DECISIONES MAYORITARIAS POR DIFERENCIA DE VOTOS*

José Luis García Lapresta - Bonifacio Llamazares Rodríguez

Dep. de Economía Aplicada (Matemáticas)

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

Universidad de Valladolid

Resumen: En este trabajo se introduce y caracteriza una clase de procedimientos de votación comprendidos entre la mayoría simple y la decisión unánime. Se trata de aquéllos en donde, dadas dos propuestas, resulta vencedora la que consigue un número de votos que supera a los obtenidos por la otra en al menos una cantidad previamente fijada. En el trabajo se dan varias caracterizaciones de estos procedimientos a través de funciones de agregación de preferencias difusas asociadas tanto a medias cuasiaritméticas como a operadores OWA.

1. Introducción

Cuando sólo existen dos alternativas (candidatos o propuestas) a votar por un número elevado de electores, uno de los métodos más usados en la práctica es el de la mayoría simple. Con este método se garantiza que la alternativa vencedora tiene más apoyos que la perdedora, pero solamente eso, pudiéndose dar el caso de que, ante una amplia abstención, resulte ganadora una alternativa que apenas cuente con apoyos entre los electores. Así, si de 100 electores, 2 de ellos apoyan la alternativa *x*, 1 apoya la alternativa *y* y los 97 restantes se abstienen, resulta vencedora la alternativa *x*.

* Este trabajo está parcialmente financiado por la Consejería de Educación y Cultura de la Junta de Castilla y León (proyecto VA09/98).

Para evitar situaciones como la descrita, en ocasiones se utiliza el procedimiento de la mayoría absoluta, que exige el apoyo de más de la mitad de los electores para dar por vencedora a una alternativa. Por el mismo motivo, cuando se desea conseguir un amplio respaldo por parte de los electores, se utilizan otro tipo de mayorías cualificadas, como la de dos tercios, tres cuartos, etc., muy usadas en la práctica. No obstante, cuando resulta difícil conseguir apoyos tan amplios, estos procedimientos tienen el inconveniente de resultar poco decisivos.

En este trabajo introducimos y estudiamos una clase de procedimientos de votación más exigentes que el de la mayoría simple, los cuales evitan en diferente medida su principal inconveniente. Así, para que una alternativa resulte vencedora es necesario obtener un número de votos que supere al de los obtenidos por la otra en una cantidad previamente fijada. Cuando esta cantidad es nula, el procedimiento coincide con el de la mayoría simple. Si la cantidad fijada es la del número de electores menos uno, el procedimiento resultante es el de la unanimidad de los electores. Si la cantidad prefijada no es extrema, como ocurre en los casos anteriores, el procedimiento, además de garantizar que la alternativa seleccionada es vencedora por mayoría simple, exige cierta diferencia en el número de votos, la cual puede graduarse convenientemente, según se desee a priori, para matizar el efecto de la abstención.

Además, en el trabajo se introduce una variante del procedimiento anterior, en donde se exige adicionalmente un número mínimo de votos para que una alternativa resulte ganadora. Con ello se garantiza no sólo una ventaja predeterminada en el número de votos sino el apoyo de un número mínimo de electores, lo que aproxima el método al de la mayoría absoluta y a los de otras mayorías cualificadas.

Los resultados contenidos en el trabajo son de caracterización de los procedimientos de votación expuestos mediante dos clases de funciones de agregación de preferencias difusas: las asociadas a medias cuasiaritméticas definidas por automorfismos de orden del intervalo unidad y las asociadas a operadores OWA.

El trabajo se organiza como sigue. En la segunda sección se introducen las funciones de agregación que permiten definir la preferencia colectiva entre las alternativas a partir de las preferencias individuales, tanto en el caso de que los electores muestren intensidades en sus preferencias como en el de que éstas sean ordinarias. En ambos casos se introducen algunas propiedades de las funciones de agregación, tales como la simetría, que refleja el respeto al anonimato, y la neutralidad, en el sentido de May (1952). En este contexto se definen las dos clases de procedimientos de votación que se estudian posteriormente. En la tercera sección se presentan las funciones de agregación correspondientes a las medias cuasiaritméticas definidas por automorfismos de orden del intervalo unidad y a los operadores OWA introducidos por Yager (1988). La cuarta sección contiene los resultados del trabajo, en los que se caracterizan las dos clases de procedimientos de votación a través de medias cuasiaritméticas y de operadores OWA.

2. Funciones de agregación

Supondremos dos alternativas *x*, *y* sobre las que *m* electores, con $m \geq 3$, han de mostrar sus preferencias. Con $r_i \in [0,1]$ denotaremos la *intensidad* con la que el elector *i* prefiere *x* a *y*. Si $r_i \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$, diremos que el elector *i* tiene *preferencias ordinarias* y entenderemos que el valor de r_i es 1, 0 o $\frac{1}{2}$, según el elector *i* prefiera *x* a *y*, prefiera *y* a *x* o sea indiferente entre ambas alternativas.

