UN MÉTODO PARA CONTRASTAR LA BONDAD DE UN EXPERTO EN LA METODOLOGÍA PERT

Herrerías Pleguezuelo, Rafael
Palacios González, Federico
Callejón Céspedes, José
Pérez Rodríguez, Eduardo

Departamento de Economía Aplicada
Universidad de Granada

Palabras clave

PERT, Proyectos de inversión, Probabilidad subjetiva.

Resumen

La calidad de una persona como experto, en determinado tipo de proyectos de inversión en los que se utiliza la metodología PERT para la valoración de los mismos, radica en la mayor o menor discrepancia que pudiera existir entre las valoraciones resultantes de la información proporcionada por dicho experto y el resultado real de la inversión si finalmente es llevada a cabo.

Si tenemos en cuenta que la metodología PERT proporciona una esperanza matemática del VAN calculada a partir de la información subjetiva proporcionada por el experto, habrá que considerar que al comparar predicción con resultado real, en realidad se está comparando la realización concreta de una variable aleatoria (VAN) con su hipotético valor esperado (Valoración PERT - experto).

La bondad de un experto podría valorarse por la acuracidad de sus predicciones. Demostrar que un experto es sesgado es un simple contraste de hipótesis para la media. Análogamente, demostrar que dos expertos sin sesgo no son de igual calidad es un problema de comparación de varianzas.

1. Introducción

La utilización de la metodología PERT en un proyecto de inversiones requiere el conocimiento de las estimaciones subjetivas, habitualmente realizado por los llamados expertos, de los valores optimista, pesimista y más probable. Son diversos los trabajos que se ocupan del tratamiento de esta información y su adecuación al modelo PERT clásico.

Las tres estimaciones subjetivas anteriores permiten ajustar perfectamente la distribución triangular, no ocurriendo lo mismo con la distribución beta, debido a que esta es tetraparamétrica. Hay una infinidad de distribuciones en el interior del intervalo definido por los valores pesimista y optimista y cuya moda coincide con el valor más probable. En la literatura especializada se pueden encontrar un amplio número de trabajos que abordan el tratamiento de la información proporcionada por el experto.

Estos trabajos se pueden encuadrar básicamente en tres líneas. En una de ellas se plantea la utilización de modelos alternativos al PERT clásico; entre otros se pueden citar a Golenko-Ginzburg, (1988), Herrerías (1989), Berny (1989) y Callejón, Pérez y Ramos (1996). En una segunda línea de actuación se intenta obtener información adicional, con la que pueda realizarse el ajuste con mayor, aunque no total, precisión; en esta línea están los trabajos de Chae y Kim (1990), Moitra (1990) y Pérez Rodríguez (1995), que agregan información sobre la verosimilitud relativa de la moda, sobre la simetría o sobre el apuntamiento de la distribución, respectivamente. Una tercera línea de trabajo consiste en proporcionar argumentaciones lógicas, distintas al PERT clásico, que permita escoger un valor esperado en el intervalo dado por el valor más probable y el punto medio entre los valores optimista y pesimista: Herrerías (1995), Palacios y Ramos (1995), Palacios (1997).

Todos los artículos y líneas de trabajo anteriormente mencionados están orientadas al comportamiento del modelo. También existen publicaciones cuyo objetivo es analizar la compatibilidad entre la opinión emitida por el experto y el propio modelo a través de determinados contrastes estadísticos de tipo paramétrico: Herrerías, Palacios y Pérez (1993) y (1994).

En este trabajo se pretende contrastar la bondad del experto a la hora de proporcionar los valores pesimista, optimista y más probable, para su utilización en la metodología del PERT clásico, es decir, si su información, en conjunción con el modelo, es capaz de proporcionar previsiones compatibles con lo que posteriormente se observa o si, por el contrario, dichas predicciones presentan un sesgo sistemático de cualquier signo.

Se presenta una aplicación concreta, realizada para contrastar la bondad de varios expertos en la predicción del tiempo medio necesario para la realización de una prueba escrita. La recogida de información para esta experiencia ha sido menos costosa y dilatada en el tiempo que lo que hubiera supuesto en el campo del análisis de inversión.

Esta experiencia presenta matices distintos a los de una inversión, aunque su metodología es extrapolable.

