



Asepelt
España

Ponencias

XIV
Reunión

**METODOLOGÍA BOOTSTRAP EN
SERIES HETEROCEDÁSTICAS. UNA APLICACIÓN
AL IBEX-35**

**Jesús A. Miguel Álvarez - jamiquel@posta.unizar.es
Pilar Olave Rubio - polave@posta.unizar.es
Universidad de Zaragoza**

Anales de Economía Aplicada

Oviedo ²₃
Junio 2000 ⁴



Reservados todos los derechos.

Este documento ha sido extraído del CD Rom "Anales de Economía Aplicada. XIV Reunión ASEPELT-España. Oviedo, 22 y 23 de Junio de 2000".

ISBN: 84-699-2357-9

METODOLOGÍA BOOTSTRAP EN SERIES HETEROCEDÁSTICAS. UNA APLICACIÓN AL IBEX-35.

Jesús A. MIGUEL¹ y Pilar OLAVE²

Dpto. Métodos Estadísticos

Universidad de Zaragoza

Resumen

En este trabajo se presenta la metodología bootstrap como una alternativa para construir intervalos de predicción en series temporales cuando las hipótesis usuales de los métodos clásicos no son sostenidas por los datos, o cuando el tamaño muestral no es suficientemente elevado para garantizar los resultados asintóticos que dichos métodos ofrecen.

Aunque existen diferentes revisiones de la metodología bootstrap para series temporales [véase, por ejemplo, Li y Maddala (1996) y Cao (1999)], este artículo proporciona un estudio de los métodos bootstrap cuando las series analizadas son heterocedásticas, haciendo especial énfasis en la predicción de modelos heterocedásticos condicionalmente autorregresivos (ARCH).

Por último, se presenta un estudio empírico sobre el índice IBEX-35 con datos diarios desde 1992 hasta 1998 y se compara la metodología bootstrap con los métodos tradicionales utilizados en la construcción de intervalos de predicción. En los modelos de rentabilidad-riesgo de tipo GARCH-M la predicción bootstrap muestra un excelente comportamiento en el corto y medio plazo.

Palabras Clave: Bootstrap, series temporales, modelos ARCH

¹ Jesús Miguel. Dpto. Métodos Estadísticos. Universidad de Zaragoza. Gran Vía, 2. 50005 Zaragoza.
Email: jamiguel@posta.unizar.es

² Pilar Olave. Dpto. Métodos Estadísticos. Universidad de Zaragoza. Gran Vía, 2. 50005 Zaragoza.
Email: polave@posta.unizar.es

1. Introducción

Los métodos estadísticos clásicos se apoyan en modelos matemáticos de naturaleza estocástica, de tal forma que los resultados que de ellos se derivan requieren, en muchas ocasiones, complejos desarrollos analíticos, lo que ha supuesto un obstáculo para su utilización comprensiva en muchas áreas científicas. Además, dichos desarrollos se basan en hipótesis que algunas veces no son soportadas por los datos o se obtienen resultados asintóticos que no son válidos cuando el tamaño muestral no es suficientemente elevado.

Efron (1979) introduce la metodología bootstrap para estimar las distribuciones de algunos estadísticos cuando el tamaño muestral es pequeño o las expresiones de dichas distribuciones son analíticamente intratables. Desde entonces numerosos autores han desarrollado métodos bootstrap para diversos procedimientos inferenciales, tales como modelos de regresión, datos censurados, construcción de intervalos de confianza, estimación de parámetros, ...

Los métodos bootstrap se basan en la reproducción de los datos originales mediante un remuestreo. Si nuestras observaciones tienen una estructura de dependencia, ésta debe estar reflejada en los nuevos datos. Por lo tanto, los métodos variarán en función de la estructura temporal existente y como ésta se refleje en el objetivo a perseguir: estimación o predicción.

Li y Maddala (1996) presentan una revisión de métodos bootstrap para series temporales homocedásticas donde analizan diferentes problemas inferenciales: estimación, contraste de hipótesis, selección de modelos, ... Cao (1999) hace una revisión de métodos bootstrap para estimación y predicción de series homocedásticas haciendo especial énfasis cuando la estructura temporal es general, es decir, no asume ninguna forma paramétrica y debe ser estimada mediante técnicas de suavización no paramétrica.

Este trabajo es una breve introducción de los métodos bootstrap que se han planteado para la construcción de intervalos de predicción en el contexto de series de tiempo con una estructura temporal paramétrica pero admitiendo que los errores pueden ser heterocedásticos. En particular, se presentan métodos bootstrap para modelos ARCH y sus generalizaciones, que son utilizados primordialmente cuando se analizan series financieras.

El esquema de trabajo será el siguiente: en la sección 2, se presenta la idea general del método bootstrap. En la sección 3, se introduce los métodos bootstrap utilizados en la predicción de procesos ARMA y se generalizan, en la siguiente sección, al caso en que las varianzas condicionales siguen un proceso ARCH. Además, se presenta un método bootstrap para la construcción de intervalos de predicción cuando trabajamos con modelos ARCH-M. Finalmente, en la sección 5 se presenta un estudio sobre el exceso de rentabilidad del IBEX 35, donde se aborda el problema de existencia de prima de riesgo. En esta sección se aplicarán los métodos bootstrap presentados anteriormente y sus resultados se comparan con los obtenidos mediante métodos paramétricos.

2. El método bootstrap

El bootstrap, como el jackknife, son dos métodos de remuestreo para estimar o aproximar la distribución muestral del estadístico o sus características. El bootstrap se basa en el principio de sustitución y en la aproximación numérica. Sea F la función de distribución de una variable poblacional X , y obtenemos una muestra aleatoria $\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ para estudiar alguna variable aleatoria de interés $R = R(X, F)$. El principio de sustitución nos lleva a definir el correspondiente estadístico con la misma forma funcional, pero considerando la muestra aleatoria observada como una nueva población y la función de distribución F , que es desconocida, es sustituida por la función de distribución empírica construida a partir de la muestra, es decir, el estadístico considerado será $\hat{R} = R(\vec{X}, F_n)$.