A cada vector $(r_1, \ldots, r_m)$ que describa las preferencias de los electores (entre la alternativa *x* y la alternativa *y*) se le denominará *configuración de preferencias.*

Definición 1.

Una *función de agregación difusa* (FAD) es una aplicación $F : [0,1]^m \longrightarrow [0,1]$. Dada una configuración de preferencias $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_m) \in [0,1]^m$, $F(\mathbf{r})$ mostrará la intensidad con la que *x* es preferida colectivamente a *y*.

Una *función de agregación ordinaria* (FAO) es una aplicación $F : \{0, \frac{1}{2}, 1\}^m \longrightarrow \{0, \frac{1}{2}, 1\}$. Dada una configuración de preferencias ordinarias $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_m) \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}^m$, $F(\mathbf{r})$ mostrará si *x* es preferida colectivamente a *y*, *y* es preferida colectivamente a *x*, o bien *x* e *y* son indiferentes colectivamente, según sea su valor, 1, 0 o $\frac{1}{2}$, respectivamente.

A continuación se introducen dos propiedades de las funciones de agregación: la simetría y la neutralidad. La primera garantiza el respeto al anonimato, toda vez que la preferencia colectiva sólo depende del conjunto de las preferencias individuales y no de qué electores las posean. La neutralidad equivale a que se invierta la preferencia colectiva cuando se invierten las preferencias individuales.

Definición 2.

Sea F una función de agregación, difusa u ordinaria.

1. Se dice que F es *simétrica* si y sólo si para cualquier configuración $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_m)$ y cualquier permutación s de $\{1, \ldots, m\}$ se satisface $F(r_{s(1)}, \ldots, r_{s(m)}) = F(\mathbf{r})$.

   a) Si F es una FAO simétrica, entonces $F(\mathbf{r})$ viene determinada por el número de 1, $\frac{1}{2}$ y 0. Así, para cada configuración $(r_1, \ldots, r_m)$, definimos

      i) $n(xPy) = \#\{i \mid r_i = 1\}$ (número de electores que prefieren x a y),

      ii) $n(xIy) = \#\{i \mid r_i = \frac{1}{2}\}$ (número de electores que se muestran indiferentes entre x e y),

      iii) $n(yPx) = \#\{i \mid r_i = 0\}$ (número de electores que prefieren y a x).

   Obviamente, $n(xPy) + n(xIy) + n(yPx) = m$. Así, F puede representarse por una función $f : \mathsf{M} \longrightarrow \{0, \frac{1}{2}, 1\}$, donde

   $$\mathsf{M} = \{(m_1, m_2, m_3) \in \{0,1, \ldots, m\}^3 \mid m_1 + m_2 + m_3 = m\}$$

   $$\text{y} \quad f(m_1, m_2, m_3) = F\left(1, \overset{m_1}{\ldots}, 1, \tfrac{1}{2}, \overset{m_2}{\ldots}, \tfrac{1}{2}, 0, \overset{m_3}{\ldots}, 0\right).$$

   b) Análogamente, si F es una FAD simétrica, entonces la restricción

   $$F|_{\{0,\frac{1}{2},1\}^m} : \{0, \tfrac{1}{2}, 1\}^m \longrightarrow [0,1]$$

   viene determinada, al igual que en el caso anterior, por el número de 1, $\frac{1}{2}$ y 0. Por tanto, $F|_{\{0,\frac{1}{2},1\}^m}$ puede representarse por una función $f : \mathsf{M} \longrightarrow [0,1]$, donde

   $$f(m_1, m_2, m_3) = F\left(1, \overset{m_1}{\ldots}, 1, \tfrac{1}{2}, \overset{m_2}{\ldots}, \tfrac{1}{2}, 0, \overset{m_3}{\ldots}, 0\right).$$

2. F es *neutral* (en un sentido similar al dado por May (1952)) si y sólo si para cada configuración $(r_1, \ldots, r_m)$ se satisface

$$F(r_1,\dots,r_m)+F(1-r_1,\dots,1-r_m)=1.$$

Observación 1.

Si *F* es una FAO simétrica, entonces *F* es neutral si y sólo si para todo $(m_1,m_2,m_3)\in \mathrm{M}$ se verifica $f(m_1,m_2,m_3)+f(m_3,m_2,m_1)=1$. En este caso queda caracterizada por las ternas $(m_1,m_2,m_3)\in \mathrm{M}$ tales que $f(m_1,m_2,m_3)=1$, ya que $f(m_1,m_2,m_3)=0$ equivale a $f(m_3,m_2,m_1)=1$ y $f(m_1,m_2,m_3)=\frac{1}{2}$ equivale a que $f(m_1,m_2,m_3)\neq 1$ y $f(m_3,m_2,m_1)\neq 1$. ■

Cuando los electores tienen preferencias ordinarias, dada una FAD $F:[0,1]^m \longrightarrow [0,1]$, ésta puede restringirse a configuraciones de preferencias ordinarias, $F|_{\{0,\frac{1}{2},1\}^m}:\{0,\frac{1}{2},1\}^m \longrightarrow [0,1]$. Si se desea conseguir una FAO a partir de *F*, será necesario que las intensidades de preferencia colectiva tomen valores 0, $\frac{1}{2}$, 1. A continuación se presenta una vía para llevar a cabo la transformación de una FAD en una FAO, cuando los electores tienen, o hayan de mostrar, preferencias ordinarias.

