FUNCIÓN OBJETIVO EN UN PROGRAMA DE INVERSIONES LINEAL ESTOCÁSTICO

Cardona Rodríguez, Antonio
Departamento de **Economía Financiera I**
Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea

RESUMEN

En este trabajo planteamos una función objetivo para un modelo de programación de inversiones multiperiodo, formulado como un programa lineal estocástico de doble etapa. La función objetivo tiene dos componentes: por una parte la función objetivo del programa determinista original, y por otra, una llamada "función de recurso", que incorpora en una segunda etapa de optimización el coste en que se incurre al tratar de corregir las desviaciones debidas a la aleatoriedad de las restricciones impuestas en cada período. Ese coste se formaliza a través de unas "penalizaciones" que reducen el valor de la función objetivo inicial.

1. INTRODUCCIÓN

Partimos de un modelo de inversiones determinista clásico que utiliza la programación lineal. Este modelo plantea la maximización de una función de utilidad, sujeta a unas restricciones. Por sencillez, nos limitamos a considerar restricciones de tipo financiero.

En cuanto a la función objetivo, suponemos que el fin que persigue la empresa al plantearse la selección de un conjunto de proyectos de inversión es que éste aumente el valor de la empresa en un horizonte temporal dado. Como medida más aceptada de ese aumento de valor tenemos el valor actual neto (VAN), es decir la suma de los flujos netos de caja generados por la inversión. De modo que este será la función objetivo de nuestro modelo inicial.

Para el cálculo del VAN necesitamos fijar una tasa de descuento y un horizonte temporal.

Tomaremos como tasa de descuento el "coste medio ponderado del capital" (CMPC) de la empresa. Brealey y Myers (1993, p. 492) definen el coste medio ponderado de capital de una empresa como "la rentabilidad esperada de una cartera formada por todos los títulos de la empresa". Supondremos que el decisor puede contar con este dato para la determinación del VAN de los proyectos de inversión.

El cálculo utilizando esa tasa supone que tendrán VAN positivo aquellos proyectos con los que obtenemos algún beneficio, una vez compensados los gastos de financiación de la empresa.

El supuesto implícito es que la adopción de los nuevos proyectos no va a cambiar el CMPC. Nosotros consideraremos que la realización de los nuevos proyectos no altera de forma sustancial la estructura de capital de la empresa.

El horizonte temporal es otro dato inicial. Suponemos que se planifica para N periodos, que son los que se tomarán en cuenta para el cálculo del VAN.

Supondremos finalmente, para simplificar el problema, que la tasa de descuento es la misma para todos los periodos.

En cuanto a las restricciones del modelo consideraremos dos grupos de restricciones de tipo financiero. Durante los T primeros periodos, la empresa impone unas limitaciones presupuestarias que representan los fondos de los que puede disponer la empresa para financiar los proyectos. La empresa establece esas limitaciones presupuestarias para cada periodo en función de sus intereses y/o de sus previsiones.

Las restricciones presupuestarias indican que la empresa cuenta con unos fondos que puede destinar a financiar nuevos proyectos de inversión.

El segundo grupo de restricciones parte del supuesto de que la empresa no sólo tendrá en cuenta las limitaciones financieras a la hora de seleccionar proyectos, sino que además exigirá de esos proyectos que a partir de un determinado periodo generen, en conjunto, entradas de fondos para la empresa.

Aunque esa generación de fondos se traslade al modelo en forma de restricción, su origen tiene más bien carácter de objetivo. Es ese carácter de objetivo el que hace que su tratamiento sea distinto al de las anteriores restricciones financieras.

Establecemos entonces, que a partir del periodo $T + 1$, la empresa quiere obtener unos ingresos netos del conjunto de proyectos adoptados. Esos ingresos deberán ser como mínimo una cantidad R_t fijada para cada período.

El modelo así planteado tendrá la forma:

$$Max\ z = \sum_{j=1}^{J}\sum_{t=1}^{N}\left[- a_{tj}(1+k)^{-t}\right]x_j$$

sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{J} a_{tj}x_j \leq D_t \qquad (t = 1, 2, \ldots, T)$$

$$-\sum_{j=1}^{J} a_{tj}x_j \geq R_t \qquad (t = T + 1, \ldots, N)$$

0 £ x_j *£ 1*

siendo:

D_t: cantidad de dinero generada por otras actividades de la empresa, disponible para financiación de los proyectos en el período *t*.

a_{tj}: flujo neto de caja asociado al proyecto *j* en el periodo *t*. Establecemos que las salidas tengan signo positivo, y las entradas, negativo.

x_j: fracción del proyecto de inversión *j* que se adopta

J: número total de proyectos de inversión considerados.