De esta forma, a partir de la distribución empírica de la muestra podemos obtener artificialmente una serie de muestras \vec{X}^* de observaciones independientes e idénticamente distribuidas de tamaño m (no tiene por qué coincidir con el tamaño inicial). Por lo tanto, cada muestra bootstrap \vec{X}^* consta de algunos valores de la muestra inicial que han sido extraídos equiprobablemente en un muestreo con reemplazamiento.

El método puede ser generalizado fácilmente a situaciones donde tenga más información sobre la distribución poblacional. Por ejemplo, si conocemos que la distribución poblacional F pertenece a una determinada familia paramétrica F_q bastaría construir el estadístico pero utilizando como función de distribución F_q , donde \hat{q} es un

estimador de q . Este método es denominado bootstrap paramétrico. Si sabemos que la distribución poblacional es continua podemos utilizar una perspectiva más general utilizando técnicas no paramétricas. En este caso, el estadístico sería construido utilizando como función de distribución $\hat{F} = F_n * K_h$, donde K_h es una función kernel (para nuestro objetivo es una función de densidad) y $*$ denota la convolución entre ambas funciones

$$\hat{F}(u) = F_n * K_h(u) = \int K_h(x-u)F_n(du)$$

Esto es equivalente a extraer aleatoriamente una observación a partir de F_n y añadirle h veces una cantidad aleatoria extraída a partir de la densidad K . Este método es denominado bootstrap suavizado.

El método bootstrap se describe en los siguientes pasos:

1. Construir el estimador de la función de distribución poblacional, según se utilice un bootstrap no paramétrico F_n , el paramétrico F_q o el suavizado \hat{F} .
2. Extraer muestras bootstrap, $\vec{X}^* = (X_1^*, \dots, X_n^*)$, que son muestras aleatorias extraídas a partir de la función de distribución estimada en el paso anterior.
3. Calcular la versión bootstrap del estadístico, $R^* = R(\vec{X}^*, F_n)$ y aproximar la distribución del estadístico R por la distribución en el remuestreo o distribución bootstrap de R^*

Sin embargo, en cualquier aplicación de este método debemos plantearnos dos cuestiones esenciales:

1. ¿Cómo es la aproximación bootstrap? ¿Es correcta asintóticamente?
2. ¿Cómo podemos calcular la distribución bootstrap del estadístico?

La primera cuestión es conocida como la validez bootstrap, es decir, debemos de demostrar la consistencia del método propuesto. Generalmente, se comprueba que alguna distancia (por ejemplo, la distancia de Mallows) entre la distribución bootstrap de R^* y la distribución de R tiende a cero cuando el tamaño muestral tiende a infinito. Otro aspecto importante es la velocidad de convergencia, para ello se aplican diferentes desarrollos asintóticos (por ejemplo, desarrollos de Edgeworth).

La segunda cuestión pone de manifiesto que aunque podemos extraer muestras de una población finita, el número de remuestras posibles crece desmesuradamente. Esto hace imposible que podamos calcular todos los posibles valores del estadístico bootstrap R^* con sus correspondientes probabilidades. En pocos casos es posible

obtener la distribución teórica de la distribución bootstrap pero siempre podemos aproximarla utilizando el método Monte Carlo. La idea es repetir los pasos 2 y 3 del esquema del método bootstrap un número B suficientemente elevado de veces. Esto nos permite conocer B valores del estadístico bootstrap que se utilizan para aproximar la distribución de R^* o sus características. El número B puede ser tan grande como deseemos con el único inconveniente de tener más gasto computacional.

3. Métodos bootstrap en procesos ARMA

Como se ha visto en la sección anterior, la idea original del bootstrap se desarrolló en el contexto de datos independientes e idénticamente distribuidos. Cuando los datos son dependientes, el método bootstrap debe reproducir dicha estructura temporal existente en la muestra original.

El estudio de métodos bootstrap para series de tiempo y modelos de regresión dinámicos fue iniciado por Freedman (1984), y en esta última década se han desarrollado una gran cantidad de procedimientos bootstrap para los modelos más utilizados en el análisis de series temporales.

Dado un proceso estocástico en tiempo discreto $\{Y_t, t \in Z\}$, consideramos una serie de tiempo (Y_1, Y_2, \dots, Y_T) como una observación del proceso en instantes consecutivos. Nuestro objetivo es predecir el valor futuro del proceso a un horizonte s , Y_{T+s} . Este puede ser para aproximar puntualmente dicho valor, o lo que es más frecuente, para calcular intervalos de predicción que aportan más información al analista.

Stine (1987) propuso el primer método bootstrap para estimar el error cuadrático medio del predictor lineal clásico cuando el proceso es un modelo autorregresivo de orden p . El método se basaba en la obtención de la función de distribución empírica de los errores centrados. A partir de ésta extraía muestras para reproducir un proceso $AR(p)$ con los parámetros estimados inicialmente y fijando los primeros p valores de la serie. Dada la serie bootstrap se estiman los parámetros y se obtiene el predictor clásico para evaluar el error cuadrático medio de dicha predicción. Repitiendo un número elevado de veces este proceso podemos aproximar el error cuadrático medio de la predicción puntual.

Para la construcción de intervalos de predicción en modelos $AR(p)$, Thombs y Schucany (1990) propusieron realizar una representación hacia atrás del proceso para

posteriormente utilizar la representación habitual para obtener los valores futuros. El esquema de dicho método es el siguiente:

1. Construir los residuales de la representación backward y calcular la función de distribución empírica de dichos errores centrados y reescalados según propuso Stine (1987).
2. Extraer los errores bootstrap, e_i^* , a partir de dicha distribución.
3. Se define la serie backward de la serie fijando los últimos p valores observados:

$$Y_i^* = \hat{f}_1 Y_{i+1}^* + \dots + \hat{f}_p Y_{i+p}^* + e_i^* \quad i = T-p, T-p-1, \dots, 1$$

$$Y_i^* = Y_i \quad i = T-p+1, \dots, T$$

4. Calcular los estimadores de la serie bootstrap.
5. Construir los residuales hacia adelante de la serie y obtener la función de distribución empírica de dichos errores centrados y reescalados.
6. Extraer los errores bootstrap, a_i^* , a partir de dicha distribución.
7. Definir las réplicas bootstrap de los valores futuros:

$$Y_{T+i}^* = \hat{f}_1 Y_{T+i-1}^* + \dots + \hat{f}_p Y_{T+i-p}^* + a_i^* \quad i = 1, \dots, s$$

$$Y_{T+i}^* = Y_{T+i} \quad \text{si } i \leq 0$$

8. Repetir un número B elevado de veces los pasos 2-7 para aproximar la distribución de Y_{T+s}^* . Los cuantiles correspondientes a esa distribución serán los límites del intervalo de predicción.