Definición 3.

Sean una FAD $F:[0,1]^m \longrightarrow [0,1]$ y $a\in[\frac{1}{2},1)$. Se define la a*-FAO asociada a F* como la FAO $F_a:\{0,\frac{1}{2},1\}^m \longrightarrow \{0,\frac{1}{2},1\}$ definida por

$$F_a(r_1,\dots,r_m)=\begin{cases}1, & \text{si} \quad F(r_1,\dots,r_m)>a,\\ \frac{1}{2}, & \text{si} \quad 1-a\le F(r_1,\dots,r_m)\le a,\\ 0, & \text{si} \quad F(r_1,\dots,r_m)<1-a.\end{cases}$$

Proposición 1.

Dada una FAD *F*, para cualquier $a\in[\frac{1}{2},1)$ se verifica:

1. Si *F* es simétrica, entonces también lo es F_a.
2. Si *F* es neutral, entonces también lo es F_a.

<u>Demostración</u>

1. Obvio.
2. Sea $(r_1,\dots,r_m)\in\{0,\frac{1}{2},1\}^m$. Se pueden presentar tres casos:

a) Si $F(r_1,\ldots,r_m) > a$, entonces $F_a(r_1,\ldots,r_m) = 1$ y

$$F(1-r_1,\ldots,1-r_m) = 1 - F(r_1,\ldots,r_m) < 1 - a \ ,$$

por lo que $F_a(1-r_1,\ldots,1-r_m) = 0$.

b) Si $1 - a \leq F(r_1,\ldots,r_m) \leq a$, entonces $F_a(r_1,\ldots,r_m) = \frac{1}{2}$ y

$$1 - a \leq F(1-r_1,\ldots,1-r_m) = 1 - F(r_1,\ldots,r_m) \leq a \ ,$$

por lo que $F_a(1-r_1,\ldots,1-r_m) = \frac{1}{2}$.

c) Si $F(r_1,\ldots,r_m) < 1 - a$, entonces $F_a(r_1,\ldots,r_m) = 0$ y

$$F(1-r_1,\ldots,1-r_m) = 1 - F(r_1,\ldots,r_m) > a \ ,$$

por lo que $F_a(1-r_1,\ldots,1-r_m) = 1$.

En los tres casos se verifica $F_a(r_1,\ldots,r_m) + F_a(1-r_1,\ldots,1-r_m) = 1$, por lo que F_a es neutral. ■

Observación 2.

Sean una FAD F y $a \in \left[\frac{1}{2},1\right)$.

Si F es simétrica, por la proposición anterior, F_a es una FAO simétrica y, en consecuencia, podrá representarse por una función $f_a : \mathsf{M} \longrightarrow \left\{0,\frac{1}{2},1\right\}$, donde

$$f_a(m_1,m_2,m_3) = F_a\left(\overset{m_1}{1,\ldots,1},\overset{m_2}{\tfrac{1}{2},\ldots,\tfrac{1}{2}},\overset{m_3}{0,\ldots,0}\right).$$

Si además F es neutral, por la proposición anterior, F_a es una FAO simétrica y neutral. Por tanto, se verifica $f_a(m_1,m_2,m_3) + f_a(m_3,m_2,m_1) = 1$ para cualquier $(m_1,m_2,m_3) \in \mathsf{M}$. ■

A continuación se introducen los dos tipos de FAO correspondientes a las clases de mayorías estudiadas en este trabajo.

Definición 4.

Dado $k \in \{0,1,\ldots,m-1\}$, definimos la *mayoría* M_k como la FAO simétrica dada por

$$f(m_1,m_2,m_3) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad m_1 > m_3 + k, \\ \frac{1}{2}, & \text{si} \quad |m_1 - m_3| \leq k, \\ 0, & \text{si} \quad m_3 > m_1 + k. \end{cases}$$

En otras palabras, x es preferida colectivamente a y cuando $n(xPy) > n(yPx) + k$, es decir cuando el número de electores que prefieren x a y supera al de los que prefieren y a x en la cantidad k prefijada. Las alternativas x e y resultarán indiferentes colectivamente si la diferencia absoluta entre los votos conseguidos por cada una de ellas no supera a k.

Resulta inmediato comprobar que M_k es, por construcción, neutral.

Observación 3.

Los procedimientos de votación de la mayoría simple y de la unanimidad constituyen casos particulares de la clase de mayorías M_k recién definidas.

