ESTIMACIÓN NO PARAMÉTRICA DE LA DISTRIBUCIÓN DEL VAN EN PROYECTOS DE INVERSIÓN CON TASAS DE DESCUENTO ALEATORIAS

Palacios González, Federico
Pérez Rodríguez, Eduardo
Herrerías Pleguezuelo, Rafael
Callejón Céspedes, José

Universidad de Granada

PALABRAS CLAVE: Estimación de densidades, método del núcleo, VAN, Riesgo, Proyectos de inversión

RESUMEN:

Dado un proyecto de inversión en el que tanto los flujos de caja como las tasas de descuento son variables aleatorias con distribuciones conocidas, se plantea el problema de conocer la distribución de probabilidades que posee el VAN . En la mayoría de las ocasiones, este es un problema probabilístico cuya solución analítica, si existe, no es fácil de obtener.

En este trabajo se utiliza la simulación y los métodos no paramétricos de estimación de densidades para, de forma sencilla, llegar a soluciones satisfactorias, cuya aplicabilidad es la que generalmente se atribuye a la metodología PERT.

1.- INTRODUCCIÓN.

Caracterizada una inversión por su dimensión financiera, uno de los criterios más frecuentemente usados para valorarla, es el VAN. El Valor Actualizado Neto (VAN), al instante de su inicio, de todos los rendimientos provocados por la inversión, obedece a la fórmula:

$$VAN = -A + \sum_{t=1}^{T} \frac{Q_t}{\prod_{s=1}^{t}(1 + r_s)} \qquad (1)$$

siendo A es el desembolso inicial, T la duración del proyecto, Q_t., t=1,...,T, el flujo de caja producido en el período t, y r_s , s=1,...,t la tasa de descuento aplicable en dicho período.

Pero todo proyecto de inversión se desarrolla en un ambiente incierto, que hace imposible conocer de antemano los valores de algunas variables antes citadas, por lo que la fórmula (1) requiere matizaciones adicionales. Así, los manuales de finanzas suelen suponer perfectamente determinados a priori el desembolso inicial, la duración, y las tasas de descuento, considerando inciertos únicamente a los sucesivos flujos de caja, a los que tratan como variables aleatorias independientes, asignándoles distribuciones de probabilidad subjetivas.

Entre la muy escasa literatura que tiene en cuenta la incertidumbre sobre las tasas de descuento, han de citarse los trabajos de Pérez Rodríguez (1992) y (1997). En ellos, bajo la hipótesis de que tanto A como T son perfectamente conocidos a priori, se consideran como variables aleatorias independientes tanto los flujos de caja como las tasas, a las que se le asignan distribuciones subjetivas de probabilidad mediante los modelos habituales, y se obtienen la esperanza y la varianza de la variable aleatoria VAN tras un proceso analítico recurrente. En dichos trabajos no se obtuvo ningún resultado relativo a la distribución seguida por esta variable, salvo la normalidad que se deduce del teorema central del limite cuando la duración del proyecto, y por tanto el número de sumandos de (1), sea elevada.

En este trabajo, bajo las mismas hipótesis de las referencias antes citadas, se intenta ahondar en el conocimiento de la distribución seguida por el VAN, en especial cuando la inversión es a muy corto plazo. Para ello, mediante técnicas de simulación, se obtendrán datos experimentales para las variables de entrada (flujos y tasas), bajo los modelos que habitualmente se les asignan.

Introducidos estos datos en la fórmula (1), conducen a una muestra de la variable aleatoria VAN, y a su correspondiente distribución empírica sobre la que se aplicarán métodos no paramétricos de estimación de distribuciones.

2.- SIMULACIÓN DE UNA MUESTRA DEL V.A.N.

Gracias a la hipótesis de su independencia estocástica, no es necesario simular conjuntamente las 2T variables aleatorias presentes en la fórmula del VAN (flujos y tasas); basta con hacerlo sucesiva e independientemente para cada una de ellas, según el modelo probabilístico que se le haya ajustado.

