* - d_j(k) \right|^p \right)^{1/p} \quad \text{con } d_j^* = \text{Max}\{d_j(k);\ k = 1,\ldots, nalt\}$$

(PPC) $$D_p(k) = \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n_j} w_{i_j}^p w_j^p \left| w_{ji}^* - w_{ji}(k) \right|^p \right)^{1/p}, \text{ con } w_{ji}^* = \text{Max}\{w_{ji}(k);\ k = 1,\ldots, nalt\}$$

En el caso particular en que $p = 1$, la expresión de $d_j(k)$ queda:

$$d_j(k) = \sum_{i_j=1}^{n_j} w_{i_j} \left| w_{ji}^* - w_{ji}(k) \right| \quad j = 1,\ldots, m \tag{4.1}$$

Esta expresión coincide con la de $r_j(k)$ recogida en el epígrafe 2 (expresión 2.1). La diferencia en valor absoluto entre w_{ji}^* y $w_{ji}(k)$ representa la pérdida de prioridad local de la alternativa k para el subcriterio i, y la expresión de $d_j(k)$ representa la pérdida de prioridad esperada de la alternativa k con respecto al criterio j.

Si se aplica el principio de composición jerárquica para calcular la pérdida de prioridad esperada global para la alternativa *k*, se tiene la expresión que hasta ahora se ha denominado de Programación por Compromiso, y que coincide con la de *r*(*k*) (expresión 2.2):

$$D_1(k) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n_j} w_{i_j} w_j \left| w_{ji}^* - w_{ji}(k) \right| \tag{4.2}$$

El método del autovector principal (EGV) de Saaty puede obtenerse como un caso particular de la PPC tomando $p = 1$ y cuando los valores asociados a las alternativas son las prioridades de éstas respecto a los atributos del último nivel de la jerarquía.

Esto proporciona un nexo de unión entre dos de las técnicas multicriterio más utilizadas actualmente, la Programación por Compromiso y el Proceso Analítico Jerárquico, habitualmente empleadas en situaciones diferentes, la primera en problemas de tipo continuo, y la segunda en problemas de tipo discreto.

Si se utiliza la expresión de la Programación Jerárquica por Compromiso, habrá que calcular:

$$J_1(k) = \sum_{j=1}^{m} m_j \left| d_j^* - d_j(k) \right| \tag{4.3}$$

que representa la pérdida de la pérdida de prioridad esperada.

Como se demuestra en Escobar y Moreno-Jiménez (1997) y aplicando el Teorema 3.1, las expresiones de D_1 y J_1 (dadas en 4.2 y 4.3) difieren en un término constante y por tanto también conducen a la misma ordenación de las alternativas.

Así, los resultados que proporciona la Programación Jerárquica por Compromiso cuando $p = 1$ y las alternativas están medidas en términos de prioridades y el Proceso Analítico Jerárquico también coinciden. Se ha encontrado un marco en el que son equivalentes la aplicación de AHP, la minimización de la pérdida de prioridad esperada, la Programación por Compromiso, y la Programación Jerárquica por Compromiso.

De forma equivalente se puede demostrar que los resultados obtenidos al aplicar PJPC y PPC tomando como valores de las alternativas los originales y manteniendo el valor 1 para la parte objetiva de los pesos en todos los niveles de la jerarquía, coinciden cuando $p = 1$ con los alcanzados al aplicar AHP con el procedimiento de medidas absolutas. A continuación se presentan las expresiones de los valores asignados a las alternativas cuando se utiliza el procedimiento de medidas absolutas con AHP, y las expresiones de la PJPC y PPC en el caso particular que se esta señalando, para llegar a demostrar que suman una cantidad constante.

Si en vez de utilizar el procedimiento de medidas relativas para priorizar las alternativas, se aplican medidas absolutas en AHP, las prioridades que recibirán las alternativas con respecto a cada criterio ($v_j(k)$) y a la meta global ($v(k)$) son respectivamente:

$$v_j(k) = \sum_{i_j=1}^{n_j} w_{i_j} z_{ji}(k) \quad j = 1, \ldots, m \tag{4.4}$$

$$v(k) = \sum_{j=1}^{m} w_j v_j(k) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i_j=1}^{n_j} w_j w_{i_j} z_{ji}(k) \tag{4.5}$$

Se demuestra de forma análoga al Teorema 2.1 que $v(k) = K^* - p(k)$, donde $p(k) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i_j=1}^{n_j} w_{i_j} w_j \left|z^*_{ji} - z_{ji}(k)\right|$ es el pesar esperado global de la alternativa k con respecto a la meta; $p_j(k) = \sum_{i_j=1}^{n_j} w_{i_j}\left|z^*_{ji} - z_{ji}(k)\right|$ $j = 1,\ldots, m$, es el pesar esperado de la alternativa k con respecto al criterio j; y, $p_{ji}(k) = z_{ji}^* - z_{ji}(k)$ es el pesar local de la alternativa k ($k = 1,\ldots,nalt$) en el subcriterio i_j ($i_j = 1,\ldots, n_j$), con $z_{ji}^* = \text{Max}\{z_{ji}(k); k = 1,\ldots,nalt\}$.