1. Si $k = 0$, se obtiene la mayoría simple: x es preferida colectivamente a y cuando $n(xPy) > n(yPx)$.
2. Si $k = m - 1$, para que x sea preferida colectivamente a y es necesario (y suficiente) que todos los electores prefieran x a y: $n(xPy) > n(yPx) + m - 1 \Leftrightarrow n(xPy) = m$. ■

Seguidamente se define una subclase de la clase de mayorías M_k, donde para que una alternativa resulte ganadora se exige adicionalmente que el número de electores que la prefieran sea mayor que un umbral l.

Definición 5.

Dados $k \in \{0,1,\ldots,m-4\}$ y $l \in \{k+1,\ldots,\left[\frac{m+k}{2}\right]-1\}$, definimos la *mayoría* M_k^l como la FAO simétrica dada por

$$f(m_1, m_2, m_3) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad m_1 > \max(m_3 + k, l), \\ \frac{1}{2}, & \text{si} \quad |m_1 - m_3| \leq k \ \text{ o } \ \max(m_1, m_3) \leq l, \\ 0, & \text{si} \quad m_3 > \max(m_1 + k, l). \end{cases}$$

En otras palabras, x es preferida colectivamente a y cuando $n(xPy) > n(yPx) + k$ y $n(xPy) > l$, es decir cuando el número de electores que prefieren x a y supera simultáneamente al de los que prefieren y a x en la cantidad k prefijada y al umbral l. Las alternativas x e y resultarán indiferentes colectivamente si la diferencia absoluta entre los votos conseguidos por cada una de ellas no supera a k o bien ninguna de las alternativas supera el número de votos fijado por el umbral l.

Resulta inmediato comprobar que M_k^l es, por construcción, neutral.

Nota: $[a]$ es la parte entera de *a*, es decir el mayor entero que es menor o igual que *a*.

Observación 4.

En la definición 5, los parámetros *k* y *l* toman valores en los conjuntos correspondientes para que las condiciones $n(xPy)>n(yPx)+k$ y $n(xPy)>l$ sean ambas efectivas. La restricción $l \geq k+1$ es necesaria para que la condición $n(xPy)>l$ no sea redundante, mientras que $n(xPy)>n(yPx)+k$ no será redundante cuando exista una configuración de preferencias ordinarias que satisfaga $n(xPy)>l,$ pero no $n(xPy)>n(yPx)+k.$ Para hallar el máximo valor posible de *l*, se consideran los mínimos valores posibles de $n(xPy)$ y de $n(yPx)$ que satisfacen la condición $n(xPy)>l$ y que no satisfacen $n(xPy)>n(yPx)+k,$ siendo dichos valores $n(xPy)=l+1$ y $n(yPx)=n(xPy)-k=$ $=l+1-k.$ Cuando se considera la restricción $n(xPy)+n(yPx)\leq m,$ el valor máximo de *l* se obtiene de la solución entera de la ecuación $(l+1)+(l+1-k)=m,$ esto es $l=\left[\frac{m+k}{2}\right]-1.$ Además, los valores que puede tomar *k* serán $(k+2)+(k+2-k)\leq m,$ es decir $k \leq m-4.$ ■

Observación 5.

El valor máximo que puede tomar m_3 para el cual existe $(m_1,m_2,m_3)\in \mathrm{M}$ tal que $f(m_1,m_2,m_3)=1$ es la solución entera de la ecuación $m_3+k+1+m_3=m,$ esto es $m_3=\left[\frac{m-(k+1)}{2}\right].$ ■

3. Medias cuasiaritméticas y operadores OWA

En esta sección se presentan dos clases de FAD ampliamente utilizadas en la literatura: las medias cuasiaritméticas, caracterizadas por Kolmogoroff (1930) y Nagumo (1930), y los operadores OWA ("Ordered Weighted Averaging operators"), introducidos por Yager (1988). Las mayorías M_k serán caracterizadas en la sección 4 a través de medias cuasiaritméticas y las mayorías M_k^l lo serán mediante operadores OWA, en ambos casos bajo el supuesto de que los electores tengan, o hayan de mostrar, preferencias ordinarias.

Definición 6.

Una función $j : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ es un *automorfismo de orden* si y sólo si j es biyectiva y creciente.

Resulta inmediato comprobar que si j es un automorfismo de orden, entonces j es estrictamente creciente, $j(0)=0$, $j(1)=1$ y que j^{-1} es también un automorfismo de orden.

Definición 7.

Un automorfismo de orden $j : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ es *neutral* si y sólo si verifica $j(a)+j(1-a)=1$ para cualquier $a \in [0,1]$.

Obviamente, si j es un automorfismo de orden neutral, entonces $j\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$ y j^{-1} es también neutral.

Definición 8.

Dado un automorfismo de orden j, se define la *media cuasiaritmética asociada a* j como la FAD F^{j} definida por

$$F^{j}(r_1,\ldots,r_m) = j^{-1}\left(\frac{j(r_1)+\cdots+j(r_m)}{m}\right).$$

Observación 6.