Notando por X_t , t=1,...,2T, a una variable aleatoria que coincidirá con Q_t si t es impar, y con $r_{t/2}$ si t es par, y por $F_t(x)$ a su correspondiente función de distribución, la realización simulada, x_t , de dicha variable se ha obtenido como la imagen inversa, mediante su función de distribución, de un número pseudoaleatorio alpha, con distribución uniforme en [0,1],

$$x_t = F_t^{-1}(a) \qquad (2)$$

Para obtener una realización simulada del VAN basta con sustituir las realizaciones simuladas de estas 2T variables en la fórmula (1), y replicando el esquema tanto como se desee se obtiene una muestra de valores del VAN.

Los distintos modelos utilizados para simular han sido, en orden creciente según la información requerida, los siguientes:

a) <u>Modelo uniforme.-</u>

Requiere dos estimaciones subjetivas: una del menor valor posible de la variable, a, y otra del mayor valor posible, b. Cuando una variable sigue este

$$x = a + a(b-a)$$

modelo, la ecuación (2) es la siguiente:

b) <u>Modelo triangular.-</u>

Requiere tres informaciones subjetivas: una del menor valor posible, a, otra del mayor valor posible, b, y una tercera del valor más probable de la variable, m.

$$x = \begin{cases} a + \sqrt{\alpha\,(b-a)(m-a)} & \text{si} \quad 0 < \alpha \le \dfrac{\text{m - a}}{\text{b - a}} \\ b - \sqrt{(1-\alpha\,)(b-a)(b-m)} & \text{si} \quad \dfrac{\text{m - a}}{\text{b - a}} < \alpha < 1 \end{cases}$$

En este caso, la expresión (2) toma la forma:

d) <u>Modelo beta.-</u>

$$f\,(x) = \frac{1}{(b-a)^{p+q-1}\,b\,(p,q)}(x-a)^{p-1}(b-x)^{q-1} \quad \text{si} \quad \text{a < x < b}$$

Este modelo, con función de densidad

es tetraparamétrico por naturaleza, por lo que no puede ajustarse con tan solo tres estimaciones.

Considerando la estimación más probable, m , como la moda de este modelo, las relaciones entre los parámetros p y q y las tres estimaciones clásicas son: (véase Herrerías y Pérez (1996))

$$p = 1 + K\frac{m-a}{b-a}$$

$$q = 1 + K\frac{b-m}{b-a}$$

siendo K>0 un parámetro a determinar, cosa puede hacerse bien recogiendo información adicional (véanse Moitra (1990), Chae y Kim (1990), y Pérez Rodríguez (1995), bien formulando alguna hipótesis sobre su valor, como veladamente se hace en la metodología PERT en la que se adopta K=4. En la literatura aparecen otras propuestas sobre el valor que debe asignarse a K, p.e. Herrerías (1995) aboga por K=2.

Una vez adoptado un valor de K, el proceso lógico es el siguiente: a partir de la densidad se obtendría la función de distribución para después invertirla, pero en general esta función es trascendente y no admite tratamiento analítico. No queda otro recurso que el análisis numérico, y afortunadamente hay hojas de cálculo, como Excel, que disponen de la función inversa de la función de distribución beta.

d) Modelo trapezoidal.-

Requiere cuatro estimaciones periciales: el rango (a,b) de la variable, y un intervalo modal , (m, n). Herrerías y Calvete (1987)

Notando por L la suma de las amplitudes de los dos intervalos, i.e.

$$L = (b-a) + (n-m)$$

La ecuación (2) adopta la siguiente forma:

$$x = \begin{cases} a + \sqrt{L(m-a)\alpha} & \text{si} \quad \alpha < \dfrac{(\mathrm{m} - \mathrm{a})}{\mathrm{L}} \\ \dfrac{\alpha \mathrm{L} + \mathrm{a} + \mathrm{m}}{2} & \text{si} \quad \dfrac{(\mathrm{m} - \mathrm{a})}{\mathrm{L}} \leq \alpha \leq \dfrac{(\mathrm{b} - \mathrm{n})}{\mathrm{L}} \\ b - \sqrt{L(b-n)(1-\alpha)} & \text{si} \quad \alpha > 1 - \dfrac{\mathrm{b} - \mathrm{n}}{\mathrm{L}} \end{cases}$$

3.- ESTIMACIÓN NO PARAMÉTRICA DE LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDADES DEL V.A.N.