Estos autores demostraron la validez asintótica de este método bootstrap y realizaron un estudio de simulación donde lo comparaban con los intervalos clásicos para diferentes distribuciones y coberturas.

McCullough (1994) sugirió que el método percentil de obtener los intervalos de predicción no era el más adecuado cuando existe asimetría en el error de predicción y, por lo tanto, propuso un método de corrección de sesgo. Además, advirtió que la representación backward utilizada por Thombs y Schucany (1990) no asegura que los errores sean independientes e idénticamente distribuidas y utilizó un procedimiento más sofisticado para obtener dichos errores hacia atrás.

La validez asintótica del método de Thombs y Schucany (TS) para modelos ARI fue demostrada por García-Jurado et al. (1995). La idea general se basa en obtener la serie diferenciada y aplicar el método TS para construir la réplica bootstrap de la serie

que tiene la estructura autoregresiva. Posteriormente, se integra para tener réplicas bootstrap de la serie original.

Un inconveniente importante del método TS consiste en la representación backward de la serie, no sólo por el gasto computacional sino porque no es fácil cuando los procesos no tienen distribución normal. Cao et al. (1997) proponen un método alternativo, que es consistente, para construir intervalos de predicción sin tener que realizar réplicas hacia atrás de la serie. El método se puede describir en los siguientes pasos:

1. Obtener los residuos forward centrados y reescalados para construir la función de distribución empírica.
2. Extraer una muestra aleatoria, a_i^* , a partir de dicha distribución.
3. Construir los valores futuros bootstrap utilizando como errores la muestra anterior y las estimaciones iniciales de los parámetros:

$$Y_{T+i}^* = \hat{f}_1 Y_{T+i-1}^* + \dots + \hat{f}_p Y_{T+i-p}^* + a_i^* \quad i = 1, \dots, s$$

$$Y_{T+i}^* = Y_{T+i} \quad \text{si } i \leq 0$$

4. Repetir las etapas anteriores un número elevado de veces para aproximar la distribución bootstrap del valor Y_{T+s}^* .

Cao et al. (1997) demostraron la consistencia de este método tanto en el caso de utilizar la función de distribución empírica de los residuos directamente como en el de utilizar un bootstrap suavizado, es decir, cuando en la etapa 2 se extrae la muestra a partir de una suavización no paramétrica de la distribución.

Otra alternativa a los métodos anteriores se basa en el estudio del error de predicción estandarizado propuesto por Grigoletto (1998). En este trabajo se expresa dicho error estandarizado como el cociente entre la suma dos variables aleatorias y otra variable aleatoria, que denotamos por A+B y C, respectivamente. La idea consiste en obtener replicas bootstrap de forma separada (debido a la independencia entre las variables) de A y del vector aleatorio (B,C). La distribución bootstrap del error de predicción en el punto x se aproxima por una media de las evaluaciones de la distribución empírica de la variable A en $x C_j - B_j$, donde (B_j, C_j) es una réplica bootstrap de (B,C). Grigoletto (1998) muestra un estudio de simulación donde pone de manifiesto la mejora de este método bootstrap en la aproximación de las colas de la distribución. Sin embargo, no realiza ninguna comparación con los métodos expuestos anteriormente.

Finalmente, cabe destacar que Pascual, Romo y Ruiz (1998) han propuesto un método que capta el error de predicción debido a la incertidumbre en la estimación pero que no es necesaria realizar una representación backward de la serie. El esquema de remuestreo para un modelo AR(p) se describe bajo las siguientes etapas:

1. Obtener los residuos forward centrados y reescalados para construir la función de distribución empírica.
2. Extraer una muestra aleatoria, a_i^* , a partir de dicha distribución.
3. Generar una serie con la misma estructura AR(p) utilizando los errores bootstrap y estimar los parámetros bootstrap de esta serie.
4. Construir los valores bootstrap futuros utilizando como errores una muestra obtenida como en la etapa 2 y las estimaciones bootstrap de los parámetros. En esta etapa se fijan los últimos p valores de la serie original para construir los valores bootstrap futuros.
5. Repetir las etapas anteriores un número elevado de veces para aproximar la distribución bootstrap del valor Y_{T+s}^* .

Los autores demuestran la consistencia de este método bootstrap no sólo para modelos AR sino que extienden estos resultados al caso general de un proceso ARIMA.

4. Métodos bootstrap en procesos ARCH

Los modelos tratados en la sección anterior se fundamentan en la hipótesis de homocedasticidad. Sin embargo, cuando analizamos series financieras dicha hipótesis ha sido rechazada y se han planteado modelos de heterocedasticidad condicionalmente autoregresiva. Entre éstos los más utilizados han sido los modelos ARCH y sus generalizaciones [véase para una revisión Bollerslev, Chou y Kroner (1992) y Bera y Higgins (1993)]. Estos modelos se formulan para especificar una cierta estructura temporal a la varianza condicional. Por lo tanto, los métodos bootstrap deben ser capaces de reproducir no sólo la especificación de la media sino también de la varianza condicional.