T: número de periodos los que hay racionamiento de capital, que, en general, no tiene por qué coincidir con el periodo de planificación.

N: número de períodos en los que consideramos flujos netos de caja a efectos de cálculo del VAN (horizonte de planificación).

R_t: cantidad mínima de recursos generados por el conjunto de proyectos en el período *t*.

Las restricciones *0 £* x_j *£ 1* imponen que los proyectos no sean repetitivos.

En nuestro modelo usamos variables continuas acotadas. Está claro que el uso de variables enteras se adapta mejor a la generalidad de los proyectos, que suelen ser indivisibles, pero la programación lineal continua es mucho más tratable operativamente, y especialmente más fácil de interpretar que la entera. Conceptos como el de variable dual , tan significativos y clarificadores en el análisis continuo, pierden gran parte de su valor cuando utilizamos variables enteras.

En el caso de la programación estocástica, las diferencias operativas entre el uso de variables enteras o continuas se hacen todavía mayores.

Si utilizamos programación lineal, la solución obtenida nos obligará a aceptar fracciones de proyectos. Ejemplos de estos tipos de proyectos fraccionables incluyen decisiones de inversión de capital por fondos de pensiones, adquisición de participaciones en empresas, construcción parcial de espacio en almacenes, etc.

Sabemos que la indivisibilidad de los proyectos de inversión es esencial en muchos casos; sin embargo, y tal y como señalan Kira y Kusy (1990, p. 856), la aproximación por programación lineal es deseable principalmente por dos razones: el número de proyectos potenciales aceptados está acotado por el número de restricciones del programa; y los algoritmos de programación lineal son más eficientes en términos de computación.

En el caso de que la naturaleza del problema exija que las soluciones sean enteras, las soluciones del programa lineal pueden servir de base para la exploración de la solución definitiva.

Si, como hemos hecho, imponemos la restricción de que los proyectos no sean repetitivos (lo que equivale a acotar los valores de las variables) las diferencias entre el uso de uno u otro tipo de variables no son tan grandes.

Byrne et al. (1971, p. 127 ss.) sugieren que se permita una cierta relajación en las restricciones, de forma que se puedan ajustar los valores de las soluciones a valores enteros. El decisor es quien en última instancia debe determinar los costes o beneficios de esa relajación de las restricciones.

En cualquier caso, y como señalan Byrne et al. (1971, p. 128), es conveniente observar que el conjunto de soluciones factibles de un problema de programación entera está incluido en el correspondiente al problema lineal, y, por lo tanto, el óptimo del programa entero no podrá ser en ningún caso mejor que el del continuo. Así pues, el óptimo obtenido en el programa lineal nos servirá de cota superior de la solución entera (o mixta).

1.1 Restricciones estocásticas.

Hasta aquí hemos planteado el modelo determinista. Debido a la aleatoriedad de los fenómenos económicos, puede existir una desviación sobre las previsiones que haga que se incumplan las restricciones planteadas inicialmente. Ese incumplimiento se penaliza de alguna manera, pues supone una pérdida esperada de beneficios para la empresa.

En particular, puede ocurrir que las previsiones de la empresa sobre sus disponibilidades financieras no se realicen. Las desviaciones sobre el presupuesto supondrán una pérdida para la empresa.

Observemos que para la empresa suponen una pérdida de beneficio tanto las desviaciones por exceso como por defecto sobre el presupuesto previsto. La pérdida en el caso de defecto parece bastante clara, pues la empresa se encuentra con que tiene que afrontar gastos no previstos. Ahora bien, el exceso de fondos supone que hemos dejado de destinar esos fondos a otros posibles proyectos, lo que origina un coste de oportunidad que hay que tratar de cuantificar.

El incumplimiento de las restricciones financieras "rompe" de alguna manera el programa: pero la empresa tiene recursos para intentar arreglarlo, aunque esto suponga un coste. Esta enmienda al programa con sus correspondientes recursos es lo que nos permite plantear un programa en el que se incluye la aleatoriedad.

