



Asepelt  
España

# Comunicaciones XIV Reunión

## APROXIMACIÓN A LA EXTENSIÓN MULTIDIMENSIONAL DE LA METODOLOGÍA TIR

*Federico Palacios González - [fpalacio@ugr.es](mailto:fpalacio@ugr.es)*

*Eduardo Pérez Rodríguez - [eperezr@ugr.es](mailto:eperezr@ugr.es)*

*José M<sup>a</sup> Herrerías Velasco - [jmherrer@latinmail.com](mailto:jmherrer@latinmail.com)*

Universidad de Granada

## Anales de Economía Aplicada

Oviedo 2<sup>3</sup>  
Junio 2000 4



Reservados todos los derechos.

Este documento ha sido extraído del CD Rom "Anales de Economía Aplicada. XIV Reunión ASEPELT-España. Oviedo, 22 y 23 de Junio de 2000".

ISBN: 84-699-2357-9

# APROXIMACIÓN A LA EXTENSIÓN MULTIDIMENSIONAL DE LA METODOLOGÍA TIR

**Palacios González, F.; Pérez Rodríguez, E.; Herrerías Velasco, J. M.**

[fpalacio@ugr.es](mailto:fpalacio@ugr.es)

[eperezr@ugr.es](mailto:eperezr@ugr.es)

[jmherrer@latinmail.com](mailto:jmherrer@latinmail.com)

Departamento de Economía Aplicada - Universidad de Granada

*Código UNESCO: 530204*

*Palabras clave: Análisis de inversiones, VAN, TIR, ETTI.*

*Area temática: G2*

## Resumen

Habitualmente, la metodología TIR plantea la existencia de una tasa de descuento única en la fórmula del VAN, para todos los flujos de cada periodo. Mediante dicha metodología se obtiene un punto frontera que separa dos segmentos de una línea recta. Cuando alguno de los flujos sea negativo la solución TIR puede no ser única, causando los consecuentes problemas de interpretación.

En este trabajo, bajo el supuesto de que las rentabilidades exigidas a los flujos de caja en cada periodo no tienen por qué ser igual, y admitiendo la existencia de algún flujo negativo, y que el porcentaje de reinversión de los flujos positivos no tiene por qué coincidir con los costes de financiación de los negativos, se propone una metodología multidimensional, donde el concepto TIR definido sobre un valor puntual único se reinterpreta sobre una conjunto frontera que es una superficie separadora, en dos regiones, de aquellos puntos que suponen cambios en el signo del VAN. Este planteamiento también proporciona una sólida base teórica desde la que contemplar la incertidumbre en los diversos tipos de descuento aplicables, y en los flujos de caja.

## 1.- INTRODUCCIÓN.-

De entre los criterios de valoración y selección de inversiones es indudable la supremacía del criterio del valor actualizado neto, pero a pesar de ello es muy frecuente el uso del criterio de la Tasa Interna de Rentabilidad, por creerlo equivalente a aquel y creerlo dotado de un más alto contenido intuitivo.

Son muy frecuentes los proyectos de inversión cuyo VAN es una función decreciente del tipo de descuento, entonces la TIR, que se define como el tipo de descuento para el que se anula el VAN, marca la frontera a partir de la cual el proyecto deja de ser rentable, es decir si el coste de oportunidad del capital a invertir en el proyecto, teniendo

en cuenta su riesgo, supera al TIR entonces el Van es negativo y el proyecto no es interesante. En Cambio si el coste de oportunidad no supera al TIR, el VAN será positivo y el proyecto puede ser interesante.

Un análisis mas detenido del criterio TIR refleja serias deficiencias del mismo, que han llevado a Brealey y Myers (1995) a afirmar que “El TIR es una cifra derivada sin ninguna interpretación económica simple” y “ que el problema radica en que es un numero sin demasiada utilidad”. Entre esos defectos Brealey , Myers y Marcus (1999) reflejan cuatro de entre los que citamos dos: 1) el TIR tiene problemas de existencia y unicidad, es decir hay proyectos de inversión para los que es imposible calcular el TIR, y hay otros proyectos que tienen más de un TIR. ¿Cuál es la regla de actuación en estos casos?, y 2) el criterio del TIR ignora la estructura temporal de los tipos de interés; si el coste de oportunidad es distinto según el vencimiento ¿con cual de ellos comparamos el TIR para decidir si el proyecto es interesante o no?.

Ante esta situación, en este trabajo se plantea la filosofía que condujo al TIR pero en un marco multidimensional que contempla la estructura temporal de los tipos de interés y se llega a una solución teórica satisfactoria del defecto reseñado en el punto 2). Ese planteamiento también proporciona una sólida base teórica desde la que contemplar la incertidumbre en los diversos tipos de descuento aplicables, y en los flujos de caja.

## **2. EL VAN COMO UNA FUNCIÓN MULTIVARIANTE DE LAS TASAS DE DESCUENTO.**

Se supone que cada flujo de caja positivo puede tener una tasa de descuento diferente como consecuencia de una estructura de rentabilidades exigidas, derivada de la estructura temporal de interés existente en el mercado en el momento de analizar la inversión. También se admite la posibilidad de observar flujos negativos que deberán financiarse con unas tasas de interés propias.

