LA PROGRAMACIÓN FRACCIONAL COMO INSTRUMENTO PARA LA PLANIFICACIÓN AGRARIA: SOSTENIBILIDAD Y RIESGO

Carmen Castrodeza[1], Pablo Lara[2], Teresa Peña[1]

[1]Departamento de Economía Aplicada (Matemáticas). Universidad de Valladolid.
[2]Departamento de Producción Animal. Universidad de Córdoba.

RESUMEN

El objetivo de este trabajo es presentar la programación fraccional como una herramienta para la planificación agraria. Esta técnica es muy adecuada para representar muchos problemas reales en agricultura como ocurre con la valoración de la sostenibilidad o con el tratamiento del riesgo.

A pesar de estas ventajas la escasez de buenos algoritmos insertados en paquetes informáticos para resolver los diferentes modelos de programación fraccional multiobjetivo resulta un inconveniente para el uso extensivo de esta técnica. Para evitar estos inconvenientes se tratan dos procedimientos.

PALABRAS CLAVE: Programación Fraccional, Programación multiobjetivo, Agricultura, Riesgo, Sostenibilidad.

1. INTRODUCCIÓN

A la hora de modelizar explotaciones agrarias la programación lineal ha sido y sigue siendo, la metodología mas utilizada debido principalmente a que es un planteamiento sencillo que puede adaptarse a situaciones muy diferentes, y computacionalmente es fácil de manejar permitiendo resolver problemas de grandes dimensiones.

Tradicionalmente se han utilizado funciones objetivo que maximizan los resultados económicos de la empresa agraria (margen bruto, beneficios..) y restricciones de carácter agronómico como son las de rotación y frecuencia de cultivos, además de la disponibilidad de recursos: mano de obra, maquinaria, agua de riego y liquidez monetaria.

En las últimas décadas se ha criticado la utilización de modelos monoobjetivos, que aceptan implícitamente que las elecciones se realizan de acuerdo a un único criterio, por lo que en la actualidad se trabaja con modelos multiobjetivo que buscan un compromiso óptimo entre varios criterios.

La programación fraccional que ha tenido una rápida extensión recientemente, sirve para describir algunos problemas reales mucho mejor que los modelos de optimización lineal.

En este trabajo pretendemos mostrar como la programación fraccional es una herramienta útil para representar muchos situaciones reales en agricultura, tales como: el tratamiento del riesgo rompiendo la hipótesis de certidumbre que supone la programación lineal y que raras veces se cumple, la valoración de la sostenibilidad de los sistemas agrarios concepto que ha suscitado un interés creciente en las últimas décadas y que obliga a pensar en términos relativos y la evaluación de la eficacia de las políticas agrarias.

Debido a la ausencia de buenos algoritmos insertados en paquetes informáticos para la resolución de problemas multiobjetivo fraccionales vamos a estudiar dos métodos que nos ayudaran a resolver este tipo de problemas.

2. LA PROGRAMACIÓN FRACCIONAL EN LA PLANIFICACIÓN AGRARIA

2.1. RIESGO

La programación lineal supone el conocimiento preciso de los coeficientes y parámetros del modelo, esto raras veces se cumple. Lo normal es que el agricultor a la hora de decidir como llevar a cabo la planificación de sus cultivos se mueva en un contexto de riesgo e incertidumbre, esto se debe a que la agricultura es una actividad económica muy compleja en la que intervienen gran cantidad de variables entre las que podemos citar: el clima, desastres naturales, plagas y enfermedades, políticas agrarias... , etc.

Numerosos estudios empíricos han demostrado que los agricultores generalmente se comportan de una manera adversa al riesgo, es decir, los agricultores prefieren siempre planes que les proporcionen un nivel satisfactorio de seguridad aunque ello les suponga sacrificar su renta media.

Ignorar este comportamiento de aversión al riesgo en los modelos de planificación agraria siempre conduce a resultados que son inaceptables para el agricultor o que guardan muy poca relación con las decisiones que él toma en la realidad. Para resolver este problema, se han desarrollado distintas técnicas para incorporar este comportamiento adverso al riesgo en un modelo de programación matemática.

La primera de estas técnicas fue el enfoque *media-varianza* desarrollado inicialmente por Markowitz (1952) y aplicado por primera vez a la agricultura por Freund (1956). Se basa, como su propio nombre indica, en el par de criterios media y varianza asociados a un determinado plan de cultivos. Los planes de cultivo eficientes se obtienen minimizando la varianza para cada nivel posible de ingresos esperados, satisfaciendo, además, un conjunto de restricciones técnicas. Es, por tanto, un modelo de programación cuadrática. Posteriormente, Hazell (1971) desarrollo una alternativa lineal al enfoque Media- Varianza a la que denomino *MOTAD y* que ha sido ampliamente usada en la práctica. Se diferencia del enfoque Media–Varianza en que se sustituye la varianza por las desviaciones en valor absoluto respecto a la media evitando de esta forma el uso de la programación cuadrática.