Esta forma de recomponer el programa tiene que conocerse antes de llevarlo a la práctica, por lo que debe analizarse antes de incorporarlo al modelo. Debemos saber cuál será nuestra actuación en caso de que fallen las previsiones, y cómo va a afectar esa actuación a la función objetivo del modelo, y por lo tanto al óptimo.

Esa actuación debe modelizarse matemáticamente, para incluirla en el modelo y cuantificar sus efectos. Si además, podemos hacerlo a través de una función lineal, seguiremos dentro del marco teórico que hemos estudiado anteriormente.

Así pues, partiremos del supuesto de que la penalización debida al incumplimiento de las restricciones es proporcional al nivel de incumplimiento. Traducido a nuestro modelo de selección de inversiones, esto equivale a decir que nuestra pérdida de beneficio es proporcional al exceso o defecto de fondos sobre lo previsto. Cuantificaremos esta pérdida de beneficio más adelante.

La aleatoriedad puede aparecer en cualquiera de los parámetros del modelo, dando lugar a modelos más o menos complejos. Aunque existen estudios en los que tanto la matriz de coeficientes como el vector de restricciones son aleatorios, la mayor parte de los trabajos se han centrado en el caso en que sólo se considera aleatorio el vector de restricciones, suponiendo el resto de los parámetros conocidos con certeza. Nosotros mantendremos ese supuesto: la empresa supone conocidos y ciertos los flujos de caja de cada proyecto en cada periodo, y los tipos de interés a los que se invierten los excedentes o se pagan los préstamos. Y por el contrario considera como una variable aleatoria las disponibilidades financieras de cada periodo.

Las restricciones desde el periodo $T + 1$ hasta el N, son en realidad objetivos de recuperación de fondos exigidos por la empresa. Estos fondos se retirarían del programa. Suponemos que estos objetivos se fijan de forma cierta, por lo que no las consideramos variables aleatorias.

2. FUNDAMENTOS DE PROGRAMACIÓN LINEAL ESTOCÁSTICA

Antes de plantear el modelo de programación de inversiones, repasaremos algunos conceptos básicos sobre la programación lineal estocástica, que necesitamos para desarrollos ulteriores.

El modelo de programación lineal estocástica con recurso simple (PLERS) parte del enfoque desarrollado inicialmente por Dantzig (1955) y otros autores, con el nombre de "programación lineal en incertidumbre", nombre que aún se sigue utilizando en muchos trabajos.

El supuesto del que parte la PLER es que si el decisor elige antes de conocer las realizaciones de las variables aleatorias, puede encontrarse con que, al realizarse éstas, dejen de cumplirse las restricciones iniciales, es decir, que el programa no sea factible. Las desviaciones debidas a la aleatoriedad deberán ser compensadas para que el programa vuelva a ser factible.

La función objetivo refleja las desviaciones a través de una función “de recurso” que es minimizada en una segunda etapa. Supondremos que esta función es también lineal, más concretamente, tomaremos como función de recurso la esperanza matemática de la penalización impuesta por el incumplimiento de las restricciones del programa original.

2.1 Formulación del problema.

Denotaremos por A y b, las respectivas matrices correspondientes a restricciones no estocásticas, y utilizaremos T y b para denotar la matriz de coeficientes y el vector de limitaciones correspondientes a las restricciones estocásticas. (b representará entonces una variable aleatoria de distribución conocida)

Aunque se han estudiado los casos en los que A, b, y c son aleatorios; el modelo más estudiado y con más aplicaciones desarrolladas es aquél en el que sólo el vector b es aleatorio. En adelante restringiremos nuestro análisis a este supuesto.

Una formulación general de este problema es la siguiente:

Minimizar

$$cx + E_b\,[min\,(py)]$$

sujeto a:

$$Ax = b$$

$$Tx + Wy = b$$

$$x \text{ ³ } 0$$

En una primera etapa de optimización, seleccionamos x, que cumpla las restricciones del tipo $Ax = b$. Observamos después el valor que toman las variables aleatorias, y resolvemos la segunda etapa.