Miguel y Olave (1999a) han demostrado la validez asintótica de un método bootstrap cuando analizamos una serie que sigue un proceso ARMA(p,q) y cuyos errores vienen dados según un modelo ARCH(r):

$$y_t = \sum_{i=1}^p \hat{f}_i y_{t-i} + \sum_{i=1}^q J_i x_{t-i} + x_t$$

$$x_t = z_t s_t \quad \text{con} \quad s_t^2 = w + \sum_{i=1}^r \hat{a}_i x_{t-i}^2$$

$$z_t \sim \text{i.i.d. } F(0,1)$$

El método bootstrap planteado es similar al de Cao et al. (1997) pero teniendo en cuenta el problema añadido de la heterocedasticidad. El algoritmo propuesto se puede resumir en las siguientes etapas:

1. Obtener los residuos estandarizados del modelo:

$$\hat{z}_j = \frac{\hat{x}_j}{\hat{s}_j} = \frac{1}{\hat{s}_j} \sum_{i=0}^{j-1} \hat{b}_i \left(y_{j-i} - \sum_{n=1}^p \hat{f}_n y_{j-i-n} \right)$$

donde los coeficientes \hat{b}_k se obtienen de la siguiente forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} \hat{b}_k z^k = \left(1 + \sum_{i=1}^q J_i z^i \right)^{-1}$$

2. Extraer una muestra aleatoria, $\{z_{T+j}^*\}_{j=1}^s$, a partir de la distribución empírica de los residuos estandarizados y centrados.
3. Construir los valores bootstrap futuros tanto de la media condicional como de la varianza condicional.

$$y_{T+j}^* = \sum_{i=1}^p \hat{f}_i y_{T+j-i}^* + \sum_{i=1}^q \hat{J}_i z_{T+j-i}^* s_{T+j-i}^* + z_{T+j}^* s_{T+j}^*$$

$$s_{T+j}^{*2} = \hat{w} + \sum_{i=1}^r \hat{a}_i z_{T+j-i}^{*2} s_{T+j-i}^{*2} \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, s$$

donde $y_{T+j}^* = y_{T+j}$, $z_{T+j}^* = \hat{z}_{T+j}$ si $j \leq 0$ y $s_{T+j}^{*2} = \hat{s}_{T+j}^2$ si $j \leq 1$

4. Repetir las etapas 2-3 un número elevado de veces para aproximar la distribución bootstrap del valor Y_{T+s}^* .

El intervalo de predicción se calcula utilizando el método percentil, es decir, considerando los cuantiles muestrales correspondientes al nivel de confianza nominal determinado. Para la obtención de los residuos estandarizados se utiliza el método de estimación de máxima cuasiverosimilitud, por lo que nos libera de imponer hipótesis paramétricas sobre la distribución del error condicional a un paso.

Este método ha sido extendido al caso en que la varianza condicional sea especificada como un modelo GARCH(1,1), es decir, cuando la especificación de la varianza condicional viene dada por:

$$\mathbf{s}_i^2 = \mathbf{w} + \mathbf{a}\mathbf{x}_{i-1}^2 + \mathbf{b}\mathbf{s}_{i-1}^2$$

Miguel y Olave (1999b) realizaron un estudio de simulación donde se comprobó que los intervalos bootstrap de predicción eran competitivos incluso bajo las hipótesis para las que los intervalos clásicos paramétricos funcionaban. Por supuesto, cuando la distribución del error estandarizado tenía una distribución asimétrica o leptocúrtica, los intervalos bootstrap mostraban un mejor comportamiento, tanto en la similitud entre la cobertura real con la cobertura nominal como en la amplitud de los intervalos. El método es similar al anterior con la única diferencia en la construcción de los valores futuros

3. Construir los valores bootstrap futuros tanto de la media condicional como de la varianza condicional.

$$y_{T+j}^* = \sum_{i=1}^p \hat{\mathbf{f}}_i y_{T+j-i}^* + \sum_{i=1}^q \hat{\mathbf{J}}_i z_{T+j-i}^* \mathbf{s}_{T+j-i}^* + z_{T+j}^* \mathbf{s}_{T+j}^*$$

$$\mathbf{s}_{T+j}^{*2} = \hat{\mathbf{w}} + \hat{\mathbf{a}}_{T+j-1}^{*2} \mathbf{s}_{T+j-1}^{*2} + \hat{\mathbf{b}} \mathbf{s}_{T+j-1}^{*2} \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, s$$

donde $y_{T+j}^* = y_{T+j}$, $z_{T+j}^* = \hat{z}_{T+j}$ si $j \leq 0$ y $\mathbf{s}_{T+j}^{*2} = \hat{\mathbf{S}}_{T+j}^2$ si $j \leq 1$

Finalmente, si nuestro interés en el estudio de series financieras es el análisis de relaciones rentabilidad-riesgo tendremos que utilizar modelos ARCH-M, es decir, introducir la varianza condicional como una variable regresora en la media. Esto implica la necesidad de plantear un nuevo método bootstrap que pueda replicar esta nueva estructura temporal de dependencia. Además, en este contexto, el error de predicción a más de un paso tiene una distribución asimétrica y con exceso de curtosis, como puede verse en Miguel y Olave (2000). Por lo tanto, los intervalos clásicos de predicción no son válidos y aún tendrá más interés plantear una solución bajo el enfoque de la metodología bootstrap.

El método bootstrap propuesto trata de generalizar el anterior y se describe en las siguientes etapas:

1. Obtener los residuos estandarizados

$$\hat{z}_t = \frac{\hat{\mathbf{e}}_t}{\hat{\mathbf{s}}_t} = \frac{1}{\hat{\mathbf{s}}_t} \sum_{i=0}^{t-1} \hat{\mathbf{j}}_i \left(y_{t-i} - \hat{\mathbf{m}} - \hat{\mathbf{d}} \hat{\mathbf{s}}_{t-i} - \sum_{j=1}^p \hat{\mathbf{f}}_j y_{t-i-j} \right)$$

donde $\sum_{i=0}^{\infty} \hat{\mathbf{j}}_i x^i = \left(1 + \sum_{i=1}^q \hat{\mathbf{q}}_i x^i \right)^{-1}$ con $\hat{\mathbf{s}}_t^2 = \hat{\mathbf{w}} + \hat{\mathbf{a}} \hat{\mathbf{e}}_{t-1}^2 + \hat{\mathbf{b}} \hat{\mathbf{s}}_{t-1}^2$

