JUICIOS CRÍTICOS EN EL PROCESO ANALÍTICO JERÁRQUICO (AHP)

ALTUZARRA CASAS, Alfredo
MORENO JIMÉNEZ, José María
SALVADOR FIGUERAS, Manuel

Facultad de Económicas. (Universidad de Zaragoza)

RESUMEN

A la hora de elegir entre un conjunto finito de alternativas, AHP proporciona un método basado en comparaciones pareadas, obteniendo unas prioridades para cada alternativa. Bajo el supuesto de que estas prioridades son variables aleatorias y aplicando una metodología bayesiana se estudia el problema de seleccionar qué comparaciones resultan más influyentes en el valor final de las prioridades y cuáles son críticas a la hora de producirse el problema del cambio de rango.

Palabras clave: *AHP, Análisis Bayesiano, Juicios, Matrices incompletas*

1. INTRODUCCIÓN

El Proceso Analítico Jerárquico (AHP) es una técnica de decisión multicriterio propuesta por Saaty (1977, 1980) que permite combinar aspectos tangibles e intangibles en la obtención de las prioridades correspondientes a las alternativas consideradas en un problema de decisión, según una escala de razón. Su metodología consiste en cuatro pasos: (1) modelización, (2) valoración, (3) priorización y (4) síntesis.

Este trabajo se centra en la segunda etapa (valoración o emisión de juicios), en particular, en la incorporación al modelo de las preferencias del decisor. El procedimiento seguido consiste en la emisión de unos juicios o comparaciones por pares que, conforme a una escala fundamental (Saaty, 1980), reflejen la dominación de unas alternativas frente a otras. El resultado final de esta etapa es una matriz recíproca de comparaciones pareadas en la que todos sus elementos son positivos: $A = (a_{ij})$ con $a_{ij}\, a_{ji} = 1$, $a_{ij} > 0$, $\quad$ i, j = 1, ..., n.

En la práctica, a medida que el número de alternativas consideradas aumenta, el total de comparaciones necesarias para resolver el problema se dispara y se hace tedioso utilizar esta herramienta. Por ello, en la última década se están investigando procedimientos alternativos que permitan obtener las prioridades sin tener que recabar todos los juicios, es decir, matrices de juicios incompletas (Escobar y Moreno, 1997b; Monsieur, 1996; Harker, 1987b). Cualquier disminución en el número total de comparaciones efectuadas en el enfoque tradicional irá en detrimento de la acuracidad de los valores obtenidos, pues las redundancias en los juicios permiten mejorar la consistencia del método (Saaty, 1980). Además, si el problema corresponde a situaciones de fuerte incertidumbre es difícil que los resultados obtenidos para valores precisos (AHP determinístico) tengan validez, siendo necesario relajar la hipótesis de certidumbre (Nosofsky, 1992), considerando que los juicios a_{ij} son resultados particulares de una variable aleatoria (AHP estocástico).

Este estudio pretende analizar, desde una perspectiva bayesiana, el comportamiento de las prioridades estimadas. La metodología bayesiana (Berger (1985), Bernardo y Smith (1994)) permite incorporar en el modelo analizado informaciones a priori sobre los aspectos relevantes del proceso de decisión.

Una vez realizadas las comparaciones precisas, y obtenido el vector de prioridades, una pregunta que se plantea inmediatamente es cuál de todas las comparaciones efectuadas ha sido la que ha ejercido una mayor influencia en las puntuaciones finales. Un método para poder medir dicha influencia es usar medidas de entropía o de información. Este trabajo usa la distancia de Kullback-Leiber como medida de influencia de cada una de las comparaciones.

