ANALISIS DE UN MODELO DE COLAS CON DISCIPLINA DE PRIORIDAD BASADO EN LA TEORIA DE LOS CONJUNTOS FUZZY

PARDO SANTIAGO, María José
CASTRO IÑIGO, Belén

Departamento Economía Aplicada I
Universidad del País Vasco

Abstract

El objetivo del trabajo es proporcionar una representación más realista de los fenómenos de espera con disciplina de prioridad mediante la incorporación de la Teoría de los Conjuntos Borrosos.
El análisis desarrolla un modelo clásico en el que la disciplina en la cola se basa en un sistema de prioridad (relativa o absoluta), en el cuál las llegadas y los servicios, de un único servidor, siguen un proceso de Poisson con parámetro fuzzy.
Los resultados obtenidos son utilizados para discutir la selección óptima de una disciplina de espera. El modelo se completa con un ejemplo.

1. Introducción.

Los Modelos de Líneas de Espera básicos implican una cola ordenada en la cual las unidades se sirven según el orden de llegada. Esta “disciplina de espera” se encuentra frecuentemente en los modelos de colas, sin embargo, por razones de eficacia o de jerarquía, se definen categorías privilegiadas de unidades que poseen una cierta prioridad en las reglas de funcionamiento del sistema, por ejemplo las transmisiones de mensajes en un sistema de telecomunicación. Muchos sistemas reales de colas se ajustan a estos modelos de disciplina de prioridad mucho más exactamente que a los otros modelos de que se dispone. Los trabajos urgentes se realizan antes que los otros, y a los clientes importantes se les puede dar preferencia sobre los demás.

Frente al modelo clásico que presupone un proceso de entrada de Poisson y tiempos de servicio acordes a una distribución exponencial, sucede en muchas situaciones prácticas que las tasa de llegadas y la tasa de servicios son en realidad más posibilistas que probabilistas, los parámetros λ y μ en el modelo M/M/1 son frecuentemente fuzzy y no pueden ser expresados en términos exactos. Así, expresiones lingüísticas para estos parámetros tales como “la tasa media de llegadas es aproximadamente 10” o “los tiempos de servicio son aproximadamente 20” son más realistas.

En el presente trabajo se plantea un modelo de colas con disciplina de prioridad y un único servidor en el que se han modificado sus supuestos para incluir la naturaleza borrosa del mismo, de forma que los parámetros que describen las distribuciones de las llegadas y de los servicios, que siguen un proceso de Poisson, pasan a ser datos fuzzy. El objetivo del estudio es discutir la selección óptima de una disciplina de espera para un modelo de colas utilizando para su desarrollo la Teoría de los Conjuntos Borrosos.

Para el tratamiento del modelo con datos inciertos seguimos el trabajo llevado a cabo por *Li* y *Lee* (1989) en el que se analizan los casos más simples de colas fuzzy a través del principio de extensión de *Zadeh*, junto con el sistema de colas fuzzy desarrollado por *Jo*, *Tsujimura*, *Gen* y *Yamazaki* (1993) para modelos de colas fuzzy M/M/1 en los que las tasas de llegadas y de servicio son variables fuzzy.

Para discutir la selección óptima de una disciplina de espera cuando los datos a comparar resultan ser inciertos, seguimos el estudio realizado por *Jiménez* (1994), en el cual se proporcionan tres métodos de ordenación de números borrosos: el método de *Yuan*, el de *Nakamura* y el desarrollado por él, basado en la comparación de los intervalos esperados, que permiten la clasificación de los resultados inciertos a fin de poder elegir la solución que optimice el modelo de colas fuzzy con disciplina de prioridad.

El modelo se completa con un ejemplo.

2. Modelo clásico de colas con disciplina de prioridad.

2.1. Descripción del modelo.

El modelo de línea de espera con disciplina de prioridad supone que se tienen *N* clases de prioridad (la clase 1 tiene la prioridad más alta y la clase *N* la más baja) y que las unidades se seleccionan para iniciar su servicio en el orden de sus clases de prioridad pero, dentro de cada clase de prioridad, con base en que el que primero llega se sirve primero. Para cada clase de prioridad se supone un proceso de llegada de Poisson, con tasa media que puede diferir entre las clases de prioridad. Los tiempos de servicio de un único servidor son exponenciales, siendo el mismo para todas las clases de prioridad. También se supone que la capacidad del sistema es ilimitada y con una fuente de entrada ilimitada.

Los sistemas de colas con disciplina de prioridad se dividen en dos tipos:

1. Caso de *prioridades no aseguradas* o *relativas*, en donde una unidad que está recibiendo el servicio no puede ser desplazado si entra al sistema de colas una unidad de prioridad mayor, de forma que una vez que el servidor ha empezado a dar servicio a una unidad aquel debe completarse sin interrupción.
2. Caso de *prioridades aseguradas* o *absolutas*, por lo que una unidad de prioridad inferior que está recibiendo el servicio es desplazada, regresando al centro de espera, siempre que entra al

sistema una unidad de prioridad superior. Se ha encontrado que esta característica de desplazar del servicio a la unidad de prioridad inferior, en relación con el sistema de prioridades, cambia el tiempo total de permanencia en el sistema para las distintas clases de prioridades. Por otro lado, debido a la propiedad de carencia de memoria de la distribución exponencial, todas las medidas de efectividad del sistema no se ven afectadas por el hecho de si el servicio para el cliente desplazado puede reanudarse en el punto de interrupción, o bien debe iniciarse nuevamente desde el principio.

Al variar la disciplina llamada "ordenada" por una de las dos anteriores no se modifica el funcionamiento global del sistema, sino solamente las leyes de probabilidad de la duración de espera y de la longitud de unidades en cola *por clases de prioridad*, de forma que las probabilidades de que el sistema esté desocupado, P_0 y de que haya *n* unidades en el sistema, P_n tendrán la misma formulación que en el caso de no existir prioridades, así como las medidas de efectividad *tiempo medio de permanencia en cola* (y en el *sistema*), y *longitud media de unidades en cola* (y en el *sistema*).