El programa de esta segunda etapa es:

Minimizar py

sujeto a:

$$Wy = b - Tx$$

En esta segunda etapa, aparece un nuevo conjunto de variables, y, tanto en la función objetivo como en las restricciones. Estas nuevas variables surgen debido a la aleatoriedad de algunos elementos del programa y son aleatorias. Su inclusión en el proceso supone un coste adicional, que representaremos por el vector p. De este modo, el coste que aparece en la función objetivo es py.

El modelo más simple es aquél en el que se supone la existencia de dos penalizaciones: una asociada a las desviaciones por exceso, y otra a las desviaciones por defecto, en cada uno de los periodos considerados en el programa original. El vector y se puede descomponer como suma de dos vectores de elementos no negativos:

$$y = y^+ - y^-$$

Igualmente supondremos que el vector p se puede descomponer en p^+ y p^- que representan las penalizaciones asociadas s cada nueva variable, respectivamente. La penalización total es:

$$p^+y^+ + p^-y^-$$

En cada restricción aparece una sola de las variables. Además, cada variable aparece en una sola restricción, la matriz Wy podrá descomponerse como:

$$Wy = Iy^+ - Iy^-$$

Y el modelo será

Minimizar

$$cx + E_b\,[min\,(p^+y^+ + p^-y^-)]$$

sujeto a:

$$Ax = b$$

$$Tx + Iy^+ - Iy^- = b$$

$$x, y^+, y^- \geq 0$$

Si denotamos por

$$T = \{t_{ij}\}, \qquad x = \{x_j\}, \qquad b = \{b_i\},$$

$$p^+ = \{p_i^+\}, \qquad p^- = \{p_i^-\}, \qquad y^+ = \{y_i^+\}, \qquad y^- = \{y_i^-\}$$

Entonces, las dos variables auxiliares y_i^+, y_i^-, toman los valores:

$$y_i^+ = \begin{cases} b_i - \sum_{j=1}^{n} t_{ij}x_j & si \ \sum_{j=1}^{n} t_{ij}x_j \leq b_i \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

$$y_i^- = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_j - b_i & si \ \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_j \geq b_i \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Y las penalizaciones son:

$$p_i^+ (b_i - \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_j) \qquad\qquad p_i^- (\sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_j - b_i)$$

Planteado así el problema, en cada restricción aparece sólo una variable y_i^+ ó y_i^-. Se puede escribir, entonces:

$$Minimizar \ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + E_b \left[min(\sum_{1}^{m} p_i^+ y_i^+ + \sum_{1}^{m} p_i^- y_i^-) \right]$$

$$Sujeto \quad a:$$

$$y_i^+ - y_i^- = b_i - \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_j \qquad\qquad (i = 1,2,\ldots,m)$$

$$x_j , y_i^+ , y_i^- \geq 0$$

en este caso el programa de la segunda fase es:

$$Minimizar \ \sum_{1}^{m} p_i^+ y_i^+ + \sum_{1}^{m} p_i^- y_i^-$$

$$Sujeto \quad a:$$

$$y_i^+ - y_i^- = b_i - \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_j \qquad\qquad (i = 1,2,\ldots,m)$$

$$y_i^+ , y_i^- \geq 0$$

La aplicación del modelo exige conocer, o por lo menos estimar de algún modo los valores de los costes *p* asociados a las desviaciones representadas por *y*. Lo estudiaremos el caso concreto del modelo de inversiones.

El modelo estocástico que hemos planteado es el que Walkup y Wets (1970) denominan “programa lineal estocástico con recurso simple”, o también Wets (1966) programa “completo”.

3. MODELO DE PROGRAMACIÓN DE INVERSIONES CON RIESGO

Una vez que hemos establecido los fundamentos del modelo matemático, pasamos al planteamiento de un programa de inversiones estocástico, y en particular de la función objetivo.

El problema se planteará como uno de los encuadrados dentro del modelo de programación estocástica con recurso simple (PLERS), en este caso de maximización.

Según lo que hemos visto, una formulación general para un modelo PLERS, de maximización, se puede escribir como:

Maximizar

$$cx - E_b[min(p^+y^+ + p^-y^-)]$$

sujeto a:

$$Ax = b$$

$$Tx + Iy^+ - Iy^- = b$$

$$x, y^+, y^- \geq 0$$

siendo *b* una variable aleatoria con distribución conocida, independiente de *x*.