El trabajo se estructura de la siguiente manera: en la sección 2 (§2) se plantea el problema y se describe el modelo utilizado; la sección 3 (§3) presenta el uso de la distancia de Kullback-Leiber como medida de influencia; en la sección 4 (§4) se estudia el problema del cambio de rango mediante el uso de intervalos de confianza, y por último, en la sección 5 (§5), se recogen las conclusiones más relevantes del trabajo y futuras líneas de investigación.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Se pueden distinguir dos tipos de medidas para establecer la dominación entre objetos: absolutas y relativas. En el primer caso existe una escala que permite valorar los objetos de forma directa, situación que suele darse si se trabaja con aspectos tangibles. Cuando se comparan objetos según un aspecto intangible, para el que no hay escala, es preciso recurrir a medidas relativas, comparaciones entre los elementos considerados.

Como ya se ha mencionado, AHP permite combinar lo tangible y lo intangible utilizando comparaciones pareadas para cada criterio, en las cuales se reflejan las preferencias del decisor para razones de juicios. Su justificación teórica se basa en los axiomas descritos en (Saaty, 1986).

La incorporación de juicios en la segunda etapa de AHP (valoración), se efectúa tomando como referencia el objeto que se supone va a tener menor valor respecto al atributo considerado. Se pregunta al decisor cuántas veces considera que el objeto de mayor valor es más importante o verosímil que el menor, según la escala fundamental propuesta por Saaty (1980). El resultado es una matriz recíproca positiva $A = (a_{ij})$ de comparaciones pareadas con $a_{ij}\, a_{ji} = 1 \quad i, j = 1, ..., n$, en la que ha sido preciso incluir n(n-1)/2 juicios.

En su formulación inicial, AHP obtiene las prioridades locales mediante el método del autovector principal por la derecha (método exacto), esto es, resolviendo el problema:

$Aw = l_{max} w$, con $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$, siendo λ_{max} el máximo valor propio de la matriz A.

En este caso todos los juicios considerados son valores precisos (AHP determinístico). Cuando en el problema aparecen situaciones en las que los juicios no son precisos, sino que conllevan cierto grado de incertidumbre, se considera que los juicios a_{ij} corresponden a resultados particulares de una variable aleatoria (AHP estocástico) (Altuzarra, Escobar y Moreno (1996)).

2.1 Modelo Propuesto

Sea a_{ij} la comparación relativa entre la alternativa i-ésima y la j-ésima $i, j \in \{1,\ldots,n\}$ $i < j$. El modelo que vamos a utilizar es multiplicativo y supone que $a_{ij} = (w_i / w_j)\, e_{ij}$ donde w_i es la prioridad obtenida para la alternativa i-ésima y e_{ij} es el error cometido al comparar ambas alternativas (Altuzarra, Moreno y Salvador 1997 y 1998).

Denotando por $Y_{ij} = \log a_{ij}$, el modelo anterior queda: $Y_{ij} = \mu_i - \mu_j + \varepsilon_{ij}$ con $\mu_i = \log w_i$, $\varepsilon_{ij} = \log e_{ij}$. El cálculo de las distribuciones a posteriori de las prioridades μ_i $i = 1,\ldots, n$, y de las predictivas de los juicios Y_{ij} no emitidos por el decisor se realiza a partir de las comparaciones proporcionadas por éste ($\mathbf{y}_{observadas}$), donde n es el nº de alternativas y N es el nº de comparaciones observadas.

La distribución a priori viene dada por $\mu_i \sim N(0, \lambda_i\sigma^2)$ $i = 1,\ldots, n$ independientes de forma que, cuanto mayor sea λ_i más difusa es la distribución a priori y mayor es la ignorancia a priori acerca de μ_i.

Suponiendo el caso más sencillo y con el fin de evitar problemas de identificabilidad se toma $\lambda_n = 0 \Leftrightarrow \mu_n=0 \Leftrightarrow w_n = 1$, es decir, se toma la última alternativa como la de referencia. Esto es posible ya que en la siguiente fase del proceso en AHP las prioridades se normalizan y suponer $w_n = 1$ es una de esas posibles normalizaciones. Además se toma $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-1} = \lambda$ indicando que a priori el estado de incertidumbre acerca del resto de las alternativas es el mismo. Así, el modelo considerado viene dado por las condiciones:

MODELO

$$\boxed{\begin{array}{l} Y_{ij} = \mu_i - \mu_j + \varepsilon_{ij} \\ \mu_1 = 0 \quad \mu_i \approx N(0, \lambda\sigma^2) \quad \text{independientes} \quad \forall i = 2,\ldots,n \\ \varepsilon_{ij} \approx N(0, \sigma^2) \quad \text{independientes} \quad \forall\, i, j = 1,\ldots,n \quad i \neq j \end{array}}$$

Por otra parte, debido a que en principio no se tiene ningún conocimiento previo acerca del verdadero valor ni del grado de exactitud contenido en las distribuciones iniciales, se ha optado por estudiar su comportamiento de forma que se supone una varianza difusa ($\lambda \to \infty$). Esto no significa otra cosa que un grado de incertidumbre máximo respecto al conocimiento que se tiene de la distribución a priori.

El modelo considerado se puede expresar también en forma matricial como Y = Aθ + U donde:

$\theta = (\mu_1, ..., \mu_{n-1})'$ es un vector de n-1 parámetros desconocidos, en este caso las prioridades.

$Y = (Y_{i_1, j_1}, ..., Y_{i_N, j_N})'$ es el vector de N componentes que representa las observaciones conocidas.

$U = (\varepsilon_{i_1, j_1}, ..., \varepsilon_{i_N, j_N})'$ es el vector de los errores.

A es una matriz (N x n-1) en la que dado Y_{i_k, j_k} los elementos de la fila k-ésima, que representan la comparación entre la alternativa i_k y la alternativa j_k, son de la forma:

$$a_{k,h} = \begin{cases} 1 & h = i_k \neq n \\ -1 & h = j_k \neq n \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Se obtiene el modelo lineal Y = Aθ + U donde:

$\theta \approx N_{n-1}(0, \lambda\sigma^2 I_{n-1}) \qquad U \approx N_N(0, \sigma^2 I_N) \qquad Y/\theta \approx N_N(A\theta, \sigma^2 I_N)$.

Aplicando el teorema de Bayas, la distribución a posteriori de los parámetros es:

$$\theta / Y \approx N_{n-1}((A'A + \frac{1}{\lambda} I_{n-1})^{-1} A'AY, \sigma^2 (A'A + \frac{1}{\lambda} I_{n-1})^{-1})$$

pero teniendo en cuenta que se supone una varianza difusa, entonces se estudia su comportamiento asintótico ($\lambda \to \infty$) y resulta:

$$\theta / Y \approx N_{n-1}((A'A)^{-1} A'Y, \sigma^2 (A'A)^{-1})$$

En lo que sigue se expresan algunas propiedades de la matriz A.

Propiedad 1

A´A = (b_{ij}) es una matriz cuadrada simétrica de orden (n-1) donde b_{ii} = nº de veces que se compara la alternativa i-ésima y b_{ij} toma el valor -1 si se ha observado $Y_{i,j}$ ó 0 para el resto.

Propiedad 2

La suma de los elementos de la fila (columna) i-ésima de la matriz A´A es 1 si se ha efectuado la comparación $Y_{i,n}$ ó 0 si no se ha efectuado dicha comparación.

Propiedad 3

Denotando A como A_N, (indicando que se han realizado N comparaciones), donde a_i es la comparación i-ésima

$$A'_N A_N = \left(a_1 \quad \ldots \quad a_N\right)\begin{pmatrix} a'_1 \\ \ldots \\ a'_N \end{pmatrix} = a_1 a'_1 + \ldots + a_{N-1} a'_{N-1} + a_N a'_N .$$

Así $A_N{}'A_N$ y su inversa se pueden expresar de forma recursiva $A'_N A_N = A'_{N-1} A_{N-1} + a_N a'_N$

$$(A'_{N+1} A_{N+1})^{-1} = (A'_N A_N)^{-1}\left[I_{n-1} - \frac{a_{N+1} a'_{N+1} (A'_N A_N)^{-1}}{1 + a'_{N+1} (A'_N A_N)^{-1} a_{N+1}} \right]$$

Propiedad 4

Dada la matriz A´A, si la última alternativa (μ_n) no ha sido comparada ninguna vez, entonces $\sum_{j=1}^{n-1} b_{ij} = 0 \quad \forall i$ y por lo tanto A´A no tiene rango máximo.