2.2. Formulación del modelo.

$\lambda_i =$ tasa media de llegadas para la prioridad de clase *i*, para $i = 1,2,\ldots,N$,

$\lambda = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i$, tasa media de llegadas,

$\mu =$ tasa media de servicio,

$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i < \mu$, se van a analizar aquellos sistemas de colas que alcanzan el estado estacionario,

$\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$, factor de utilización del servicio,

$P_0 = 1 - \rho$, probabilidad de que el sistema esté desocupado,

$P_n = (1-\rho)\rho^n$, probabilidad de que se encuentren *n* unidades en el sistema,

$W_q = \dfrac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$, tiempo medio de permanencia en cola,

$W = W_q + \dfrac{1}{\mu} = \dfrac{1}{\mu - \lambda}$, tiempo medio de permanencia en el sistema,

$L_q = \dfrac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$, longitud media de unidades en cola,

$L = \dfrac{\lambda}{\mu - \lambda}$, longitud media de unidades en el sistema.

La formulación de las medidas tiempo medio de permanencia en cola y en el sistema, y longitud media de unidades en cola y en el sistema, para una unidad de prioridad de clase k variará según el tipo de prioridad del modelo, quedando:

1. Modelo con *prioridades no aseguradas* o *relativas:*

   $W_{q,k}^{1} = \dfrac{1}{A \cdot B_{k-1} \cdot B_k}$, tiempo medio de permanencia en cola para una unidad de prioridad

   de clase k, donde: k=1,2,…,N, $A = \dfrac{\mu^2}{\lambda}$; $B_0 = 1$; $B_k = 1 - \dfrac{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i}{\mu}$,

   $W_k^1 = W_{q,k}^1 + \dfrac{1}{\mu}$, tiempo medio de permanencia en el sistema para una unidad de prioridad

   de clase k,

   $L_{q,k}^1 = \lambda_k W_{q,k}^1$, longitud media en la cola de unidades de prioridad de clase k,

   $L_k^1 = \lambda_k W_k^1$, longitud media en el sistema de unidades de prioridad de clase k.

2. Modelo con *prioridades aseguradas* o *absolutas:*

   $W_{q,k}^{2} = \dfrac{1/\mu}{B_{k-1} \cdot B_k} - \dfrac{1}{\mu}$, tiempo medio de permanencia en cola para una unidad de prioridad

   de clase k, k=1,2,…,N,

   $W_k^2 = W_{q,k}^2 + \dfrac{1}{\mu} = \dfrac{1/\mu}{B_{k-1} \cdot B_k}$, tiempo medio de permanencia en el sistema para una unidad

   de prioridad de clase k,

   $L_{q,k}^2 = \lambda_k W_{q,k}^2$, longitud media en la cola de unidades de prioridad de clase k,

   $L_k^2 = \lambda_k W_k^2$, longitud media en el sistema de unidades de prioridad de clase k.

2.3. Criterio en la selección óptima de una disciplina de espera.

La selección óptima de una disciplina de espera sobre las hipótesis de que el coste unitario por inactividad de cada unidad es idéntico para las unidades encuadradas en una misma categoría, pero distinto entre categorías, y que todas las unidades tienen la misma distribución de duración del servicio, plantea dos problemas:

1. Asignar los índices de prioridad a las distintas categorías. Dado que el tiempo medio de espera global en el sistema, W, se puede escribir de la forma:

$$W = \alpha_1 W_1 + \alpha_2 W_2 + \ldots + \alpha_N W_N$$

con $\alpha_i = \lambda_i / \lambda$ (porcentaje de unidades de categoría *i* que por término medio llegan al sistema en la unidad de tiempo), siendo $W_i < W_k$ cuando $i < k$; y como el coste total de inactividad es:

$$C(W) = C_1 \alpha_1 W_1 + C_2 \alpha_2 W_2 + \ldots + C_N \alpha_N W_N$$

con C_i = coste unitario por inactividad para las unidades de la categoría *i*, entonces se han de clasificar las categorías de prioridad más urgente a menos en el orden de los productos: $\alpha_1 C_1 > \alpha_2 C_2 > \ldots > \alpha_N C_N$.

2. Decidir si el modelo de colas debe tener un sistema de prioridad. Para decidir si la prioridad debe ser absoluta o relativa, e incluso si debe haber prioridad, es preciso comparar el coste de espera en los tres sistemas: sin prioridad, con prioridad relativa y con prioridad absoluta. El coste total de espera unitario por término medio será:

   a) Caso de que no exista prioridad:

   $$C(W) = \left(C_1 \alpha_1 + C_2 \alpha_2 + \ldots + C_N \alpha_N\right) W$$

   b) Caso de que exista prioridad relativa o absoluta:

   $$C\left(W^1\right) = C_1 \alpha_1 W_1^1 + C_2 \alpha_2 W_2^1 + \ldots + C_N \alpha_N W_N^1 \text{ (prioridad relativa)}$$

   $$C\left(W^2\right) = C_1 \alpha_1 W_1^2 + C_2 \alpha_2 W_2^2 + \ldots + C_N \alpha_N W_N^2 \text{ (prioridad absoluta)}$$

   y se elige como disciplina de espera aquella cuyo coste total promedio unitario de inactividad sea menor.

3. Modelo fuzzy de colas con disciplina de prioridad.

3.1. Descripción del modelo fuzzy.

Los modelos fuzzy que se presentan mantienen las características del clásico, con dos diferencias:

1. Para cada clase de prioridad se supone un proceso de entrada de Poisson, con tasa media $\tilde{\lambda}_i$ que puede diferir entre las clases de prioridad, que se conoce de forma incierta y puede aproximarse mediante un número borroso triangular $\left[\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \lambda_{i3}\right]$.