Para estimar la función de densidad se utilizará el estimador de Nadaraya- Watson con nucleo de Epanechnicov (Härdle (1991)); es decir

$$\hat{f}_h(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - x_i}{h} \right)$$

donde h se determinará por el método de validación cruzada a partir de la propia muestra y donde

$$K(u) = \begin{cases} \dfrac{3}{4}\left(1-u^2\right) & si \quad |u| < 1 \\ 0 & si \quad |u| \geq 1 \end{cases}$$

es el nucleo de Epanechnicov.

El calculo de probabilidades de sucesos relativos al VAN se realizará mediante la función de distribución

$$\hat{F}_h(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} K^*\left(\frac{x - x_i}{h}\right)$$

donde K^* Es la integral del nucleo *K* es decir

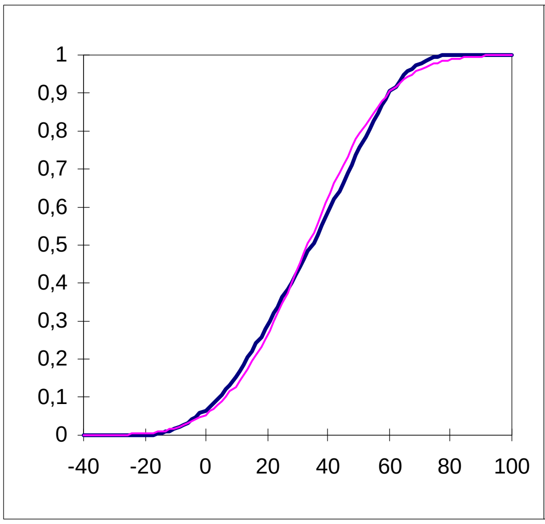
$$K^*(u) = \begin{cases} 0 & si \quad u \le -1 \\ \dfrac{3u - u^3}{4} + \dfrac{1}{2} & si \quad -1 < u < 1 \\ 1 & si \quad u \ge 1 \end{cases}$$

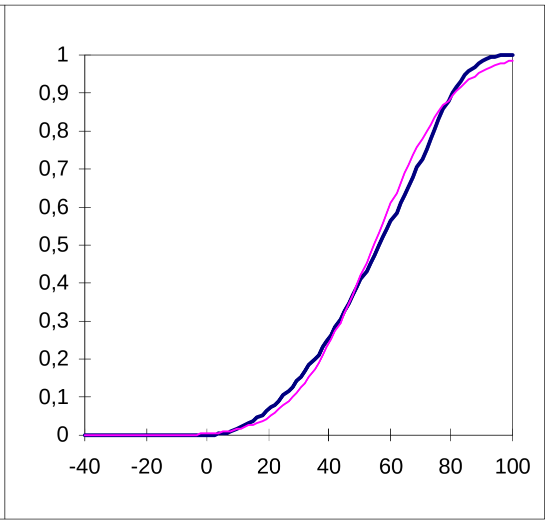
4.- RESULTADOS OBTENIDOS.-

Dos han sido los ejemplos investigados, con duraciones respectivas de uno y dos períodos. Ambos proyectos de inversión requieren un desembolso inicial de 20 millones de pesetas, y una vez que se ha ajustado un modelo probabilístico a cada una de las variables restantes, se ha generado una muestra de tamaño 1000.

En los gráficos aparecen la función de distribución estimada del VAN y la función de distribución de la normal con media y varianza iguales a las estimadas en la muestra. En su pié se especifican las distribuciones y estimaciones proporcionadas por el experto, a las que corresponden.

