VOTO APROBATORIO GRADUAL: UNA GENERALIZACIÓN DE LOS MÉTODOS DE BORDA Y "APPROVAL VOTING" *

José Luis García Lapresta – Miguel Martínez Panero

Departamento de Economía Aplicada (Matemáticas), Universidad de Valladolid.

Avda. Valle de Esgueva 6, 47011 Valladolid.

E-mail: lapresta@cpd.uva.es y panero@eco.uva.es

RESUMEN: En este trabajo se introduce el voto aprobatorio gradual, procedimiento con el que cada elector asigna a los candidatos unos índices del grado de aceptación merecido en cada caso, con un rango de valores entre 0 y 1. Este método generaliza el de "approval voting" (voto aprobatorio), en el cual los agentes aprueban o desaprueban a cuantos candidatos deseen, otorgándoles o negándoles su voto de forma absoluta. Además, el voto aprobatorio gradual generaliza también la regla de Borda, si en ésta se normaliza la escala de puntuaciones en el intervalo unidad. El procedimiento propuesto hereda algunas propiedades deseables y subsana ciertos inconvenientes de los métodos que generaliza. Así, la flexibilidad de la regla de Borda se ve incluso mejorada, al evitar la constricción de los electores en el rango de valores disponibles. Por otra parte, al efectuarse las puntuaciones por separado, como ocurre con el voto aprobatorio, el nuevo método queda redimido del incumplimiento del principio de independencia de alternativas irrelevantes, principal inconveniente de la regla de Borda. Además comparte con ambos procedimientos el dar como vencedor al candidato o candidatos con mayor puntuación, lo que impide la aparición de ciclos en la decisión colectiva. El voto aprobatorio gradual constituye, en suma, un nexo entre dos métodos de votación en principio dispares y proporciona una visión integradora en un campo tan diverso como el de los sistemas de votación.

PALABRAS CLAVE: "Approval voting", regla de Borda, sistemas de votación, funciones de elección.

* Este trabajo está parcialmente financiado por la Consejería de Educación y Cultura de la Junta de Castilla y León (proyecto VA09/98).

1. Introducción

Una de las formas de modelizar los procesos de toma de decisiones colectivas consiste en construir una función de elección[1] social que tenga en cuenta las preferencias de cada uno de los agentes decisores. Cuando se dispone de una relación de preferencia colectiva acíclica[2] P sobre un conjunto finito de alternativas X, resultante de la agregación de las preferencias individuales de estos agentes, se obtiene una idónea función de elección social seleccionando, para cada subconjunto no vacío A de posibles alternativas, aquéllas que no son preferidas colectivamente por ninguna otra, es decir, el conjunto de los elementos maximales[3] de A para la relación de preferencia P:

$$e(A)=\{x\in A \mid \forall\, y\in A \quad \text{no } (yPx)\}.$$

Un procedimiento de votación que garantiza que la preferencia colectiva sea acíclica, de hecho negativamente transitiva[4], es el de Borda: cada uno de los votantes ordena, conforme a su escala de prioridades, la totalidad de las posibles alternativas y asigna a cada cual una puntuación acorde con la ordenación efectuada, de tal forma que resulta elegida la alternativa con mayor puntuación total. Este método, que cuenta con una tradición de al menos dos siglos[5], ha sido utilizado en numerosos tipos de elecciones, tanto por su

---

[1] Una función de elección sobre un conjunto del alternativas X es cualquier función e: $\wp(X)-\{\varnothing\}\to\wp(X)$ tal que para cualquier subconjunto no vacío de X, se verifica $\varnothing\neq e(A)\subseteq A$.

[2] Una relación ordinaria de preferencia P es acíclica si de $x_{i_1}Px_{i_2}$, $x_{i_2}Px_{i_3}$,..., $x_{i_{q-1}}Px_{i_q}$ no se sigue que $x_{i_q}Px_{i_1}$. La aciclicidad es un supuesto de racionalidad comunmente considerado en la literatura para las preferencias de los agentes individuales, pero puede perderse al agregar las preferencias individuales en una colectiva.

[3] Sen (1970, Lema 1*1) demuestra que una condición necesaria y suficiente para asegurar la existencia de maximales en subconjuntos finitos no vacíos y, por tanto, que la función de elección esté bien definida, es que P sea acíclica.