2. El único servidor que presta servicio en las instalaciones lo hace según tiempos de servicio exponenciales cuya tasa $\tilde{\mu}$ también se conoce de forma incierta y puede aproximarse mediante un número borroso triangular $[\mu_1, \mu_2, \mu_3]$, y se produce sin iteración con las llegadas.

Los modelos de colas se ajustan ahora a uno fuzzy que puede expresarse en una notación similar a la de *Kendall* como $\tilde{M} / \tilde{M} / 1$. *Li-Lee* (1989) consideran que cada modelo de colas fuzzy puede ser considerado como una percepción de un sistema de colas usual al que se le puede denominar el original del modelo de colas fuzzy. El conjunto Q de todos los posibles originales del modelo fuzzy $\tilde{M} / \tilde{M} / 1$ se puede escribir como: $Q = \left\{ (M / M / 1) / \lambda \in \text{soporte}\, \tilde{\lambda}, \mu \in \text{soporte}\, \tilde{\mu} \right\}$. Por ello, proponen obtener las distribuciones de posibilidad de las medidas de efectividad de los modelos de colas fuzzy aplicando el principio de extensión de *Zadeh* desde las soluciones de sus modelos originales con los parámetros conocidos de forma precisa, de manera que la función de pertenencia de la cola fuzzy es:

$$\mu_{(\tilde{M}/\tilde{M}/1)}(M / M / 1) = \min\left\{ \mu_{\tilde{\lambda}}(\lambda), \mu_{\tilde{\mu}}(\mu) \right\}$$

donde $\mu_{\tilde{\lambda}}(\lambda)$ y $\mu_{\tilde{\mu}}(\mu)$ representan las funciones de pertenencia de los números borrosos $\tilde{\lambda}$ y $\tilde{\mu}$ respectivamente. En general, todas las funciones de parámetros $\tilde{\lambda}$ y $\tilde{\mu}$ pueden ser definidas por:

$$\mu_{f(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu})}(z) = \sup_{x, y \in R} \left\{ \mu_{\tilde{\lambda}}(x) \wedge \mu_{\tilde{\mu}}(y) / z = f(x, y) \right\}$$

3.2. Formulación del modelo fuzzy.

$\tilde{\lambda} = \sum_{i=1}^{N} \tilde{\lambda}_i$, tasa media de llegadas, con $\sum_{i=1}^{N} \tilde{\lambda}_i < \tilde{\mu}$, se va a analizar un sistema de colas de modo que la prioridad de clase *i* puede llegar a alcanzar una condición de estado estacionario,

$\tilde{\rho} = \dfrac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\mu}}$, factor de utilización del servicio,

$\tilde{P}_0 = 1 - \tilde{\rho}$, probabilidad de que el sistema esté desocupado,

$\tilde{P}_n = (1 - \tilde{\rho})\tilde{\rho}^n$, probabilidad de que se encuentren *n* unidades en el sistema,

$\tilde{W}_q = \dfrac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\mu}(\tilde{\mu} - \tilde{\lambda})}$, tiempo medio de permanencia en cola,

$\widetilde{W} = \dfrac{1}{\widetilde{\mu} - \widetilde{\lambda}}$, tiempo medio de permanencia en el sistema,

$\widetilde{L}_q = \dfrac{\widetilde{\lambda}^2}{\widetilde{\mu}\left(\widetilde{\mu} - \widetilde{\lambda}\right)}$, longitud media de unidades en cola,

$\widetilde{L} = \dfrac{\widetilde{\lambda}}{\widetilde{\mu} - \widetilde{\lambda}}$, longitud media de unidades en el sistema.

Las medidas tiempo medio de permanencia en cola y en el sistema, y longitud media de unidades en cola y en el sistema, para una unidad de prioridad de clase k son:

1. Modelo con *prioridades no aseguradas* o *relativas:*

   $\widetilde{W}^1_{q,k} = \dfrac{1}{\widetilde{A} \cdot \widetilde{B}_{k-1} \cdot \widetilde{B}_k}$, tiempo medio de permanencia en cola para una unidad de prioridad

   de clase k, donde: k=1,2,…,N, $\widetilde{A} = \dfrac{\widetilde{\mu}^2}{\widetilde{\lambda}}$; $B_0 = 1$; $\widetilde{B}_k = 1 - \dfrac{\sum_{i=1}^{k} \widetilde{\lambda}_i}{\widetilde{\mu}}$,

   $\widetilde{W}^1_k = \widetilde{W}^1_{q,k} + \dfrac{1}{\widetilde{\mu}}$, tiempo medio de permanencia en el sistema para una unidad de prioridad

   de clase k,

   $\widetilde{L}^1_{q,k} = \widetilde{\lambda}_k \widetilde{W}^1_{q,k}$, longitud media en la cola de unidades de prioridad de clase k,

   $\widetilde{L}^1_k = \widetilde{\lambda}_k \widetilde{W}^1_k$, longitud media en el sistema de unidades de prioridad de clase k.

2. Modelo con *prioridades aseguradas* o *absolutas:*

   $\widetilde{W}^2_{q,k} = \dfrac{1/\widetilde{\mu}}{\widetilde{B}_{k-1} \cdot \widetilde{B}_k} - \dfrac{1}{\widetilde{\mu}}$, tiempo medio de permanencia en cola para una unidad de prioridad

   de clase k, k=1,2,…,N,

   $\widetilde{W}^2_k = \dfrac{1/\widetilde{\mu}}{\widetilde{B}_{k-1} \cdot \widetilde{B}_k}$, tiempo medio de permanencia en el sistema para una unidad de prioridad

   de clase k,

   $\widetilde{L}^2_{q,k} = \widetilde{\lambda}_k \widetilde{W}^2_{q,k}$, longitud media en la cola de unidades de prioridad de clase k,

   $\widetilde{L}^2_k = \widetilde{\lambda}_k \widetilde{W}^2_k$, longitud media en el sistema de unidades de prioridad de clase k.

