

Repercusiones de la Oferta Laboral Flexible en los Planes de Pensiones de Aportación y de Prestación Definidas

Francisco José Peláez Feroso
Ana García González
Dpto. Economía Aplicada (Matemáticas)
Universidad de Valladolid

Palabras clave: Cadenas de Markov; consumo-ocio; oferta laboral flexible; planes de pensiones.

Resumen

En este trabajo pretendemos realizar un análisis comparativo de los planes de aportación definida y de los de prestación definida de sistema de empleo, desde el punto de vista del bienestar de cada trabajador perteneciente a la empresa promotora del plan, cuando se considera en ésta flexibilidad en la oferta laboral.

Este problema lo plantearemos utilizando el método de la programación dinámica, considerando que el comportamiento de los rendimientos de las inversiones de los recursos financieros del fondo se recoge a través de cadenas de Markov.

Para cada tipo de plan, analizaremos los valores que toman el consumo y el ocio, que maximizarán la utilidad de cada trabajador.

1. INTRODUCCIÓN

Entre las diferentes modalidades de planes y fondos de pensiones que existen actualmente en el mercado financiero, cabe distinguir de forma especial los planes no contributivos de sistema de empleo, que son aquéllos que promueven las empresas a favor de sus trabajadores con el fin de incentivar su productividad y su permanencia en la empresa, y en los que sólo realiza aportaciones al fondo el promotor del plan.

Dentro de los planes no contributivos de sistema de empleo analizaremos los planes de aportación y de prestación definida. Los planes no contributivos de aportación definida se caracterizan porque la variable que se define es la aportación que ha de realizar sistemática y anualmente el promotor del plan a la cuenta de posición que tiene cada partícipe-trabajador en el fondo de pensiones donde se integra aquél. Por tanto, la prestación de jubilación devengada a partir de esa edad a favor de cada partícipe del plan en el caso de que superviva, vendrá definida como el montante constituido por las referidas aportaciones y los rendimientos en forma de intereses producidos por las inversiones de las mismas hasta la jubilación. En este caso, la fuente de riesgo más relevante para el partícipe-trabajador será el comportamiento de los rendimientos de las inversiones del fondo de pensiones.

Los planes no contributivos de prestación definida se caracterizan porque son las prestaciones de jubilación las que se definen previamente, en función del número de años trabajados en la empresa promotora del plan y del salario final o del salario medio de los últimos años percibido por cada partícipe. En este caso, el trabajador asume generalmente un riesgo importante respecto al montante que representan las prestaciones de jubilación a percibir en su día si sobrevive a la edad en que ésta tiene lugar, ya que en estas prestaciones influye la evolución de los salarios y la edad de jubilación, que pueden ser inciertas.

Conviene precisar que en este trabajo sólo consideraremos que ambos tipos de planes de pensiones cubren únicamente prestaciones por jubilación y no por las demás causas de salida susceptibles de incidir sobre el colectivo de partícipes.

2. EL MODELO

Teniendo en cuenta los dos tipos de planes de pensiones que acabamos de reseñar y los comentarios que sobre este particular se recogen en [11], el objetivo principal de este trabajo es realizar un análisis comparativo de los planes no contributivos de sistema de empleo de aportación definida respecto a los de prestación definida, haciendo uso de la teoría de la elección del consumidor y del modelo tradicional del ciclo de vida.

En este caso, analizaremos ambos tipos de planes de pensiones suponiendo que la elección se puede realizar en términos de consumo y ocio, es decir, entre consumo y número de horas trabajadas, teniendo en cuenta que existe flexibilidad en la oferta de trabajo por parte de la empresa promotora del plan y que es al partícipe del mismo a quien corresponde decidir el número de horas que desea trabajar o dedicar al ocio.

En consecuencia, cada partícipe-trabajador del plan tratará de alcanzar el mayor bienestar posible en términos de la utilidad que le reportan el consumo y el ocio durante toda su trayectoria laboral. Por su parte, la empresa escogerá aquel plan de pensiones que teniendo el mismo horizonte temporal, verifique la condición de indiferencia para la empresa, es decir, que el valor actual de los costes que conllevan ambos tipos de planes de pensiones sea el mismo.

Realizaremos el análisis de los mismos en tiempo discreto, y trataremos el problema de la optimización utilizando el método de la programación dinámica.