Propiedad 5

Dada la matriz A´A, si alguna alternativa no ha sido comparada nunca, entonces su columna correspondiente es 0 y por lo tanto A´A es singular.

Propiedad 6

Si se cumple que N ≥ n-1 y además todas las alternativas se comparan al menos una vez, entonces la matriz A´A es invertible.

Estas propiedades permiten facilitar los cálculos necesarios para la siguiente sección.

3. COMPARACIONES INFLUYENTES

En esta sección se describe la distancia de Kullback-Leiber, su uso para medir observaciones influyentes y su aplicación al problema que se está tratando.

Definición 3.1

Dadas dos funciones de densidad f_1 y f_2, la cantidad media de información que procede de f_1 hacia f_2 o información de Kullback-Leiber se define como: $I(f_1, f_2) = E_{f_1}\left[\ln(f_1/f_2)\right] = \int f_1 \ln \frac{f_1}{f_2} dx$

Esta medida no es simétrica; por lo tanto una medida más natural es la siguiente

Definición 3.2

Se define divergencia simétrica de Kullback-Leiber como: $J(f_1, f_2) = I(f_1, f_2) + I(f_2, f_1)$ **(3.1)**

El propósito de este trabajo es cuantificar la influencia que tienen las N comparaciones pareadas efectuadas, denotadas como $Y = (Y_{i_1, j_1}, \ldots, Y_{i_N, j_N})'$, sobre el vector final de prioridades, denotado por

$\theta = (\mu_1,...,\mu_{n-1})'$; para ello se realiza el estudio de qué ocurre en la distribución de las prioridades cuando se incorpora una nueva observación (Y_{kh}).

Se toma f_1 como la distribución a posteriori de los parámetros cuando se ha añadido la observación N+1-ésima y f_2 como la distribución a posteriori de los parámetros cuando se tienen N observaciones.

Si las distribuciones f_i (i = 1,2) son normales multivariantes de orden p, con vector de medias m_i y matriz de varianzas-covarianzas Σ_i, se comprueba fácilmente (Guttman y Peña, 1988) que:

$$J(f_1, f_2) = \frac{1}{2}(m_1 - m_2)'(\Sigma_1^{-1} + \Sigma_2^{-1})(m_1 - m_2) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\Sigma_1\Sigma_2^{-1} + \Sigma_2\Sigma_1^{-1}) - p \qquad \textbf{(3.2)}$$

donde tr(M) denota la traza de la matriz M.

Para el problema que se está analizando, como se vio en la sección 2 las distribuciones a posteriori de las prioridades son:

$\theta_{N+1} / Y_{N+1} \approx N_{n-1}(m_1, \Sigma_1) \approx N_{n-1}((A'_{N+1}A_{N+1})^{-1}A'_{N+1}Y_{N+1}, \sigma^2(A'_{N+1}A_{N+1})^{-1})$ N+1 observaciones.

$\theta_N / Y_N \approx N_{n-1}(m_2, \Sigma_2) \approx N_{n-1}((A'_N A_N)^{-1}A'_N Y_N, \sigma^2(A'_N A_N)^{-1})$ N observaciones. El subíndice (N o N+1) indica el número de comparaciones efectuadas.

Antes de calcular la distancia de Kullback-Leiber tal y como se ha definido de manera simétrica en (3.1) se indica la notación seguida.

Sea $B_N = (A'_N A_N)^{-1} = (b_{ij}^N)$ matriz de varianzas-covarianzas tras realizar N comparaciones.

Sea $D_N = 1 + b_{kk}^N + b_{hh}^N - 2b_{kh}^N = \mathrm{Var}(Y_{kh})$ varianza de la nueva comparación.

Sea $Y_{t\bullet} = \sum_\alpha Y_{t\alpha}$ la suma de todas las comparaciones realizadas por la alternativa t-ésima.