Todos los modelos anteriores tratan de disminuir el riesgo minimizando para ello una medida adecuada de la variabilidad de los ingresos y aunque todos son válidos, en la actualidad, en el mundo agrario se puede afirmar que los agricultores ven el riesgo como la posibilidad de no cubrir sus costes fijos y la renta necesaria para el mantenimiento de su familia mas que como la variabilidad en el sentido de la varianza o las desviaciones absolutas, por eso en los últimos trabajos los modelos suelen plantearse preferentemente dentro de los enfoques de seguridad primero.

Dentro de los enfoques de seguridad primero se busca maximizar la probabilidad de que los ingresos del agricultor cubran sus costes fijos y la renta necesaria para su familia. Es decir:

$$Max \left\{ p(c^t x \geq k) \setminus x \in S \right\} \qquad [1]$$

siendo:

- ***k*** : Un parámetro que vendrá dado por el centro decisor en función de sus metas personales y restricciones financieras, de tal forma que se le asegure un nivel mínimo de ingresos que cubra sus costes fijos y la renta que necesita su familia.
- ***x*** : Un vector n-dimensional de las variables de decisión, las superficies a sembrar de cada cultivo.
- ***c*** : Un vector aleatorio n-dimensional con una distribución conocida que representa los márgenes brutos de cada cultivo. Por simplificar, supondremos que c sigue una ley normal n-dimensional con vector de medias $\bar{c}$ y matriz de varianzas- covarianzas V.
- ***S*** : Un conjunto convexo de R^n.

Teniendo en cuenta que:

$$p\left(c^t x \geq k\right) = p\left(\frac{c^t x - \bar{c}^t x}{\sqrt{x^t V x}} \geq \frac{k - \bar{c}^t x}{\sqrt{x^t V x}}\right) = 1 - F\left(\frac{k - \bar{c}^t x}{\sqrt{x^t V x}}\right) = F\left(\frac{\bar{c}^t x - k}{\sqrt{x^t V x}}\right)$$

siendo Φ la función de distribución de la ley normal estándar y puesto que Φ es una función estrictamente creciente, el problema [1] es equivalente al siguiente:

$$Max\left\{\frac{\bar{c}^t x - k}{\sqrt{x^t V x}} \setminus x \in S\right\}$$

De esta forma, hemos transformado nuestro problema estocástico de mínimo riesgo en un problema determinista y, además, fraccional no lineal.

Aunque para llegar a ese objetivo hemos supuesto hipótesis de normalidad en la distribución de los ingresos, el planteamiento seguiría siendo válido si relajamos esa hipótesis y suponemos que la ley de distribución que sigue la variable aleatoria es desconocida. Para cualquier vector aleatorio *c* en virtud de la desigualdad de Chebyshev se verificará que:

$$p\left(c^t x < k\right) \leq \frac{x^t V x}{\left(\bar{c}^t x - k\right)^2}$$

Por lo tanto, en los casos en que la $p\left(c^t x < k\right)$ sea desconocida el principio de seguridad primero recomendaría minimizar su límite superior, es decir:

$$min \frac{x^t V x}{\left(\bar{c}^t x - k\right)^2}$$

lo que es equivalente a:

$$max \frac{\bar{c}^t x - k}{\sqrt{x^t V x}}$$

y estaríamos de nuevo ante el problema determinista fraccional no lineal que aparece en nuestro enfoque del riesgo.

2.2 SOSTENIBILIDAD

El concepto de agricultura sostenible ha suscitado un interés creciente en las dos últimas décadas. Los aspectos filosóficos, teóricos y prácticos de este concepto, principalmente el aspecto ambiental, han sido ampliamente desarrollados en foros económicos y agronómicos. Sin embargo, el aspecto fundamental en la actualidad es como usar la sostenibilidad como un criterio operacional en el manejo de sistemas agrarios. Existen en la literatura muchas definiciones de este concepto que sirven como anteproyecto para hacer de la sostenibilidad una herramienta tratable, entre estas destacan las siguientes:

“ Una estrategia de dirección ...para reducir los costes de compra de inputs, minimizar el impacto ambiental tanto en las inmediaciones como lejos de la explotación agraria y proporcionar desde la misma un nivel sostenible de producción y beneficios para el agricultor” (Francis et al., 1987).

