ESTRATEGIAS DE EQUILIBRIO FEEDBACK EN UN JUEGO DE DISTRIBUCIÓN DE AGUA PARA REGADÍO.

R. Fernández Lechón

Mª. J. Macarro Heredia

Facultad de CC. EE. y EE.

Universidad de Valladolid

Avda. Valle Esgueva 6

47011 Valladolid

Resumen: En el trabajo se plantea un juego dinámico, en tiempo discreto y horizonte temporal finito, de suma no nula entre dos agricultores que se dedican al cultivo de productos agrícolas en regadío y que se abastecen de una misma fuente de riego. Los agricultores tratan de adecuar las disponibilidades de agua que han de compartir, a sus necesidades de riego que se suponen distintas para cada agricultor. En el modelo se supone que el horizonte temporal de riego está dividido en dos periodos, que a la fuente llega una cantidad constante de agua y que la fuente no puede agotarse. Bajo estos supuestos se obtienen y analizan las estrategias de equilibrio feedback no cooperativas.

Palabras clave: Juego dinámico, fuente, estrategia de equilibrio feedback.

1.- INTRODUCCIÓN

Como mantiene Pallage S. (1996), la distribución de recursos escasos cuya uso influye en la riqueza de quién los utiliza ha dado lugar, desde lo más antiguo de la humanidad, a un foco de conflicto donde las soluciones no siempre son bien comprendidas por todas las partes. Uno de estos recursos es el agua, que aparte de ser un elemento fundamental para el mantenimiento de la vida, puede utilizarse para otros fines distintos a los del propio consumo. En particular, la distribución del agua utilizada para la producción de cultivos, con escasos o nulos rendimientos en secano y con grandes consumos, no es una tarea fácil si ha de ser compartida por varios cultivadores.

La solución al problema de la distribución del agua escasa y compartida entre varios usuarios puede obtenerse mediante la teoría de juegos, lo que posibilita que los diferentes equilibrios puedan correlacionarse con las distintas posibilidades óptimas de solución del problema. El planteamiento de un juego como procedimiento para obtener la solución a un problema de distribución de recursos, no es nuevo y podemos encontrarlo en el trabajo de Levhari D. y Mirman L. J. (1980) donde se analiza, mediante un juego continuo de dos personas y suma no nula, las cuotas de pesca cuando los dos usuarios obtienen sus capturas de un mismo lago. En dicho trabajo, se estudian las estrategias de Nash, no cooperativa, y Stackelberg suponiendo que la reacción de cada jugador depende del stock de pesca y no de su comportamiento previo; en una línea similar, sobre el estudio de la distribución de recursos de pesca, también podemos citar el trabajo de Jogensen S y Sorger G. (1990) que analiza cómo determinar las cuotas de pesca entre dos naciones que comparten un mismo caladero. Este último trabajo, planteado cómo un juego diferencial, ha sido analizado, debido a las posibilidades que presenta su planteamiento, por distintos autores entre los que merece destacar el estudio realizado por Kaitala S, Hämäläinen R. P. y Ruusunen J. (1985).

En este trabajo, tomando como base el problema de control óptimo planteado por Soto M. D. (1996), se plantea un juego dinámico de suma no nula, en tiempo discreto y horizonte temporal finito, entre dos agricultores dedicados al cultivo de productos de regadío que se abastecen de una misma fuente. Cada uno de los agricultores, durante la campaña de riego, tiene unas necesidades de agua que supondremos distintas pues no tienen por qué dedicarse a la producción del mismo cultivo ni tienen por qué disponer de la misma cantidad de tierra. Estas necesidades podrán ser o no cubiertas, durante el periodo de planificación, lo que dependerá de las cantidades que ambos agricultores soliciten y de la condición, que se puede suponer impuesta por la Administración con el objetivo de mantener el ecosistema, de que la fuente no pueda agotarse en ningún momento durante el desarrollo del juego. Además, se supondrá que a la fuente llega una cantidad de agua que, por motivos de operatividad en la obtención de resultados, supondremos que es constante.

Planteado el juego en la sección segunda, en la tercera se obtienen las estrategias de equilibrio feedback, no cooperativas, entre los dos agricultores suponiendo que el horizonte temporal de planificación de riego está dividido en, a lo sumo, dos periodos; determinamos la región de validez de cada una de las estrategias obtenidas así como su representación en el plano considerando como eje de abscisas la cantidad constante de agua que llega a la fuente y como eje de ordenadas el consumo máximo permitido por la Administración a cada agricultor. Por último, finalizamos el trabajo con un análisis de las estrategias y un ejemplo numérico que nos permite comprobar su consistencia fuerte en el tiempo.