[4] Una condición más fuerte que la aciclicidad para las relaciones de preferencia es la transitividad negativa: si ni x_1Px_2 ni x_2Px_3, entonces tampoco ocurre x_1Px_3.

[5] Aunque introducido por Borda en 1770, existen precursores de este método de votación: Plinio el Joven, Ramón Llull, Nicolás de Cusa, etc. Véase a este respecto McLean – Urken (1995, pp. 67 y ss.).

comodidad como por el hecho de que permite mostrar en cierta forma la intensidad de preferencia entre los candidatos. Adolece, no obstante, de inconvenientes tales como el incumplir el axioma de independencia de alternativas irrelevantes de Arrow (1963), y de tratarse de un método manipulable, si bien este último aspecto ha sido revisado por Dummet (1998).

Más reciente es el método de "approval voting" (voto aprobatorio[6]), término acuñado por Weber (1978), cuyo impulso fundamental se debe a Brams y Fishburn, a partir del último tercio de los años setenta[7]. Mediante este procedimiento cada elector vota a cuantos candidatos desee: aquéllos a los que "aprueba" u otorga su beneplácito, resultando elegido el que mayor número de votos recibe. Brams – Fishburn (1978, 1983) han señalado las principales ventajas de este sistema: mayor flexibilidad y versatilidad que otros métodos de voto único, inhibición del absentismo en caso de duda por parte de los votantes, representatividad y legitimidad en la elección final, idoneidad de puesta en práctica en diversos procesos de toma de decisiones (por ejemplo, en elecciones primarias y formación de comisiones), etc. Por otro lado, Gehrlein – Lepelley (1998) han señalado que tiene mayor eficiencia de Condorcet que el método de mayoría simple, y que dicha eficiencia se puede incrementar acotando el número de votos aprobatorios de los electores[8].

Pero también desde diversas instancias se han señalado inconvenientes, de los que se han hecho eco Brams – Fishburn (1983): se pierde la intensidad de preferencia reflejada en los métodos de voto ponderado ("ranked voting systems"), de manera que se tiene menos posibilidad por parte de los agentes de diferenciar entre los candidatos; puede propiciar por parte de los electores, en un entorno de racionalidad limitada, orientaciones de voto que tengan como resultado el que queden aprobadas o denegadas simultáneamente alternativas

[6] Así lo traduce Barberà (1984), aunque el traductor del libro de Mueller (1984) lo hace como "voto de aprobación" e incluso, de forma menos literal, podría hablarse de "voto de aceptación". En este sentido, "approval voting" ha sido vertido al francés como "vote par consensus", ya que los agentes señalan aquellos candidatos "consentidos" por ellos.

[7] Entre los antecedentes de este método cabe resaltar la elección del Dux de Venecia, analizada por Lines (1986). Véase también McLean - Urken (1995, p. 22).

[8] Véase Brams (1990 b) en lo relativo al voto aprobatorio con restricciones ("constrained approval voting").

de distinto signo, incluso contradictorias, en sus preferencias[9]; es un método muy sensible al número de votantes y candidatos, etc. Por su parte, Saari (1995, p. 181) ha señalado que el voto aprobatorio hereda propiedades no deseables de los métodos plural (los electores votan a un solo candidato) y antiplural (los electores votan obligatoriamente a todos los candidatos excepto a uno). En líneas generales, Saari y su escuela han constituido una línea crítica al voto aprobatorio propugnado por Brams y Fishburn, y defendido el método de Borda como, en cierto sentido, el mejor de los posibles[10].

Aunque el voto aprobatorio, junto con los conocidos métodos de voto único (mayorías simple y absoluta, etc.) entra en el marco de los métodos de voto no ponderado[11] ("unranked voting systems"), se ha estudiado ampliamente su relación con el procedimiento de Borda, tanto normativa como experimentalmente[12].

En este trabajo nosotros generalizamos el voto aprobatorio mediante el uso de índices de aceptación de los candidatos por parte de los agentes, con valores entre 0 y 1 (voto aprobatorio gradual). Este procedimiento, además, también generaliza el de Borda, eliminando de paso alguno de sus inconvenientes: espectro prefijado de puntuaciones y violación del principio de independencia de alternativas irrelevantes, principalmente. El método que presentamos constituye así, en la línea antes apuntada, un nexo que integra métodos en principio tan dispares como los de Borda y de voto aprobatorio.