Proposición

La divergencia simétrica de Kullback-Leiber al añadir la comparación N+1-ésima (Y_{kh}) es de la forma

$$J(\theta_N, \theta_{N+1}) = \frac{(D_N - 1)}{2D_N^2}\left[D_N(D_N - 1) + (\beta_k^*)^2(D_N + 1)\right] \text{ donde } \beta_k^* = Y_{kh} + \sum_{t=1}^{n-1}(b_{kt}^N - b_{ht}^N)Y_{t\bullet}$$

Demostración

Se usa la notación anterior y además ésta otra que simplifica los cálculos:

$$P = a_{N+1}a'_{N+1}(A'_N A_N)^{-1} = a_{N+1}a'_{N+1}B_N$$

$B_{N+1} = B_N(I_{n-1} - \frac{P}{D_N})$ usando la propiedad 3 y siendo I_{n-1} la matriz identidad de orden n-1

$A'_{N+1}Y_{N+1} = A'_N Y_N + (e_k - e_l)Y_{kl}$ donde $e_k = (0,...,\overset{k}{1},...,0)$

A continuación se desglosan los cálculos necesarios, por partes, de la fórmula (3.2) para hacerlos más inteligibles. En primer lugar la diferencia del vector de medias m_1 - m_2.

$$m_1 - m_2 = B_{N+1}A'_{N+1}Y_{N+1} - B_N A'_N Y_N = B_N\left[\left(I_{n-1} - \frac{P}{D_N}\right)A'_{N+1}Y_{N+1} - A'_N Y_N\right] =$$

$$= B_N\left[-\frac{P}{D_N}A'_N Y_N + \left(I_{n-1} - \frac{P}{D_N}\right)(e_k - e_h)Y_{kh}\right]$$

Además

$$\left(I_{n-1} - \frac{P}{D_N}\right)(e_k - e_h) = \frac{D_N e_k - D_N e_h - (b^N_{kk} + b^N_{hh} - 2b^N_{hk})e_k - (2b^N_{hk} - b^N_{kk} - b^N_{hh})e_h}{D_N} = \frac{e_k - e_h}{D_N}$$

Uniendo ambas expresiones, resulta:

$m_1 - m_2 = \dfrac{1}{D_N}B_N\left(-PA_N Y_N + (e_k - e_h)Y_{kh}\right)$ y por lo tanto, su traspuesta,

$$(m_1 - m_2)' = \frac{1}{D_N}\left(-Y'_N A_N P' + (e'_k - e'_h)Y_{kh}\right)B_N$$

Para la parte de la varianza se obtiene:

$$(\Sigma_1^{-1} + \Sigma_2^{-1}) = (A'_{N+1}A_{N+1}) + (A'_N A_N) = 2B_N^{-1} + a_{N+1}a'_{N+1}$$

$$\Sigma_1\Sigma_2^{-1} = (A'_{N+1}A_{N+1})^{-1}(A'_N A_N) = B_N\left(Id_{n-1} - \frac{P}{D_N}\right)B_N^{-1} = I_{n-1} - \frac{P'}{D_N}$$

$$\Sigma_2\Sigma_1^{-1} = (A'_N A_N)^{-1}(A'_{N+1}A_{N+1}) = B_N(B_N^{-1} + a_{N+1}a'_{N+1}) = I_{n-1} + P'$$

Luego: $\operatorname{traza}(\Sigma_1\Sigma_2^{-1}) = (n-1) - \dfrac{(D_N - 1)}{D_N}$ $\qquad \operatorname{traza}(\Sigma_2\Sigma_1^{-1}) = (n-1) + D_N - 1$

Uniendo las expresiones de la media y de la varianza resulta:

$$(m_1 - m_2)^T(\Sigma_1^{-1} + \Sigma_2^{-1})(m_1 - m_2) = \frac{(\beta^*)}{D_N}B_N(2B_N^{-1} + a_{N+1}a'_{N+1})B_N\frac{(\beta^*)^T}{D_N} = (\beta^*_k)^2\frac{(D_N^2 - 1)}{D_N^2}$$

siendo β^* la matriz: $\beta^* = \left(-Y'_N A_N P' + (e'_k - e'_h)Y_{kh}\right)$.