2. Extraer una muestra aleatoria, $\{z_{T+j}^*\}_{j=1}^s$, a partir de la distribución empírica de los residuos estandarizados y centrados.
3. Construir los valores bootstrap futuros tanto de la media como de la varianza condicional:

$$y_{T+s}^* = \hat{m} + \hat{d}s_{T+s}^{*2} + \sum_{i=1}^p \hat{f}_i y_{T+s-i}^* + \sum_{i=1}^q \hat{g}_i e_{T+s-i}^* + e_{T+s}^*$$

$$e_{T+s}^* = z_{T+s}^* s_{T+s}^* \quad \text{con} \quad s_{T+s}^{*2} = \hat{w} + (\hat{a}_{T+s-1}^{*2} + \hat{b}) s_{T+s-1}^{*2}$$

$$\text{donde } y_{T+s-j}^* = y_{T+s-j}, z_{T+s-j}^* = \hat{z}_{T+s-j} \quad \text{si } j \geq s \text{ y } \hat{o}_{T+s-j}^{*2} = \hat{o}_{T+s-j}^2 \quad \text{si } j \geq s-1$$

4. Repetir las etapas 2-3 un número elevado de veces para aproximar la distribución bootstrap del valor futuro Y_{T+s}^* .

El intervalo de predicción se construye con los cuantiles empíricos de la distribución anterior. Los estudios de simulación realizados muestran que las coberturas reales son similares a las nominales y que las amplitudes no difieren a las obtenidas por métodos paramétricos más sofisticados en condiciones donde estos últimos pueden ser calculados. Sin embargo, es necesario un análisis más detallado cuando los errores del modelo presenten exceso de curtosis o asimetría. La consistencia del método se basa en la obtención de estimadores consistentes de los parámetros del modelo ARCH-M.

5. Estudio empírico

En esta sección se aborda el estudio del exceso de rentabilidad del índice Ibex35 con respecto a las Letras del Tesoro. Los datos son diarios y corresponden desde el 14 de Enero de 1992 hasta 30 de Diciembre de 1998 (1751 observaciones). Nuestro objetivo es comparar los métodos bootstrap y paramétrico de construcción de intervalos de predicción.

El estudio se realiza en tres subperiodos diferentes. El primero de ellos comprende desde el 14 de Enero de 1992 hasta el 30 de Junio de 1993. El segundo corresponde del 3 de Enero de 1994 hasta el 28 de Junio de 1996 y, por último, desde el 2 de Enero de 1997 hasta el 29 de Junio de 1998. Dichos periodos se han realizado teniendo en cuenta el comportamiento del índice IBEX 35 (Figura 1). Los dos primeros son bastante estables mientras que el último corresponde a una época de descenso de la tasa de interés por parte del Banco de España, lo que provocó una gran entrada de nuevos inversores el mercado de capitales. En los tres periodos se han identificado los

modelos para la rentabilidad y para la volatilidad de la serie, utilizando las funciones de autocorrelación y de autocorrelación parcial. Además, se han utilizado los criterios de información de Akaike y de Schwarz para seleccionar los modelos. Los dos primeros periodos se ha especificado como procesos MA(1)-GARCH(1,1) mientras que en el tercero se ha encontrado una relación significativa entre la rentabilidad media y el riesgo existente en el mercado, es decir, hemos seleccionado un modelo MA(1)-GARCH(1,1)-M. El modelo general propuesto es el siguiente:

$$\begin{aligned} y_t &= \mathbf{d}\mathbf{s}_t^2 + \mathbf{q}\mathbf{e}_{t-1} + \mathbf{e}_t \\ \mathbf{e}_t | I_{t-1} &\sim N(0, \mathbf{s}_t^2) \\ \mathbf{s}_t^2 &= \mathbf{w} + \mathbf{a}\mathbf{e}_{t-1}^2 + \mathbf{b}\mathbf{s}_{t-1}^2 \end{aligned}$$

donde I_{t-1} es el conjunto de información disponible hasta el instante t-1. Las estimaciones se presentan en la Tabla 1.

El objetivo de esta sección es comparar los intervalos de predicción paramétricos frente a los construidos bajo los métodos bootstrap. Para ello, la muestra es cambiada en cada paso añadiendo una observación nueva y eliminando la primera. De esta forma el tamaño muestral permanece invariable pero tenemos la ventaja de obtener un conjunto de intervalos de predicción a un horizonte fijo, que nos permite calcular la cobertura media real, la longitud media con su desviación típica, su error cuadrático medio (EMS) y su error absoluto medio (EAM).

La muestra i-ésima es $(y_i, y_{i+1}, \dots, y_{T+i-1})$, con esas observaciones se obtiene la predicción a s pasos: $\hat{y}_{T+i+s-1}$, y el intervalo de predicción a un nivel de confianza fijado: $(Linf(i), Lsup(i))$, por lo tanto, se obtiene el error de predicción $e_{s,i}$, la cobertura $C(i)$ y la longitud del intervalo $L(i)$. Dada esa información calculamos las siguientes medidas:

$$\begin{aligned} \bar{L} &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M L(i) & S_L^2 &= \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (L(i) - \bar{L})^2 \\ \bar{C} &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M C(i) \end{aligned}$$

$$ECM = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (e_{s,i} - \bar{e}_s)^2$$

$$EAM = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M |e_{s,i} - \bar{e}_s|$$

El estudio se realiza para los tres subperiodos en que ha sido dividida la serie y el número de muestras, M , es 100. El horizonte de predicción comprende desde el valor 1 al 20 y el nivel de confianza para los intervalos es del 95%. Para el método bootstrap, el número de réplicas, B , es igual a 1000; y para el método paramétrico se supone la hipótesis de normalidad para los errores a un paso. Dicha hipótesis se satisface para el primer subperiodo de estudio pero es rechazada en los otros dos periodos.

El método paramétrico utilizado se basa en la corrección de los cuantiles de la distribución del error de predicción estandarizado mediante desarrollos de Cornish-Fisher, utilizando los primeros momentos condicionales de dicho error. Dichos desarrollos han sido propuestos por Baillie y Bollerslev (1992) para modelos ARMA-GARCH(1,1) y generalizados por Miguel y Olave (2000) para modelos en media, es decir, para modelos en los que la varianza condicional es determinante en la valoración de la rentabilidad.