Aplicando el principio de extensión de *Zadeh*, se pueden obtener los correspondientes resultados para el caso fuzzy con parámetros $\widetilde{\lambda}$ y $\widetilde{\mu}$, y que se definen por sus funciones de pertenencia para las soluciones del estado estacionario. Así, por ejemplo, la probabilidad de que haya cero clientes en el sistema, $\tilde{P}_0$ tiene por función de pertenencia:

$$\mu_{\tilde{P}_0}\left(P_0\right) = \sup\left\{\mu_{\tilde{\lambda}}(\lambda) \wedge \mu_{\tilde{\mu}}(\mu) \,/\, P_0 = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\right\}$$

y para el tiempo medio de permanencia en cola, W_q se tiene:

$$\mu_{\tilde{W}_q}\left(W_q\right) = \sup\left\{\mu_{\tilde{\lambda}}(\lambda) \wedge \mu_{\tilde{\mu}}(\mu) \,/\, W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}\right\}$$

Dada la complejidad para determinar dichas funciones de pertenencia, se ha comprobado que todas las expresiones que determinan el modelo de colas con disciplina de prioridad, excepto $P_n \;(n \neq 0)$, cumplen ser crecientes o decrecientes al aumentar o al disminuir los valores de λ y μ, de forma que:

- las funciones $\rho, W_q, W, L_q, L, W^1_{q,k}, W^1_k, L^1_{q,k}, L^1_k\; W^2_{q,k}, W^2_k, L^2_{q,k}, L^2_k$ son crecientes cuando λ aumenta, y son decrecientes cuando μ aumenta,
- la función P_0 decrece cuando λ aumenta y crece cuando μ aumenta,

de manera que todas ellas se pueden representar mediante el uso de α-cortes. Por ejemplo sean $\lambda_\alpha = \left[\underline{\lambda}_\alpha, \overline{\lambda}_\alpha\right]$ y $\mu_\alpha = \left[\underline{\mu}_\alpha, \overline{\mu}_\alpha\right]$ los α-cortes de $\tilde{\lambda}$ y $\tilde{\mu}$ respectivamente, entonces se tiene:

$$P_{0\alpha} = \left[\left(1 - \frac{\overline{\lambda}_\alpha}{\underline{\mu}_\alpha}\right), \left(1 - \frac{\underline{\lambda}_\alpha}{\overline{\mu}_\alpha}\right)\right],$$

y

$$W_{q\alpha} = \left[\frac{\underline{\lambda}_\alpha}{\overline{\mu}_\alpha\left(\overline{\mu}_\alpha - \underline{\lambda}_\alpha\right)}, \frac{\overline{\lambda}_\alpha}{\underline{\mu}_\alpha\left(\underline{\mu}_\alpha - \overline{\lambda}_\alpha\right)}\right],$$

con $\alpha \in [0,1]$, de esta forma se obtendrán las restantes expresiones que determinan el modelo con datos borrosos.

3.3. Criterio fuzzy en la selección óptima de una disciplina de espera.

En la selección óptima de la disciplina de espera en el modelo con datos inciertos, el coste unitario por inactividad para las unidades de una misma categoría *i* puede ser obtenido como un dato crisp (no incierto), C_i

o como un dato fuzzy, $\tilde{C}_i$ el cual vendrá determinado mediante una distribución de posibilidad $\pi_{\tilde{C}_i}(C_i) = \mu_{\tilde{C}_i}(C_i)$.

El modelo obtenido con datos fuzzy, en el que se han utilizado números borrosos y distribuciones de posibilidad para delimitar los posibles valores que pueden tomar las variables que intervienen, proporciona unos resultados de las medidas de efectividad que a su vez son números borrosos, lo que conlleva a que la selección óptima de la disciplina de espera se realice entre alternativas que tienen asignado un número borroso, con la necesidad de elegir entre resultados inciertos. Para determinar un criterio fuzzy en la selección de un sistema de prioridades en el modelo en estudio, que proporcione una relación borrosa de preferencia, se utiliza el método de *Nakamura*. Se elige este método frente al de *Yuan* o el propuesto por *Jiménez* porque "este método parece conveniente utilizarlo cuando las circunstancias que determinen el resultado de dos acciones, presupongan que si para una se obtiene los resultados más favorables (desfavorables) también se obtengan los más favorables (desfavorables) para la otra" (Jiménez), lo que es cierto en la optimización del modelo de colas fuzzy.

Nakamura define una relación borrosa de preferencia $\mu_N(\tilde{A},\tilde{B})$, entre pares de números borrosos $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$, por medio de la siguiente función de pertenencia:

$$\mu_N(\tilde{A},\tilde{B}) = \begin{cases} \dfrac{(1-\beta)T_1 + \beta T_3}{T_\beta} & , \quad T_\beta \neq 0 \\ 1/2 & , \quad T_\beta = 0 \end{cases} \qquad \beta \in [0,1]$$

donde

$$T_\beta = (1-\beta)(T_1 + T_2) + \beta(T_3 + T_4)$$

$$T_1 = \int_{\{\alpha/\underline{A}_\alpha > \underline{B}_\alpha\}} \left[\underline{A}_\alpha - \underline{B}_\alpha\right] d\alpha$$

$$T_2 = \int_{\{\alpha/\underline{A}_\alpha < \underline{B}_\alpha\}} \left[\underline{B}_\alpha - \underline{A}_\alpha\right] d\alpha$$

$$T_3 = \int_{\{\alpha/\overline{A}_\alpha > \overline{B}_\alpha\}} \left[\overline{A}_\alpha - \overline{B}_\alpha\right] d\alpha$$

$$T_4 = \int_{\{\alpha/\overline{A}_\alpha < \overline{B}_\alpha\}} \left[\overline{B}_\alpha - \overline{A}_\alpha\right] d\alpha$$

El parámetro β representa la actitud del agente decisor ante el riesgo, de manera que si tiene aversión al riesgo concederá un peso mayor a las situaciones más desfavorables, en cuyo caso se asignará a β un valor menor que 0,5 y más próximo a cero cuanto más riesgo al miedo se tenga. Si se tiene aprecio por el riesgo β deberá ser mayor que 0,5. La neutralidad ante el riesgo se corresponde con β = 0,5.