“Los sistemas agrarios son sostenibles si minimizan el uso de inputs externos y maximizan el uso de los inputs internos ya disponibles en la explotación ” (Carter, 1989)”.

“ Un sistema es sostenible en un período determinado si los outputs no decrecen cuando los inputs no aumentan” (Monteith, 1990).

La estrategia que más frecuentemente ha sido unida a la sostenibilidad es la eliminación del uso de productos químicos, particularmente fertilizantes y pesticidas pero también la reducción de la degradación de determinados recursos como la tierra o el agua. En general, como muestran las definiciones anteriores, la estrategia operacional va destinada a maximizar los outputs deseados y a minimizar los outputs no deseados (contaminantes) y el uso de inputs escasos y no renovables. La cuestión no es maximizar “per se” sino maximizar outputs y minimizar inputs. Cualquiera que sea la interpretación de sostenibilidad, se deben comparar niveles de outputs con niveles de inputs o outputs no deseados. Como Lal (1991) estableció: "El objetivo debe ser maximizar la producción por unidad de tierra perdida, por MJ de energía consumida, por cada unidad de cambio en la concentración de nitratos en el subsuelo, por unidad de pérdida de carbón orgánico en el suelo, por cada unidad de gases radiactivos emitidos en estos procesos. Estos son , realmente, criterios alcanzables”.

Para poder operar con el concepto de sostenibilidad es necesario desarrollar formas de medirla o al menos de valorarla cuantitativamente.

Una de las contribuciones más provechosas de la programación fraccional ha sido que ha sacado a la luz la necesidad de pensar en términos relativos. Por tanto, la programación fraccional es una herramienta para manejar y medir la sostenibilidad agraria en el sentido descrito anteriormente.

Así, si buscamos la sostenibilidad a la hora de planificar un sistema agrario habrá que plantearse objetivos del tipo:

$$max \ \frac{p^t x}{q^t x}$$

donde:

- ***x*** ha sido definida anteriormente.

- ***p*** es un vector n-dimensional que puede representar el margen bruto de cada cultivo, las necesidades de mano de obra de los mismos, etc.
- ***q*** es un vector n-dimensional que puede representar las necesidades de fertilizantes de cada cultivo, el consumo de agua o de energía de los mismos, etc.

  Por lo tanto, se tiene también un objetivo fraccional.

2.3. EVALUACIÓN DE LOS MECANISMOS DE TRANSFERENCIA DE RENTA DE LA POLITICA AGRARIA

A la hora de llevar a cabo una planificación agraria muchas veces no solo se persiguen objetivos propios del centro decisor privado, esto es, del agricultor que toma las decisiones de siembra, sino también objetivos públicos que reflejen los intereses del resto de la sociedad respecto a los agricultores. Esto es muy común cuando se analizan las politicas agrarias. Estos programas agrarios son aplicados por mecanismos mas o menos complejos (ayudas directas, compras de intervención,...) que al final pueden ser considerados como una transferencia de recursos monetarios a los productores agrarios desde otros agentes económicos. Esta transferencia puede ser mediante ayudas directas, con lo cual su coste es financiado por los contribuyentes vía impuestos , o a través de precios superiores a los de mercado libre, con lo cual el coste incide solo en los consumidores. Es deseable para la sociedad que esa transferencia se realice conforme a algún criterio de eficiencia. El conflicto entre la rentabilidad privada y la eficacia en la transferencia de renta hacia los agricultores puede ser enfocada desde dos puntos de vista: el primero estudia el conflicto considerando valores absolutos de margen bruto y ayudas, es decir, trata de buscar planes de cultivo que proporcionen un determinado nivel de renta al menor coste social posible.

El segundo enfoque, mas adecuado, busca planes de cultivo que proporcionen un determinado nivel de renta con la máxima eficacia posible en la transferencia de la renta , midiendo la eficacia de la misma como la cantidad de renta que obtiene cada agricultor por cada peseta que recibe de los programas agrarios. Expresado en otros términos, la eficacia es igual a la inversa del coste que supone cada peseta que los agricultores ingresan gracias a los programas agrarios. Por tanto, mínimo coste es sinónimo de máxima eficacia. Por lo tanto se trata de estudiar el conflicto entre:

$$max\ \bar{c}^{t} x \qquad y \qquad max\ \frac{\bar{c}^{t} x}{s^{t} x}$$

donde :

- ***x y c*** han sido definidas anteriormente.