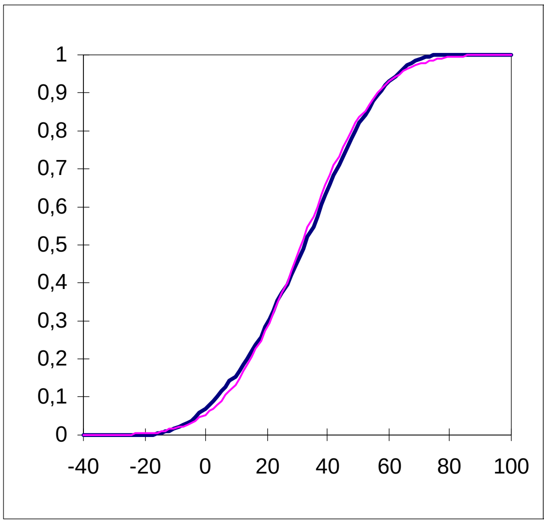
Inversiones con un sólo periodo

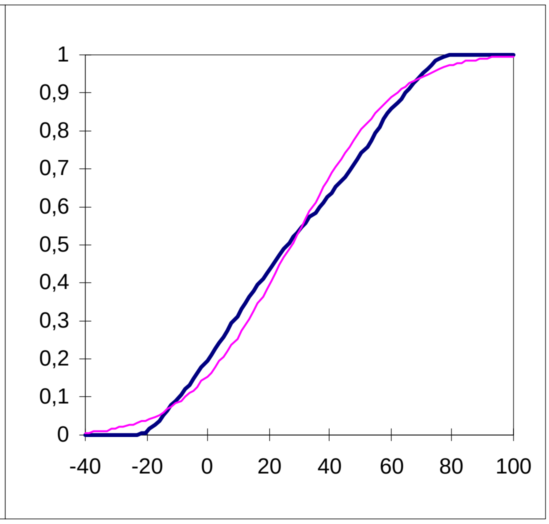




Distribución Beta h=6,11 Distribución Trapezoidal h= 6,7

	A	m	b	K		a	m_1	m_2	b
Q_1	0	60	100	2	Q_1	0	50	80	100
r_1	0,01	0,04	0,1	2	r_1	0,01	0,03	0,07	0,1

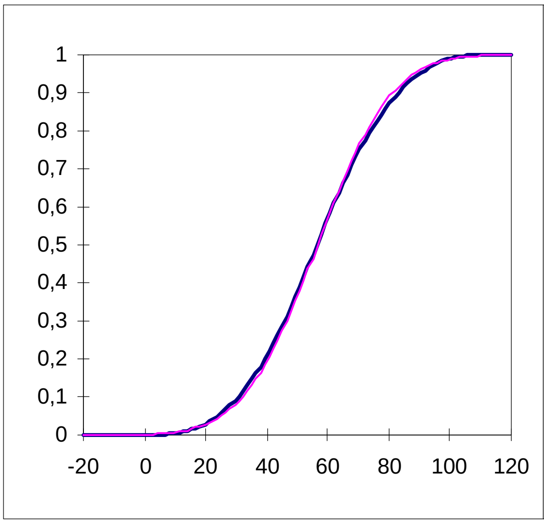




Distribución Triangular h=6,07 Distribución Uniforme h= 5,01

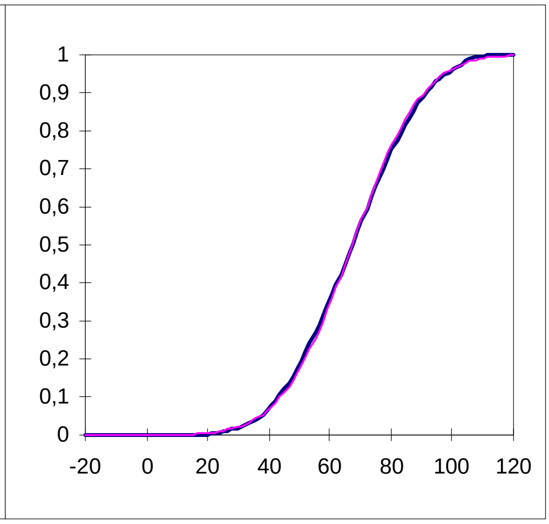
	A	m	b	-		a	b	-	-
Q_1	0	60	100	-	Q_1	0	100	-	-
r_1	0,01	0,04	0,1	-	r_1	0,01	0,1	-	-