El trabajo se organiza como sigue. Después de introducir la notación necesaria, en la sección 2 formalizamos los métodos de Borda y de voto aprobatorio. En la sección 3

---

[9] Por ejemplo, un elector interesado prioritariamente en dar un "voto de castigo" a un candidato, votaría por el resto, con lo que quedarían aparejadas en su voto alternativas de orientación previsiblemente distinta.

[10] Sobre este particular véase Saari (1985).

[11] No obstante, Straffin Jr. (1980, pp.47 y ss.), introduce un "umbral aprobatorio" para cada votante, con el que el voto aprobatorio puede reflejar, de alguna manera, las intensidades de preferencia de los agentes. En la última sección desarrollaremos este interesante aspecto al comparar los sistemas de votación que aparecen en el presente trabajo.

[12] Véanse Weber (1978 y 1995), en el aspecto teórico, y Nurmi (1987, pp. 56 y ss.), Forsythe – Rietz – Myerson – Weber (1996) y Straffin Jr. (1980), en el plano empírico.

introducimos el voto aprobatorio gradual como generalización de este último, cuando se admite que los agentes se manifiesten de forma gradual. Así mismo, como ya se ha anunciado, veremos que también se obtiene una generalización de la regla de Borda sin más que normalizar las puntuaciones de ésta. Por fin, en la sección 4, comparamos los procedimientos propuestos a través de un ejemplo, para concluir con algunos comentarios sobre los resultados obtenidos.

Notación

Consideraremos un conjunto finito de alternativas (o candidatos) $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, con $n \geq 3$, y m agentes (electores o votantes), con $m \geq 3$. Se dirá que P es una relación de preferencia sobre X si P es una relación binaria asimétrica, esto es: si $x_i P x_j$, entonces no puede ocurrir $x_j P x_i$. La relación de indiferencia I asociada a una relación de preferencia P recoge la ausencia de preferencia: $x_i I x_j$ significa que ni $x_i P x_j$ ni $x_j P x_i$. Por fin, la relación de preferencia débil, $P \cup I$, contempla tanto la preferencia como la indiferencia: $x_i (P \cup I)\, x_j$ quiere decir que $x_i P x_j$ o $x_i I x_j$.

2. Método de Borda *versus* voto aprobatorio

Presentamos a continuación dos métodos de puntuación ("scoring methods", "vote-counting schemes") habitualmente usados en la práctica y estudiados en la literatura[13]. Existen diferencias congénitas entre ambos: así el método de Borda fuerza a los agentes a comparar unos candidatos con otros para estimar sus puntuaciones, mientras que el voto aprobatorio acepta o no a cada candidato sin tener en cuenta, en principio, su relación con

[13] Una variante del método de Borda es la utilizada en el célebre concurso televisivo de Eurovisión. Por otro lado, el método de voto aprobatorio se ha usado en diversas asociaciones profesionales y se ha propugnado su uso en el estado de Nueva York. Véanse Brams (1990 a) y el apéndice de Brams (1983).

los demás. No obstante, ambos procedimientos se pueden integrar en un marco común[14], y, en este sentido, la descripción que hacemos de los mismos sigue un discurso paralelo.

2.1. Formulación del método de Borda

El método de votación de Borda consiste en que cada uno de los *m* agentes asigna, a partir de su propia relación de preferencia P^j, acíclica[15], una puntuación a cada candidato que corresponde al número de aspirantes a concurso que para él son peores[16]: $r_i^j = \#\{x_k \in X \mid x_i P^j x_k\}$ es el número de candidatos que el elector *j* entiende que son peores que el candidato x_i. Obsérvese que $r_i^j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Así, se construye la matriz de puntuaciones $\begin{pmatrix} r_1^1 & r_1^2 & \ldots & r_1^m \\ r_2^1 & r_2^2 & \ldots & r_2^m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_n^1 & r_n^2 & \ldots & r_n^m \end{pmatrix}$, y se le asigna a cada candidato la suma de las puntuaciones individuales: $r_i = \sum_{j=1}^{m} r_i^j$ es la puntuación total obtenida por el candidato x_i, que corresponde a la suma de los coeficientes de la fila *i*-ésima de la matriz anterior. Esta puntuación define una relación de preferencia colectiva: $x_i P_B\, x_k \Leftrightarrow r_i > r_k$, que es negativamente transitiva, luego acíclica. Por tanto tiene sentido definir una función de elección colectiva $e_B : \wp(X) - \{\varnothing\} \to \wp(X)$ por:

$$e_B(A) = \{x_i \in A \mid \forall x_k \in A \quad x_i (P_B \cup I_B) x_k\} = \{x_i \in A \mid \forall x_k \in A \quad r_i \geq r_k\},$$

que selecciona como ganador al candidato de *A* con mayor puntuación colectiva total. En caso de empate se puede establecer algún sistema para dirimirlo, repitiendo la votación

[14] Véanse a este respecto Fishburn (1990) y Weber (1995), quienes confrontan también estos procedimientos con el método de mayoría ("plurality method").