Es inmediato comprobar que F^{j} es simétrica. Además, si j es neutral, entonces para cada $a \in \left[\frac{1}{2},1\right)$, F_a^{j} es una FAO simétrica y neutral y

$$f_a^{j}(m_1,m_2,m_3) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad j^{-1}\left(\dfrac{1}{m}\left(m_1+\dfrac{m_2}{2}\right)\right) > a\,, \\ \dfrac{1}{2}, & \text{si} \quad 1-a \le j^{-1}\left(\dfrac{1}{m}\left(m_1+\dfrac{m_2}{2}\right)\right) \le a\,, \\ 0, & \text{si} \quad j^{-1}\left(\dfrac{1}{m}\left(m_1+\dfrac{m_2}{2}\right)\right) < 1-a\,. \end{cases} \qquad \blacksquare$$

Proposición 2.

Si j es un automorfismo de orden neutral y $a \in \left[\frac{1}{2},1\right)$, entonces F_a^{j} viene caracterizada por

$f_a^j(m_1,m_2,m_3)=1 \Leftrightarrow m_1 > m_3 + [2mj(a)] - m$ para cualquier $(m_1,m_2,m_3)\in \mathrm{M}$.

<u>Demostración</u>

Dado $(m_1,m_2,m_3)\in \mathrm{M}$, se tiene

$$f_a^j(m_1,m_2,m_3)=1 \Leftrightarrow j^{-1}\left(\frac{1}{m}\left(m_1+\frac{m_2}{2}\right)\right)>a \Leftrightarrow m_1+\frac{m_2}{2}>mj(a) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2m_1+m_2>2mj(a) \Leftrightarrow 2m_1+m_2>[2mj(a)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m_1+(m-m_3)>[2mj(a)] \Leftrightarrow m_1>m_3+[2mj(a)]-m. \quad \blacksquare$$

Definición 9.

Dado $\mathbf{w}=(w_1,\ldots,w_m)\in[0,1]^m$ satisfaciendo $\sum_{i=1}^{m} w_i = 1$, se define el *operador OWA asociado a* $\mathbf{w}$ como la FAD $F^{\mathbf{w}}$ definida por

$$F^{\mathbf{w}}(r_1,\ldots,r_m)=\sum_{i=1}^{m} w_i \cdot r_{s(i)},$$

donde s es una permutación de $\{1,\ldots,m\}$ tal que $r_{s(1)} \geq \cdots \geq r_{s(m)}$.

Proposición 3.

El operador OWA $F^{\mathbf{w}}$ es neutral si y sólo si $w_{m+1-i}=w_i$ para todo $i\in\{1,\ldots,[\frac{m}{2}]\}$.

<u>Demostración</u>

Si s es una permutación de $\{1,\ldots,m\}$ tal que $r_{s(1)} \geq \cdots \geq r_{s(m)}$, entonces $1-r_{s(m)} \geq \cdots \geq 1-r_{s(1)}$. Según esto

$$F^{\mathbf{w}}(1-r_1,\ldots,1-r_m)=1-F^{\mathbf{w}}(r_1,\ldots,r_m) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} w_i\left(1-r_{s(m+1-i)}\right)=1-\sum_{i=1}^{m} w_i r_{s(i)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} w_i r_{s(m+1-i)}=\sum_{i=1}^{m} w_i r_{s(i)} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} w_{m+1-i} r_{s(i)}=\sum_{i=1}^{m} w_i r_{s(i)}$$

y esta última igualdad es cierta para todo $(r_1,\ldots,r_m)\in[0,1]^m$ si y sólo si $w_{m+1-i}=w_i$ para todo $i\in\{1,\ldots,[\frac{m}{2}]\}$. $\blacksquare$

Observación 7.

De su definición se deduce que $F^{\mathbf{w}}$ es simétrica. Además, si es neutral, entonces para cada $a\in[\frac{1}{2},1)$, $F_a^{\mathbf{w}}$ es una FAO simétrica y neutral y

$$f_a^{\mathbf{w}}(m_1,m_2,m_3)=\begin{cases}1, & \text{si} \quad \sum_{i=1}^{m_1} w_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m_2} w_{m_1+i} > a,\\ \frac{1}{2}, & \text{si} \quad 1-a \le \sum_{i=1}^{m_1} w_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m_2} w_{m_1+i} \le a,\\ 0, & \text{si} \quad \sum_{i=1}^{m_1} w_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m_2} w_{m_1+i} < 1-a. \end{cases} \quad \blacksquare$$

A continuación se definen los operadores OWA ventana, los cuales promedian los valores centrales, dejando fuera de consideración los valores extremos. Con ellos se caracterizan en la siguiente sección las mayorías M_k^l.

Definición 10.