2.- PLANTEAMIENTO DEL JUEGO

Sea T la amplitud temporal del juego, que nosotros identificaremos como la campaña de riego de un año. Supondremos que $T=1$, o bien, $T=2$, en este último caso, la campaña de riego estará subdividida en dos periodos de la misma amplitud.

Denotamos por $x(t)$ la cantidad de agua en la fuente que comparten los dos agricultores, a los que denominaremos $P1$ y $P2$, al comienzo del periodo t. Designamos por a el porcentaje impuesto por la Administración para el consumo de agua de la fuente por cada agricultor en cada periodo. Así, cada agricultor puede disponer de un consumo máximo, en cada uno de los periodos en que se divide la campaña de riego, $a\,x(t)$ con $2a<1$. El consumo mínimo, obviamente, será no negativo. Denotamos por u y v, ($u<v$), las necesidades de agua de los agricultores $P1$ y $P2$, respectivamente, durante el periodo $(t,t+1]$ y por $u(t)$ y $v(t)$ los consumos reales de agua de $P1$ y $P2$ durante el mismo periodo $(t,t+1]$. Ahora bien, cada agricultor, en cada periodo, desea adecuar sus consumos a sus necesidades, pero es conocido que consumos reales ligeramente superiores o inferiores a los deseados, no tienen repercusión sobre el proceso productivo de sus cultivos. Así, durante la campaña de riego el objetivo del jugador $P1$ será minimizar una función cuadrática que estará sujeta a sus posibilidades de consumo:

$$\min_{u(t)} \quad \frac{1}{2}\sum_{t=0}^{T}\left[u(t)-u\right]^2 , \quad s.a\colon 0 \le u(t) \le a\ x(t) .$$

Para el jugador $P2$, tendremos que sus consumos se obtendrán al resolver el problema:

$$\min_{v(t)} \quad \frac{1}{2}\sum_{t=0}^{T}\left[v(t)-v\right]^2 , \quad s.a\colon 0 \le v(t) \le a\ x(t) .$$

Ambos jugadores están sujetos a las variaciones de agua que experimenta la fuente en cada periodo. Así, si denotamos por g la cantidad constante de agua que llega a la fuente en cada periodo $\left(t, t+1\right]$, el agua en la fuente evolucionará en ese periodo siguiendo la ecuación:

$$x(t+1) = x(t) + g - u(t) - v(t) .$$

La ecuación de estado anterior, suponemos que es conocida por los dos jugadores y que además saben que en el momento inicial la cantidad de agua en la fuente es $x(0)$.

3.- ESTRATEGIAS FEEDBACK

Las estrategias de equilibrio de un juego, pueden tener la peculiaridad de ser consistentes débiles o fuertes. Ambos conceptos hacen referencia a la actuación de los jugadores a partir de un momento t del juego; pero mientras las primeras suponen que hasta ese momento los jugadores han seguido la estrategia de equilibrio, las segundas admiten que los jugadores puedan seguir cualquier control admisible. En el juego que estamos analizando esta última particularidad es importante debido a que es posible que alguno de los jugadores se aparte de sus controles óptimos durante un intervalo de tiempo con objeto de variar sus consumos.

La obtención de las estrategias feedback se realiza utilizando el principio de optimalidad de Bellman, cuya base conceptual se guía por el principio de que toda subpolítica de una política óptima es óptima, condición que caracteriza la consistencia fuerte. La aplicación del principio de optimalidad a modelos planteados en tiempo continuo no es sencilla, pues supone la resolución de ecuaciones en derivadas parciales no exentas de dificultad en la mayoría de los casos. Si el modelo está planteado en tiempo discreto, la aplicación del principio es más benigna, pero, en general, conlleva la realización de numerosos cálculos, de ahí, que salvo en los casos en que se aprecia la existencia de una ley que sigan los controles (ver Basar T. y Olsder G. J. (1995), pp. 287 y Chui C. K. y Chen G. (1989), pp. 86-90) el horizonte temporal del juego no puede considerarse muy elevado si se desea obtener algún resultado como es nuestro caso.