A través de este modelo, trataremos de ver qué incidencia tiene la flexibilidad de la oferta laboral sobre el bienestar de los trabajadores en términos de la utilidad que les reportan el consumo y el ocio durante todo el horizonte temporal de vigencia de ambos planes, condicionado por la incidencia que la riqueza financiera de cada periodo, la evolución salarial y los tantos de rendimiento de las inversiones tienen sobre el bienestar de los trabajadores.

En este modelo en el que se considera flexibilidad en la oferta laboral en la empresa promotora del plan, un plan de pensiones de prestación definida, garantiza a cada trabajador una prestación de jubilación equivalente al salario percibido en el último año

empresa promotora únicamente garantiza las aportaciones que anualmente dota a la porcentaje fijado del salario que se devenga anualmente a favor de éste en tanto en K T proporcionalmente al número de periodos de actividad laboral del trabajador, con el fin para el análisis en términos de utilidad.

t $^{AD}B_0$ y $^{PD}B_0$, respectivamente, verificándose que coinciden y toman el siguiente valor:

$$^{AD}B_0 = ^{PD}B_0 = S_0 V(0, T),$$

donde $V(0, T)$ es el factor de actualización para T periodos. Esta relación se verifica cuando se considera como hipótesis que $S_0 = E_0(\tilde{S}_j)$, para todo $j = 1, 2, \dots, T - 1$.

Igualmente, remitiéndonos al trabajo descrito en [11] sobre este mismo tema, establecemos que el valor final de la prestación de jubilación para un plan de prestación definida viene dado por $^{PD}\tilde{B}_T = \tilde{S}_{T-1}$; y el valor final de la prestación de jubilación para un plan de aportación definida como $^{AD}\tilde{B}_T = \frac{1}{T}(S_0 + \tilde{S}_1 + \dots + \tilde{S}_{T-1})$.

De aquí se deduce que, aún verificándose la condición de indiferencia de la empresa, las prestaciones esperadas para el momento T de jubilación sólo coincidirán en ambos planes si los salarios realmente devengados son iguales a los estimados.

2.1 Hipótesis del modelo

Para analizar este modelo establecemos una serie de hipótesis de partida sobre las variables y parámetros que intervienen en las dos modalidades de planes de pensiones que analizamos en este trabajo.

- Consideramos para este análisis mercados incompletos, de lo que se deduce que puede existir incertidumbre tanto en los salarios a percibir por cada partícipe como en los tantos de rendimiento de las inversiones de los recursos financieros del fondo de pensiones.
- La incertidumbre salarial es específica del partícipe-trabajador y diversificable para la empresa promotora del mismo.
- La evolución salarial, los rendimientos de las inversiones y los tantos de interés técnicos de valoración del plan son independientes.
- Cada partícipe-trabajador del plan presenta aversión al riesgo. Por este motivo, se elige para este análisis una función de utilidad de tipo logarítmica, creciente y

cóncava, que verifica las condiciones que ha de cumplir una función para que sea representativa de este tipo de inversor.

- Las prestaciones a percibir por los trabajadores en el momento de la jubilación dependerán de que los tantos de crecimiento salarial y los tantos de rendimiento de las inversiones sean ciertos o aleatorios.
- Los salarios a percibir por los trabajadores tanto para los planes de aportación definida como para los de prestación definida, serán conocidos o inciertos, según que los tantos anuales de crecimiento salarial sean ciertos o aleatorios.

2.2 Variables y parámetros del modelo

En este apartado especificamos y definimos las variables y parámetros más significativos que intervienen en el modelo de planes de pensiones objeto de estudio.

- $\bar{C} = (C_0, \tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_{T-1})$, consumos que lleva a cabo cada partícipe durante los periodos de actividad laboral del trabajador de la empresa promotora del plan de pensiones analizado.
- $\bar{L} = (L_0, \tilde{L}_1, \dots, \tilde{L}_{T-1})$, número de horas que dedica al ocio cada partícipe del total de tiempo posible a trabajar. Es una de las variables de control del problema analizado.
- $\bar{i} = (i_0, \tilde{i}_1, \dots, \tilde{i}_{T-1})$, tantos de interés técnico de valoración vigentes en cada uno de los periodos del horizonte temporal analizado. En consecuencia, los factores de capitalización para estos periodos serán $R_0 = 1 + i_0$ y $R_j = 1 + i_j$ para todo $j = 1, 2, \dots, T - 1$.
- $\bar{M} = (M_0, \tilde{M}_1, \dots, \tilde{M}_{T-1})$, riqueza o recursos financieros disponibles por cada partícipe-trabajador en cada periodo del horizonte temporal del análisis del modelo.
- \tilde{B}_T , prestación por jubilación pagadera en T al trabajador que adquiere la condición de pensionista en ese momento y que tomará diferente valor según corresponda a un plan de aportación definida o a uno de prestación definida.
- ${}^{AD}B_0$, valor actual de las contribuciones anuales debidamente capitalizadas al tanto que produce la inversión de las mismas para planes de aportación definida, y ${}^{AD}B_T$, su valor final a la edad de jubilación del partícipe. Así:

$${}^{AD}B_T = \frac{1}{T} (S_0 + \dots + \tilde{S}_{T-1}) = \frac{p}{3} [(1 - L_{T-1}) + a(1 - L_{T-2}) + b(1 - L_{T-3})],$$

donde $a = (1 + {}_{T-3} s_{T-2})$; $b = (1 + {}_{T-2} s_{T-1})$ y $p = s_0^j$, salario por hora.

- ${}^{PD}B_0$, valor actual de las prestaciones proyectadas de pensión de jubilación para planes de prestación definida, y ${}^{PD}\tilde{B}_T$, su valor final. En este caso:

$${}^{PD}B_T = S_{T-1} = (1 + {}_{T-2}S_{T-1})(1 - L_{T-2}).$$

- $\bar{r} = (r_0, \tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_{T-1})$, tantos de rendimiento de las inversiones de los activos del fondo del plan que rigen durante el horizonte temporal del análisis. Estos tantos de rendimiento pueden ser constantes para todo momento o aleatorios, en cuyo caso su evolución se recoge a través de un proceso markoviano de tipo discreto, que viene definido a través de la matriz de paso o de transición que le caracteriza, considerando para el análisis tres tipos de rendimiento: bajo, r^B ; medio, r^M ; alto, r^A ; y que se construye de la forma siguiente:

	r^B	r^M	r^A
r^B	P_{BB}	P_{BM}	P_{BA}
r^M	P_{MB}	P_{MM}	P_{MA}
r^A	P_{AB}	P_{AM}	P_{AA}

P : Matriz de paso o de transición

- $\bar{S} = (S_0, \tilde{S}_1, \dots, \tilde{S}_{T-1})$, salarios que se devengan anualmente a favor de cada partícipe-trabajador de la empresa promotora del plan durante su actividad laboral en la misma. Estos salarios pueden ser conocidos y constantes para todo momento o inciertos. En este último caso su evolución viene recogida a través de un proceso markoviano que viene definido por la matriz de transición o de paso que le caracteriza y que establece la evolución en el tiempo de los tantos de crecimiento salariales en términos de probabilidad, considerando ahora tres tipos de tantos: bajo, s^B , medio, s^M y alto, s^A .

	s^B	s^M	s^A
s^B	P'_{BB}	P'_{BM}	P'_{BA}
s^M	P'_{MB}	P'_{MM}	P'_{MA}
s^A	P'_{AB}	P'_{AM}	P'_{AA}

P' : Matriz de paso o de transición

- $\bar{s} = ({}_0s_1, {}_1s_2, \dots, {}_{T-1}s_T)$, tantos anuales de crecimiento salarial. Su evolución viene definida a través de procesos markovianos.

2.3 Optimización del problema

Para realizar el análisis que en términos de bienestar reporta el consumo y el ocio a cada trabajador de la empresa promotora del plan, considerando la condición de indiferencia para la empresa ya comentada anteriormente, utilizamos un modelo de optimización intertemporal en el que las preferencias por el consumo y el ocio en el tiempo de cada partícipe del plan vienen representadas a través de una función de utilidad de tipo logarítmico que describe adecuadamente la aversión al riesgo de cada uno de ellos, y que viene dada por la expresión:

$$U(C_0, \dots, C_T, L_0, \dots, L_{T-1}) = \log(C_0) + E_0 \left[\sum_{n=1}^T \log(C_n) \right] + \log(L_0) + \left[\sum_{n=1}^T \log(L_n) \right]$$