[15] Originalmente Borda supuso que los agentes tenían completamente ordenadas las alternativas, sin llegar a mostrar en ningún caso indiferencia entre dos de ellas.

[16] Esta forma de entender la puntuación de las opciones, implícita en la propuesta de Borda, fue puesta de manifiesto por Condorcet. A este respecto, véase McLean – Urken (1995, pp. 81-89). También aparece en Morales (1805, pp. 18 y ss.).

entre los candidatos en litigio por algún procedimiento establecido, o bien escogiendo como ganador al candidato con mayor número de puntuaciones superiores y, si el empate persistiera, considerando las segundas mejores puntuaciones como criterio, y así sucesivamente. En último extremo, siempre queda el azar como decisor.

Tal como señalan Straffin Jr. (1980, p. 27) y Mueller (1979, p. 73), aunque el ganador por el método de Borda puede no ser el mejor para la mayoría de los votantes, es el que tiene una más alta posición en el promedio de las preferencias de los mismos.

2.2. Formulación del voto aprobatorio

El método de voto aprobatorio ("approval voting") consiste en que cada elector muestra su aprobación o desaprobación sobre cada uno de los candidatos. Se puede formalizar lo anterior definiendo el índice binario:

$$r_i^j = \begin{cases} 1, \text{ si el elector } j \text{ aprueba al candidato } x_i, \\ 0, \text{ si el elector } j \text{ desaprueba al candidato } x_i. \end{cases}$$

Así, se construye la matriz booleana $\begin{pmatrix} r_1^1 & r_1^2 & \dots & r_1^m \\ r_2^1 & r_2^2 & \dots & r_2^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_n^1 & r_n^2 & \dots & r_n^m \end{pmatrix}$, y se le asigna a cada candidato la suma de puntuaciones individuales: $r_i = \sum_{j=1}^{m} r_i^j$ es la puntuación total obtenida por el candidato x_i, que corresponde a la suma de los coeficientes de la fila *i*-ésima. Al igual que en el método de Borda, esta puntuación define una relación de preferencia colectiva $x_i P_{VA}\, x_k \Leftrightarrow r_i > r_k$, que es negativamente transitiva. Así mismo, se define la función de elección colectiva $e_{VA} : \wp(X) - \{\varnothing\} \to \wp(X)$ por:

$$e_{VA}(A) = \{x_i \in A \,|\, \forall x_k \in A \quad x_i (P_{VA} \cup I_{VA})\, x_k\} = \{x_i \in A \,|\, \forall x_k \in A \quad r_i \geq r_k\},$$

que selecciona como ganador al candidato con mayor puntuación colectiva.

Hay que indicar que, para un agente dado, tiene el mismo efecto en el cómputo final aprobar o desaprobar globalmente al colectivo de candidatos, por lo que en realidad se tienen $2^n - 1$ posibles disposiciones de voto aprobatorio. Lo anteriormente señalado da al citado método mucha más versatilidad que la regla de Borda anteriormente expuesta, ya que ésta, en ausencia de indiferencia, tiene solamente *n!* posibles formas de asignar las puntuaciones disponibles para cada votante.

Como veremos a continuación, los métodos formulados en esta sección se pueden ver como casos particulares de un procedimiento más general, que denominamos "voto aprobatorio gradual". Para ello permitiremos a los electores manifestar sus grados de aceptación sobre los candidatos con valores cualesquiera entre 0 y 1. Es la misma filosofía subyacente a la generalización de las relaciones de preferencia ordinarias mediante relaciones binarias difusas, donde estas últimas resultan ser un instrumento más fiel para modelizar las preferencias de los agentes.