La aplicación del principio de optimalidad a nuestro problema nos lleva a tener que resolver el siguiente sistema de ecuaciones recurrentes para los dos jugadores:

$$U(t,x(t)) = \min_{u(t)} \left\{ \frac{1}{2}\left[u(t)-u\right]^2 + U(t+1, x(t)+g-u(t)-v(t)) \right\}, \quad s.a{:}\ 0 \le u(t) \le a\ x(t)\,,$$

$$V(t,x(t)) = \min_{v(t)} \left\{ \frac{1}{2}\left[v(t)-v\right]^2 + V(t+1, x(t)+g-u(t)-v(t)) \right\}, \quad s.a{:}\ 0 \le v(t) \le a\ x(t)\,,$$

con $U(T,x(T)) = V(T,x(T)) = 0$, siendo $U(t,x)$ y $V(t,x)$ las funciones de valor de $P1$ y $P2$, respectivamente, en el momento t y cuando la variable de estado tiene el valor $x(t)$.

Supongamos, en primer lugar, que el horizonte temporal es $T=1$, las estrategias feedback, en este caso, se determinan resolviendo los dos problemas no lineales siguientes:

$$U(0,x(0)) = \min_{u(0)} \ \frac{1}{2}\left[u(0)-u\right]^2 \quad s.a{:}\ 0 \le u(0) \le a\ x(0)\,,$$

$$V(0,x(0)) = \min_{v(0)} \ \frac{1}{2}\left[v(0)-v\right]^2, \quad s.a{:}\ 0 \le v(0) \le a\ x(0)\,,$$

con $U(1,x(1)) = V(1,x(1)) = 0$. Las condiciones necesarias de Kuhn y Tucker, en estos problemas, son suficientes al ser problemas convexos y diferenciables. La resolución de estos problemas nos proporciona tres estrategias de equilibrio feedback cuya estructura es recogida en la siguiente tabla:

Control de $P1$	**Control de $P2$**	**Limitaciones**

$u(0)=u$	$v(0)=v$	$v \le a\ x(0)$
$u(0)=u$	$v(0)=a\ x(0)$	$u \le a\ x(0) < v$
$u(0)=a\ x(0)$	$v(0)=a\ x(0)$	$a\ x(0) < u$

Si ampliamos el horizonte de planificación a dos periodos, tendremos $U(2,x(2))=0$ y $V(2,x(2))=0$ y ahora, el problema que, en la última etapa, tiene que resolver $P1$ será:

$$U(1,x(1)) = \min_{u(1)} \quad \frac{1}{2}\left[u(1)-u\right]^2 \quad s.a\colon 0 \le u(1) \le a\ x(1)\,,$$

que proporciona como solución óptima: $u(1)=u$ si $u \le a\ x(1)$ y $u(1)=a\ x(1)$ si $a\ x(1) < u$. En el primer caso, la función de valor tiene un valor nulo mientras que en el segundo, toma el valor $U(1,x(1)) = \frac{1}{2}\left[a\ x(1)-u\right]^2$. El problema para el segundo jugador es análogo:

$$V(1,x(1)) = \min_{v(1)} \quad \frac{1}{2}\left[v(1)-v\right]^2 \quad s.a\colon 0 \le v(1) \le a\ x(1),$$

y la solución óptima, al igual que en el caso anterior, es $v(1)=v$, si $v \le a\ x(1)$ y $v(1)=a\ x(1)$, si $a\ x(1) < v$ con $V(1,x(1)) = \frac{1}{2}\left[a\ x(1)-v\right]^2$.

Combinando los resultados obtenidos por cada jugador obtenemos fácilmente los controles feedback para la segunda etapa del juego que coinciden, hechas las salvedades oportunas, con las recogidas en la tabla previa.

En la primera etapa, el primer jugador tendrá que resolver el problema no lineal y paramétrico:

$$U(0,x(0)) = \min_{u(0)} \quad \left\{\frac{1}{2}\left[u(0)-u\right]^2 + U(1,x(0)+g-u(0)-v(0))\right\}, \quad s.a\colon 0 \le u(0) \le a\ x(0),$$