$$\frac{1}{2}\operatorname{tr}(\Sigma_1\Sigma_2^{-1} + \Sigma_2\Sigma_1^{-1}) - p = \frac{1}{2}\left[2(n-1) + (D_N - 1) - \frac{(D_N - 1)}{D_N}\right] - (n-1) = \frac{(D_N - 1)^2}{2D_N}$$

En definitiva:

$$J(\theta_N, \theta_{N+1}) = \frac{1}{2}(\beta^*_k)^2\frac{D_N^2 - 1}{D_N^2} + \frac{1}{2}\frac{(D_N - 1)^2}{D_N} = \frac{(D_N - 1)}{2D_N^2}\left[D_N(D_N - 1) + (\beta^*_k)^2(D_N + 1)\right] \qquad \text{c.q.d.}$$

Por lo tanto la distancia de Kullback-Leiber o divergencia simétrica entre dos distribuciones, una de ellas con N observaciones y otra a la que se le ha añadido la observación (Y_{kh}) es función de dos valores: D_N y β_k* que indican, $D_N = 1 + b_{kk}^N + b_{hh}^N - 2b_{kh}^N = Var(Y_{kh})$ la varianza de la nueva observación y $\beta_k^* = Y_{kh} + \sum_{t=1}^{n-1} (b_{kt}^N - b_{ht}^N) Y_{t\bullet}$ la relación existente entre las demás comparaciones y las covarianzas de cada alternativa con las nuevas alternativas comparadas (μ_k y μ_h).

De esta forma se obtiene un método para encontrar la comparación que ejerce mayor influencia a la hora de calcular la distribución de las prioridades μ_i. No hace falta más que calcular esta medida para cada comparación $Y_{i,j}$ efectuada y aquella con la que se obtenga una mayor divergencia será la comparación más influyente.

4. PROBLEMA DEL CAMBIO DE RANGO

En esta sección se va a tratar del problema del cambio de rango. Este problema se produce cuando al añadir alguna comparación nueva el vector de prioridades (μ_1, ..., μ_{n-1}, μ_n) sufre alguna variación en su ordenación. Sea $\theta^N = (\mu_{(1)},...,\mu_{(n)})$ el vector de prioridades tras haber realizado N comparaciones, ordenadas las prioridades de forma decreciente ($\mu_{(i)}$, $\geq$ $\mu_{(i+1)}$ $\forall$i) y sea $\theta^{N+1} = (\mu_{(1)},...,\mu_{(n)})$ el mismo vector tras haber realizado N+1 comparaciones. El problema del cambio de rango surge cuando esta ordenación cambia para alguna de las prioridades.

Dependiendo de las ordenaciones que se estudien aparecen dos tipos de problemas:

El problema P-α en el que solo se quiere elegir la mejor alternativa y por lo tanto solo interesa el estudio de la alternativa que aparece ordenada en primer lugar $\mu_{(1)}$. Únicamente habrá que tener en cuenta si al añadir una nueva comparación esta alternativa permanece en primera posición.

El problema P-γ en el que se quiere realizar una ordenación de todas las alternativas y por lo tanto se debe hacer el estudio de todas las posibles ordenaciones tras añadir una nueva comparación.

Este trabajo se centra en el problema de tipo α. La forma de acercarse será mediante el uso de intervalos o regiones de confianza. A continuación se dan los resultados teóricos del cálculo de tales intervalos. Para ello se usará la regla de recurrencia descrita en la propiedad 3 de la sección 2.

La idea es la siguiente: en primer lugar se calculan los intervalos de confianza para cada prioridad en ambos casos con N o N+1 comparaciones, de forma que se puede comprobar si se solapan entre ellos para ver qué prioridades son las que tienen más posibilidades de presentar un cambio de rango.