Las expresiones anteriores son similares a las expresiones 2.1 y 2.2, con la diferencia de que en vez de considerar diferencias en las prioridades se consideran diferencias en los valores de los criterios directamente.

Por tanto, la alternativa con mayor valor total es la alternativa con menor pesar esperado global. Asimismo, ordenando las alternativas de mayor a menor prioridad global, y ordenándolas de menor a mayor pesar esperado global, se tiene que ambas ordenaciones coinciden.

Las expresiones de la distancia obtenida aplicando Programación por Compromiso y Programación Jerárquica por Compromiso cuando $p = 1$ y $d_{i_j} = 1$ para todos los niveles (tiene sentido cuando los elementos del último nivel de la jerarquía están medidos en la misma escala, como por ejemplo ocurre en el problema del Plan Nacional de Regadíos, del que consideraremos un caso simplificado en el apartado 5) son:

(PJPC) $d_j(k) = \sum_{i_j=1}^{n_j} w_{i_j}\left|z^*_{ji} - z_{ji}(k)\right| \quad j = 1,\ldots,m$ (4.6)

$$J_1(k) = \sum_{j=1}^{m} m_j\left|d^*_j - d_j(k)\right| \qquad \text{con } d_j^* = \text{Max}\{d_j(k); k = 1,\ldots, nalt\} \tag{4.7}$$

(PPC) $D_1(k) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j} w_{i_j} w_j\left|z^*_{ji} - z_{ji}(k)\right|$, con $z_{ji}^* = \text{Max}\{z_{ji}(k); k = 1,\ldots, nalt\}$ (4.8)

La expresión de $d_j(k)$ coincide con la de $p_j(k)$. La diferencia en valor absoluto entre z_{ji}^* y $z_{ji}(k)$ representa el pesar local de la alternativa k para el subcriterio i, y la expresión de $d_j(k)$ representa la pérdida de prioridad esperada de la alternativa k con respecto al criterio j.

La expresión de $D_1(k)$ dada en 4.8 coincide con la de $p(k)$, luego la minimización del pesar esperado global y la aplicación de PPC en este caso coinciden. Como $p = 1$, los resultados también coinciden con los que se obtienen al aplicar PJPC (expresión 4.7) y al estar relacionada la expresión del pesar esperado global $p(k)$ con las prioridades de las alternativas obtenidas utilizando medidas absolutas en AHP, $v(k)$, estos cuatro enfoques coinciden.

5. APLICACIÓN

En este apartado se recoge la aplicación de la Programación Jerárquica por Compromiso a la resolución de un ejemplo simplificado del Plan Nacional de Regadíos (PNR) (Moreno-Jiménez, 1996; Aguarón, Escobar y Moreno-Jiménez, 1998; Escobar, Aguarón y Moreno-Jiménez, 1998), comparando los resultados que se obtienen con los alcanzados utilizando AHP (Escobar, 1998).

El modelo jerárquico considerado consta de cinco niveles: la meta en el primer nivel, cuatro criterios en el segundo (económicos, sociales, hídricos y ambientales), 17 subcriterios en total en el tercero (seis económicos, seis sociales, tres hídricos y dos ambientales), 30 atributos en el cuarto (once económicos, doce sociales, cinco hídricos y dos ambientales) y 9 alternativas en el quinto y último (inicialmente se consideraron 24 alternativas, de las cuales las seleccionadas corresponden a las 9 primeras alternativas ordenadas utilizando medidas absolutas).

En la Tabla 5.1 se muestran las 9 alternativas seleccionadas para el estudio y las prioridades obtenidas al aplicar AHP con medidas relativas para valores precisos de los juicios, así como la posición en la ordenación del conjunto de alternativas con el procedimiento de medidas relativas y con el procedimiento de medidas absolutas, observándose diferencias a partir de la quinta alternativa.