Los resultados del análisis se muestran en las Tablas 2, 3 y 4 para los tres periodos considerados. Cabe destacar que la metodología paramétrica en el primer periodo tiene un mejor comportamiento ya que la hipótesis de normalidad es satisfecha por los datos. Sin embargo, los intervalos bootstrap no difieren sustancialmente de los paramétricos, teniendo coberturas similares y aunque la longitud media es superior tienen menos variabilidad. Por otro lado, el ECM y el EAM son prácticamente iguales.

En el segundo periodo, los intervalos bootstrap tienen longitudes medias menores y con varianzas más pequeñas, aunque las coberturas son similares entre ambos métodos y superiores al nivel nominal. En cuanto, al ECM y al EAM son casi idénticos para ambos métodos. Podemos señalar que este periodo corresponde a una época de estabilidad económica que se ve reflejado por una varianza condicional no altamente persistente.

Por último, el tercer periodo se caracteriza por una relación rentabilidad-riesgo importante, con un coeficiente de aversión al riesgo global significativo de 0.12. Las coberturas reales son similares para ambos métodos pero los intervalos bootstrap presentan menor longitud y con menor variabilidad. El ECM y el EAM son mejores para el método bootstrap que para el paramétrico. Podemos observar que las coberturas reales disminuyen con respecto a las nominales cuando el horizonte es mayor. Esto se explica porque en un modelo GARCH-M, la predicción depende de la volatilidad futura y ésta tiende a la varianza incondicional que es menor que la varianza condicional, por lo tanto, estamos infravalorando la incertidumbre cuando el horizonte de predicción es

lejano. De hecho, los modelos ARCH y sus generalizaciones son usados para la predicción a corto plazo que es donde presentan mayor capacidad predictiva.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por el proyecto P060-99E del Dpto. de Educación y Cultura del Gobierno de Aragón

Bibliografía

- Baillie, R.T. y T. Bollerslev (1992). Prediction in dynamic models with time-dependent conditional variances. *Journal of Econometrics*, **52**. 91-113.
- Bera, A.K. y M.L. Higgins (1993). ARCH models: properties, estimation and testing. *Journal of Economic Surveys*, **7**. 305-362.
- Bollerslev, T., R.Y. Chou y K.F. Kroner (1992). ARCH modelling in finance: a review of the theory and empirical evidence. *Journal of Econometrics*, **52**. 5-59.
- Cao, R., M. Febrero-Bande, W. González-Manteiga, J.M. Prada-Sánchez y I. García-Jurado (1997). Saving computer time in constructing consistent bootstrap prediction intervals for autoregressive processes. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **26**. 961-978.
- Cao, R. (1999). An overview of bootstrap methods for estimating and predicting in time series. *Test*, **8**. 95-116.
- Efron, B. (1979). Bootstrap methods: another look at the jackknife. *Annals of Statistics*, **7**. 1-26.
- Freedman, D.A. (1984). On bootstrapping two-stage least squares estimates in stationary linear models. *Annals of Statistics*, **12**. 827-842.
- García-Jurado, I., W. González-Manteiga, J.M. Prada-Sánchez, M. Febrero-Bande y R. Cao (1995). Predicting using Box-Jenkins, nonparametric and bootstrap techniques. *Technometrics*, **37**. 303-310.
- Grigoletto, M. (1998). Bootstrap prediction intervals for autoregressions: some alternatives. *International Journal of Forecasting*, **14**. 447-456.
- Li, H. y G.S. Maddala (1996). Bootstrapping Time Series Models. *Econometric Reviews*, **15**. 115-158.
- McCullough, B.D. (1994). Bootstrapping forecast intervals: An application to AR(p) models. *Journal of Forecasting*, **13**. 51-66.

- Miguel, J. y P. Olave (1999a). Bootstrapping forecast intervals in ARCH models. *Test*, **8**. 345-364.
- Miguel, J. y P. Olave (1999b). Forecast intervals in ARCH models: Bootstrap versus parametric methods. *Applied Economics Letters*, **6**. 323-327.
- Miguel, J. y P. Olave (2000). Prediction in ARCH-M models: a theoretical view. Preprint.
- Pascual, L., J. Romo y E. Ruiz (1998). Bootstrap predictive inference for ARIMA processes. Working-Paper 98-86. Universidad Carlos III de Madrid.
- Stine, R.A. (1987). Estimating properties of autoregressive forecasts. *Journal of the American Statistical Association*, **82**. 1072-1078.
- Thombs, L.A. y W.R. Schucany (1990). Bootstrap prediction intervals for autoregression. *Journal of the American Statistical Association*, **85**. 486-492.

Figura 1: Índice IBEX35. (14/Enero/1992 al 30/Diciembre/1998)

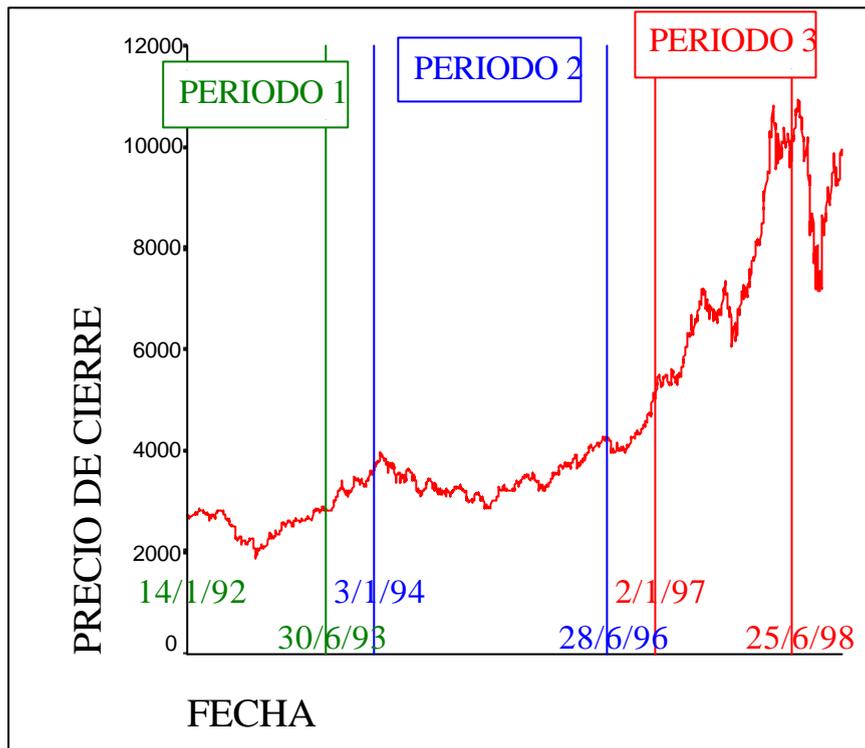


Figura 2: Serie del exceso de rentabilidad del índice IBEX 35.