3. Voto aprobatorio gradual

El método de votación que presentamos permite a los electores graduar libremente el grado de aceptación que le merecen los candidatos entre 0 y 1, lo cual[17] constituye una generalización natural del método de voto aprobatorio y a la vez del método de Borda. En efecto, en este último procedimiento los electores puntúan a los candidatos con un rango de valores enteros[18] entre 0 y $n-1$. Si éstos se normalizan, dividiéndolos por $n-1$, cambia la

[17] Las críticas y justificación a este rango de valores puede verse en Straffin Jr. (1980, p. 48), quien se manifiesta partidario, desde un punto de vista formal, de entender las intensidades en las puntuaciones de los agentes como loterías.

[18] Esta escala de valores le fue criticada a Morales (1805, pp. 6 y ss.), matemático ilustrado español defensor del método de Borda, por no respetar la libertad de puntuación de los electores ni reflejar justamente el mérito de los candidatos. Estos mismos inconvenientes fueron señalados con anterioridad al propio Borda (Véase Black (1958), pp. 156 y ss.). En ambos casos, la justificación de las puntuaciones empleadas se funda en que éstas reflejan el número de veces que cada candidato vence a sus oponentes en confrontaciones por pares.

escala, pero no la ordenación, variando entonces las puntuaciones en el intervalo [0, 1], con valores $0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, ..., 1.$ Observemos que, en cambio, en el método de voto aprobatorio, sólo se dan como posibles puntuaciones los valores extremos de las anteriores: 0 y 1. En ambos casos resultan elegidos los candidatos cuya suma de puntuaciones individuales es mayor.

3.1. Formulación del voto aprobatorio gradual

En el método de votación que presentamos a continuación, cada elector indica el grado de aprobación o consentimiento recibido por cada uno de los candidatos. Denotamos por $s_i^j \in [0, 1]$ el grado de aprobación que para el elector j merece el candidato x_i, e integramos estos coeficientes en la matriz de puntuaciones:

$$\begin{pmatrix} s_1^1 & s_1^2 & \dots & s_1^m \\ s_2^1 & s_2^2 & \dots & s_2^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_n^1 & s_n^2 & \dots & s_n^m \end{pmatrix}.$$

Podríamos definir entonces, como hicimos en la sección anterior, para cada candidato x_i , la suma de las puntuaciones individuales: $s_i = \sum_{j=1}^{m} s_i^j$ sería así la puntuación total obtenida por el candidato x_i, que corresponde a la suma de los valores de la fila i-ésima, cuyo mayor valor determinaría el candidato ganador. Ahora bien, interesa que estas puntuaciones o índices colectivos de aceptación tomen valores entre 0 y 1, al igual que ocurre con las individuales. Para ello, con generalidad, fijada una función f: $[0, 1]^m \rightarrow [0, 1]$ definiremos para cada candidato x_i la puntuación colectiva $s_i = f(s_i^1, s_i^2, ..., s_i^m)$. Así, queda definida una relación de preferencia colectiva $x_i P_f x_k \Leftrightarrow s_i > s_k$, que es negativamente transitiva. Con

---

Laplace, por su parte, fundamentó este espectro de puntuaciones con argumentos de tipo probabilístico sobre las "estimaciones latentes" de los agentes, recientemente reformulados en Tanguiane (1991, pp. 80 y ss.), que ya prefiguran lo que nosotros entendemos por voto aprobatorio gradual.

este enfoque, para que P_f tenga propiedades deseables de representatividad, se pueden imponer a f propiedades razonables como:

- Idempotencia: $\forall\ a \in [0, 1] \quad f(a, a,..., a) = a$, que garantiza el respeto a la unanimidad.

- Simetría: $f(a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, ..., a_{\sigma(m)}) = f(a_1, a_2, ..., a_m)$ para cualquier permutación σ de $\{1, 2,..., m\}$, que garantiza el respeto al anonimato.

- Monotonía : $\forall\ (a_1, a_2, ..., a_m),\ (b_1, b_2, ..., b_m) \in [0, 1]^m$, con $a_i \leq b_i$, se verifica $f(a_1, a_2, ..., a_m) \leq f(b_1, b_2, ..., b_m)$, lo que significa que si todos los electores mantienen o mejoran su opinión sobre los candidatos, colectivamente sucede lo mismo.

- Continuidad, con la que pequeñas variaciones en las puntuaciones individuales no producen cambios drásticos en la puntuación colectiva.