Si el índice $\mu_N\left(\tilde{A},\tilde{B}\right)$=1/2 significará que las alternativas $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ son indiferentes, si $\mu_N\left(\tilde{A},\tilde{B}\right)$>1/2 entonces $\tilde{A}$ es preferida a $\tilde{B}$ y si $\mu_N\left(\tilde{A},\tilde{B}\right)$<1/2 entonces $\tilde{B}$ es preferida a $\tilde{A}$.

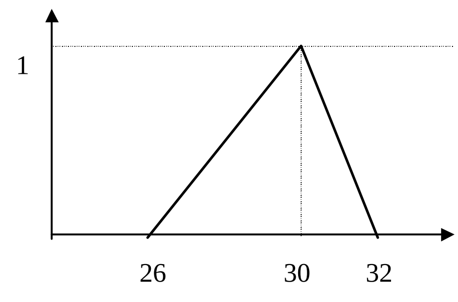
Establecida la relación borrosa de preferencia de *Nakamura*, se procede a la clasificación de las *n* alternativas $\left\{\tilde{A}_1,\tilde{A}_2,\ldots,\tilde{A}_n\right\}$ de la siguiente manera:

1. Se construye la matriz $\left[\mu_N\left(\tilde{A}_i,\tilde{A}_j\right)\right]$ con $i,j=1,2,\ldots,n$.
2. La fila de la matriz compuesta por elementos todos mayores o iguales que 0,5 representa a la alternativa que domina a las demás y será la mejor elección (si hay dos serán indiferentes). A continuación se elimina la fila y columna de dicha (o dichas) mejor elección, y se razona igual con la matriz correspondiente al resto de alternativas, aquella en la que el mínimo valor de su fila sea 0,5 será la segunda elección, etc… .

Clasificados los resultados inciertos del modelo de colas fuzzy con disciplina de prioridad se tiene completo el criterio fuzzy para la selección óptima de una disciplina de prioridad.

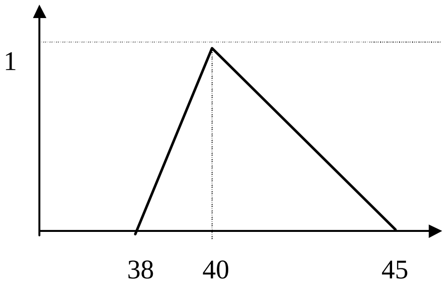
4. Ejemplo de un modelo $\tilde{M}/\tilde{M}/1$ con disciplina de prioridad.

Se considera un modelo de colas al que acceden dos categorías de unidades, el 15% de las unidades que llegan al sistema son de una de las categorías (que se denotará A) y, por tanto, el restante 85% son de la otra (que se denotará B). La tasa media de llegadas al sistema se conoce de forma aproximada y viene dada por el número borroso triangular $\tilde{\lambda}=[26,30,32]$:



$$\mu_{\tilde{\lambda}}(\lambda)=\begin{cases} 0 & si \quad \lambda\le 26 \\ \dfrac{\lambda-26}{4} & si \quad 26\le\lambda\le 30 \\ \dfrac{32-\lambda}{2} & si \quad 30\le\lambda\le 32 \\ 0 & si \quad \lambda\ge 32 \end{cases}$$

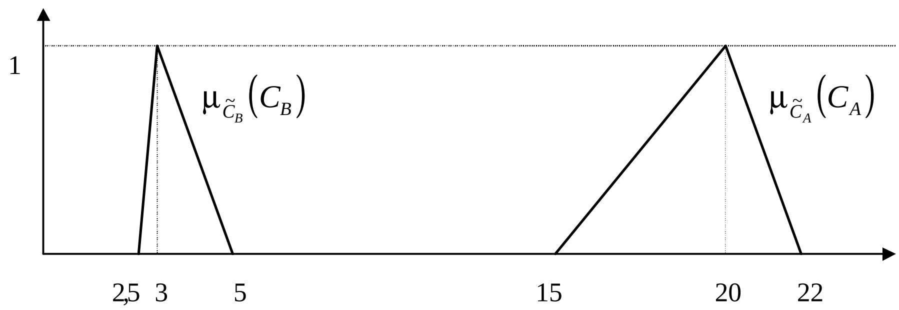
La tasa de servicio de un único servidor es la misma para las dos categorías de unidades, y se distribuye de acuerdo al número borroso triangular $\tilde{\mu}=[38,40,45]$:



$$\mu_{\tilde{\mu}}(\mu)=\begin{cases}0 & si \quad \mu\le 38\\ \dfrac{\mu-38}{2} & si \quad 38\le\mu\le 40\\ \dfrac{45-\mu}{5} & si \quad 40\le\mu\le 45\\ 0 & si \quad \mu\ge 45\end{cases}$$

La distribución de posibilidad del coste unitario por inactividad para las unidades de una misma categoría, $\pi_{\tilde{C}_i}(C_i)=\mu_{\tilde{C}_i}(C_i)$ es igual a un número borroso triangular. Así, $\tilde{C}_A=[15{,}20{,}22]$ y $\tilde{C}_B=[2.5{,}3{,}5]$:

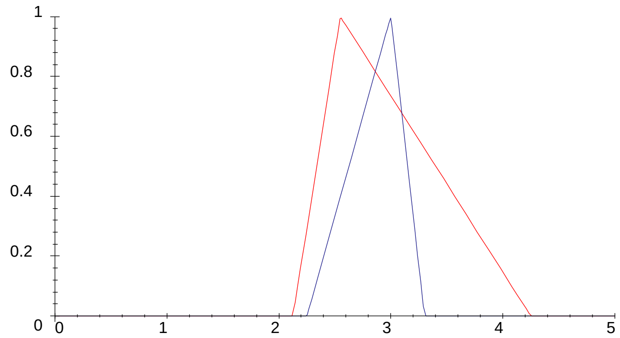
$$\mu_{\tilde{C}_A}(C_A)=\begin{cases}0 & si \quad C_A\le 15\\ \dfrac{C_A-15}{5} & si \quad 15\le C_A\le 20\\ \dfrac{22-C_A}{2} & si \quad 20\le C_A\le 22\\ 0 & si \quad C_A\ge 22\end{cases}\quad ,\mu_{\tilde{C}_B}(C_B)=\begin{cases}0 & si \quad C_B\le 2.5\\ \dfrac{C_B-2.5}{0.5} & si \quad 2.5\le C_B\le 3\\ \dfrac{5-C_B}{2} & si \quad 3\le C_B\le 5\\ 0 & si \quad C_B\ge 5\end{cases}$$



Se quiere optimizar el modelo de colas sabiendo que el agente decisor no quiere arriesgarse, siendo entonces β =0,25.

En primer lugar, hay dos categorías de unidades y no tienen asignado índice de prioridad, por lo que se tiene que determinar a cual de las dos se le asigna la prioridad más alta -más urgencia- y a cual la más baja, sabiendo que la espera será menor para aquellas unidades que tengan prioridad superior. La asignación que produce un resultado óptimo es aquella que atribuye prioridad más alta a la categoría cuyo valor $\alpha_i C_i$, (i=A,B) sea mayor, ya que de esta forma el costo total, $C(W)$ será menor. Sean α_A = 0,15 y α_B = 0,85:

$$\alpha_A \tilde{C}_A = 0'15[15,20,22] = [2'25,3,3'3]$$
$$\alpha_B \tilde{C}_B = 0'85[2'5,3,5] = [2'125,2'55,4'25]$$



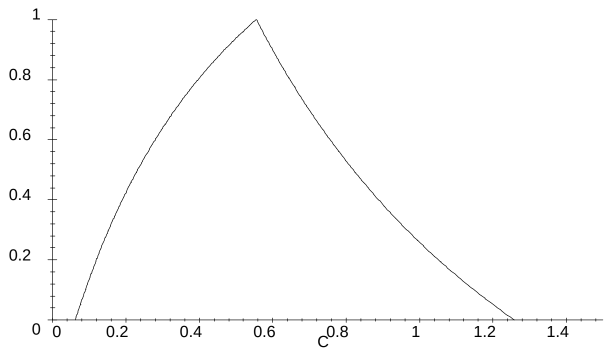
Funciones de pertenencia de $\alpha_A \tilde{C}_A$ (en azul) y $\alpha_B \tilde{C}_B$ (en rojo)

El resultado así obtenido proporciona dos números borrosos solapados, por lo que se aplica el método de *Nakamura* para establecer entre ambos una relación borrosa de preferencia. El índice de *Nakamura* tiene el valor: $\mu_N\left(\alpha_A \tilde{C}_A, \alpha_B \tilde{C}_B\right)$ = 0,7436 > 0,5, por lo que A es preferido a B y se asigna prioridad mayor a la categoría A y prioridad inferior a la categoría B.

Para establecer el sistema de prioridad del modelo de colas fuzzy se necesita comparar el coste total promedio unitario de inactividad en los tres casos: sin disciplina de prioridad, con prioridad relativa y con prioridad absoluta.

a) Coste total promedio unitario de inactividad cuando no se establece disciplina de prioridad:

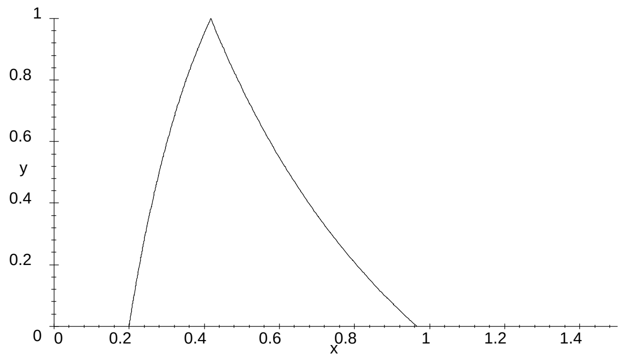
$$\tilde{C}(\tilde{W}) = \left(\alpha_A \tilde{C}_A + \alpha_B \tilde{C}_B\right)\tilde{W} \quad \text{con} \quad \tilde{W} = \frac{1}{\tilde{\mu} - \tilde{\lambda}}$$



Función de pertenencia de $\tilde{C}(\tilde{W})$

b) Coste total promedio unitario de inactividad con disciplina de prioridad relativa:

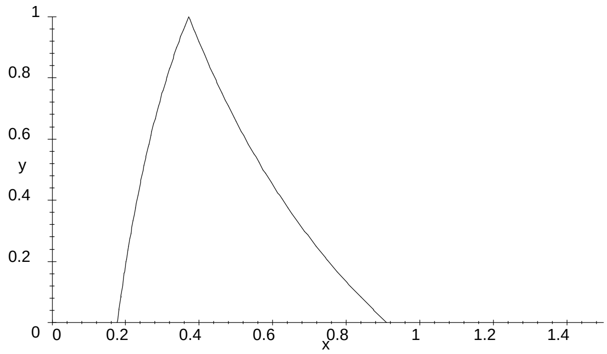
$$\tilde{C}\left(\tilde{W}^1\right) = \alpha_A \tilde{C}_A \tilde{W}_A^1 + \alpha_B \tilde{C}_B \tilde{W}_B^1 \quad \text{con} \quad \tilde{W}_k^1 = \tilde{W}_{q,k}^1 + \frac{1}{\tilde{\mu}}; \quad k = A, B$$