En el momento final del análisis, T , cada trabajador consumirá todos sus recursos disponibles considerando entre ellos la prestación de jubilación que percibirá en ese momento y que vienen definidos a través de la restricción presupuestaria:

$$M_T = C_T = (M_{T-1} + S_{T-1} - C_{T-1})R_{T-1} + B_T$$

Resolveremos el problema de optimización intertemporal para T periodos recursivamente, maximizando la función objetivo condicionada a la restricción presupuestaria utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange para determinar el consumo y ocio óptimos para el periodo $(T-1, T)$.

$$\max_{C_{T-1}, C_T, L_{T-1}} U(C_{T-1}, C_T, L_{T-1}) = \log(C_{T-1}) + \log(C_T) + \log(L_{T-1})$$

$$s.a: M_T = C_T = [M_{T-1} + p(1 + {}_{T-2}s_{T-1})(1 - L_{T-1}) - C_{T-1}]R_{T-1} + p(1 + {}_{T-2}s_{T-1})(1 - L_{T-1})$$

La función Lagrangiana asociada a este problema de optimización viene dada por:

$$\begin{aligned} L(C_{T-1}, C_T, L_{T-1}, I) = & \log(C_{T-1}) + \log(C_T) + \log(L_{T-1}) \\ & - I [C_T - ([M_{T-1} + p(1 + {}_{T-2}s_{T-1})(1 - L_{T-1}) - C_{T-1}]R_{T-1} \\ & + p(1 + {}_{T-2}s_{T-1})(1 - L_{T-1}))] \end{aligned}$$

Condiciones de óptimo:

$$\frac{\partial L}{\partial C_{T-1}} = \frac{1}{C_{T-1}} - I R_{T-1} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial C_T} = \frac{1}{C_T} - I = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial L_{T-1}} = \frac{1}{L_{T-1}} - I p (1 + {}_{T-2}s_{T-1})(R_{T-1} + 1) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial I} = C_T - ([M_{T-1} + p(1 + {}_{T-2}s_{T-1})(1 - L_{T-1}) - C_{T-1}]R_{T-1} + p(1 + {}_{T-2}s_{T-1})(1 - L_{T-1})) = 0$$

De donde se obtiene:

$$C_T^* = R_{T-1} C_{T-1}$$

$$L_{T-1}^* = \frac{1}{I [p(1 + {}_{T-2}s_{T-1})](R_{T-1} + 1)} = \frac{C_{T-1} R_{T-1}}{p(1 + {}_{T-2}s_{T-1})(R_{T-1} + 1)}$$

Operando, obtenemos los óptimos para los periodos T y $T-1$, tanto para un plan de prestación definida como para uno de aportación definida:

$${}^{PD}C_T^* = \frac{M_{T-1} R_{T-1} + p(1 + {}_{T-2}s_{T-1})(R_{T-1} + 1)}{3}$$

$${}^{PD}C_{T-1}^* = \frac{M_{T-1} R_{T-1} + p(1 + {}_{T-2}s_{T-1})(R_{T-1} + 1)}{3 R_{T-1}}$$

$${}^{PD}L_{T-1}^* = \frac{M_{T-1} R_{T-1} + p(1 + {}_{T-2}s_{T-1})(R_{T-1} + 1)}{3 p(1 + {}_{T-2}s_{T-1})(R_{T-1} + 1)}$$

$${}^{AD}C_T^* = \frac{M_{T-1} R_{T-1} + p(1 + {}_{T-2}s_{T-1})(R_{T-1} + 1) + \frac{p}{3}[(1 - L_0) + (1 + {}_{T-3}s_{T-2})(1 - L_1) - 2(1 + {}_{T-2}s_{T-1})]}{3}$$

$${}^{AD}C_{T-1}^* = \frac{M_{T-1} R_{T-1} + p(1 + {}_{T-2}s_{T-1})(R_{T-1} + 1) + \frac{p}{3}[(1 - L_0) + (1 + {}_{T-3}s_{T-2})(1 - L_1) - 2(1 + {}_{T-2}s_{T-1})]}{3 R_{T-1}}$$

$${}^{AD}C_T^* = \frac{M_{T-1} R_{T-1} + p(1 + {}_{T-2}s_{T-1})(R_{T-1} + 1) + \frac{p}{3}[(1 - L_0) + (1 + {}_{T-3}s_{T-2})(1 - L_1) - 2(1 + {}_{T-2}s_{T-1})]}{3 p(1 + {}_{T-2}s_{T-1})(R_{T-1} + 1/3)}$$