donde, de nuevo, las condiciones necesarias de Kuhn y Tucker son también suficientes. Dado, que la función $U(1,x(0)+g-u(0)-v(0))$ alcanza dos valores distintos, debido a las posibilidades encontradas en la etapa anterior de la resolución, para encontrar todos los casos deberemos resolver dos problemas y como análogo planteamiento puede realizarse para el segundo jugador, la búsqueda de las funciones de valor, en la primera etapa del juego, nos lleva a plantear y resolver cuatro problemas. La determinación de las soluciones óptimas de estos problemas así como las actuaciones conjuntas de ambos jugadores requiere que tengamos que considerar distintos casos dependiendo de los controles adoptados en la segunda etapa del juego. Así, si los controles de la segunda etapa son $u(1) = u, \quad v(1) = v$, con $0 \leq u < v \leq \alpha \; x(1)$ se nos plantean cuatro casos de los cuales solamente tres son válidos. Si los controles del segundo periodo son $u(1) = u, \quad v(1) = \alpha \; x(1)$ con $0 \leq u \leq \alpha \; x(1) < v$, el número de casos a estudiar es seis, pero el control nulo para el segundo jugador no es compatible con ninguno de los otros dos controles del primer jugador, además la región de validez en el plano $(g, \alpha \; x(0))$ de otro de los casos es vacía, por lo que también ahora solamente hay tres casos válidos. Por último, si los controles del segundo periodo son $u(1) = \alpha \; x(1), \quad v(1) = \alpha \; x(1)$ con $0 < \alpha \; x(1) < u < v$, nuevamente se presentan cuatro casos posibles de actuación conjunta, en función de las dos soluciones óptimas para cada jugador siendo solamente válidos tres.

Así pues, en el desarrollo del juego en dos etapas se han obtenido nueve estrategias de equilibrio feedback que recogemos en una tabla, cuya primera columna se refiere a los controles del primer jugador, la segunda a los controles del otro jugador y en la tercera columna recogemos la región de validez de la correspondiente estrategia equilibrio en el plano $(g, \alpha \; x(0))$, que posteriormente representamos. Los parámetros que aparecen en dicha tabla toman los valores :

$$a_1 = x(0) + g - u$$

$$a_2 = \left[(1 + \alpha^2)u - \alpha^2 v\right]$$

$$a_3 = x(0) + g$$

$$a_4 = (1 - \alpha^2)v - \alpha^2 u$$

$$a_5 = (1 - \alpha)x(0) + g \, ,$$

mientras que las regiones de validez, que son excluyentes, vienen definidas por las siguientes desigualdades:

A1: $\alpha \; x(0) \geq max\{v, v - \alpha \,(g - u - v)\}$

A2: $$max\left\{u, \frac{1}{1-a}(v + a\,u - a\,g)\right\} \le a\,x(0) < v$$

A3: $$\frac{1}{1-2a}(v - a\,g) \le a\,x(0) < u$$

B1: $$\frac{1}{1-2a}(u - a\,g) \le a\,x(0) < min\left\{u, \frac{1}{1-2a}(v - a\,g)\right\}$$

B2: $$max\left\{u, \frac{1}{1-a}\left[(1+a)u - a\,g\right]\right\} \le a\,x(0) <$$
$$< min\left\{\frac{1}{1-a}\left[v + a\,u - a\,g\right], \frac{1}{1-a+a^2}\left[(1-a)v + a^2(g-u)\right]\right\}$$