Otra forma de acercarse al problema es el cálculo de intervalos de confianza para la diferencia de los parámetros. Se calculan intervalos para todos los pares ($\mu_{(1)} - \mu_{(i)}$ $\forall$i) y ver así cuáles presentan más opciones de cambio de rango.

Sea μ_i^d (d = N, N+1) la prioridad i-ésima tras realizar d comparaciones: $\mu_i^d \approx N(m_i^d, b_{ii}^D)$ donde $E[\mu_i^d] = m_i^d = \sum_{t=1}^{n-1} b_{it}^d Y_{t\bullet}$ y $Var[\mu_i^d] = b_{ii}^d$.

Usando las reglas de recurrencia vistas anteriormente se obtiene:

$$m_i^{N+1} = m_i^N + \frac{b_{ik}^N - b_{ih}^N}{D_N}(Y_{kh} - \mu_k^N + \mu_h^N) \qquad \text{y} \qquad b_{ii}^{N+1} = b_{ii}^N - \frac{(b_{ik}^N - b_{ih}^N)^2}{D_N}.$$

Por lo tanto los intervalos de confianza para cada prioridad quedan de la siguiente forma:

$$I.C.(\mu_{(1)}^N) = \left(m_{(1)}^N \pm z_{\alpha/2}\sqrt{b_{(1)(1)}^N}\right) = \sum_{t=1}^{n-1} b_{(1)t}^N Y_{t\bullet} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{b_{(1)(1)}^N}$$

$$I.C.(\mu_{(1)}^{N+1}) = \left(m_{(1)}^{N+1} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{b_{(1)(1)}^{N+1}}\right) =$$
$$= \sum_{t=1}^{n-1} b_{(1)t}^N Y_{t\bullet} + \frac{b_{(1)k}^N - b_{(1)h}^N}{D_N}(Y_{kh} - \mu_k^N + \mu_h^N) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{b_{(1)(1)}^N - \frac{(b_{(1)k}^N - b_{(1)h}^N)^2}{D_N}}$$

Para los intervalos de las diferencias:

$\mu_i^d - \mu_j^d \approx N(m_i^d - m_j^d, b_{ii}^d + b_{jj}^d - 2b_{ij}^d)$ h = N, N+1 donde la media y la varianza son:

$$E[\mu_i^{N+1} - \mu_j^{N+1}] = m_i^{N+1} - m_j^{N+1} = m_i^N - m_i^N + \frac{(Y_{kh} - \mu_k^N + \mu_h^N)}{D_N}(b_{ik}^N - b_{ih}^N - b_{jk}^N + b_{jh}^N)$$

$$Var[\mu_i^{N+1} - \mu_j^{N+1}] = b_{ii}^{N+1} + b_{jj}^{N+1} - 2b_{ij}^{N+1} = b_{ii}^N + b_{jj}^N - 2b_{ij}^N - \frac{(b_{ik}^N - b_{ih}^N - b_{jk}^N + b_{jh}^N)^2}{D_N}$$

Así, los intervalos quedan de la forma:

$$I.C.(\mu_{(1)}^N - \mu_{(i)}^N) = \left(m_{(1)}^N - m_{(i)}^N \pm z_{\alpha/2}\sqrt{b_{(1)(1)}^N + b_{(i)(i)}^N - 2b_{(1)(i)}^N}\right) =$$
$$= \sum_{t=1}^{n-1}(b_{(1)t}^N - b_{(i)t}^N)Y_{t\bullet} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{b_{(1)(1)}^N + b_{(i)(i)}^N - 2b_{(1)(i)}^N}$$

$$I.C.(\mu_{(1)}^{N+1} - \mu_{(i)}^{N+1}) = \left(m_{(1)}^{N+1} - m_{(i)}^{N+1} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{b_{(1)(1)}^{N+1} + b_{(i)(i)}^{N+1} - 2b_{(1)(i)}^{N+1}}\right) =$$
$$= \sum_{t=1}^{n-1}(b_{(1)t}^N - b_{(i)t}^N)Y_{t\bullet} + \frac{(Y_{kh} - \mu_k^N + \mu_h^N)}{D_N}(b_{(1)k}^N - b_{(1)h}^N - b_{(i)k}^N + b_{(i)h}^N) \pm$$
$$\pm z_{\alpha/2}\sqrt{b_{(1)(1)}^N + b_{(i)(i)}^N - 2b_{(1)(i)}^N - \frac{(b_{(1)k}^N - b_{(1)h}^N - b_{(i)k}^N + b_{(i)h}^N)^2}{D_N}}$$