Dado $j \in \{1,\ldots,[\frac{m}{2}]\}$, se define $\mathbf{w}^j = (w_1^j,\ldots,w_m^j)$ como

$$w_i^j = \begin{cases}\frac{1}{m-2(j-1)}, & \text{si } i = j, j+1,\ldots,m+1-j,\\ 0, & \text{en los demás casos.}\end{cases}$$

Al operador OWA asociado a $\mathbf{w}^j$ se le denomina *OWA ventana j-ésimo*, el cual es neutral por construcción.

Proposición 4.

Si $j \in \{1,\ldots,[\frac{m}{2}]\}$ y $a \in [\frac{1}{2},1)$, entonces $F_a^{\mathbf{w}^j}$ viene caracterizada por

$$f_a^{\mathbf{w}^j}(m_1,m_2,m_3)=1 \iff m_1 > [(2a-1)(m-2(j-1))] + \max(m_3, j-1)$$

para cualquier $(m_1,m_2,m_3) \in \mathrm{M}$.

<u>Demostración</u>

Dado $(m_1,m_2,m_3) \in \mathrm{M}$, se tiene

$$f_a^{\mathbf{w}^j}(m_1,m_2,m_3)=1 \iff \sum_{i=1}^{m_1} w_i^j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m_2} w_{m_1+i}^j > a \iff$$

$$\iff m_1 \ge j \text{ y } \frac{1}{m-2(j-1)}(m_1-(j-1)) + \frac{1}{2}\frac{1}{m-2(j-1)}\min(m_2, m-m_1-(j-1)) > a \iff$$

$$\iff m_1 \ge j \text{ y } 2(m_1-(j-1)) + \min(m-m_1-m_3, m-m_1-(j-1)) > 2a(m-2(j-1)) \iff$$

$$\iff m_1 \ge j \text{ y } 2m_1 - 2(j-1) + m - m_1 - \max(m_3, j-1) > 2a(m-2(j-1)) \iff$$

$$\Leftrightarrow\ m_1 \geq j \text{ y } m_1 > (2a-1)(m-2(j-1)) + \max(m_3, j-1) \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ m_1 > [(2a-1)(m-2(j-1))] + \max(m_3, j-1). \quad \blacksquare$$

Observación 8.

Cuando $j=1$, la FAD F^{w^j} corresponde a la media aritmética. En este caso, se obtiene la siguiente caracterización:

$$f_a^{w^1}(m_1, m_2, m_3) = 1 \ \Leftrightarrow\ m_1 > m_3 + [(2a-1)m] \ \Leftrightarrow\ m_1 > m_3 + [2am] - m$$

que coincide con el resultado obtenido en la Proposición 2 cuando el automorfismo j es la identidad. $\blacksquare$

4. Resultados de caracterización

En el siguiente teorema se justifica que, cualesquiera que sean la mayoría M_k y el automorfismo de orden j, existen valores de a para los cuales M_k coincide con la a-FAO asociada a la media cuasiaritmética F^j.

Teorema 1.

Si j es un automorfismo de orden neutral, $k \in \{0,1,\ldots,m-1\}$ y $a \in [\frac{1}{2},1)$, entonces

$$M_k = F_a^j \Leftrightarrow j^{-1}\left(\frac{m+k}{2m}\right) \leq a < j^{-1}\left(\frac{m+k+1}{2m}\right).$$

<u>Demostración</u>

Por la Proposición 2 tenemos

$$M_k = F_a^j \ \Leftrightarrow\ [2mj(a)] - m = k \ \Leftrightarrow\ m+k \leq 2mj(a) < m+k+1 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{m+k}{2m} \leq j(a) < \frac{m+k+1}{2m} \ \Leftrightarrow\ j^{-1}\left(\frac{m+k}{2m}\right) \leq a < j^{-1}\left(\frac{m+k+1}{2m}\right). \quad \blacksquare$$

En el siguiente corolario establecemos que los procedimientos de mayoría simple y de unanimidad pueden representarse por una amplia clase de a-FAO asociadas a medias cuasiaritméticas.

Corolario 1.

Si j es un automorfismo de orden neutral y $a \in [\frac{1}{2},1)$, entonces

1. $M_0 = F_a^j$ si y sólo si $a \in \left[\frac{1}{2}, j^{-1}\left(\frac{m+1}{2m}\right)\right)$.

2. $M_{m-1} = F_a^j$ si y sólo si $a \in \left[j^{-1}\left(\frac{2m-1}{2m}\right), 1\right)$.

<u>Demostración</u>

Por la Proposición 2 tenemos

1. $M_0 = F_a^j \iff [2mj(a)] - m = 0 \iff m \le 2mj(a) < m+1 \iff \frac{1}{2} \le j(a) < \frac{m+1}{2m} \iff$
$\iff \frac{1}{2} \le a < j^{-1}\left(\frac{m+1}{2m}\right)$.