- $\forall\ (a_1, a_2, ..., a_m) \in [0, 1]^m$
  $\min\{a_1, a_2, ..., a_m\} \leq f(a_1, a_2, ..., a_m) \leq \max\{a_1, a_2, ..., a_m\}$, que asegura que la puntuación colectiva de cada candidato se encuentra entre las puntuaciones individuales mínima y máxima.

Por otra parte, se define la función de elección colectiva $e_f : \wp(X) - \{\emptyset\} \to \wp(X)$ por:

$$e_f(A) = \{x_i \in A \mid \forall x_k \in A \quad x_i (P_f \cup I_f) x_k\} = \{x_i \in A \mid \forall x_k \in A \quad s_i \geq s_k\}.$$

Entonces, si consideremos la media aritmética:

$$f(a_1, a_2, ..., a_m) = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_m}{m},$$

que goza simultáneamente de todas las propiedades anteriores[19], este método de votación generaliza tanto al de Borda normalizado como al de voto aprobatorio:

[19] Sobre la media aritmética y otros tipos de media como procedimiento de agregación, véase García Lapresta – Llamazares (1999).

- Si en la línea apuntada, definimos para el método de Borda $s_i^j = \frac{r_i^j}{n-1}$, entonces

$$s_i = \frac{s_i^1 + s_i^2 + \cdots + s_i^m}{m} = \frac{r_i^1 + r_i^2 + \cdots + r_i^m}{m(n-1)} \in [0,1].$$

Se tiene así $P_f = P_B$, $I_f = I_B$ y $e_f = e_B$. Es decir, la regla de Borda es un caso particular de voto aprobatorio gradual, donde las puntuaciones son equidistantes.

- Paralelamente, si para el voto aprobatorio de índices de aprobación $r_i^j \in \{0,1\}$ consideramos $s_i^j = r_i^j$ y $s_i = \frac{s_i^1 + s_i^2 + \cdots + s_i^m}{m} \in [0,1]$, se obtiene $P_f = P_{VA}$, $I_f = I_{VA}$ y $e_f = e_{VA}$. Esto significa que el voto aprobatorio es un caso límite de lo que hemos denominado voto aprobatorio gradual, ya que este procedimiento contempla todas las posibles puntuaciones en el intervalo [0, 1], mientras que el voto aprobatorio cuenta únicamente con los valores extremos del espectro anterior.

Con la generalización recién presentada, no sólo se consigue dar una visión integradora de los sistemas de voto aprobatorio y Borda, sino que también se subsanan alguno de los inconvenientes señalados a estos métodos. Así, por ejemplo, la restricción en las puntuaciones señalada para el método de Borda, pero también objeto de crítica en el voto aprobatorio, toda vez que candidatos de todo punto distintos en las prioridades de los votantes pueden quedar aparejados en sus manifestaciones binarias. Además, el método de voto aprobatorio gradual hereda del método aprobatorio el cumplimiento del principio de independencia de alternativas irrelevantes: por la forma en que han sido definidos ambos métodos, la interferencia de nuevos candidatos no hace variar los índices de aceptación de los aspirantes en pugna, ya que su valoración se realiza por separado en cada caso. No ocurre así, como ya se ha señalado, en el método de Borda, y es una buena razón para introducir el método de voto aprobatorio gradual, entendido éste como un método de Borda más flexible y con una mayor adherencia a la realidad que el clásico.

4. Análisis comparativo y consideraciones finales

Supongamos que 3 electores manifiestan sus índices de aceptación, con valores posibles entre 0 y 1, sobre 4 candidatos, tal como aparece recogido en la Tabla 1:

		ELECTORES		
		1	**2**	**3**
Candidatos	x_1	0	0.3	1
	x_2	0.4	0.5	1
	x_3	0.5	0.7	0.3
	x_4	0.8	0.6	0.2

Tabla 1

Según hemos visto, la media aritmética de los índices de cada fila refleja la puntuación colectiva asignada a cada candidato por el método de voto aprobatorio gradual.