Tabla 5.1. Prioridades relativas obtenidas con valores precisos

	Nombre	Prioridad	Ord. Rel.	Ord. Abs.
A1	CHERTA – CENIA	0,1194873	1	1
A2	EMBALSE DE SAN LORENZO	0,1164939	2	2
A3	RIO AYUDA Y ARRIETA	0,1131384	3	3
A4	LAGUARDIA	0,1119058	4	4
A5	RIO ROJO - BERANTEVILLA	0,1078047	7	5
A6	ELEVACIONES DEL BAJO SEGRE	0,1092493	5	6
A7	GARRIGAS SUR ZONAS A-C-D	0,1056261	9	7
A8	SEGARRA - GARRIGAS	0,1090430	6	8
A9	SISTEMA OJA - TIRON	0,1072515	8	9

En el problema original, las alternativas están medidas en cada uno de los 30 atributos en una escala de 1 a 7. Son estos los valores que se han tomado para calcular las distancias con respecto al punto ideal en el último nivel de la jerarquía, aunque el estudio se ha repetido tomando como valores las prioridades de las alternativas con respecto a los atributos. En ambos casos, los pesos se han tomado considerando que su parte objetiva es igual a la unidad en todos los niveles de la jerarquía, ya que los valores asignados para las alternativas en cada uno de los casos están medidos en la misma escala, ya sea de valores 1 a 7 en el primer caso, o ya sea de 0 a 1 cuando se trabaja con prioridades, en el segundo.

En primer lugar se presentan los resultados obtenidos aplicando tanto PJPC como PPC (Tablas 5.2 y 5.3) utilizando distintas normas, y tomando como valores de las alternativas los originales, medidos en una escala de 1 a 7. Para cada norma se muestra el valor obtenido para la distancia de cada alternativa a la meta global, y la posición que ocupa cada alternativa en la ordenación inducida por dichas distancias.

Tabla 5.2. Distancias obtenidas con PJPC (valores originales para las alternativas).

PJPC	$p = 1$		$p = 2$		$p = 3$		$p = \infty$	
A1	0.587333	1	0.211897	3	0.163041	3	0.120000	2
A2	0.678000	2	0.195339	1	0.144279	1	0.120000	2
A3	0.697333	3	0.303456	5	0.282226	5	0.280000	5
A4	0.753333	4	0.203483	2	0.144515	2	0.106667	1
A5	0.865667	5	0.222510	4	0.165299	4	0.133333	4
A6	0.914667	6	0.424044	6	0.365404	6	0.300000	6
A7	1.033667	7	0.427976	7	0.366135	8	0.300000	6
A8	1.066000	8	0.430076	8	0.366126	7	0.300000	6
A9	1.140000	9	0.592809	9	0.563333	9	0.560000	9

Tabla 5.3. Distancias obtenidas con PPC (valores originales para las alternativas).

PPC	$p = 1$		$p = 2$		$p = 3$		$p = \infty$	
A1	1.325000	1	0.410733	3	0.309738	3	0.240000	2
A2	1.415667	2	0.397973	2	0.289085	2	0.240000	2
A3	1.435000	3	0.429354	4	0.326684	4	0.280000	4
A4	1.491000	4	0.394804	1	0.279800	1	0.213333	1
A5	1.603333	5	0.459211	5	0.343913	5	0.288000	5
A6	1.652333	6	0.556502	6	0.436217	6	0.360000	6
A7	1.771333	7	0.578447	8	0.445783	8	0.360000	6
A8	1.803667	8	0.576125	7	0.441627	7	0.360000	6
A9	1.877667	9	0.660774	9	0.574214	9	0.560000	9

De los resultados anteriores puede concluirse que la ordenación alcanzada en ambos casos cuando la norma utilizada es $p = 1$, es la misma que la que se obtiene de aplicar AHP con el procedimiento de medidas absolutas (ver Tabla 5.1) tal y como se estableció en la última parte del apartado anterior. Para las demás normas, la alternativa A1 deja de ser la primera en la ordenación, siendo la alternativa A4 la que pasa a ocupar esta posición en PPC con todas las normas y en PJPC con norma infinito, y la alternativa A2 para los demás casos en PJPC.

Las diferencias que se obtienen en los resultados para las distintas normas apuntan la importancia en la selección de la norma y en su interpretación (Yu, 1973; 1985; Zeleny, 1982; Romero, 1993).

Se puede observar la existencia de dos grupos de alternativas en cuanto a las posiciones que alcanzan en los distintos casos. El primero está formado por las cinco primeras alternativas, y el segundo por las cuatro restantes. La alternativa A9 ocupa el último lugar en todos los casos analizados.