- ***s*** es un vector n-dimensional que representa la cuantía que recibe el agricultor por cultivo como consecuencia de los programas agrarios.

  De nuevo estaríamos ante un objetivo fraccional.

Con todo ello, observamos como la programación fraccional es una herramienta muy útil a la hora de representar muchos objetivos que aparecen en la planificación de los sistemas agrarios ahora bien, puesto que la planificación agraria es una actividad multiobjetivo, (Romero y Rehman, 1993) en la que normalmente se busca un compromiso entre varios objetivos, estaríamos ante un problema de programación multiobjetivo fraccional.

3. PROGRAMACIÓN MULTIOBJETIVO FRACCIONAL

Programación fraccional es un término bastante común en la literatura sobre programación matemática e investigación operativa para referirse a modelos en los cuales los objetivos son cocientes de dos funciones. El trabajo teórico y algorítmico hecho en programación fraccional es grande. Pero sorprendentemente, aunque los ratios output/input son consustanciales a muchos problemas económicos, como los mencionados anteriormente en conexión con la planificación agraria, muy pocas aplicaciones reales de programación fraccional han sido publicadas, especialmente en el campo de la agricultura. Quizás, la razón principal sea la ausencia de procedimientos buenos para resolver los modelos.

En este trabajo, nuestra intención no es hacer una revisión completa de la programación fraccional, sino centrarnos en los modelos con mas de un objetivo, problemas de programación multiobjetivo fraccional (PMOF).

La formulación de un problema de programación multiobjetivo fraccional es la siguiente:

(P1)

$$Eff.\ F(x) = \left\{ r_1(x) = \frac{n_1(x)}{d_1(x)}, r_2(x) = \frac{n_2(x)}{d_2(x)}, \ldots, r_q(x) = \frac{n_q(x)}{d_q(x)} \right\}$$
$$x \in X$$

donde:

- *Eff.* significa búsqueda del conjunto de soluciones eficientes;
- n_k *y* d_k *(k=1,2,...,q)* son funciones reales y continuas definidas en *X;*
- $d_k(x)>0$ *(k=1,2,...,q)* " $x \in X$ *;*
- *X* es un subconjunto de R^n, no vacío, convexo y compacto.

En el caso de que *n(x)* y *d(x)* sean funciones lineales o afines para todo k estaríamos ante un problema de de programación multiobjetivo fraccional lineal (PMOFL). Si el numerador o el denominador son no lineales estaríamos ante un problema de programación muliobjetivo fraccional no lineal.

Como ocurre en la programación multiobjetivo (PMO), la noción de eficiencia juega un papel central en PMOF. Una solución es eficiente o Pareto-óptima si no se puede encontrar otra solución que mejore un objetivo sin empeorar al menos otro.

Suponiendo que todas las funciones objetivo deban maximizarse:

Definición.

Un punto $x' \in X$ es eficiente o Pareto-óptimo si y solo si no existe otro $x \in X$ tal que $r_i(x) \geq r_i(x')$ $\forall$ i y $r_i(x) > r_i(x')$ para al menos un *i*.

Sea E_s el conjunto de todos los puntos eficientes de (P1).

El principal problema de la PMOF es que, a diferencia de lo que ocurre con la PMO, no hay algoritmos disponibles en paquetes informáticos para calcular todo el conjunto de puntos eficientes de un problema de PMOF. Este es el mayor inconveniente.

A continuación, estableceremos una relacion entre los problemas de PMO y los problemas de PMOF así como la relación entre sus conjuntos eficientes que nos permitirá en muchos casos evitar este problema.

3.1. PROCEDIMIENTOS PARA RESOLVER PMOF

En este apartado exponemos dos algoritmos para encontrar las soluciones eficientes de un problema de PMF.

I) Algoritmo de Nykowski-Zolkiewski.

Nykowski y Zolkiewski (1985) desarrollaron un procedimiento que nos va a servir para obtener los puntos eficientes de un problema de PMOF (P1). Consideremos los siguientes problemas de PMO:

(P2)

$$Eff.F(x) = \{n_1(x), n_2(x), \ldots, n_q(x), -d_1(x), \ldots, -d_q(x)\}$$
$$x \in X$$

y sea E_1 el conjunto de soluciones eficientes de este problema.

(P3)

$$Eff.F(x) = \{n_1(x), n_2(x),..., n_q(x), d_1(x),..., d_q(x)\}$$
$$x \in X$$

y sea E_2 el conjunto de soluciones eficientes de este problema.

(P4)

$$Eff.F(x) = \{n_1(x), n_2(x),..., n_q(x), -d_1(x),..., -d_h(x), d_{h+1},..., d_q(x)\}$$
$$x \in X$$

y sea E_3 el conjunto de soluciones eficientes de este problema.