Para el modelo de programación de inversiones propuesto tenemos:

Maximizar:

$$\sum_{t=1}^{N}\sum_{j=1}^{J}\left[-a_{tj}(1+k)^{-t}\right]x_j - E_D\left[min\sum_{t=1}^{T}(p_t^+y_t^+ + p_t^-y_t^-)\right]$$

sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{J}a_{tj}x_j \leq D_t \qquad (t = 1, 2, \ldots, T)$$

$$-\sum_{j=1}^{J}a_{tj}x_j \geq R_t \qquad (t = T+1, \ldots, N)$$

$$0 \leq x_j \leq 1$$

$$y_t^+, y_t^- \geq 0$$

siendo

E_D: operador esperanza matemática tomada sobre las variables aleatorias D_t.

y_t^-: variable de defecto en el periodo *t*.

y_t^+*:* variable de exceso en el periodo *t*.

D_t: variable aleatoria que representa los fondos disponibles para financiación de proyectos en el periodo *t*.

a_{tj}: flujo de caja neto para el proyecto *j* en el periodo *t*.

k: tasa de descuento (CMPC).

Observemos que el sumatorio de las penalizaciones es sólo sobre los *T* primeros periodos, en los que existe limitación de fondos.

Suponemos que D_t es una variable aleatoria con función de distribución *F* conocida.

El problema así planteado puede resolverse utilizando uno de los algoritmos disponibles, como por ejemplo, los de Wets (1966) para distribuciones continuas o Wets (1983) para distribuciones discretas, bajo el supuesto de que $p_t^+ + p_t^- > 0$.

Las *T* primeras restricciones que aparecen son estocásticas. Las restricciones deterministas desde $T + 1$ hasta *N* nos servirán para seleccionar los valores iniciales de las variables, necesarios para comenzar la búsqueda del óptimo mediante el algoritmo adecuado.

4. FUNCIÓN OBJETIVO.

La función objetivo es la maximización del VAN menos la penalización mínima esperada para incumplimientos de las restricciones financieras estocásticas de los primeros períodos. Esa penalización se establece a través de la función de recurso o de segunda etapa.

La determinación de las penalizaciones es una parte esencial en la formulación del problema. De la selección de las penalizaciones depende en gran parte el resultado final del modelo.

Las penalizaciones aparecen si en un período determinado se superan o no se alcanzan las cantidades presupuestadas. Esto supone que el decisor debe corregir el plan inicial y evaluar el coste de esa corrección. Además debe tratar de minimizar ese coste, que aparecerá reflejado en la función objetivo.

En el caso de que las salidas de caja excedan el presupuesto, hablaremos de penalización "por exceso". Análogamente, si estas salidas son menores de las previstas, y por lo tanto se produce un exceso de fondos, hablaremos de penalización "por defecto".

Suponemos, que en caso de necesidad, el programa se puede surtir de fondos, o bien puede colocar fondos excedentes. Es decir, que hay cierta flexibilidad temporal en los flujos de fondos, pero tiene que existir un balance equilibrado en cada periodo.

Ese intercambio de fondos se puede entender como una cuenta financiera que el programa mantiene con la empresa o con el mercado. Además, tratamos de minimizar el efecto de ese intercambio de fondos en el objetivo final, por lo que la segunda etapa será de minimización.

El cálculo de las penalizaciones es uno de los principales pasos en la construcción del modelo; ya que el resultado obtenido va a depender mucho de cómo elijamos las penalizaciones adecuadas. Esta elección va a tener siempre una parte subjetiva, pero se puede apoyar en el conocimiento de las repercusiones que un fallo en las previsiones tiene en el programa. Es necesario comprender el correcto significado de las penalizaciones.

Aunque el planteamiento de las penalizaciones por "exceso" y por "defecto" será muy similar, para mayor claridad, las estudiamos por separado.

4.1 Penalización por exceso.

Existe exceso en un periodo t cuando los fondos disponibles en ese periodo son menores que los previstos. Esto supone que no se podrá hacer frente a los gastos ocasionados por los proyectos. Se corre entonces el peligro de perder las inversiones realizadas, y los potenciales beneficios futuros que se derivan de ellas. Para evitar esto, la empresa debe tomar una acción correctora sobre el programa original. Esta acción consistirá en la obtención de fondos externos a un coste determinado, que supondremos conocido.