Función de pertenencia de $\tilde{C}\left(\tilde{W}^1\right)$

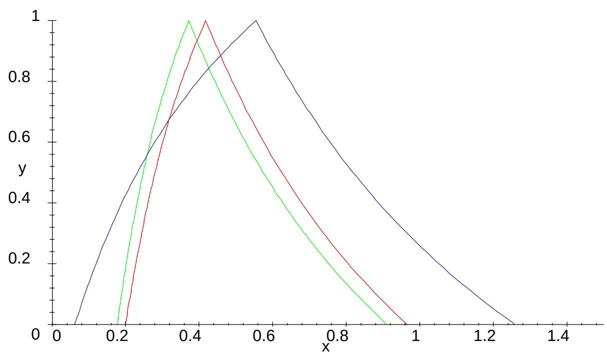
c) Coste total promedio unitario de inactividad con disciplina de prioridad absoluta:

$$\tilde{C}\left(\tilde{W}^2\right) = \alpha_A \tilde{C}_A \tilde{W}_A^2 + \alpha_B \tilde{C}_B \tilde{W}_B^2 \quad \text{con} \quad \tilde{W}_k^2 = \tilde{W}_{q,k}^2 + \frac{1}{\tilde{\mu}}; \quad k = A, B$$



Función de pertenencia de $\tilde{C}\left(\tilde{W}^2\right)$

Para poder realizar la comparación se dibujan los tres resultados obtenidos $\tilde{C}\left(\tilde{W}\right)$, $\tilde{C}\left(\tilde{W}^1\right)$ y $\tilde{C}\left(\tilde{W}^2\right)$:



Funciones de pertenencia de $\tilde{C}(\tilde{W})$ (en azul), $\tilde{C}(\tilde{W}^1)$ (en rojo) y $\tilde{C}(\tilde{W}^2)$ (en verde)

Se observa que el coste total promedio unitario de inactividad en los tres casos estudiados dan de resultado números borrosos solapados. Para decidir cual de ellos representa el valor óptimo se clasifican en un orden siguiendo el método expuesto anteriormente:

1. Se establece la relación borrosa de preferencia de *Nakamura* mediante el índice $\mu_N(\tilde{A},\tilde{B})$.

   Se obtienen los valores:

   $\mu_N(\tilde{C}(\tilde{W}),\tilde{C}(\tilde{W}^1)) =$ 0,6224; $\mu_N(\tilde{C}(\tilde{W}),\tilde{C}(\tilde{W}^2)) =$ 0,7707; $\mu_N(\tilde{C}(\tilde{W}^1),\tilde{C}(\tilde{W}^2)) =$ 1.
2. Se construye la matriz de relaciones borrosas:

μ_N	$\tilde{C}(\tilde{W})$	$\tilde{C}(\tilde{W}^1)$	$\tilde{C}(\tilde{W}^2)$
$\tilde{C}(\tilde{W})$	0,5	0,6224	0,7707
$\tilde{C}(\tilde{W}^1)$	0,3775	0,5	1
$\tilde{C}(\tilde{W}^2)$	0,2293	0	0,5

3. La matriz de relaciones borrosas de preferencia entre los distintos costes totales de inactividad permite su clasificación:

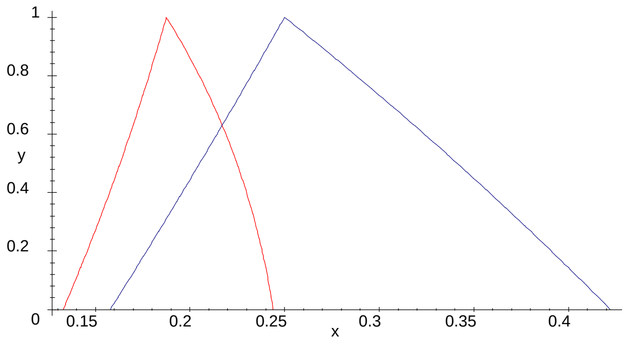
$$\tilde{C}(\tilde{W}) > \tilde{C}(\tilde{W}^1) > \tilde{C}(\tilde{W}^2)$$

siendo el valor óptimo el que proporciona el modelo con prioridades aseguradas.

Con todo se puede concluir que la selección óptima de una disciplina de espera para el modelo de colas propuesto es establecer un sistema con prioridades aseguradas o absolutas, en el cual la categoría de unidades A será la que tiene asignada el índice de prioridad más alto.

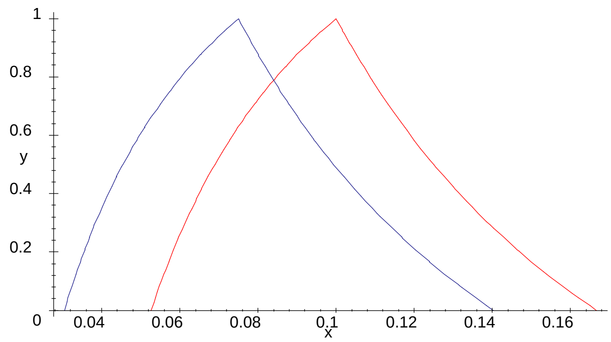
Seleccionada la disciplina de espera óptima se pueden obtener las medidas de efectividad del modelo de colas:

- Probabilidad de que el sistema esté desocupado y probabilidad de que se encuentre una unidad en el sistema:



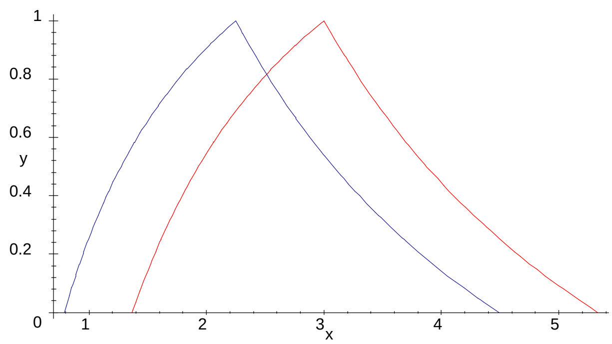
Funciones de pertenencia de $\tilde{P}_0$ (en azul) y $\tilde{P}_1$ (en rojo)