5. CONCLUSIONES

Se ha analizado desde una perspectiva bayesiana un modelo multiplicativo en los errores que cuantifica la incertidumbre asociada al proceso de obtención de juicios (comparaciones) de un decisor estimando las prioridades asociadas a las alternativas consideradas.

Se ha estudiado un problema que aparece cuando se estiman las prioridades; ¿qué comparaciones, de las efectuadas, son las que más han influido en dichas puntuaciones finales? Esta cuestión se ha planteado usando una medida de divergencia, la distancia de Kullback-Leiber, llegando a la conclusión de que al añadir una nueva comparación su influencia en la distribución conjunta de las prioridades viene dada por su varianza y por la relación (covarianza) de las alternativas que compara con las demás comparaciones efectuadas.

También se ha explorado el problema del cambio de rango, que se produce al cambiar la ordenación de las prioridades cuando se añaden nuevas comparaciones. Se ha planteado este problema mediante el uso de intervalos de confianza bayesianos, tanto para cada prioridad como para las diferencias entre la primera prioridad y las demás.

Esta última sección podía extenderse mediante el uso de técnicas de simulación que orientaran hacia cuáles son las estructuras de preferencias más probables, para una vez elegidas realizar más tarde un análisis más pormenorizado sobre dichas estructuras.

BIBLIOGRAFÍA

ALTUZARRA, A.; ESCOBAR, M.T.; MORENO, J. M. (1996): Estudio probabilístico en el Proceso Analítico Jerárquico (AHP). *Actas de la X Reunión Asepelt-España*, Albacete

ALTUZARRA, A.; MORENO, J. M.; SALVADOR, M. (1997): Una aproximación bayesiana en la incorporación de juicios en el Proceso Analítico Jerárquico (AHP). *Actas de la XI Reunión Asepelt-España*, Bilbao, Julio 1997

ALTUZARRA, A.; MORENO, J. M.; SALVADOR, M. (1998): Número mínimo de juicios en el Proceso Analítico Jerárquico (AHP). Un estudio bayesiano. *Actas de la XII Reunión Asepelt-España*, Córdoba, 1998

BERGER, J.O. (1985): *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis.* Springer Verlag.

BERNARDO, J.M.; SMITH, A.F.M. (1994): *Bayesian Theory*. Wiley

ESCOBAR M.T.; MORENO-JIMÉNEZ J.M. (1997b): Problemas de gran tamaño en el Proceso Analítico Jerárquico. *Estudios de Economía Aplicada,* **8**, 25-40.

GUTTMAN I.; PEÑA D. (1988): Outliers and Influence: Evaluation by Posteriors of Parameters in the Linear Model. *Bayesian Statistics,* **3**, pp. 631-640.

HARKER, P.T. (1987b): The Incomplete Pairwise Comparisons in The Analytic Hierarchy Process. *Mathematical Modelling*, **9**, 837-848.

MONSUUR, H. (1996): An Intrinsic Consistency Threshold for Reciprocal Matrix. *European Journal of Operational Research*, **96**, 387-391.

NOSOFSKY, R.M. (1992): Similarity scaling and cognitive process models. *Annual Review of Psychology* 43, pp. 25-53.

SAATY, T.L. (1977): For priorities in hierarchical structures, *J. of Mathematical Psychology*, **15** (3), pp.234-281.

SAATY, T.L. (1980): *The Analytic Hierarchy Process*. Mc Graw-Hill, New York.

SAATY, T.L. (1986): Axiomatic Foundation of The Analytic Hierarchy Process, *Management Science,* **32** (7), pp.157-177.