La utilidad indirecta para los planes de prestación definida y de aportación definida, respectivamente, viene dada por:

$$\begin{aligned} {}^{PD}V_{T-1}(M_{T-1}) &= \log({}^{PD}C_{T-1}^*) + \log({}^{PD}C_T^*) + \log({}^{PD}L_{T-1}^*) \\ &= 3\log\left[\frac{M_{T-1}R_{T-1} + p(1+{}_{T-2}s_{T-1})(R_{T-1}+1)}{3}\right] + \log\left(\frac{1}{R_{T-1}}\right) + \left[\frac{1}{p(1+{}_{T-2}s_{T-1})(R_{T-1}+1)}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^{AD}V_{T-1}(M_{T-1}) &= \log({}^{AD}C_{T-1}^*) + \log({}^{AD}C_T^*) + \log({}^{AD}L_{T-1}^*) \\ &= 3\log\left[\frac{M_{T-1}R_{T-1} + p(1+{}_{T-2}s_{T-1})(R_{T-1}+1) + \frac{p}{3}[(1-L_0) + (1+{}_{T-3}s_{T-2})(1-L_1) - 2(1+{}_{T-2}s_{T-1})]}{3}\right] \\ &\quad + \log\left(\frac{1}{R_{T-1}}\right) + \log\left[\frac{1}{p(1+{}_{T-2}s_{T-1})(R_{T-1}+1/3)}\right]. \end{aligned}$$

Para calcular el consumo y el ocio óptimos para el periodo $(T-2, T-1)$ procedemos de igual forma. Así, si el trabajador decide consumir al comienzo del periodo C_{T-2}^* y L_{T-2}^* , la riqueza financiera al final del periodo será:

$$M_{T-1} = [M_{T-2} + p(1-L_{T-2}^*) - C_{T-2}^*]R_{T-2}.$$

Por tanto, teniendo en cuenta esta riqueza, la utilidad que en términos de consumo y ocio le reportará al trabajador, vendrá dada a través de la función de utilidad indirecta:

$$V_{T-2}(M_{T-2}) = \max\{\log(C_{T-2}^*) + \log(L_{T-2}^*) + E_{T-2}[V_{T-1}(M_{T-1})]\},$$

donde sustituyendo el valor de la utilidad indirecta $V_{T-1}(M_{T-1})$ ya calculada previamente para ambos tipos de planes de pensiones, se obtendrán los consumos y ocio óptimos correspondientes a ese periodo, es decir, C_{T-2}^* y L_{T-2}^* . Procediendo de esta forma, podrá determinarse la función de utilidad indirecta para cualquier momento $t \in \{0, \dots, T\}$, definiendo el problema de optimización intertemporal para T periodos como una secuencia de problemas de optimización de dos periodos.

3. CASO PRÁCTICO

3.1 Tantos de interés inciertos y salarios conocidos

En este primer caso consideramos que la evolución de los tantos de interés técnicos de valoración del plan utilizados durante el horizonte temporal del análisis coinciden con los tantos de rendimientos de las inversiones del fondo de pensiones, y que dicha evolución es desconocida e incierta en el momento de la realización del contrato de pensión, siendo la de los salarios conocida e independiente de los tantos de interés.

Recogemos la evolución de los tantos de rendimiento a través de un proceso markoviano discreto por medio de la siguiente matriz de paso:

	r^B	r^M	r^A
r^B	0.6	0.3	0.1
r^M	0.5	0.4	0.1
r^A	0.1	0.6	0.3

siendo $r^B = 4\%$; $r^M = 5\%$; $r^A = 6\%$.

Utilizaremos los tantos medios de interés estimado para cada periodo en los cálculos siguientes, siendo éstos:

$$r_0 = 0.05$$

$$r_1 = r^B P_{MB} + r^M P_{MM} + r^A P_{MA} = 0.046$$

$$r_2 = r^B P_{MB}^2 + r^M P_{MM}^2 + r^A P_{MA}^2 = 0.0461$$

donde P_{MB} , P_{MM} y P_{MA} son las probabilidades de paso entre los estados, suponiendo que en el momento inicial nos encontramos en el estado $r^M = 5\%$.

Una vez establecida la ley que sigue la evolución de los rendimientos de las inversiones del fondo, trataremos de determinar el bienestar que en términos de consumo y de ocio reporta a cada partícipe-trabajador perteneciente al plan constituido por la empresa que lo promueve, tanto para un plan no contributivo de prestación definida como de aportaciones definidas.