- Tiempo medio de permanencia en cola y en el sistema:



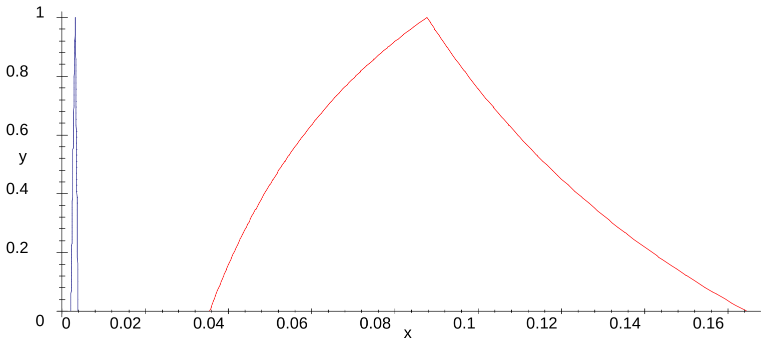
Funciones de pertenencia de $\tilde{W}_q$ (en azul) y $\tilde{W}$ (en rojo)

- Longitud media de unidades en cola y de unidades en el sistema:



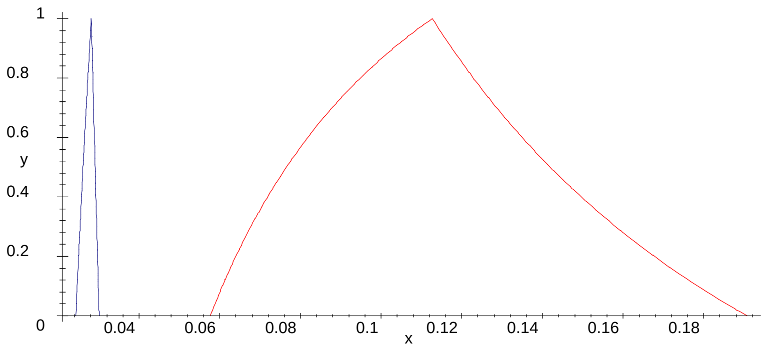
Funciones de pertenencia de $\tilde{L}_q$ (en azul) y $\tilde{L}$ (en rojo)

- Tiempo medio de permanencia en cola para una unidad de prioridad de clase A y para una unidad de prioridad de clase B:



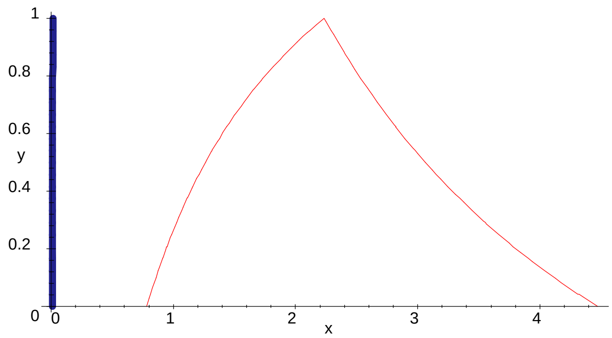
Funciones de pertenencia de $\tilde{W}^2_{q,A}$ (en azul) y $\tilde{W}^2_{q,B}$ (en rojo)

- Tiempo medio de permanencia en el sistema para una unidad de prioridad de clase A y para una unidad de prioridad de clase B:



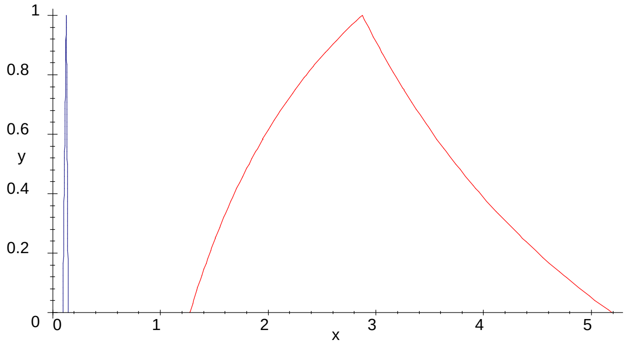
Funciones de pertenencia de $\tilde{W}^2_A$ (en azul) y $\tilde{W}^2_B$ (en rojo)

- Longitud media en la cola de unidades de prioridad de clase A y de unidades de prioridad de clase B:



Funciones de pertenencia de $\tilde{L}^2_{q,A}$ (en azul) y $\tilde{L}^2_{q,B}$ (en rojo)

- Longitud media en el sistema de unidades de prioridad de clase A y de unidades de prioridad de clase B:



Funciones de pertenencia de $\tilde{L}_A^2$ (en azul) y $\tilde{L}_B^2$ (en rojo)

5. Bibliografía.

[1] Escudero, L.F. (1972) *Aplicaciones de la Teoría de Colas.* Ediciones Deusto, Bilbao.

[2] Jiménez, M. (1994) *Modelos matemáticos aplicados a la toma de decisiones financieras en condiciones de incertidumbre*. Tesis doctoral. Universidad del País Vasco/E.H.U.

[3] Jo, J.B.; Tsujimura, Y.; Gen, M.; Yamazaki, G. (1993) "A Delay Model of Queueing Network System Based on Fuzzy Sets Theory". *Computers and Industrial Engineering.* Vol. 25, Nos 1-4, pp.143-146.

[4] Kaufmann, A.; Gil Aluja, J. (1987) *Técnicas operativas de Gestión para el tratamiento de la Incertidumbre*. Ed. Hispano-Europea, S.A., Barcelona.

[5] Li, R.J.; Lee, E.S. (1989) "Analysis of Fuzzy Queues". *Computers and Mathematics with Applications.* Vol. 17, No. 7, pp 1143-1147.

[6] Saaty, T.L. (1967) *Elementos de la Teoría de Colas*. Ed. Aguilar, Madrid.