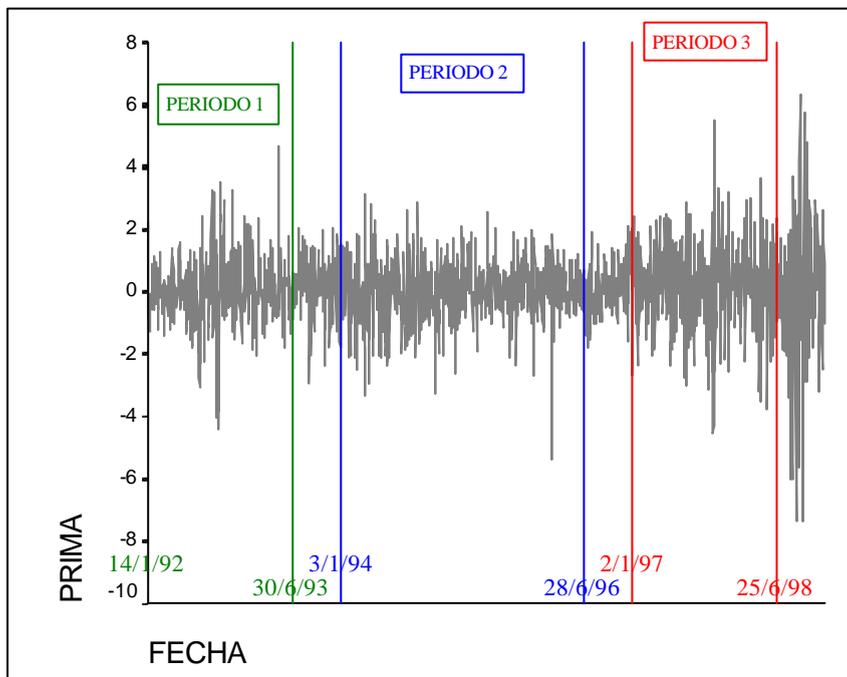


Tabla 1. Estimación de los modelos propuestos para cada periodo.

Periodo	δ	θ	ω	α	β	Q_{12}	Q_{12}^*	JB
1°	-	0.151 (0.064)	0.087 (0.047)	0.098 (0.042)	0.827 (0.078)	8.531 (0.74)	4.314 (0.95)	1.313 (0.52)
2°	-	0.108 (0.044)	0.075 (0.042)	0.073 (0.032)	0.751 (0.069)	12.49 (0.41)	3.625 (0.98)	207.6 (0.0)
3°	0.121 (0.043)	0.109 (0.061)	0.193 (0.119)	0.098 (0.034)	0.796 (0.085)	8.957 (0.70)	18.27 (0.11)	106.2 (0.0)

Nota: Entre paréntesis se muestran los errores estándar de las estimaciones.

Q_{12} y Q_{12}^* son los contrastes de Box-Ljung de orden 12 para los residuos estandarizados y sus cuadrados. JB es el contraste de Jarque-Bera. Además, entre paréntesis se muestra su significatividad.

Tabla 2. Periodo 1. Tamaño muestral=371. (15/1/92 al 30/6/93)

Horizonte	Cob.	Lon. Media	Lon. Varianza	ECM	EAM	
1	Par	0.95	3.699	0.2303	0.7722	0.6996
	Boot	0.94	3.629	0.2085	0.7712	0.7001
2	Par	0.95	3.769	0.2025	0.8202	0.7214
	Boot	0.96	4.155	0.2433	0.8214	0.7192
3	Par	0.95	3.806	0.1745	0.8264	0.7290
	Boot	0.96	4.005	0.1847	0.8259	0.7308
4	Par	0.95	3.839	0.1507	0.8269	0.7331
	Boot	0.96	4.183	0.1647	0.8260	0.7307
5	Par	0.96	3.869	0.1305	0.8324	0.7351
	Boot	0.94	3.953	0.1305	0.8315	0.7374
10	Par	0.95	3.985	0.0654	0.8910	0.7731
	Boot	0.95	3.988	0.0697	0.8902	0.7826
15	Par	0.96	4.061	0.0342	0.9100	0.7782
	Boot	0.97	4.268	0.0384	0.9100	0.7886
20	Par	0.97	4.111	0.0188	0.9022	0.7774
	Boot	0.97	4.082	0.0115	0.9020	0.7863

Tabla 3. Periodo 2. Tamaño muestral=627. (3/1/94 al 28/6/96)

Horizonte		Cob.	Lon. Media	Lon. Varianza	ECM	EAM
1	Par	1.00	3.398	0.1010	0.5415	0.5917
	Boot	0.97	3.216	0.0867	0.5413	0.5932
2	Par	0.99	3.450	0.0881	0.5560	0.6057
	Boot	0.97	3.332	0.0747	0.5557	0.6068
3	Par	0.98	3.487	0.0767	0.5609	0.6097
	Boot	0.99	3.502	0.0711	0.5605	0.6120
4	Par	0.99	3.520	0.0669	0.5406	0.5985
	Boot	0.99	3.787	0.0695	0.5401	0.6017
5	Par	0.99	3.551	0.0585	0.5463	0.6052
	Boot	0.99	3.533	0.0542	0.5454	0.6135
10	Par	0.98	3.669	0.0310	0.5452	0.6109
	Boot	0.99	3.722	0.0239	0.5445	0.6228
15	Par	0.99	3.747	0.0173	0.5178	0.5954
	Boot	0.99	3.886	0.0174	0.5176	0.5996
20	Par	0.97	3.799	0.0102	0.5550	0.6095
	Boot	0.96	3.905	0.0073	0.5546	0.6171