2. $M_{m-1} = F_a^j \iff [2mj(a)] - m = m-1 \iff 2m-1 \le 2mj(a) < 2m \iff$
$\iff \frac{2m-1}{2m} \le j(a) < 1 \iff j^{-1}\left(\frac{2m-1}{2m}\right) \le a < 1.$ ■

En la siguiente proposición justificamos que para cualquier $a \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, toda mayoría M_k puede representarse por la a-FAO asociada a alguna media cuasiaritmética. Para $a = \frac{1}{2}$, por el Corolario 1, se tiene $M_0 = F_a^j$ cualquiera que sea el automorfismo de orden j.

Proposición 5.

Para cualesquiera $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ y $a \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ existe un automorfismo de orden neutral j tal que $M_k = F_a^j$.

<u>Demostración</u>

Por la Proposición 2 tenemos

$$M_k = F_a^j \iff [2mj(a)] - m = k \iff m + k \le 2mj(a) < m + k + 1 \iff$$
$$\iff \frac{m+k}{2m} \le j(a) < \frac{m+k+1}{2m}.$$

Ahora tomamos $y : \left[\frac{1}{2}, 1\right] \longrightarrow \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ definida por

$$y(a) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{2k+1}{4m\left(a - \frac{1}{2}\right)}\left(a - \frac{1}{2}\right), & \text{si } a \in \left[\frac{1}{2}, a\right], \\ 1 + \frac{2m-2k-1}{4m(1-a)}(a-1), & \text{si } a \in (a, 1]. \end{cases}$$

Resulta inmediato comprobar que verifica $\psi\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$, $\psi(1)=1$ y

$$\psi(\alpha)=\frac{2m+2k+1}{4m}\in\left(\frac{m+k}{2m},\frac{m+k+1}{2m}\right).$$

Entonces, la función $\varphi:[0,1]\longrightarrow[0,1]$, definida por

$$\varphi(\alpha)=\begin{cases}1-\psi(1-\alpha), & \text{si } \alpha\in\left[0,\frac{1}{2}\right),\\ \psi(\alpha), & \text{si } \alpha\in\left[\frac{1}{2},1\right].\end{cases}$$

es un automorfismo de orden neutral que cumple la condición requerida. ■

En el siguiente teorema se justifica que, cualquiera que sea la mayoría M_k^l, existen un operador OWA ventana y valores de α para los cuales M_k^l coincide con la α-FAO asociada al operador OWA ventana.

Teorema 2.

Sean $j\in\left\{2,\ldots,\left[\frac{m}{2}\right]\right\}$, $k\in\{0,1,\ldots,m-4\}$, $l\in\left\{k+1,\ldots,\left[\frac{m+k}{2}\right]-1\right\}$ y $\alpha\in\left[\frac{1}{2},1\right)$. Entonces se verifica:

1. Si $m-k$ es impar:

$$M_k^l=F_\alpha^{\omega^j}\ \Leftrightarrow\ j=l-k+1\ \text{ y }\ \frac{1}{2}+\frac{k}{2(m-2(l-k))}\le\alpha<\frac{1}{2}+\frac{k+1}{2(m-2(l-k))}.$$

2. Si $m-k$ es par:

$$M_k^l=F_\alpha^{\omega^j}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases} j=l-k+1\ \text{ y }\ \frac{1}{2}+\frac{k}{2(m-2(l-k))}\le\alpha<\frac{1}{2}+\frac{k+1}{2(m-2(l-k))},\\ \text{o}\\ l=\frac{m+k}{2}-1,\ \ j=\frac{m-k}{2}+1\ \text{ y }\ \frac{2k-1}{2k}\le\alpha<1.\end{cases}$$

<u>Demostración</u>

La demostración es similar en ambos casos, aunque cuando $m-k$ es par existen nuevas soluciones. Por la Proposición 4 tenemos

$$M_k^l=F_\alpha^{\omega^j}\quad\Leftrightarrow\quad\forall(m_1,m_2,m_3)\in\mathcal{M}$$

$$m_1>k+\max(m_3,l-k)\ \Leftrightarrow\ m_1>[(2\alpha-1)(m-2(j-1))]+\max(m_3,j-1)$$

$$\Leftrightarrow\quad\forall m_3\in\left\{0,1,\ldots,\left[\frac{m-(k+1)}{2}\right]\right\}\ \ k+\max(m_3,l-k)=[(2\alpha-1)(m-2(j-1))]+\max(m_3,j-1)$$

Vamos a ver la equivalencia de esta condición con las relaciones existentes entre los parámetros , l j y   enunciadas en el Teorema. Primeramente vamos a demostrar que esta condición implica dichas relaciones.

$m_3 = 0$, se tiene $l = [(2a-1)(m-2(j-1))] + j - 1$. Como $a \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2a - 1 \in [0,1)$, se tiene que $l \in \{j-1, \ldots, m-(j-1)-1\}$, por lo que $l \le m-(j-1)-1$.