Inversiones con dos periodos



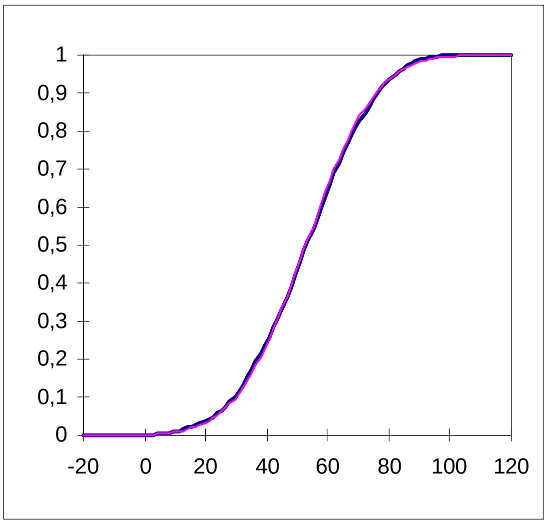
Distribución Beta h=11,02

	A	M	b	K
Q_1	0	50	60	2
Q_2	10	40	80	2
r_1	0,01	0,04	0,1	2
r_2	0,01	0,06	0,15	2



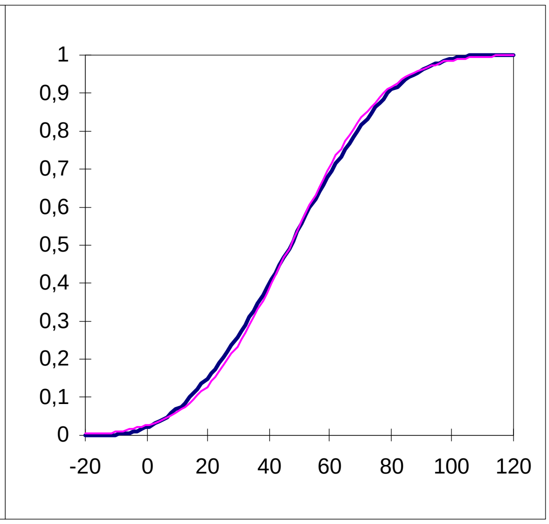
Distribución Trapezoidal h= 3,62

	a	m_1	m_2	b
Q_1	0	20	45	60
Q_2	0	30	50	80
r_1	0,01	0,03	0,07	0,1
r_2	0,01	0,05	0,08	0,15