Ahora bien, si estos mismos agentes tuviesen que dar su aprobación o desaprobación a cada candidato de forma binaria, sin matices, cabe pensar en la existencia de un “umbral aprobatorio” a, para cada agente, que delimite si los índices de aceptación (que, siguiendo a Laplace, podemos entender como estimaciones latentes de dicho agente) se han de verter como votos aprobatorios otorgados o negados a cada candidato en cuestión. En términos formales, si s_i^j son los índices de aceptación y r_i^j los índices aprobatorios correspondientes, se tendrá

$$\begin{cases} s_i^j > a \rightarrow r_i^j = 1, \\ s_i^j \leq a \rightarrow r_i^j = 0. \end{cases}$$

En nuestro ejemplo consideraremos 3 tipos de umbral aprobatorio:

- $a = \frac{1}{2}$. Aunque hemos indicado que el umbral depende de cada agente, en primera instancia supondremos que todos ellos tienen su "fiel de la balanza" de puntuaciones en el término medio del espectro de valores posibles. Notemos, no obstante, que si un agente asignase todas sus puntuaciones con valores superiores a $\frac{1}{2}$ (o bien inferiores), su voto aprobatorio no tendría valor en el cómputo final, según hemos indicado. Estas consideraciones de efectividad y "voto útil" han dado pie a considerar otro tipo de umbrales.

- $a = \bar{s}^*$, media de valores extremos para cada agente (Straffin Jr. (1980) y Fishburn (1990)). Este último justifica este umbral basándose en pruebas empíricas. Con el símil anterior, el "fiel de la balanza" de cada elector se sitúa en este caso en el término medio de las puntuaciones máxima y mínima otorgadas.

- $a = \bar{s}$, media aritmética de todos los valores asignados (Weber (1978), Straffin Jr. (1980) y Brams – Fishburn (1983). Se ponderan, por tanto, todas las puntuaciones otorgadas por cada elector.

Brams – Fishburn (1983) han considerado también un umbral a de tipo mediana, que escinde el espectro de puntuaciones de manera que, para cada agente, el número de puntuaciones que supere el umbral y el que quede por debajo sea aproximadamente el mismo. No obstante, en nuestro ejemplo no aparece recogido este caso.

Por otro lado, la ordenación para cada agente de los candidatos a partir de los índices de aceptación otorgados, permite una asignación de puntuaciones por el método de Borda.

En la Tabla 2 aparecen las puntuaciones colectivas obtenidas por los candidatos para cada uno de los métodos empleados: voto aprobatorio gradual (V.A.G.); voto aprobatorio (V.A.), según el umbral aprobatorio considerado ($\frac{1}{2}$, $\bar{s}^*$, $\bar{s}$); y regla de Borda. Se ha sombreado la puntuación correspondiente al candidato ganador para cada método utilizado.

		ELECTORES			V.A.G.	V.A.			BORDA
		1	**2**	**3**		½	$\bar{s}^*$	$\bar{s}$	
Candidatos	x_1	0	0.3	1	1.3 / 3	1	1	1	2
	x_2	0.4	0.5	1	1.9 / 3	1	1	1	4
	x_3	0.5	0.7	0.3	1.5 / 3	1	2	2	6
	x_4	0.8	0.6	0.2	1.6 / 3	2	2	2	5
Umbral Aprobatorio		$\bar{s}_1^* = 0.4$	$\bar{s}_2^* = 0.5$	$\bar{s}_3^* = 0.6$					
		$\bar{s}_1 = 0.425$	$\bar{s}_2 = 0.525$	$\bar{s}_3 = 0.625$					

Tabla 2

Se observa que, mediante el voto aprobatorio gradual, es x_2 quien merece una mayor aceptación colectiva y resultaría vencedor. Ahora bien, a excepción del elector **3**, que le ha dado la máxima puntuación, los índices de aceptación del resto de votantes son moderados. Esto repercute en que, al ser sometido dicho candidato a voto aprobatorio, quede en clara desventaja frente a los candidatos x_3 y x_4 para los umbrales $\bar{s}^*$ y $\bar{s}$ mientras que para el umbral ½ empata con x_3 y es vencido por x_4. Nótese que estos dos últimos candidatos han sido favorecidos por los electores **1** y **2** con puntuaciones aceptables, y sólo se han visto desaprobados, con índices de aceptación bajos, por el mismo elector **3** que ha favorecido a x_2 con una puntuación máxima. Así x_3 y x_4 resultan ganadores por el método de voto aprobatorio: x_3, para los umbrales $\bar{s}^*$ y $\bar{s}$ y x_4 en cualquier caso. El método de Borda da como vencedor a x_3, por ser el candidato con mejor posición relativa frente a sus oponentes para el colectivo de los electores.