El procedimiento para obtener la soluciones eficientes de PMOF, esta basado en el siguiente teorema:

TEOREMA DE NYKOWSKI - ZOLKIEWSKI.

$a)\ Si\ r_k(x) > 0\ (k = 1,2,..., q) \quad \forall\, x \in X,\ E_s \subset E_1$

$b)\ Si\ r_k(x) < 0\ (k = 1,2,..., q) \quad \forall x \in X,\ E_s \subset E_2$

$c)\ Si\ r_k(x) > 0\ (k = 1,2,..., h) \quad \forall\, x \in X,\ y\ r_k(x) < 0\ (k = h+1,..., q) \quad \forall\, x \in X,\ E_s \subset E_3$

En otras palabras, si la función objetivo del problema de PMOF tiene signo constante en todo el conjunto factible, su conjunto de soluciones eficientes es un subconjunto del conjunto de soluciones eficientes del correspondiente problema de PMO. Estas condiciones también se verifican cuando $d_i(x)=a$ siendo a una constante.

El procedimiento, por tanto, consiste en resolver el apropiado PMO en cada caso para obtener su conjunto eficiente seleccionando, a continuación, las soluciones eficientes del problema fraccional.

Este algoritmo nos permite tratar problemas con objetivos fraccionales y no fraccionales, lineales o no lineales

II) Algoritmo de Dutta-Rao-Tiwari.

Dutta-Rao-Tiwari (1993) desarrollaron un procedimiento que nos va a permitir obtener los puntos eficientes de un problema de PMOFL. Dado el siguiente problema de PMOFL con denominadores idénticos para todos los objetivos:

(P5)

$$Eff.F(x) = \left\{ \frac{n_1(x)}{d(x)}, \frac{n_2(x)}{d(x)}, ..., \frac{n_q(x)}{d(x)} \right\}$$
$$sujeto\ a:$$
$$Ax \le c$$
$$x \ge 0$$

Aplicando el cambio de variable $y = tx$, donde *t* ³ *0* es elegido tal que $t = \dfrac{g}{d(x)}$ siendo $\gamma \neq 0$ una constante determinada, obtenemos el siguiente problema:

(P6)

$$
\begin{gathered}
Eff.F(x) = \{n_1(y), n_2(y), ..., n_q(y)\} \\
sujeto\ a: \\
Ay - ct \leq 0 \\
d(y) = g \\
y, t \geq 0
\end{gathered}
$$

TEOREMA DE DUTTA-RAO-TIWARI.

Las soluciones eficientes de (P6) son también las soluciones eficientes del problema (P5).

En este caso, para hallar las soluciones eficientes de (P5) solo tenemos que resolver (P6), es decir, un problema de programación multiobjetivo lineal (PMOL) estándar.

El método de Nykowski-Zolkiewski puede aplicarse a problemas de PMOF, con objetivos tanto fraccionales como no fraccionales , lineales como no lineales, mientras que el método de Dutta –Rao-Tiwari sólo puede aplicarse a problemas multiobjetivos fraccionales lineales con idénticos denominadores.

Al transformar el correspondiente problema multiobjetivo fraccional en un problema multiobjetivo para su resolución, aplicando el metodo de Dutta –Rao-Tiwari el número de objetivos permanece invariante mientras que aplicando el método de Nykowski-Zolkiewski el número de objetivos se incrementa. Además con el método de Dutta –Rao-Tiwari se obtiene directamente el conjunto de soluciones eficientes del problema fraccional mientras que por el otro método obtenidas las soluciones eficientes del problema multiobjetivo se seleccionan las soluciones eficientes del problema fraccional.

El método de Dutta-Rao-Tiwari es computacionalmente menos costoso que el método de Nykowski-Zolkiewski.

4. APLICACIONES NUMERICAS

En este apartado vamos a hacer una aplicación de los algoritmos comentados anteriormente a un sistema agrario.