Distribución Triangular h=5,62

	A	m	b	-
Q_1	0	50	60	-
Q_2	10	40	80	-
r_1	0,01	0,04	0,1	-
r_2	0,01	0,06	0,15	-

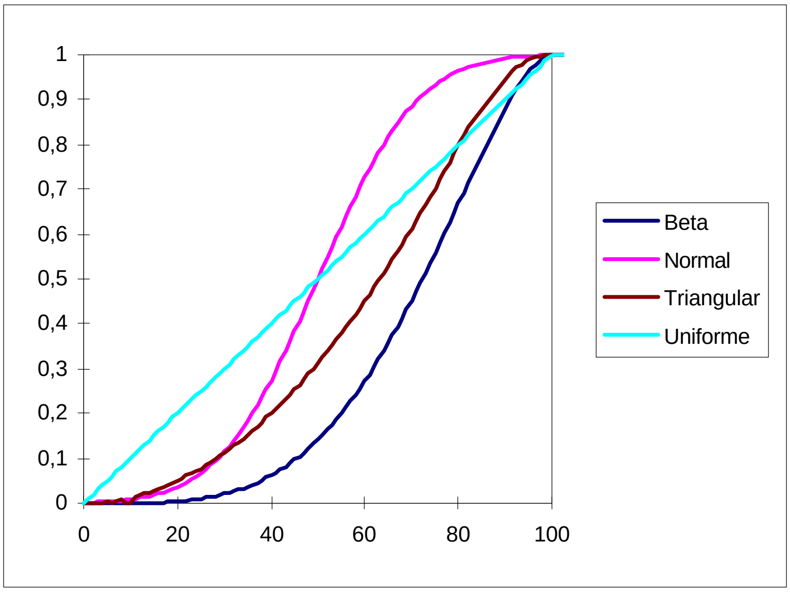


Distribución Uniforme h= 9,92

	a	b	-	-
Q_1	0	60	-	-
Q_2	10	80	-	-
r_1	0,01	0,1	-	-
r_2	0,01	0,15	-	-

5.- INFLUENCIA DEL MODELO DE PROBABILIDAD ADOPTADO PARA LAS VARIABLES DE ENTRADA

El modelo que recoge la información del experto suele tener más influencia sobre la distribución del VAN que el propio modelo paramétrico especificado para dicha distribución. En el siguiente gráfico se muestran las funciones de distribución para un flujo de caja ajustadas con los datos iniciales del experto escritos al pie del mismo



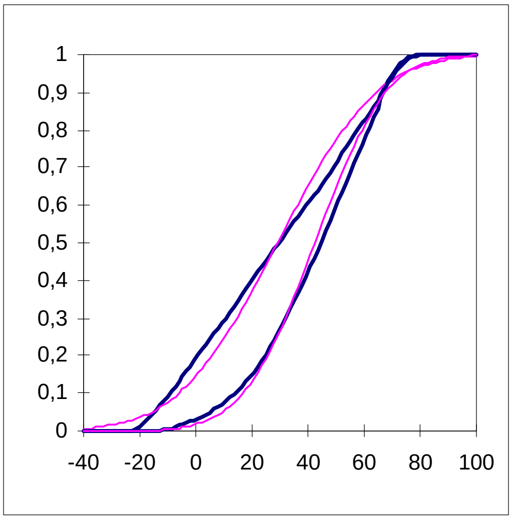
a	m	b
0	80	100

Las distribuciones beta y triangular están definidas en el intervalo [a;b] y poseen el valor modal m. La distribución uniforme esta construida sobre el mismo intervalo [a;b] y la distribución normal tiene como valor esperado el centro del intervalo [a;b] y como desviación típica 1/6 de su amplitud de forma que casi todo la masa de probabilidad Normal queda dentro de dicho intervalo. Como puede observarse las discrepancias entre las curvas del gráfico anterior son mayores que las observadas entre la curva no paramétrica y la correspondiente Normal que le acompaña en todos los gráficos previos donde se ha estimado la distribución del VAN (distribución de salida)

A continuación se muestran los resultados de una inversión con un solo periodo, con un desembolso inicial de 20 millones de pesetas y con datos del experto para el flujo de caja los del gráfico anterior. Para la tasa de descuento se han utilizado los valores pesimista, optimista y más probable siguientes

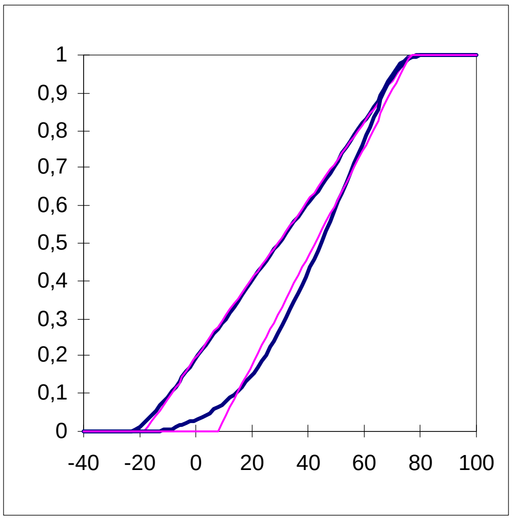
a	m	b
0,01	0,04	0,1

Se han simulado dos muestras de tamaño 1000. En primer lugar se han modelizado las variables flujo de caja y tasa de descuento mediante la distribución Beta. Posteriormente se repite la experiencia con un modelo uniforme. En ambos casos se estima la distribución no paramétrica de la variable de salida (VAN). La diferencia observada entre ambas distribuciones estimadas es superior a la que se observa entre cada una de ellas y sendas estimaciones Normales con sus correspondientes medias y varianzas muestrales.