Se constata así mismo que, en el ejemplo presentado, los procedimientos de voto aprobatorio gradual, de voto aprobatorio con $\alpha = ½$ y de Borda dan un resultado claramente definido, con ganador único en primera votación, mientras que el voto aprobatorio con los otros dos umbrales considerados ha dado lugar a empates que tendrían que deshacerse mediante nuevas votaciones o procedimientos. Cabe afirmar que cuanta mayor libertad haya en el espectro de puntuaciones disponibles por parte de los electores, menor es la probabilidad de empate en el resultado final.

Hemos de señalar para concluir que, como se ha puesto de manifiesto, los ganadores resultantes pueden diferir según el método empleado. No deben, sin embargo, entenderse como paradójicas estas posibles discrepancias, ya que, como hemos apuntado, es lógico pensar que una información más detallada por parte de los electores, mediante índices de aceptación gradual, tenga un efecto de desplazamiento en el cómputo final frente a métodos más groseros como los de Borda y voto aprobatorio, en los que no se utiliza toda la información que podrían dar los agentes.

Bibliografía

Arrow, K.J. (1963): *Social Choice and Individual Values.* Segunda edición. Yale University Press, New Hagen.

Barberà, S. (1984): "Teoría de la Elección Social: algunas líneas de desarrollo". *Hacienda Pública Española* 91, pp. 221 – 243.

Black, D. (1958): *The Theory of Committees and Elections*. Kluwer Academic Publishers, Boston.

Brams, S.J. (1990 a): *Approval Voting in Practice*. New York University Economic Research Reports. Nueva York.

Brams, S.J. (1990 b): *Constrained Approval Voting: A Voting System to Elect a Governing Board*. New York Economic Research Reports, Nueva York.

Brams, S. J. – Fishburn, P.C. (1978): “Approval voting”. *American Political Science Review* 72 (3), pp. 831 – 847.

Brams, S.J. – Fishburn, P.C. (1983): *Approval Voting*. Birkhäuser, Boston.

Dummett, M. (1998): “The Borda count and agenda manipulation”. *Social Choice and Welfare* 15, pp. 289-296.

Fishburn, P.C. (1990): “Multiperson decision making: a selective review”, en J. Kacprzyk – M. Fedrizzi (Eds.) *Multiperson Decision Making Using Fuzzy sets and Possibility Theory*, pp. 3 – 27. Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

Forsythe, R. – Rietz, T. – Myerson, R. – Weber, R. (1996): “An experimental study of voting rules and polls in three-candidate elections”. *International Journal of Game Theory*, 25 (3), pp. 355 – 383.

García Lapresta, J.L. – Llamazares, B. (1999): “Aggregation of fuzzy preferences : some rules of the mean”. *Social Choice and Welfare*, en prensa.

Gehrlein, W.V. – Lepelley, D. (1998): “The Condorcet efficiency of approval voting and the probability of electing the Condorcet loser”. *Journal of Mathematical Economics* 29, pp. 271 – 283.

Lines, M. (1986): “Approval voting and strategic analysis: a venetian example”. *Theory and Decision* 20, pp. 115 – 172.

McLean, I. – Urken, A. B. (eds.) (1995): *Classics of Social Choice*, Ann Arbor – The University of Michigan Press.

Morales, J.I. (1805): *Apéndice á la Memoria Matemática sobre el Cálculo de la Opinion en las Elecciones*. Imprenta de Sancha, Madrid.

Mueller, D.C. (1979): *Elección Pública.* Alianza Universidad, Madrid.

Nurmi, H. (1987): *Comparing Voting Systems*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

Saari, D.G. (1985): *The Optimal Ranking Method is the Borda Count.* Northwestern Center for Mathematical Studies in Economics and Management Science Working Paper, Chicago.

Saari, D.G. (1995): *Basic Geometry of Voting*. Springer – Verlag, Berlín.

Sen, A.K. (1976): *Elección Colectiva y Bienestar Social*. Alianza Universidad. Madrid.

Straffin Jr., P.D (1980): *Topics in the Theory of Voting.* Birkhäuser, Boston.

Tanguiane, A.S. (1991): *Aggregation and Representation of Preferences. Introduction to Mathematical Theory of Democracy*. Springer – Verlag, Berlín.

Weber, R.J. (1978): “Comparison of voting systems”. *Cowles Foundation Discussion Paper* nº 498. Cowles Foundation, Yale University.

Weber, R.J. (1995): “Approval Voting”. *Journal of Economic Perspectives* 9 (1), pp. 39 – 49.