Definimos entonces las variables de la segunda etapa:

$$y_t^+ = 0, \qquad y_t^- = \sum_{j=1}^{J} a_{tj} x_j - D_t > 0 \qquad t = 1, 2, \ldots, T$$

Este coste será función del tipo de interés marginal de los préstamos recibidos por la empresa.

Suponemos que en la práctica el costo marginal de esos fondos será mayor que el costo medio ponderado del capital, ya que los fondos de los que puede disponer la empresa sin aumentar su riesgo ya están incluidos en las restricciones presupuestarias.

Para el cálculo de las penalizaciones debemos tener en cuenta que la empresa puede obtener fondos externos durante todo el período de planificación, aunque no es deseable, y por eso existen las penalizaciones.

El préstamo ocasiona unos flujos de caja: pago de principal más intereses de cada periodo. Para el cálculo de la penalización, descontamos esos flujos usando como tasa el CMPC.

Para simplificar, supondremos que el tipo de interés que se paga por los préstamos es el mismo para todos los períodos.

La penalización representará una disminución del VAN total, que se incorporará a la función objetivo en la segunda etapa. Esa disminución del VAN, por cada unidad monetaria pedida en préstamo en el período t, vendrá dada por la suma algebraica de tres conceptos:

Valor actual del interés pagado por el préstamo, desde el período t hasta su devolución al final del último período de planificación: $\sum_{i=t}^{N} \frac{s}{(1+k)^i}$

Valor actual del principal, que se devuelve al final del período de planificación: $\frac{1}{(1+k)^N}$.

Valor actual del principal, recibido al principio del período *t*: $-\dfrac{1}{(1+k)^{t-1}}$

La expresión que obtenemos es:

$$p_t^- = \sum_{i=t}^{N} \frac{s}{(1+k)^i} + \frac{1}{(1+k)^N} - \frac{1}{(1+k)^{t-1}} \qquad t = 1, \ldots, T.$$

Operando en esta expresión para eliminar el sumatorio, tenemos que la penalización por cada unidad monetaria pedida en préstamo en el período t es:

$$p_t^- = s\frac{(1+k)^{N-t+1} - 1}{k(1+k)^N} + \frac{1}{(1+k)^N} - \frac{1}{(1+k)^{t-1}} \qquad t = 1, \ldots, T.$$

Si el coste de los fondos externos es igual al CMPC, es decir, s = k, no existe penalización. Esto es lógico, puesto que si podemos obtener fondos al mismo coste que los que forman la estructura del capital, el riesgo de ésta no varía, y además no se altera el valor total de la empresa.

Además, la penalización será mayor cuanto mayor sea el tipo de interés pagado por los préstamos.

4.2 Penalización para la variable de defecto.

Si en un periodo dado, las disponibilidades reales superan a las previstas, habremos cometido un error por defecto. Entonces una vez cubiertos los gastos ocasionados por los proyectos, nos sobrarán fondos.

En este caso, tenemos que:

$$y_t^- = 0, \qquad y_t^+ = D_t - \sum_{j=1}^{J} a_{tj} x_j > 0 \qquad t = 1, 2, \ldots, T$$

En esta situación, la empresa puede retirar los fondos excedentes del programa para utilizarlos en otros fines. Existe la opción de invertir esos fondos en inversiones externas de menor riesgo, como depósitos o contratos financieros.

La penalización por no invertir los fondos en proyectos de inversión rentables será una pérdida en el VAN total de la empresa. Las inversiones externas tendrán una tasa de rendimiento que será como mínimo igual a la tasa libre de riesgo; pero que será menor al CMPC, en otras palabras será menos rentable que una inversión con VAN positivo. De no ser así, la empresa no emprendería ningún proyecto, lo que siempre supone algún riesgo, sino que se limitaría a colocar sus fondos en esas inversiones.

La penalización por no utilizar fondos disponibles en el periodo t, debido a no tener proyectos adecuados, se calcula como una función del rendimiento que esos fondos generan en una inversión alternativa libre de riesgo.

Supondremos que los fondos sobrantes en un periodo dado permanecen en la inversión hasta el final del periodo de planificación, y que sus rendimientos son anuales.