2. Contraste de la bondad del experto

Para contrastar la bondad de un experto, a la hora de proporcionar los valores pesimista, optimista y más probable, para su utilización en la metodología del PERT clásico, en determinado tipo de problemas de inversión, el punto de partida consiste en considerar, a partir de los valores proporcionados, una muestra de pronósticos obtenidos,

p_1, p_2, ..., p_n y otra de los resultados VC_1, VC_2, ..., VC_n de n inversiones si finalmente son realizadas, que son variables aleatorias cuyos valores esperados representaremos por m_i, y sus varianzas por s_i^2, es decir $E[VC_i] = m_i$, $Var(VC_i) = s_i^2$.

No se puede descalificar a un experto porque la mayor parte de sus predicciones no coincidan exactamente con el valor observado. Se pueden admitir diferencias entre predicción y resultado, siempre que no sean excesivamente grandes (respecto a la cuantía de la inversión) y sobre todo si estas oscilan alrededor del valor cero. Por ello, si un experto es insesgado entonces el valor esperado del estimador del pronóstico coincide con el valor esperado del resultado de la inversión, es decir, cuando un experto es insesgado entonces $p_i = m_i \quad \forall i = 1, \ldots, n$

de donde resulta evidente que si un experto es insesgado

$$E[VC_i - p_i] = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

Por ello, para contrastar la insesgadez de la información proporcionada por el experto, se define la diferencia entre valor obtenido y su estimador:

$$e_i = VC_i - p_i \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

y por tanto para una muestra de tamaño n la media y la cuasivarianza muestrales, de esta variable diferencia, respectivamente son:

$$\bar{e} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e_i$$

$$S_c{}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(e_i - \bar{e})^2$$

Si una muestra es suficientemente amplia y el experto es insesgado entonces el estadístico $\frac{\bar{e}\sqrt{n}}{S_c}$ se distribuye según una ley normal N(0,1). (1)

Obsérvese que $\bar{e}$ es combinación lineal de flujos de caja que se suponen independientes y que la normalidad está casi asegurada. Por ejemplo, en una muestra de 10 inversiones, con cinco periodos cada una, entonces $\bar{e}$ es combinación lineal de 50 flujos de caja.

El contraste que se plantea a continuación no permite conocer si el experto es insesgado en todos y cada uno de los pronósticos emitidos, $p_i = m_i \ \forall i = 1,\ldots,n$. Por el contrario, proporciona una valoración global de su comportamiento a lo largo de las n inversiones estudiadas, es decir si

$$\bar{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}p_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}m_i = \bar{m} \ .$$

En efecto, la región de rechazo $\left|\frac{\bar{e}\sqrt{n}}{S_c}\right| > z_0$ con $\Phi(z_0) = 1 - \alpha/2$ contrasta las hipótesis:

H$_0$: $E[\bar{e}] = 0$

H$_1$: $E(\bar{e}) \neq 0$

La hipótesis nula supone que el experto es insesgado cuando la suma de los valores esperados de e_i es cero, y por tanto las medias de las predicciones coincide con la media de las esperanzas matemáticas de los valores capitales, pues

$$E[\bar{e}] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(e_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}m_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}p_i = \bar{m} - \bar{p}$$

Si se desconfía de la normalidad de (1) se puede estimar el nivel de significación umbral mediante simulación. Para ello es necesario conservar los tres valores proporcionados para cada flujo de caja en cada inversión. Con las distribuciones beta del PERT clásico, ajustadas a partir de los datos proporcionados por el experto, se simulan las distintas variables y se obtienen m muestras simuladas: $\left(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n}\right) \quad i = 1,2,\cdots m$, y como consecuencia m cocientes $\dfrac{\bar{e}_i \sqrt{n}}{S_{ic}}$.

Tomando como $z_0 = \left|\dfrac{\bar{e}\sqrt{n}}{S_c}\right|$ se puede calcular la proporción de valores simulados tales que $\left|\dfrac{\bar{e}_i \sqrt{n}}{S_{ic}}\right| > z_0$. Esta proporción es el estimador del nivel de significación umbral.

Teniendo en cuenta que

$$E\left[\sum_i (VC_i - p_i)^2\right] = E\left[\sum_i (VC_i - m_i + m_i - p_i)^2\right] =$$

$$= \sum_i E\left[(VC_i - m_i)^2\right] + 2\sum_i (m_i - p_i) E[VC_i - m_i] + \sum_i (m_i - p_i)^2$$

se deduce que una medida de la dispersión de las predicciones viene dada por

$$E\left[\sum_i (VC_i - p_i)^2\right] = \sum_i s_i^2 + \sum_i (m_i - p_i)^2 \tag{2}$$

Si se divide (2) entre n, y denominando

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_i (VC_i - p_i)^2$$

$$\bar{s}^2 = \frac{1}{n}\sum_i s_i^2$$

se tiene

$$E\left[S_n^2\right] = \bar{s}^2 + \frac{1}{n}\sum_i (m_i - p_i)^2$$

Por tanto, la bondad de un experto podría estimarse mediante el error cuadrático medio de una muestra de diferencias entre predicción y observación correspondientes a un determinado conjunto de inversiones

Por otra parte, a partir de (2) y puesto que las varianza s_i^2 no dependen de las predicciones de los expertos, se puede establecer que para dos expertos con H_0 no rechazada sería preferible aquel cuya dispersión de las diferencias sea menor.