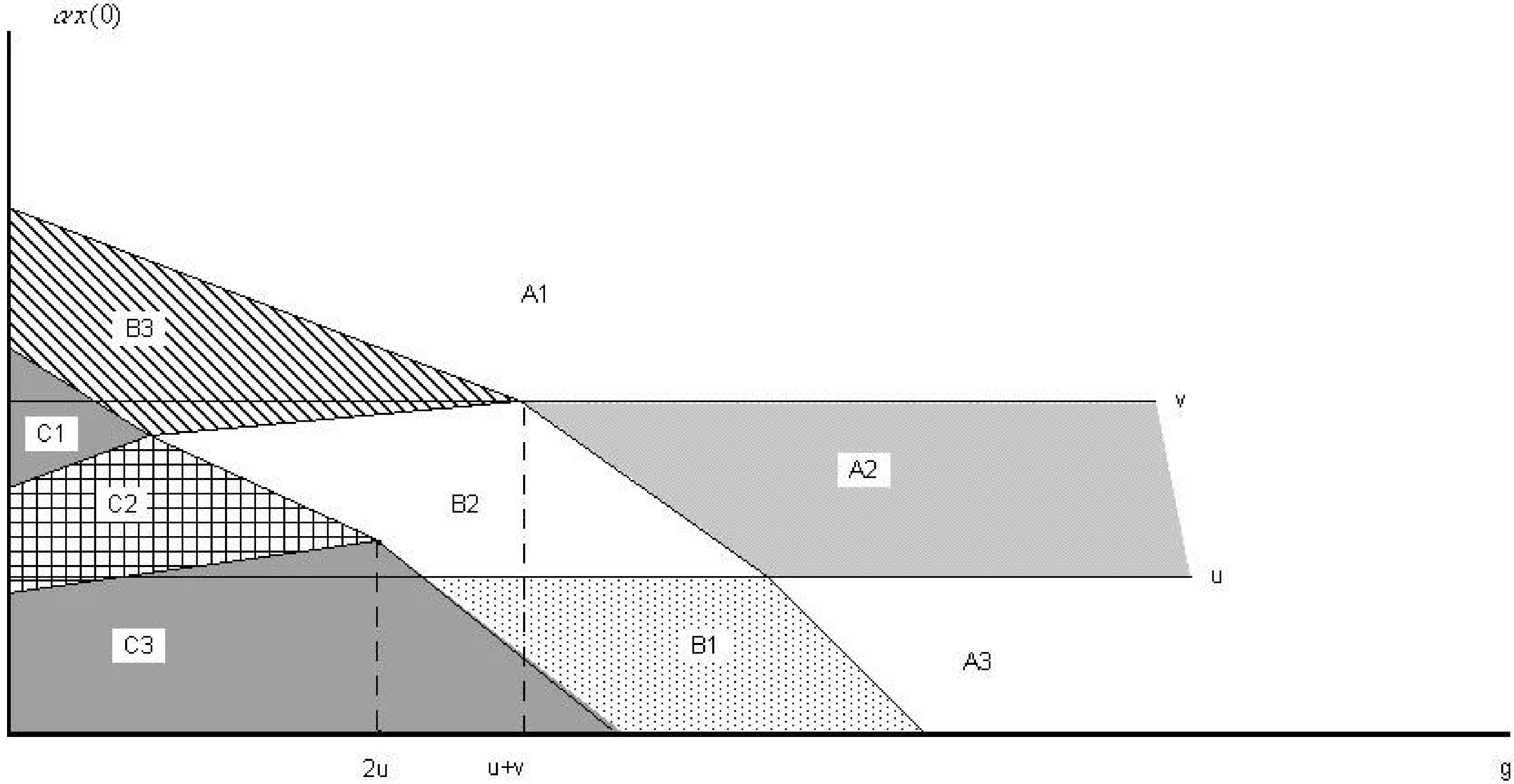
B3: $$max\left\{u, \left[(1+a+a^2)u - a\,g + (a-a^2)v\right], \frac{(1-a)v + a^2 g - a^2 u}{1-a+a^2}\right\} \le$$
$$\le a\,x(0) < \left[v - a\,(g-u-v)\right]$$

C1: $$\frac{(1-a)v + a^2(1-a)(v-u) + a^2 g}{1-a+2a^2} \le a\,x(0) <$$
$$< \left[(1+a+a^2)u - a\,g + (a-a^2)v\right]$$

C2: $$\frac{(1-a)u + a^2 g}{1-a+2a^2} \le a\,x(0) <$$
$$< min\left\{\frac{(1-a)v + a^2(1-a)(v-u) + a^2 g}{1-a+2a^2}, \frac{(1+a)u - a\,g}{1-a}\right\}$$

C3: $$a\,x(0) < min\left\{\frac{1}{1-2a}(u - a\,g), \frac{(1-a)u + a^2 g}{1-a+2a^2}\right\}$$

Controles de $P1$	**Controles de** $P2$	**Región de validez**
$u(1)=u,$ $u(0)=u$	$v(1)=v,$ $v(0)=v$	A1
$u(1)=u,$ $u(0)=u$	$v(1)=v,$ $v(0)=a\ x(0)$	A2
$u(1)=u,$ $u(0)=a\ x(0)$	$v(1)=v,$ $v(0)=a\ x(0)$	A3
$u(1)=u,$ $u(0)=a\ x(0)$	$v(1)=a\ x(1),$ $v(0)=a\ x(0)$	B1
$u(1)=u,$ $u(0)=u$	$v(1)=a\ x(1),$ $v(0)=a\ x(0)$	B2
$u(1)=u,$ $u(0)=u$	$v(1)=a\ x(1),$ $v(0)=\dfrac{(1-a)v+a^2a_1}{1+a^2}$	B3
$u(1)=a\ x(1),$ $u(0)=\dfrac{(1-a)a_2+a^2a_3}{1+2a^2}$	$v(1)=a\ x(1),$ $v(0)=\dfrac{(1-a)a_4+a^2a_3}{1+2a^2}$	C1
$u(1)=a\ x(1),$ $u(0)=\dfrac{(1-a)u+a^2a_5}{1+a^2}$	$v(1)=a\ x(1),$ $v(0)=a\ x(0)$	C2
$u(1)=a\ x(1),$ $u(0)=a\ x(0)$	$v(1)=a\ x(1),$ $v(0)=a\ x(0)$	C3