Razonando y operando de forma análoga al caso de la penalización anterior, obtenemos la disminución del VAN por unidad monetaria:

$$p_t^+ = -r\frac{(1+k)^{N-t+1}-1}{k(1+k)^N} - \frac{1}{(1+k)^N} + \frac{1}{(1+k)^{t-1}} \qquad t = 1, \ldots, T.$$

siendo *r* el tipo de interés al que invertimos los fondos, que como ya hemos dicho será como mínimo igual al tipo libre de riesgo.

Observemos que, al igual que en la penalización por exceso, si el tipo de interés *r* es igual al CMPC, la penalización es cero. La interpretación es sencilla: si la empresa coloca fondos a un tipo de interés igual a su CMPC, que utilizamos como tasa de descuento, su VAN no varía.

Por otra parte, y como es de esperar, la penalización es mayor cuanto menor es el tipo de interés con el que los fondos son remunerados.

Si añadimos a la función objetivo original la etapa de recurso con las penalizaciones propuestas, tenemos:

Maximizar

$$\sum_{t=1}^{N}\sum_{j=1}^{J}\left[-a_{tj}(1+k)^{-t}\right]x_j -$$

$$- E_D\left\{ min\sum_{t=1}^{T}\left\{\left[-r\frac{(1+k)^{N-t+1}-1}{k(1+k)^N} - \frac{1}{(1+k)^N} + \frac{1}{(1+k)^{t-1}}\right]y_t^+ + \left[s\frac{(1+k)^{N-t+1}-1}{k(1+k)^N} + \frac{1}{(1+k)^N} - \frac{1}{(1+k)^{t-1}}\right]y_t^-\right\}\right\}$$

4.3 Análisis de las penalizaciones.

En este apartado nos detendremos en el análisis de las penalizaciones propuestas.

Hemos visto que, si nos sobran fondos en un periodo *t*, el VAN total disminuye, por cada unidad monetaria de exceso colocada a un tipo de interés *r*, en:

$$p_t^+ = -r\frac{(1+k)^{N-t+1}-1}{k(1+k)^N} - \frac{1}{(1+k)^N} + \frac{1}{(1+k)^{t-1}}$$

Del mismo modo, si tenemos que recurrir a solicitar fondos externos, y los obtenemos a un tipo de interés *s*, la disminución del VAN total, será, por cada unidad monetaria:

$$p_t^- = s\frac{(1+k)^{N-t+1}-1}{k(1+k)^N}+\frac{1}{(1+k)^N}-\frac{1}{(1+k)^{t-1}}$$

Una primera observación es que si los tipos de interés para préstamos y colocación de fondos coinciden, $r = s$, entonces $p_t^- = -p_t^+$; y la penalización total será:

$$\sum_t (p_t^+ y_t^+ - p_t^+ y_t^-) = \sum_t p_t^+(y_t^+ - y_t^-) = \sum_t p_t^+ y_t$$

es decir, que bajo ese supuesto, la penalización sólo dependería del total de las desviaciones presupuestarias (independientemente de su signo) y del coste p_t^+ asociado a éstas; y podría incluso no ser tal penalización, sino un beneficio para la empresa.

Ahora bien, el supuesto de que las tasas *r* y *s* son iguales es muy poco realista, lo que ocurre es que *s* es mayor que *r*.

Para simplificar la notación, haremos

$$L_t = \frac{(1+k)^{N-t+1}-1}{k(1+k)^N} \qquad B_t = \frac{1}{(1+k)^{t-1}}-\frac{1}{(1+k)^N}$$

L_t representa el valor actual de un unidad monetaria percibida desde el inicio del periodo *t* hasta el final del horizonte temporal *N*. Es una cantidad positiva.

B_t representa la diferencia entre el valor actual de una unidad monetaria al inicio del periodo *t* y al final del horizonte temporal. Es también una cantidad positiva.

De acuerdo con esta notación, las penalizaciones se expresarán como:

$$p_t^+ = B_t - rL_t \qquad p_t^- = sL_t - B_t$$

Si sumamos ahora p_t^+ y p_t^-, tenemos

$$p_t^+ + p_t^+ = (s - r)L_t.$$

Como el tipo de interés de préstamos es mayor que el que obtenemos al colocar fondos,

$$s - r > 0$$

y entonces,

$$p_t^+ + p_t^+ = (s - r)L_t > 0.$$

con lo que se cumple la condición suficiente para asegurar la factibilidad del programa de la segunda etapa.