Ejemplo 1

Se considera un sistema agrario en el que se llevan a cabo tres actividades: x_1, x_2 y x_3, en el que se esta interesado en maximizar una función de utilidad que tenga como variables el margen bruto y el empleo. Se quiere también usar la menor cantidad de agua posible. Existen restricciones referentes a la cantidad de tierra, al crédito y a la rotación de cultivos. La Tabla 1 muestra la contribución de cada actividad a los objetivos y las restricciones:

Tabla 1. Matriz de Coeficientes

Objetivos y restricciones	Actividades			
	x_1	x_2	x_3	
Margen Bruto (ptas.)	1000	3000	1500	
Empleo (horas)	500	200	200	
Consumo de agua (m^3)	6000	8000	3000	
Tierra (has.)	1	1	1	=1000
Crédito (ptas.)	4000	5000	2000	<=4200000
Rotación	-1	1	1	<=0

Si buscamos soluciones sostenibles que maximicen el margen bruto y los niveles de empleo por unidad de agua consumida podemos formular el siguiente problema de PMOFL:

$$Eff.\left\{\frac{1000x_1 + 3000x_2 + 1500x_3}{6000x_1 + 8000x_2 + 3000x_3}, \frac{500x_1 + 200x_2 + 200x_3}{6000x_1 + 8000x_2 + 3000x_3}\right\}$$
$$sujeto\ a:$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1{,}000$$
$$4000x_1 + 5000x_2 + 2000x_3 \leq 4200000$$
$$-x_1 + x_2 + x_3 \leq 0$$

Como se trata de un problema PMOFL con denominadores iguales, para su resolución podemos aplicar el procedimiento de Dutta-Rao-Tiwari. Para ello necesitamos trasformar el problema fraccional al espacio de las variables (y,t) . El problema resultante, teniendo en cuenta que se han realizado algunas transformaciones para obtener una buena escalarización del mismo, es el siguiente:

$$\begin{gathered}Eff.\{y_1+3y_2+1{,}5y_3,\ 0{,}5y_1+0{,}2y_2+0{,}2y_3\}\\ \textit{sujeto a}:\\ y_1+y_2+y_3-1000t\le 0\\ 4y_1+5y_2+2y_3-4200t\le 0\\ -y_1+y_2+y_3\le 0\\ 6y_1+8y_2+3y_3=936\end{gathered}$$

El problema ha sido resuelto con el programa MLP (Computing y Systems Consultant BV, 1987), obteniendose tres puntos extremos eficientes en el espacio *(y, t)* (Tabla 2).

Tabla 2. Puntos extremos eficientes

Punto	y_1	y_2	y_3	t
A	104	0	104	0,208
B	72	57,6	14,4	0,144
C	156	0	0	0,156

que en el espacio de las variables de decisión: x_1, x_2 y x_3, son los puntos que aparecen en la Tabla3:

Tabla 3. Puntos extremos eficientes (PMOFL).

Punto	x_1	x_2	x_3	Marg. bruto/agua	Empleo/agua
A	500	0	500	0,2777	0,0777
B	500	400	100	0,2846	0,0538
C	1000	0	0-	0,1666	0,0833

Si planteamos el mismo problema como un modelo de programación multiobjetivo lineal con tres objetivos: maximizar margen bruto, maximizar empleo y minimizar el consumo de agua se obtienen cuatro puntos extremos eficientes al resolver el problema con el programa MLP (Tabla 4).

Tabla 4. Puntos extremos eficientes (PMOL).

Punto	x_1	x_2	x_3	Margen bruto (Ptas)	Empleo (horas)	Agua (m^3)
A	500	-	500	1250000	350000	4500000

B	500	400	100	1850000	350000	6500000
C	1000	-	-	1000000	500000	6000000
D	800	200	-	1400000	440000	6400000

Se observa que aunque los puntos A,B,C y D son eficientes en el problema PMOL, el punto D no es eficiente para el problema fraccional. Así, aunque en un trabajo de PMOL el punto D sería una solución elegible , su sostenibilidad es muy dudosa, porque se pueden encontrar soluciones con una mayor contribución al margen bruto y al empleo por unidad de agua consumida.

Ejemplo 2

Se trata de estudiar un sistema agrario en el que se llevan a cabo cuatro actividades: x_1, x_2, x_3 *y* x_4, persiguiendo dos objetivos: el primer objetivo trata de disminuir el riesgo maximizando el margen bruto pero solo a partir de un nivel de seguridad que garantice unos ingresos mínimos al agricultor y el segundo objetivo busca conseguir una agricultura sostenible maximizando los ingresos pero por unidad de agua consumida ya que este es un recurso escaso.

Las restricciones del problema son:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 200$$

$$25x_1 + 36x_2 +27x_3 + 87x_4 \leq 10000$$

$$-x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \leq 0$$

$$20x_1 + 40x_2 +30\, x_3 +50x_4 \leq 42000$$

La primera restricción se refiere a la cantidad de tierra disponible, la segunda a las horas de labor, la tercera es una restricción de rotación de cultivos y la última al capital circulante disponible.