$\alpha x(0)$
A1
B3
v
C1
A2
C2
B2
u
C3
B1
A3
2u
u+v
g

4.- ANÁLISIS DE LAS ESTRATEGIAS DE EQUILIBRIO

Los resultados obtenidos en la sección anterior nos permiten asegurar la existencia de una estrategia de equilibrio feedbak en la que ambos jugadores cubren sus necesidades de agua en los dos periodos en los que se ha dividido el horizonte temporal del juego. En este caso las funciones de valor de los agricultores son obviamente nulas y esta estrategia de equilibrio es la óptima si la cantidad de agua que llega a la fuente supera a la suma de los objetivos de los agricultores y la cantidad de agua que puede disponer cada agricultor en el primer periodo supera al objetivo del agricultor con mayor demanda de agua; también esta estrategia es seguida por los agricultores cuando la cantidad de agua que llega a la fuente es menor que la suma de los objetivos de ambos pero ahora es necesario que la cantidad de agua de la que puede disponer cada agricultor en el primer periodo sea como mínimo el objetivo del agricultor con mayor demanda menos una proporción, que viene definida a través del parámetro impuesto por la Administración, de la variación del agua en la fuente en cada periodo si se cubren las necesidades de los agricultores. Notemos que la cantidad de agua en la fuente crece si $g > u + v$, se mantiene constante si $g = u + v$ mientras que si $g < u + v$ decrece.

Por otro lado, también hemos obtenido tres estrategias que tienen como característica que el primer jugador, esto es el agricultor que demanda menos agua, cubre sus necesidades en ambos periodos mientras que el otro agricultor sólo en una de estas estrategias cubre su demanda y únicamente en el segundo periodo.

En este último caso, durante el primer periodo obtiene lo previsto por la Administración pues su demanda supera a lo permitido por ésta para su consumo. En esta estrategia, la cantidad de agua que llega a la fuente nunca es menor que la suma de los objetivos de los agricultores y, por tanto, la cantidad de agua existente en la fuente al final del primer periodo es mayor que al comienzo, permitiendo al segundo jugador cubrir su demanda en el último periodo, en el que también aumenta la cantidad de agua en la fuente. Con esta estrategia el agricultor que demanda menos agua tiene una adecuación perfecta a sus objetivos y por consiguiente su función de valor es nula; sin embargo, el agricultor con mayor demanda no cubre sus necesidades en el primer periodo y por ello su función de valor es $\frac{1}{2}\left[a\ x(0)-v\right]^2$.

Cuando el agricultor con menor demanda cubre sus objetivos en ambos periodos y el agricultor con mayor demanda utiliza en cada periodo la proporción impuesta por la Administración, es debido a que al comienzo de cada uno de los dos periodos de riego, la cantidad máxima de agua disponible por cada agricultor está comprendida entre las necesidades de ambos agricultores. La cantidad de agua en la fuente crece si $g-u>a\ x(0)$, pero este crecimiento no es suficiente para permitir al segundo agricultor cubrir su demanda durante el segundo periodo. La cantidad de agua en la fuente puede mantenerse o disminuir lo que ocurrirá si $g-u\leq a\ x(0)$, la disminución no es excesiva, razón por la que el primer jugador cubre sus necesidades en el segundo periodo y el segundo jugador dispone del máximo consumo permitido por la Administración. La función de valor para este jugador es:

$$\frac{1}{2}\left[a\ x(0)-v\right]^2+\frac{1}{2}\left\{a\left[(1-a)x(0)+g-u\right]-v\right\}^2.$$

En la otra estrategia donde el agricultor con menor demanda cubre sus necesidades y el otro, en el segundo periodo, utiliza la proporción impuesta por la Administración y, en el primero, una cantidad a lo sumo igual a la impuesta por la Administración, se ha de verificar siempre que la cantidad de agua que llega a la fuente no supera a la suma de las necesidades de agua de ambos agricultores. La cantidad de agua de la fuente puede crecer, permanecer constante u disminuir; en el primer caso el crecimiento no es suficiente para que el segundo jugador cubra sus necesidades y si el nivel de la fuente disminuye, esta disminución ha de permitir siempre cubrir la demanda solicitada por el primer agricultor. La función de valor para el agricultor con mayor demanda es:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{(1-a)v+a^2a_1}{1+a^2}-v\right]^2+\frac{1}{2}\left[a\left(a_1-\frac{(1-a)v+a^2a_1}{1+a^2}\right)-v\right]^2,$$

mientras que para el agricultor con menor demanda es cero.