El gráfico muestra, en trazo grueso, las funciones de distribución del VAN estimadas de forma no paramétrica. Desplazada hacia la izquierda, es la obtenida cuando la opinión del experto se modeliza mediante distribuciones uniformes. La curva que queda a la derecha es la función de distribución del VAN cuando la opinión del experto se modeliza mediante distribuciones Beta. Las curvas de trazo fino que las acompañan, son sendas funciones de distribución normales con media y varianza igual a las muestrales en cada caso.

El siguiente gráfico es análogo anterior, pero el trazo fino que acompaña a la distribución del VAN que queda a la derecha (con distribuciones Beta para la simulación) corresponde a una distribución uniforme con igual media y varianza que las muestrales. Análogamente, el trazo fino que acompaña a la distribución del VAN que queda a la izquierda (con distribuciones uniformes para la simulación) corresponde a una distribución Beta cuyo rango media y varianza son los observados en la muestra simulada para el VAN. Obsérvese que el cruce de modelos en la distribución del VAN afecta poco al resultado final, mientras que el resultado obtenido es significativamente distinto dependiendo del modelo que interpreta la opinión del experto (modelo de las variables de entrada).



6.-CONCLUSIONES

Se ha observado en diferentes simulaciones que esta situación es la habitual; no hay que hacer un esfuerzo especial para encontrar ejemplos como el anterior sino que esta es la tónica general. Si para un problema de inversión con un solo periodo los modelos construidos para el flujo de caja y la tasa de descuento (variables de entrada) presentan diferencias acusadas, estas se manifiestan en el VAN (variable de salida) y el efecto es más acusado que el que podría suponer el error de especificación de un determinado modelo paramétrico para dicha variable de salida. Es más importante cuidar la especificación de modelos que se utilizan para recoger la información del experto que el modelo de distribución utilizado para el VAN, constituyendo la distribución Normal un buen instrumento para tal fin.

7.- REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.-

CHAE, K.C., KIM,S. (1990).- Estimating the mean and variance of PERT activity time using likelihood.ratio of the mode and the midpoint. IEE Transactions, Vol. 22, nº 3, pp 198-203.

HÄRDLE, W. (1991).- Smoothing Techniques.- Ed Springer-Verlag.

HERRERÍAS PLEGUEZUELO, R. (1995).- Un nuevo uso de las tres estimaciones subjetivas del PERT.- IX Reunión ASEPELT- España Vol. IV, pp 411-416.- Santiago de Compostela.

HERRERÍAS PLEGUEZUELO, R. Y CALVETE FERNANDEZ, H. (1987).- Una ley de probabilidad para el estudio de los flujos de caja de una inversión. Homenaje al Prof. Gonzalo Arnaiz Vellando, I.N.E. pp 279-296.

HERRERÍAS PLEGUEZUELO, R., PÉREZ RODRÍGUEZ, E. (1996).- Nuevos Argumentos a favor del modelo probabilístico del PERT.- Estudios de Economía Aplicada. Décima Reunión ASEPELT-España. Editado en CD, G27.- Universidad de Castilla- La Mancha

MOITRA, S.D. (1990).- Skewness and the beta distribution.- J Opl. Res. Soc, Vol. 41, nº 1º, pp 953-961.

PEREZ RODRIGUEZ, E (1992).- Análisis de inversiones: tipos de actualización aleatorios.- Servicio de Publicaciones de la Universidad de Granada.

PEREZ RODRÍGUEZ, E. (1995).- Ajuste de un modelo beta con información adicional sobre su apuntamiento.- IX Reunión ASEPELT- España Vol. IV, pp 445-451.- Santiago de Compostela.

PEREZ RODRIGUEZ, E (1997).- Evaluación de proyectos cuando existe incertidumbre sobre los tipos de descuento.- Actas de la I Reunión científica: Programación, selección y control de proyectos. Pp 111-130.- Servicio de Publicaciones de la Universidad de Almería.