Tabla 4. Periodo 3. Tamaño muestral=368. (2/1/97 al 29/6/98)

Horizonte		Cob.	Lon. Media	Lon. Varianza	ECM	EAM
1	Par	0.95	8.427	11.1281	6.5167	1.9439
	Boot	0.94	7.898	8.8416	6.4746	1.9519
2	Par	0.93	8.423	10.8277	6.3458	1.9328
	Boot	0.93	8.282	9.7569	6.3049	1.9299
3	Par	0.93	8.370	10.3755	6.3651	1.9321
	Boot	0.92	8.126	8.8755	6.3339	1.9190
4	Par	0.92	8.317	9.9626	6.4247	1.9336
	Boot	0.91	7.873	7.8463	6.4069	1.9326
5	Par	0.91	8.265	9.5841	6.4232	1.9374
	Boot	0.91	8.076	8.1822	6.3894	1.9488
10	Par	0.88	8.023	8.0825	6.4251	1.9376
	Boot	0.88	7.331	5.3634	6.3955	1.9372
15	Par	0.87	7.812	7.0226	6.5010	1.9908
	Boot	0.85	7.467	5.0431	6.4881	1.9801
20	Par	0.86	7.631	6.2265	6.5985	1.9944
	Boot	0.86	7.426	3.8957	6.5805	1.9891

Figura 3: Intervalos de predicción para el segundo subperiodo.

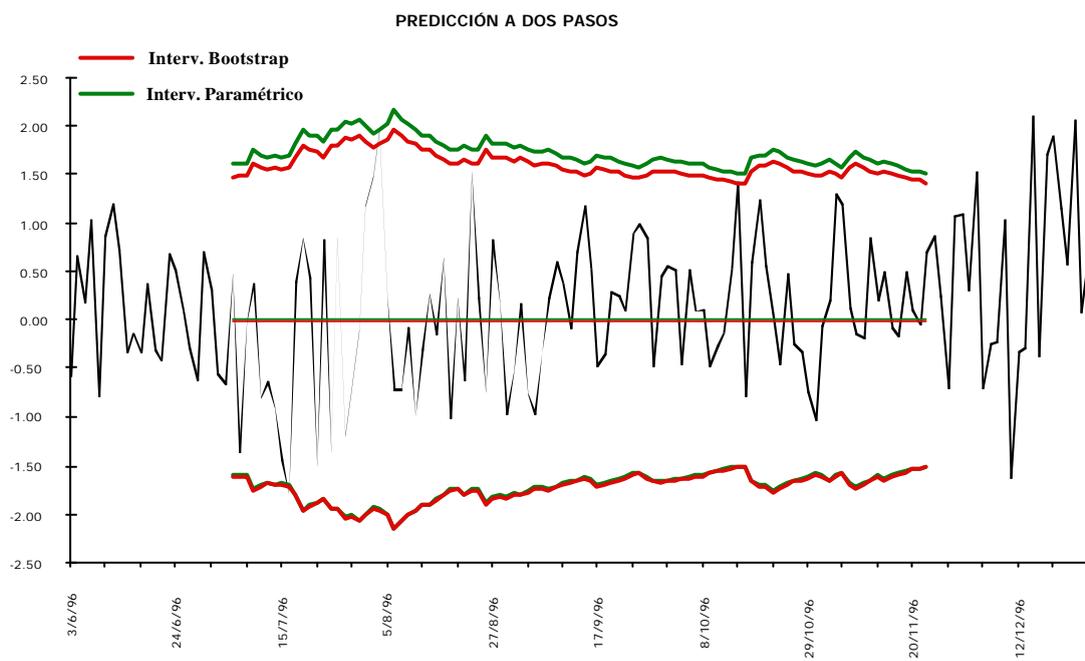
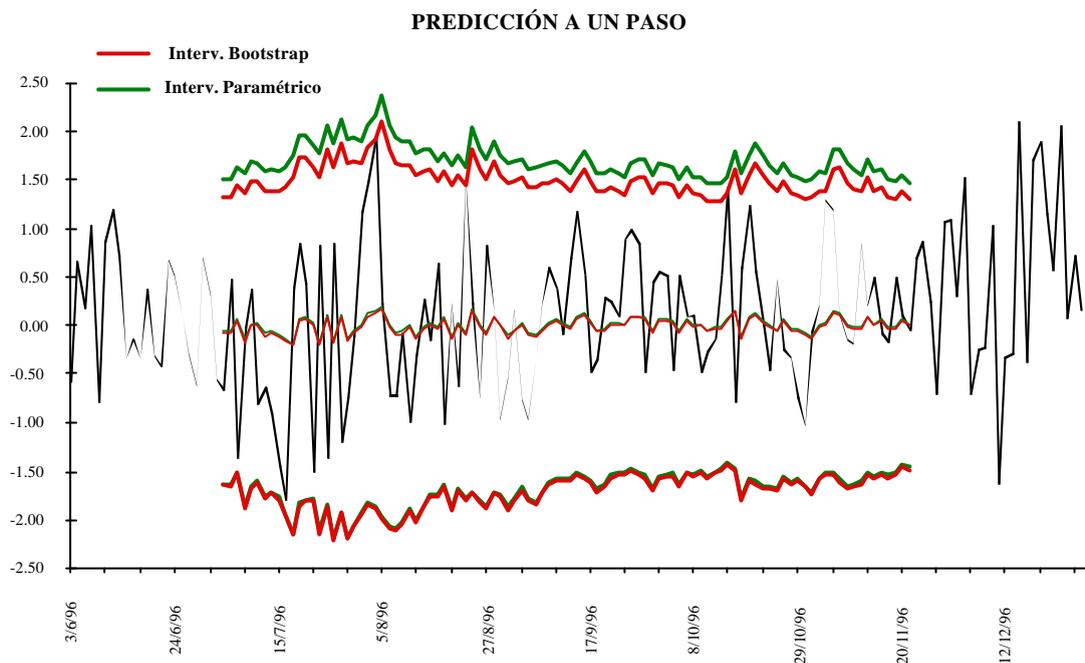


Figura 4: Intervalos de predicción para el tercer subperiodo.