Cuando la cantidad de agua que llega a la fuente es mayor o igual que $\frac{1}{a}\left[v-(1-2a)u\right]$, la estrategia óptima es tal que, durante el primer periodo, los dos agricultores utilizan la proporción impuesta por la Administración y en el siguiente periodo cubren ambos sus necesidades; la que la región de validez en el plano $(g, a\ x(0))$ de esta estrategia la hemos denotado por A3. Ahora la cantidad de agua que, en el primer periodo, permite sacar la Administración es menor que las necesidades del agricultor que menos demanda y supera una determinada cantidad que viene dada en función de las necesidades del agricultor con mayor demanda y del agua constante que llega a la fuente que es normalmente alta. En este caso el agua en la fuente aumenta durante el primer periodo hasta conseguir, al menos, que al comienzo del segundo periodo exista un nivel de agua que permita a ambos agricultores cubrir sus necesidades. La función de valor del agricultor con mayores necesidades de riego supera a la del otro agricultor y viene dada por $\frac{1}{2}\left[a\ x(0)-v\right]^2$, mientras que para el agricultor que menos demanda su función de valor es $\frac{1}{2}\left[a\ x(0)-u\right]^2$.

Cuando la estrategia óptima para ambos jugadores, en el primer periodo de riego, es utilizar la cantidad de agua permitida por la Administración para en el segundo periodo, el agricultor con mayor demanda seguir esa misma política, mientras que el otro agricultor cubre su demanda, es porque al comienzo de la campaña de riego el caudal de la fuente no es lo suficientemente alto y los requerimientos de la Administración no llegan a alcanzar el nivel de demanda del agricultor con menos necesidades. El agua en la fuente crece hasta permitir a este último agricultor cubrir sus necesidades en el segundo periodo, pero no al otro agricultor. Las funciones de valor para los agricultores son:

$$U(0,x(0))=\frac{1}{2}\left[a\ x(0)-u\right]^2,$$

$$V(0,x(0))=\frac{1}{2}\left[a\ x(0)-v\right]^2+\frac{1}{2}\left[a\left((1-2a)x(0)+g\right)-v\right]^2.$$

Otra estrategia obtenida consiste en la utilización, en la segunda etapa, de toda la cantidad de agua permitida por la Administración, mientras que en la primera, la cantidad que sacan de la fuente no puede superar dicha exigencia. En este caso, el nivel de la fuente puede aumentar, permanecer constante o disminuir, pero nunca el nivel de agua al comienzo del segundo periodo será tal que la cuantía impuesta por la Administración supere las necesidades del agricultor con menor demanda; por ello esta estrategia sólo puede darse cuando el caudal de agua que llega a la fuente es pequeño. Las funciones de valor para cada agricultor son:

$$U(0,x(0)) = \frac{1}{2}\left[\frac{(1-\alpha)a_2 + \alpha^2 a_3}{1+2\alpha^2} - u\right]^2 + \frac{1}{2}\left[\alpha\left(a_3 - \frac{(1-\alpha)(a_2+a_4)+2\alpha^2 a_3}{1+2\alpha^2}\right) - u\right]^2,$$

$$V(0,x(0)) = \frac{1}{2}\left[\frac{(1-\alpha)a_4 + \alpha^2 a_3}{1+2\alpha^2} - v\right]^2 + \frac{1}{2}\left[\alpha\left(a_3 - \frac{(1-\alpha)(a_2+a_4)+2\alpha^2 a_3}{1+2\alpha^2}\right) - v\right]^2.$$

Existe una estrategia similar a la anteriormente comentada cuya región de validez está recogida en la tabla por C2. Ahora, el agricultor con mayor demanda sí utiliza, en el primer periodo de riego, la disponibilidad que le permite la Administración y también aquí, como antes, el nivel de agua de la fuente variará de un periodo a otro produciéndose idéntica situación, en el segundo periodo, en cuanto a las exigencias del agricultor con menor demanda. En esta estrategia el caudal de agua que llega a la fuente también puede ser escaso aunque puede superar al del caso anterior, pero siempre ha de ser a lo sumo menor que el doble de las necesidades del agricultor con menor demanda. Ahora, las funciones de valor de los agricultores son:

$$U(0,x(0)) = \frac{1}{2}\left[\frac{(1-\alpha)u + \alpha^2 a_5}{1+\alpha^2} - u\right]^2 + \frac{1}{2}\left[\alpha\left(a_5 - \frac{(1-\alpha)u+\alpha^2 a_5}{1+\alpha^2}\right) - u\right]^2,$$

$$V(0,x(0)) = \frac{1}{2}\left[\alpha\, x(0) - v\right]^2 + \frac{1}{2}\left[\alpha\left(a_5 - \frac{(1-\alpha)u+\alpha^2 a_5}{1+\alpha^2}\right) - v\right]^2.$$