Se dispone de una serie de tiempo de los márgenes brutos obtenidos con dichos cultivos siendo el vector de medias :

$$\bar{c} = \left(253,\ 443,\ 284,\ 516)\right)$$

y la matriz de Varianzas-Covarianzas:

$$V=\begin{pmatrix} 11264 & -20548 & 1424 & -15627 \\ -20548 & 125145 & -27305 & 29297 \\ 1424 & -27305 & 10585 & -10984 \\ -15627 & 29297 & -10984 & 93652 \end{pmatrix}$$

Las necesidades de agua de cada uno de los cultivos son (m^3/ha): 3000,6000,5000 y 8000 respectivamente

El nivel de seguridad que cubre los costes fijos y la renta que necesita su familia se ha fijado en 57000.

Con estos datos, el planteamiento del problema biobjetivo estocástico es el siguiente:

(PI)

$$Max\left\{ p(c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+c_4x_4)\geq 57000\,;\ \frac{253x_1+443x_2+284x_3+516x_4}{3000x_1+6000x_2+5000x_3+8000x_4} \right\}$$

sujeto a las restricciones anteriores.

El planteamiento del problema multiobjetivo fraccional no lineal equivalente al anterior será:

(PII)

$$Max\left\{ \frac{253x_1+443x_2+284x_3+516x_4-57000}{\left((x_1,x_2,x_3,x_4)V\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \right)^{1/2}}\,;\ \frac{253x_1+443x_2+284x_3+516x_4}{3000x_1+6000x_2+5000x_3+8000x_4} \right\}$$

sujeto a las mismas restricciones anteriores.

Para utilizar el procedimiento de Nykowski-Zolkiewski con objeto de obtener el conjunto de soluciones eficientes del problema anterior necesitamos que los dos objetivos tengan signo constante en todo el conjunto de soluciones factibles. El segundo objetivo es evidente que tendrá siempre signo constante, el primer objetivo lo tendrá si se verifica la siguiente condición:

$$253x_1 + 443x_2 + 284x_3 + 516x_4 - 57000 \geq 0 \qquad [2]$$

Teniendo en cuenta que:

$$p(c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 \geq 57000) \geq 0{,}5 \Leftrightarrow 253x_1 + 443x_2 + 284x_3 + 516x_4 \geq 57000$$

y que en el ámbito agrario en el que nos movemos los decisores son muy conservadores y nunca aceptarán soluciones para las cuales:

$$p\ (c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 \geq 57000) \leq 0{,}5$$

la condición $253x_1 + 443x_2 + 284x_3 + 516x_4 - 57000 \geq 0$ puede ser introducida en el conjunto inicial de restricciones del problema eliminando, únicamente, todas las soluciones eficientes demasiado arriesgadas que nunca serían aceptadas por los agricultores.

Con todo ello, el problema multiobjetivo no lineal asociado al problema fraccional será:

(PIII)

$$\begin{aligned} Max \quad \{ & 253x_1 + 443x_2 + 284x_3 + 516x_4 \,; \\ & -3000x_1 - 6000x_2 - 5000x_3 - 8000x_4; \\ & -11264x_1^2+41096x_1x_2-2848x_1x_3+31254x_4x_1-125145x_2^2+54610x_2x_3-58594x_4x_2- \\ & 10585x_3^2 + 21968x_4x_3 - 93652x_4^2 \} \end{aligned}$$

sujeto a las restricciones iniciales a las que añadimos [2].

Utilizando el software desarrollado para la resolución de problemas multiobjetivo no lineales por el grupo de trabajo en Decisión Multicriterio de la Universidad de Málaga hemos obtenido el conjunto de puntos eficientes de (PIII). Notemos que dicho problema es un problema multiobjetivo no lineal con tres criterios: maximizar margen bruto, minimizar varianza y minimizar consumo de agua. Del conjunto de soluciones eficientes de ese problema hemos extraído un subconjunto que son las soluciones eficientes del problema fraccional que nosotros planteamos (PI) obteniéndose los puntos que aparecen en la TABLA 5.