Veamos a continuación (Tablas 5.4 y 5.5) los resultados que se obtienen si los valores que se consideran para las alternativas corresponden a sus prioridades al ser comparadas de forma pareada con respecto a cada atributo. Estos valores se han tomado del estudio realizado con medidas relativas en AHP.

Los valores obtenidos para las distancias en estos dos estudios no son comparables, pues han sido calculados con valores originales distintos, medidos en diferentes unidades. Pero sí pueden compararse las ordenaciones a las que conduce cada procedimiento en los dos casos. En este segundo estudio se observa que para $p = 1$ en los dos procedimientos se alcanza la misma ordenación, que además coincide con la obtenida aplicando medidas relativas en AHP, como era de esperar tal y como se demostró en el epígrafe anterior.

En cuanto a las ordenaciones obtenidas utilizando otras normas, se observa que la alternativa A2 ocupa el primer lugar en PJPC en las tres normas restantes, y en PPC con la norma $p = 2$, y que la alternativa A4 es la que ocupa esta primera posición para las otras dos normas en PPC.

Tabla 5.4. Distancias obtenidas con PJPC (prioridades para las alternativas).

PJPC	$p = 1$		$p = 2$		$p = 3$		$p = \infty$	
A1	0.013848	1	0.005260	2	0.004121	2	0.003048	2
A2	0.016842	2	0.004624	1	0.003238	1	0.002532	1
A3	0.020197	3	0.008083	5	0.007029	5	0.006667	5
A4	0.021430	4	0.006351	3	0.004672	3	0.003410	3
A5	0.025531	7	0.007278	4	0.005424	4	0.004032	4
A6	0.024086	5	0.009933	7	0.008178	7	0.006667	5
A7	0.027710	9	0.010258	8	0.008244	8	0.006667	5
A8	0.024293	6	0.009608	6	0.008015	6	0.006667	5
A9	0.026084	8	0.013970	9	0.013384	9	0.013333	9

Tabla 5.5. Distancias obtenidas con PPC (prioridades para las alternativas).

PPC	$p = 1$		$p = 2$		$p = 3$		$p = \infty$	
A1	0.034599	1	0.011334	2	0.008954	3	0.007500	6
A2	0.037593	2	0.011003	1	0.008366	2	0.007500	6
A3	0.040948	3	0.012334	4	0.009134	4	0.006667	2
A4	0.042181	4	0.011534	3	0.008252	1	0.006095	1
A5	0.046282	7	0.014061	6	0.010714	7	0.009000	8
A6	0.044837	5	0.014317	7	0.010540	6	0.007200	3
A7	0.048461	9	0.015174	8	0.011053	8	0.007200	3
A8	0.045044	6	0.014006	5	0.010322	5	0.007200	3
A9	0.046835	8	0.016080	9	0.013766	9	0.013333	9

Los valores obtenidos para las distancias en estos dos estudios no son comparables, pues han sido calculados con valores originales distintos, medidos en diferentes unidades. Pero sí pueden compararse las ordenaciones a las que conduce cada procedimiento en los dos casos. En este segundo estudio se observa que para $p = 1$ en los dos procedimientos se alcanza la misma ordenación, que además coincide con la obtenida aplicando medidas relativas en AHP, como era de esperar tal y como se demostró en el epígrafe anterior.

En cuanto a las ordenaciones obtenidas utilizando otras normas, se observa que la alternativa A2 ocupa el primer lugar en PJPC en las tres normas restantes, y en PPC con la norma $p = 2$, y que la alternativa A4 es la que ocupa esta primera posición para las otras dos normas en PPC.

6. CONCLUSIONES

Una de las cuestiones más interesantes hoy en día en la aplicación de técnicas multicriterio a la resolución de problemas reales es la selección de la técnica multicriterio apropiada. Para ayudar a resolver este problema, planteado en cualquier problema de decisión, es útil conocer las relaciones existentes entre los diferentes métodos.

En este trabajo se han relacionado dos de los enfoques de decisión multicriterio más utilizados en la práctica: la Programación por Compromiso y el Proceso Analítico Jerárquico. Esta relación se establece a partir de la interpretación de las prioridades obtenidas con AHP en términos de pesar o pérdida de prioridad esperada, que ha permitido a su vez atender a la sugerencia de Loomes y Sudgen (1982) de considerar las valoraciones en términos de pesar esperado para la Toma de Decisiones en general.

Se han encontrado dos marcos en los que son equivalentes la aplicación de AHP, la minimización de la pérdida de prioridad esperada, la Programación por Compromiso, y la Programación Jerárquica por Compromiso. Estos dos marcos difieren en la forma de aplicar AHP: utilización de medidas relativas en un caso parte y medidas absolutas en el otro. En cuanto a la aplicación de la PPC y la PJPC difieren en si se aplican a los valores de los criterios directamente, o si se utilizan las prioridades asociadas a cada valor del criterio.