Para $m_3 = \left\lfloor \frac{m-(k+1)}{2} \right\rfloor$, como $l \in \left\{k+1, \ldots, \left\lfloor \frac{m+k}{2} \right\rfloor - 1\right\}$, se tiene $l - k \le \left\lfloor \frac{m-k}{2} \right\rfloor - 1 \le \left\lfloor \frac{m-(k+1)}{2} \right\rfloor$.

Vamos a distinguir dos casos:

a) Si $j - 1 \le \left\lfloor \frac{m-(k+1)}{2} \right\rfloor$, entonces $k + \left\lfloor \frac{m-(k+1)}{2} \right\rfloor = [(2a-1)(m-2(j-1))] + \left\lfloor \frac{m-(k+1)}{2} \right\rfloor$, de donde $k = [(2a-1)(m-2(j-1))]$ y $l = k + j - 1$. Esto es equivalente a

$k \le (2a-1)(m-2(j-1)) < k+1$ y $j-1 = l-k$ $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{m-2(j-1)} \le 2a - 1 < \frac{k+1}{m-2(j-1)} \text{ y } j-1 = l-k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{2(m-2(l-k))} \le a - \frac{1}{2} < \frac{k+1}{2(m-2(l-k))} \text{ y } j-1 = l-k .$$

Estos valores son válidos tanto para $m-k$ par como impar.

b) Si $j - 1 > \left\lfloor \frac{m-(k+1)}{2} \right\rfloor$, se tiene $k + \left\lfloor \frac{m-(k+1)}{2} \right\rfloor = [(2a-1)(m-2(j-1))] + j - 1$. Así pues, $l = k + \left\lfloor \frac{m-(k+1)}{2} \right\rfloor$. Como $l - k \le \left\lfloor \frac{m-k}{2} \right\rfloor - 1$, se ha de cumplir $\left\lfloor \frac{m-(k+1)}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{m-k}{2} \right\rfloor - 1$, lo cual es cierto si y sólo si $m-k$ es par. En este caso, $l - k = \frac{m-k}{2} - 1$, de donde $l = \frac{m+k}{2} - 1$. Como $j - 1 \le m - l - 1 = m - \frac{m+k}{2} = \frac{m-k}{2}$ y $j - 1 > \left\lfloor \frac{m-(k+1)}{2} \right\rfloor$ entonces $j - 1 = \frac{m-k}{2}$. Los valores posibles de a son:

$l = [(2a-1)(m-2(j-1))] + j - 1 \Leftrightarrow k - 1 = [(2a-1)k] \Leftrightarrow k - 1 \le (2a-1)k < k \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{2k-1}{2k} \le a < 1.$$

Estas nuevas soluciones son válidas solamente en el caso $m-k$ par.

El recíproco se obtiene de forma inmediata. Basta con comprobar, mediante las operaciones realizadas en la implicación anterior, que cuando los parámetros *k*, *l*, *j* y a satisfacen las relaciones descritas en el Teorema, se obtiene $M_k^l = F_a^{w^j}$ ■

Bibliografía

[1] FEREJOHN, J.A. – GRETHER, D.M. (1974): “On a class of rational social decisions procedures”. *Journal of Economic Theory* 8, pp. 471-482.

[2] FISHBURN, P.C. (1973): *The Theory of Social Choice*. Princeton University Press, Princeton.

[3] GARCÍA LAPRESTA, J.L. – LLAMAZARES RODRÍGUEZ, B.: “Aggregation of fuzzy preferences: some rules of the mean”. *Social Choice and Welfare*, en prensa.

[4] KOLMOGOROFF, A. (1930): “Sur la notion de la moyenne”. *Atti della R. Academia Nazionale del Lincei. Rendiconti della Classe di Scienze Fisiche, Mathematiche e Naturali* (6) 12, pp. 388-391.

[5] LLAMAZARES RODRÍGUEZ, B. (1999): “Generalizaciones de la mayoría simple y de la mayoría absoluta mediante operadores OWA”. *V Encontro Galego de Novos Investigadores de Análise Económica*.

[6] MAY, K.O. (1952): “A set of necessary and sufficcient conditions for simple majority decision”. *Econometrica* 20, pp. 680-684.

[7] NAGUMO, M. (1930): “Über eine Klasse der Mittelwerte”. *Japanese Journal of Mathematics* 7, pp. 71-79.

[8] OVCHINNIKOV, S.V. (1990): “Means and social welfare function in fuzzy binary relation spaces”. En Kacprzyk, J. – M. Fedrizzi (eds.) (1990): *Multiperson Decision Making Using Fuzzy Sets and Possibility Theory*, pp. 143-154. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[9] SAARI, D.G. (1990): “Consistency of decision processes”. *Annals of Operations Research* 23, pp. 103-137.

[10] YAGER, R.R. (1988): “On ordered weighted averaging operators in multicriteria decision making”. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* 18, pp. 183-190.

[11] YAGER, R.R. – KACPRZYK, J. (eds.) (1997): *The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.