Para dos expertos con predicciones p_i y p'_i e hipótesis nula no rechazada, el cociente

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{VC_i - p_i}{s_i}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{VC_i - p'_i}{s_i}\right)^2}$$

sigue una F de Snedecor de (n,n) grados de libertad.

Esta distribución resulta de inmediata utilidad para contrastar la variabilidad relativa de las predicciones de dos expertos en el supuesto de que las varianzas de las variables VC sean constantes.

En resumen, bajo el supuesto de que las predicciones de dos expertos son insesgadas y de que la variabilidad de las distintas inversiones permanece constante, entonces

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(VC_i - p_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(VC_i - p'_i)^2} \approx F_{(n,n)}$$

3. Experiencia realizada

Los exámenes finales han permitido realizar una experiencia real para contrastar la bondad del experto. En este caso, mediante la utilización del PERT clásico, se pretende estimar la duración media de la realización de un examen. La experiencia se llevó a cabo para cuatro exámenes diferentes, (en la tabla del epígrafe siguiente aparecen como I, II, III y IV), cuyas predicciones sobre los tiempos empleados por los alumnos se realizaron por parte de dos expertos (A y B).

Conocida la redacción de la prueba, y siempre antes de la realización de la misma, se le solicitó del profesor correspondiente, en este caso actúa como experto, que proporcione, para cada una de las preguntas, tres valores de tiempo, (expresado en minutos): el tiempo mínimo (optimista), el tiempo máximo (pesimista) y el tiempo que considere más probable, que empleará un alumno en contestar a la pregunta.

El tiempo medio pronosticado se obtuvo como media aritmética ponderada: optimista mas pesimista mas cuatro veces el tiempo más probable, (evidentemente dividido por seis). El tiempo medio de la realización de la prueba se obtiene sumando los tiempos medios obtenidos para cada una de las preguntas.

Por otra parte se ha solicitado a cada uno de los alumnos que realizaron la prueba que anotasen la hora y minutos en la que comienzan a contestar al examen y la hora y minutos en la que concluyen. Se dispone así de los resultados de la experiencia.

En el caso de un proyecto de inversiones, los datos proporcionados por cada alumno corresponden a los resultados reales obtenidos de cada una de las inversiones que se han realizado.

Evidentemente, en la experiencia aquí realizada, de un solo pronóstico de los tiempos empleados, se obtienen una gran cantidad de observaciones sobre los resultados reales del mismo. En el caso de un proyecto de inversión para cada una de las inversiones factibles de realizar se dispone de la estimación de sus valores pesimista, optimista y más probable. Cada pronóstico se puede comparar con su correspondiente resultado finalmente obtenido.

En el caso del tiempo de realización de una tarea, (examen), la bondad de las estimaciones de los valores optimista, más probable y pesimista, en cuanto a su adecuación a la metodología del PERT clásico, se contrasta mediante un test sobre la media.

La bondad de un experto podría valorarse por la acuracidad de sus predicciones. En el caso de una inversión, puesto que para cada uno de los resultados observables se ha de producir una estimación previa de los tres valores, el estudio de la bondad de las estimaciones requiere un contraste sobre la media de las desviaciones producidas entre cada valor estimado y su respectivo valor finalmente observado. Un experto será menos bueno si las diferencias entre predicción y resultado son variables aleatorias que oscilan en torno a un valor positivo (experto excesivamente optimista, pesimista en tiempos) o en torno a un valor negativo (experto excesivamente pesimista, optimista en tiempos).

4. Resultados obtenidos

La experiencia se ha repetido con dos expertos. Tanto uno como el otro han pronosticado la duración del tiempo (mínimo, más probable y máximo) de realización de cada una de las preguntas de las que se componían los exámenes. La experiencia se desarrolló en cuatro exámenes distintos. En la siguiente tabla se muestran los resultados obtenidos.