BIBLIOGRAFÍA

AGUARÓN J.; ESCOBAR M.T.; MORENO-JIMÉNEZ J.M. (1994): La Programación Jerárquica por Compromiso en la Selección entre Alternativas Discretas. Aplicación en Recursos Naturales, *Actas del XXI Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa*, 270–271. Calella.

AGUARÓN J.; ESCOBAR M.T.; MORENO-JIMÉNEZ J.M. (1995): Normalización y Cambio de Rango en el Proceso Analítico Jerárquico (AHP), *Actes des Ivèmes Journées Zaragoza-Pau de Mathématiques Appliquées*, 37–46, Publications de l'Université de Pau.

AGUARÓN J.; ESCOBAR M.T.; MORENO-JIMÉNEZ J.M. (1998): Estructuras de Preferencia e Intervalos de Estabilidad. Dos Herramientas de Gestión Ambiental, *Actas de la XII Reunión Anual Asepelt-España*, Córdoba. ISBN 84–86785–38–3.

BARBA-ROMERO S.; POMEROL CH. (1997): *Decisiones Multicriterio: Fundamentos Teóricos y Utilización Práctica*. Servicio de Publicaciones Universidad de Alcalá.

BARZILAI J.; LOOTSMA F.A. (1997): Power Relations and Group Aggregation in the Multiplicative AHP and SMART, *Journal of Multicriteria Decision Analysis*, **6**, 155–165.

ESCOBAR M.T. (1998): *La Incertidumbre en las Técnicas de Decisión Multicriterio Jerárquicas. El Problema del Cambio de Rango*. Tesis Doctoral.

ESCOBAR M.T.; MORENO-JIMÉNEZ J.M. (1997): The Hierarchical Compromise Programming, *TOP*, **5** (2), 253–281.

ESCOBAR M.T.; MORENO-JIMÉNEZ J.M.; AGUARÓN J. (1998): Caracterización de las Distribuciones Recíprocas. Aceptado para su presentación en el *XXIV Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa*, Almería.

LOOMES G.; SUDGEN R. (1982): Regret Theory: An Alternative Theory of Rational Choice under Uncertainty, *Economic Journal*, **92**, 805–824.

LOOMES G.; SUDGEN R. (1983): Regret Theory and measurable Utility Theory, *Economic Letters*, **12**, 19–22.

LOOMES G.; SUDGEN R. (1987): Testing for regret and disappointment in choice under uncertainty, *Economic Journal*, **97** (S), 118–129.

MORENO-JIMÉNEZ J.M. (1996): Metodología Multicriterio en el Plan Nacional de Regadíos (*Documento Privado*).

MORENO-JIMÉNEZ J.M.; ESCOBAR M.T. (1997): El Pesar en el Proceso Analítico Jerárquico, *Documento de Trabajo*.

MORENO-JIMÉNEZ J.M.; SANTAMARÍA R.; AGUARÓN J. (1993): A Multicriteria Approach Based on Compromise Programming in Portfolio Selection. Presented in the meeting *Decision Making Towards the 21st Century*, Madrid.

ROMERO C. (1991): *Handbook of Critical Issues in Goal Programming*. Pergamon Press.

ROMERO C. (1993): *Teoría de la Decisión Multicriterio: Conceptos, Técnicas y Aplicaciones*. Alianza Editorial, Madrid.

SAATY T.L. (1977): A Scaling Method for Priorities in Hierarchical Structures, *Journal of Mathematical Psychology*, **15** (3), 234–281.

SAATY T.L. (1980): *Multicriteria Decision Making: The Analytic Hierarchy Process*. Mc Graw-Hill, New York. (2ª impresión 1990, RSW Pub. Pittsburgh)

YU P.L. (1973): A Class of Solution for Group Decision Problems, *Management Science*, **19**, 936–946.

YU P.L. (1985): *Multiple Criteria Decision Making: Concepts, Techniques and Extensions*. Plenum Press, New York.

ZELENY M. (1973): Compromise Programming, en Cochrane J.L. y Zeleny M. (eds.): *Multiple criteria decision making*, University of South Carolina Press, Columbia, 262–301.

ZELENY M. (1974): A concept of Compromise Solutions and the Method of the Displaced Ideal, *Computers and Operations Research*, **1** (4), 479–496.

ZELENY M. (1982): *Multiple Criteria Decision Making*, McGraw-Hill, New York.