A continuación se describen los valores óptimos del consumo, ocio, riqueza financiera y utilidad indirecta para un caso en el que se analizan tres periodos, es decir, $T = 3$.

Datos iniciales:

$$R_0^M = (1 + {}_0i_1) = (1 + {}_0r_1) = 1.055; R_1^M = (1 + {}_1r_2) = 1.046; R_2^M = (1 + {}_2r_3) = 1.0461.$$

$$s_0^j = p = 40 = \text{cte. para todo } t.$$

	APORTACIÓN DEFINIDA				PRESTACIÓN DEFINIDA			
	C_t^*	L_t^*	M_t	$V_t(M_t)$	C_t^*	L_t^*	M_t	$V_t(M_t)$
$t = 0$	7.442	0.144	45	4.582	7.012	0.175	45	4.704
$t = 1$	40.123	0.769	75.378	4.485	36.817	0.920	69.287	4.585
$t = 2$	45.773	0.867	45.216	3.106	38.518	0.492	37.310	3.179
$t = 3$	47.879	1	47.879	1.680	40.290	1	40.290	1.605

3.2 Tantos de crecimiento salarial y de rendimiento de las inversiones inciertos

En este apartado se considera que los tantos de rendimiento y los de crecimiento salarial, y en consecuencia, los salarios, son desconocidos e inciertos en el momento de la implantación del plan, a la vez que incorrelacionados. Para poder realizar un análisis comparativo, se supone que la evolución de ambos se recoge a través de procesos markovianos en tiempo finito y con un número concreto de estados. En este caso, para describir la misma se definen de forma independiente dos matrices que recogerán, respectivamente, las probabilidades de transición en el tiempo de los tantos anuales de crecimiento salarial y de los rendimientos de las inversiones del fondo de pensiones, siendo la evolución de los tantos de rendimiento, y en consecuencia la matriz de paso, la misma que para el caso anterior.

Recogemos ahora la evolución de los tantos de crecimiento salarial a través de un nuevo proceso markoviano discreto por medio de la siguiente matriz de paso:

	s^B	s^M	s^A
s^B	0.4	0.6	0
s^M	0	0.9	0.1
s^A	0	0	1

siendo $s^B = 1.5\%$; $s^M = 2\%$; $s^A = 3\%$.

Utilizaremos los tantos medios de crecimiento salarial estimado para cada periodo en los cálculos siguientes, siendo éstos:

$$s_0 = 0.015$$

$$s_1 = s^B P'_{BB} + s^M P'_{BM} + s^A P'_{BA} = 0.018$$

donde P'_{BB} , P'_{BM} y P'_{BA} son las probabilidades de paso entre los estados, suponiendo que en el momento inicial nos encontramos en el estado $s^B = 1.5\%$.

En este caso, los valores óptimos del consumo, ocio, riqueza financiera y utilidad indirecta para un caso en el que se analizan tres periodos, es decir, $T = 3$ son:

Datos iniciales:

$$R_0^M = (1 + {}_0i_1) = (1 + {}_0r_1) = 1.055; R_1^M = (1 + {}_1r_2) = 1.046; R_2^M = (1 + {}_2r_3) = 1.0461.$$

$$s_0^j = p = 40; a = (1 + {}_0s_1^M) = 1.015; b = (1 + {}_1s_2^M) = 1.018.$$

	APORTACIÓN DEFINIDA				PRESTACIÓN DEFINIDA			
	C_t^*	L_t^*	M_t	$V_t(M_t)$	C_t^*	L_t^*	M_t	$V_t(M_t)$
$t = 0$	7.257	0.140	45	5.834	7.266	0.181	45	4.538
$t = 1$	38.106	0.719	75.750	4.497	38.152	0.939	74.018	4.504
$t = 2$	39.869	0.742	51.308	3.175	39.920	0.501	40.106	2.923
$t = 3$	41.703	1	41.703	1.620	41.757	1	41.757	1.620

4. CONCLUSIONES

De los resultados obtenidos del caso práctico realizado para ambos tipos de planes de pensiones, cuando se considera la utilidad que reporta a cada trabajador el ocio y el consumo realizado en cada uno de los periodos del análisis, se deducen los siguientes comentarios.