Tabla 5 .Conjunto de Soluciones Eficientes

	Probabilidad	m.bruto/agua	x_1	x_2	x_3	x_4

1	0,9220	0,06649	55,49	31,78	79,08	33,65
2	0,90658	0,06756	71,97	29,29	78,43	20,31
3	0,8997	0.06768	70,54	30,33	73,24	25,88
4	0,8925	0,06815	74,89	30,35	68,84	25,92
5	0,883	0,06876	81,35	29,87	65,43	23,35
6	0,8643	0,06943	86,19	30,38	57,4	26,03
7	0.8599	0,06946	85,1	31,03	54,33	29,54
8	0,8106	0,07146	103,13	30,43	40,24	26,2
9	0,7995	0.07499	126,23	34,49	0	39.28
10	0,7224	0,07622	136,31	33,44	0	30,25
11	0,6772	0,07746	139,51	41,46	0	19,03
12	0,6591	0,07760	146,39	32,4	0	21.21
13	0,6255	0,07823	151,8	30,2	0	18
14	0,5987	0,07867	155,41	28,68	0	15,91
15	0,5793	0,07915	156,47	31,35	0	12.18
16	0,5120	0,08084	164,26	33,34	0	2,4

Por lo tanto, al agrupar los objetivos bajo el enfoque fraccional el conjunto de soluciones eficientes que se presenta al centro decisor es menor que con el enfoque multiobjetivo, facilitándole de esta manera la elección al no inundarle con tanta información.

5.CONCLUSIONES -

En este trabajo mostramos como la programación fraccional constituye una herramienta muy adecuada para modelizar problemas de planificación agraria.

Teniendo en cuenta que el número de soluciones eficientes de un problema multiobjetivo aumenta con el número de objetivos, englobar dos objetivos de forma fraccional es una forma útil de conseguir una reducción del conjunto eficiente, facilitando de esta forma, la elección al centro decisor al no inundarle con tanta información.

Debido a la ausencia de buenos algoritmos insertados en paquetes informáticos para la resolución de problemas multiobjetivo fraccionales hemos presentado dos métodos para obtener el conjunto de soluciones eficientes de este tipo de problemas mediante la transformación de los mismos en problemas multiobjetivo.

El método de Nykowski-Zolkiewski puede aplicarse a la resolución de problemas multiobjetivo fraccionales tanto lineales como no lineales mientras que el método de Dutta-Rao-Tiwari sólo puede aplicarse a problemas multiobjetivo fraccionales lineales con denominadores idénticos para todos los objetivos. Además, la carga computacional del enfoque de Dutta-Rao-Tiwari es menor que la del enfoque de Nykowski-Zolkiewski porque el modelo de programación que tiene que ser resuelto tiene menos objetivos y además permite obtener directamente el conjunto de soluciones eficientes, E_s, mientras que con el enfoque de Nykowski-Zolkiewski tenemos que resolver un problema con mas objetivos y además tenemos que hacer cálculos "a posteriori" para obtener el conjunto E_s.

6. REFERENCIAS

[1] Caballero, R., Rey, L., Ruiz, F. y González, M. (1997). An algorithmic package for the resolution and analysis of convex multiple objective problems. Multicriteria Decision Making. *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems,* 448. Editores: Fandel, G. y Gal, T., 275-284. Springer.

[2] Carter, H.O. (1989). Agricultural susteainability: an overview and research assesment. *California Agriculture*, 43(3), 16-18.

[3] Charnes, A. y Cooper, W.W. (1962). Programming with linear fractional functionals. *Navals Research Logistics Quarterly*, 9, 181-186.

[4] Computing y Systems Consultants BV (1987). *Multiobjective Linear Programming Reference Manual*. Eindhoven.

[5] Dutta, D., Rao, J.R. y Tiwari, R.N. (1993). A restricted class of multiobjective linear fractional programming problems. *European Journal of Operational Research,* 68(3), 352-355.

[6] Francis, C.A., Sander, D. y Martin, A. (1987). Search for a sustainable agriculture: reduced inputs and increase profits. *Crop and Soils*, 39, 12-14

[7] Lal, R. (1991). Soil structure and sustainability. *Journal of Sustainable Agriculture*, 1, 67-92.

[8] Lara, P. (1993). Multiple objective fractional programming and livestock ration formulation: a case study for dairy cow diets in Spain. *Agricultural Systems*, 41, 321-334.

[9] Mangasarian, O.L. (1969). Nonlinear fractional programming. *Journal of the Operational Research Society of Japan*, 12(1), 1-10.

[10] Monteith, J.L. (1990). Can sustainability be quantified?. *Indian Journal of Dryland Research and Development*, 5(1y2), 1-5.

[11] Nykowski, I. y Zolkiewski, Z. (1985). A compromise procedure for the multiple objective linear fractional programming problem. *European Journal of Operational Research*, 19, 91-97.

[12] Rehman, T. y Romero, C. (1993). The application of the MCDM paradigm to the management of agricultural systems: some basic considerations. *Agricultural Systems*, 41, 239-255.

[13] Stancu-Minasian, I.M. (1997). *Fractional Programming. Theory, Methods and Applications*. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, Boston, London.