Experto	Examen	n	p	$\bar{t}$	b	S^2	t_{exp}	P	$\sum_{i=1}^{4}(\bar{t}_i - p_i)^2$
A	I	249	106,83	103,84	2,80	410,83	-2,32	0,0208167	112,29
	II	117	109,16	103,27	5,40	690,10	-2,41	0,0172456	
	III	220	80,33	75,32	6,24	191,04	-5,36	0,0000002	
	IV	40	72,00	65,40	9,17	461,06	-1,91	0,0622500	
B	I	249	98,33	103,84	-5,60	410,83	4,27	0,0000269	104,84
	II	117	110,00	103,27	6,11	690,10	-2,76	0,0067624	
	III	220	70,33	75,32	-7,09	191,04	5,34	0,0000002	
	IV	40	63,33	65,40	-3,26	461,06	0,60	0,5512749	

En la tercera columna (n) se recoge el número de alumnos que realizaron cada una de las cuatro pruebas.

En la columna p se muestran los tiempos medios, (pronósticos), para cada uno de los exámenes: resultado de la suma de los tiempos medios obtenidos, utilizando la metodología PERT, para cada una de las preguntas, a partir de los tres valores proporcionados por cada experto.

La columna $\bar{t}$ indica el tiempo medio empleado por los alumnos en realizar cada uno de los exámenes, (media muestral).

El porcentaje del sesgo relativo se recoge en la sexta columna (b). Cada uno de sus valores se ha obtenido a partir de la expresión: $b = 100\,\frac{p - \bar{t}}{\bar{t}}$.

La siguiente columna (S^2) corresponde a la varianza muestral.

El valor de t experimental queda definido por $t_{\exp} = \frac{(\bar{t} - p)\sqrt{n-1}}{S}$

Para cada valor de t de Student experimental y el número de elementos de la muestra, en una distribución de dos colas, se obtiene el p-valor correspondiente.

5. Bibliografía

Berny, J. (1989). A New Distribution Function for Rysk Analysis. J. Opl. Res.Soc., Vol. 40, nº 12, pp. 1121-1127.

Callejón, J, Pérez, E. y Ramos, A. (1996). La distribución trapezoidal como modelo probabilístico para la metodología PERT. X Reunión ASEPELT-ESPAÑA. Universidad de Castilla-La Mancha. CD-ROM Comunicaciones. Fichero g26.

Chae, K.C. y Kim, S. (1990). Estimating the Mean and Variance of PERT Activity Time Using Likelihood-Ratio of the Mode and the Midpoint. I.I.E. Transaction, vol 22, nº 3, pp 198-203

Golenko-Ginzburg, D. (1988). On the Distribution od Activity Time in PERT. J. Opl. Res. Soc., vol 39, nº8, pp 767-771.

Herrerías, R. (1989). Utilización de Modelos Probabilísticos Alternativos para el Método PERT. Aplicación al Análisis de Inversiones. Estudios de Economía Aplicada. Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Valladolid, pp. 89-112.

Herrerías, R. (1995). Un nuevo uso de las tres estimaciones subjetivas del PERT. IX Reunión ASEPELT-ESPAÑA. Vol. IV, pp. 411-416.

Herrerías, R., Palacios, F. y Pérez, E. (1993). Una medida sobre la adecuación de las estimaciones subjetivas con el modelo PERT clásico. VII Reunión ASEPELT-ESPAÑA. Vol. I, pp. 419-425. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz.

Herrerías, R., Palacios, F. y Pérez, E. (1994). Dostest estadísitcicospara el valor más probable del PERT. VIII Reunión ASEPELT-ESPAÑA. Vol. I, pp. 153-159. Departament d'Economía de la Empresa. Universitat de les Illes Balears.

Moitra, S.D. (1990). Skewness and the Beta Distribution. J. Opl. Res. Soc., vol 41, n 10, pp. 953-961.

Palacios, F. y Ramos, A. (1995). Análisis del mecanismo de compensación de errores en el PERT clásico: Una solución alternativa. IX Reunión ASEPELT-ESPAÑA. Vol. IV, pp. 91-100.

Palacios, F. (1997). Modelización de la opinión del experto expresada en términos del valor pesimista, más verosímil y optimista. Propiedades del valor esperado y soluciones alternativas al PERT clásico. Actas de la I Reunión Científica: Programación, Selección y Control de Proyectos. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Almería. pp 89-110.

Pérez Rodríguez, E. (1995). Ajuste de un modelo beta con información adicional sobre su apuntamiento. IX Reunión ASEPELT-ESPAÑA. Vol. IV, pp. 445-451.