- Cuanto mayor sea la riqueza financiera inicial, el tiempo dedicado al ocio por cada trabajador será mayor. En el plan de pensiones de aportación definida, el número de horas dedicadas al ocio va aumentando a medida que transcurre el tiempo, mientras que en el plan de prestación definida este número aumenta y disminuye alternativamente.
- Para una misma riqueza inicial, los resultados obtenidos para el consumo óptimo son muy semejantes en ambos tipos de planes. Sin embargo, la riqueza financiera y la utilidad que el consumo y el ocio reportan al trabajador en cada momento es superior para el plan de aportación definida, salvo en el último periodo en el que prácticamente coinciden.
- A medida que el salario devengado a favor de cada partícipe-trabajador del plan es mayor, aumenta su riqueza financiera y el consumo realizado en cada periodo, a la vez que disminuye el tiempo dedicado al ocio para ambos tipos de planes.
- Tomando los mismos datos iniciales, para el plan de aportación definida observamos que cuando consideramos tantos de interés inciertos y salarios conocidos, tanto el consumo como el ocio óptimos en cada periodo tienen un valor superior al que alcanzan en el caso de tantos de crecimiento salarial y de rendimiento de las inversiones inciertos, ocurriendo lo contrario para los planes de prestación definida.

En cuanto a la riqueza y a la utilidad al final de los tres periodos, en los planes de aportación definida ambas son superiores en el primer caso, es decir, cuando los tantos de interés son inciertos y el salario conocido, mientras que en los planes de

prestación definida, alcanzan valores superiores en el caso en el que los tantos de crecimiento salarial y de rendimiento de las inversiones son inciertos.

6. BIBLIOGRAFÍA

- [1] ALEXANDER, G.J. - SHARPE, W.F.: *Fundamentals of Investments*. Prentice-Hall. Nueva Jersey, 1989.
- [2] BETZUEN ZALBIDEGOITIA, A. - BLANCO IBARRA, F.: *Planes y Fondos de Pensiones, su Cálculo y Valoración*. Ediciones Deusto. Bilbao, 1989.
- [3] BODIE, Z. - MARCUS, A. - MERTON, R.: “Defined Benefit versus Defined Contribution Pension Plans”: *Pension in the USA Economy*. Bodie, Z. - Shoven, J. - Wise, D. NBER, 139-160. University of Chicago Press. Chicago, 1988.
- [4] BODIE, Z. - MERTON, R.C. - SAMUELSON, W.F.: “Labor supply flexibility and portfolio choice in a life cycle model”. *Journal of Economic Dynamics and Control* 16, pp. 427-449, 1992.
- [5] DEATON, A.: *El Consumo*. Alianza Editorial. Madrid, 1995.
- [6] DEATON, A. - MUELLBAUER, J.: *Economics and Consumer Behavior*. Cambridge University Press. Nueva York, 1994.
- [7] HUANG, C.J. - CROOKE, P.S.: *Mathematics and Mathematica for Economists*. Blackwell Publishers. Massachusetts, 1997.
- [8] MARTIN, J.D. - COX, S.H. - MACMINN, R.D.: *The Theory of Finance: Evidence and Applications*. The Dryden Press. Nueva York, 1988.
- [9] MERTON, R.C.: *Continuous-Time Finance*. Basil Blackwell. Massachusetts, 1990.
- [10] PANJER, H.H. - WILLMOT, G.E.: *Insurance Risk Models*. Society of Actuaries. Schaumburg, 1992.
- [11] PELÁEZ FERMOSE, F.J.: “Planes de pensiones del sistema de empleo: prestación definida frente a aportación definida”. X Reunión ASEPELT España. Albacete, 1996.
- [12] VARIAN, H.R.: *Análisis Microeconómico*. Antoni Bosch. Barcelona, 1992.
- [13] VARIAN, H.R.: *Economic and Financial Modeling with Mathematica*. Springer-Verlag. Nueva York, 1993.
- [14] VILLALÓN, J.G.^a: *Matemática de las Decisiones Financieras y sus Aplicaciones. Tomo I: Decisiones de Inversión*. Centro de Estudios Ramón Areces. Madrid, 1992.

- [15] WINKLEVOSS, H.E.: *Pension Mathematics with Numerical Illustrations*. Richard D. Irwin. Illinois, 1977.
- [16] WOLFRAM, S.: *Mathematica: A System for Doing Mathematics by Computer*. Advanced Book Program. California, 1991.