Como última observación, señalemos que la elección de las penalizaciones tiene una componente subjetiva, debido a que su estimación está basada en la importancia que el decisor otorgue al incumplimiento de las previsiones.

La penalización total es una función del nivel de incumplimiento de la restricción y del coste que el decisor atribuye a dicho incumplimiento. En este último factor es donde aparece la subjetividad.

Es necesario conocer los fundamentos del modelo de decisión y tener un buen conocimiento del mercado financiero, para seleccionar adecuadamente las penalizaciones. La subjetividad debe compensarse con un análisis adecuado que nos posibilite la adaptación a nuestras circunstancias y necesidades concretas de los modelos y las técnicas disponibles.

Es obvio que las penalizaciones propuestas son especialmente simples, y pueden complicarse para adaptarse mejor a las características del problema concreto.

En nuestro modelo hay una simetría en el tratamiento de las penalizaciones por exceso y por defecto, sin embargo, podrían tratarse de distinta manera: Podemos también actuar sobre los periodos considerados para los cálculos, y sobre los supuestos sobre periodicidad de los flujos de fondos.

En nuestro caso, hemos supuesto que, tanto en el caso de que se pidan fondos prestados, como en el de que se coloquen, los correspondientes intereses se pagan o reciben cada periodo hasta el final. Sin embargo, se pueden plantear otras posibilidades, como que los intereses se acumulen en un solo periodo, o que se adelante o retrase la devolución del principal. Estas consideraciones pueden incidir sobre la determinación de las penalizaciones.

También hemos supuesto que los tipos de interés, *r* y *s*, se mantienen constantes para todos los periodos. Aunque suponga complicar algo el modelo, se pueden calcular las penalizaciones con tipos de interés variables.

Otra ventaja a tener en cuenta en el planteamiento de las penalizaciones es que éste nos permite un mejor análisis del problema. Ese análisis nos ayuda a conocer el problema, lo que a su vez nos facilita el cálculo de las penalizaciones. Se produce una alimentación en dos sentidos que nos permite avanzar en la construcción del modelo. Las penalizaciones pueden interpretarse como variables de gestión que limitan el riesgo en la toma de decisiones. Citando a Kusy y Ziemba (1986, p. 359): "El coste de recurso tiene el efecto de restringir elecciones "agresivas" de las variables de decisión si los costes que supone recuperar la factibilidad superan los beneficios."

5. BIBLIOGRAFÍA

Brealey, R. y Myers S. (1993): *Fundamentos de financiación empresarial* (4ª ed.). McGraw-Hill, Madrid.

Byrne et al. **(1971)**: "C^2 and LPU^2 combinations for treating different risks and uncertainties in capital budgets", en **Byrne et al. (eds.)**: *Studies in budgeting,* North Holland, Amsterdam, pp. 93-137.

Dantzig, G. **(1955):** "Linear programming under uncertainty", *Management Science,* vol.1, nos 3 y 4, pp. 197-206.

Dempster, M.A.H. (1980): "Introduction to stochastic programming", en **Dempster, M.A.H. (ed.):** *Stochastic programming*, Academic Press, Nueva York, pp. 3-59.

Golstein, E.G. y Yudine, D.B. (1976): *Programación lineal (problemas y aplicaciones),* Paraninfo, Madrid.

Kira, D.S. y M.I. Kusy (1990): "A stochastic capital rationing model", *Journal of the Operational Research Society*, vol. 41, nº 9, pp. 853-863.

Kusy, M. y Ziemba, M. T. (1986): "A bank asset and liability management model". *Operations Research*, vol. 34, pp. 356-376.

Walkup, D. y Wets, R.J.-B. (1967): "Stochastic programs with recourse", *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 15, nº 5, pp. 1299-1314.

Wets, R.J.-B. (1966): "Programming under uncertainty: the complete problem", *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Gebiete*, vol. 4, pp. 316-339.

------------ (1983): "Solving stochastic programs with simple recourse", *Stochastics*, vol. 10, pp. 219-242.

------------ (1989): "Stochastic programming", en **Nemhauser, G.L.; Rinnoy Kan, A.H.G. y Todd, M.J. (eds.):** *Handbooks in Operations Research and Management Science. Vol. 1: Optimization*, Elsevier, Amsterdam, pp. 573-629.