Por último, también los agricultores pueden realizar la campaña de riego extrayendo de la fuente en cada periodo una cantidad de agua equivalente a las limitaciones que les impone la Administración. Es un caso similar a los dos últimos comentados pero en el que no tiene por qué ocurrir la última exigencia impuesta sobre el caudal de agua que llega a la fuente. Sus funciones de valor son ahora:

$$U(0,x(0)) = \frac{1}{2}\left[\alpha\, x(0) - u\right]^2 + \frac{1}{2}\left[\alpha\left[(1-2\alpha)x(0) + g\right] - u\right]^2,$$

$$V(0,x(0)) = \frac{1}{2}\left[a\ x(0) - v\right]^2 + \frac{1}{2}\left[a\ \left[(1-2a)x(0) + g\right] - v\right]^2.$$

Veamos mediante un ejemplo cómo serían los resultados dependiendo de los valores que asignemos a los parámetros del modelo.

Supongamos que $a = 1/3$, $u = 200$, $v = 300$, $g = 400$ y la cantidad de agua en la fuente en el momento inicial $x(0) = 500$, por tanto, la cantidad máxima de consumo permitida por la Administración es $500/3$. En este caso es fácil comprobar que nos encontramos situados en la región C3 del plano $(g, a\ x(0))$ y la estrategia feedbak en el juego en dos periodos es $u(0) = a\ x(0), v(0) = a\ x(0), u(1) = a\ x(1), v(1) = a\ x(1)$, de acuerdo con los resultados anteriormente obtenidos. Esta estrategia es fuertemente consistente en el tiempo, en efecto, supongamos que los dos agricultores realizan durante el primer periodo un consumo de $u(0) = 120, v(0) = 150$, entonces al comienzo de segundo periodo la cantidad de agua en la fuente es $x(1) = 630$ y, por tanto, $a\ x(1) = 210$ con lo que los controles a aplicar en el segundo periodo son $u(1) = u$ y $v(1) = a\ x(1)$ que es la estrategia feedback para un juego con un sólo periodo.

La estrategia es $u(0) = a\ x(0), v(0) = a\ x(0), u(1) = a\ x(1), v(1) = a\ x(1)$ es en sí misma débilmente consistente en el tiempo, pues, obviamente, si en el primer periodo ambos jugadores consumen $a\ x(0)$, entonces $a\ x(1) = 188{,}89$ por lo que en el otro periodo se tendría que $u(1) = a\ x(1)$ y $v(1) = a\ x(1)$ que coincide con los valores de los controles en la segunda etapa del juego en dos periodos.

BIBLIOGRAFÍA

BASAR, T. ; OLSDER, G. J. (1995): *Dynamic Noncooperative Game Theory*. Academic Press. London.

CHUL, C. K.; CHEN, G. (1989): *Linear Systems and Optimal Control.* Springer-Verlag. Berlín.

KAITALA, V.; HÄMÄLÄINEN, R. P. and RUUSUNEN, J. (1985): "On the Analysis of Equilibria and Bargaining in a Fishery Game" en *Optimal Control Theory and Economic Analysis 2.* (G. Feichtinger Ed.). Nort-Holland. Amsterdam, pp. 593-606.

JORGENSEN, S.; SORGER, G. (1990): Feedback Nask Equilibria in a Problem of Optimal Fishery Management. *Journal of Optimization Theory and Applications.* Vol. 64, nº 2, pp. 293-310.

LEVHARI, D.; MIRMAN, L. J. (1980): The Great Fish War: An Example Using a Dynamic Cournot-Nash Solution. *The Bell Journal of Economics.* pp. 322-334.

LEY 29/1985 de 2 de Agosto, DE AGUAS (1993): *Legislación sobre aguas*. Civitas.

PALLAGE, S. (1996): A Two-Country Model of Renewable Resource Sharing. Working Paper nº 41. University of Québec.

SOTO TORRES M. D. (1996): Distribución de aguas para regadíos. *5º Congreso de Economía Regional de Castilla y León. Comunicaciones 1.* pp. 82-96. Ávila.