Bajo estos supuestos y suponiendo, por el momento, los flujos de caja conocidos y fijos, el VAN es una función multivariante

$$VAN(r_1, r_2, \dots, r_n) = -A + \sum_{t=1}^n \frac{Q_t}{(1+r_t)^t} \quad (1)$$

que define una hipersuperficie inmersa en un espacio  $n+1$ -dimensional. Estudiaremos el comportamiento analítico de esta hipersuperficie y especialmente lo que atañe a su intersección con el hiperplano de ecuación  $VAN=0$ . Se estudiarán las condiciones bajo las cuales la intersección es no vacía, se interpretarán las dos regiones en las que dicha intersección separa a la hipersuperficie, y los casos en los que no existe intersección.

**Proposición 1.**

Sean  $N = \{1,2,\dots,n\}$ ,  $N_+ = \{t \in N / Q_t \geq 0\}$  y  $N_- = \{t \in N / Q_t < 0\}$ . Se verifica entonces que la condición necesaria y suficiente para que la hipersuperficie definida mediante (1) tenga intersección no vacía con el hiperplano de ecuación  $VAN = 0$  es que

$$\sum_{t \in N_+} Q_t > A \quad (2)$$

En efecto. La expresión (1) puede descomponerse trivialmente de la siguiente forma

$$VAN(r_1, r_2, \dots, r_n) = -A + \sum_{t \in N_+} \frac{Q_t}{(1+r_t)^t} + \sum_{t \in N_-} \frac{Q_t}{(1+r_t)^t} \quad (3)$$

Por otra parte  $\forall t \in N$  se verifica

$$\lim_{r_t \rightarrow +\infty} \frac{Q_t}{(1+r_t)^t} = 0 \quad (4)$$

$$\lim_{r_t \rightarrow 0} \frac{Q_t}{(1+r_t)^t} = Q_t \quad (5)$$

$$\frac{d}{dr_t} \frac{Q_t}{(1+r_t)^t} = \frac{-tQ_t}{(1+r_t)^{t+1}} \quad (6)$$

La expresión (6) muestra claramente que la función

$$\frac{Q_t}{(1+r_t)^t} \quad (7)$$

es positiva y estrictamente decreciente en  $r_t$ ,  $\forall t \in N_+$  salvo para el caso trivial en el que  $Q_t = 0$  en el que es constantemente nula. Por el contrario, la función (7) es negativa y estrictamente creciente  $r_t$ ,  $\forall t \in N_-$ . Como consecuencia el valor máximo de (7) es  $Q_t$  para el primer caso y 0 para el segundo. Contrariamente el valor mínimo de (7) es 0 para el primer caso y  $Q_t$  para el segundo. Esto nos permite afirmar que

$$\underset{r_1, \dots, r_n}{Mín} \quad VAN(r_1, \dots, r_n) = -A + \sum_{t \in N_-} Q_t < 0 \quad (8)$$

$$\underset{r_1, \dots, r_n}{Máx} \quad VAN(r_1, \dots, r_n) = -A + \sum_{t \in N_+} Q_t \quad (9)$$

Además, el  $VAN$  es una función continua, compuesta por una suma de funciones (definidas en (7)), cada una de ellas con una sola variable independiente  $r_t$  y estrictamente crecientes o estrictamente decrecientes. Como consecuencia, la hipersuperficie que define cortará al hiperplano  $VAN = 0$  si y solo si su valor máximo (9) es un valor positivo; lo cual sucede si y solo si se verifica (2).

**Corolario 1.1** Si se verifica que

$$-A + \sum_{t \in N_+} Q_t \leq 0 \quad (10)$$

entonces el  $VAN$  siempre es negativo y no existe ningún juego de rentabilidades exigidas que sean positivas y hagan la inversión rentable. Resultado trivial puesto que se está afirmando que los flujos positivos, sin descontar no superan la inversión inicial.

**Corolario 1.2** Análogamente sucede si  $N_+ = \Phi$ . Resultado también trivial puesto que se está hablando de una inversión sin flujos de caja positivos.

**Proposición 2.**

Sea

$$r_N = (r_1, \dots, r_n), \quad r_t \geq 0 \quad \forall t \in N. \quad (11)$$

De forma análoga, puede definirse  $r_{N_+}$  y  $r_{N_-}$ , verificándose además que  $(r_{N_+}, r_{N_-})$  es un elemento como el definido en (11) pero sometido a una ordenación de sus componentes de forma que los elementos iniciales son las rentabilidades exigidas para los periodos con flujos positivos y los últimos, los tipos de financiación para aquellos flujos que son negativos. Consideremos una inversión que verifica (2) y sean

$$\Gamma = \{(r_{N_+}, r_{N_-}) / VAN(r_{N_+}, r_{N_-}) = 0\} \quad (12)$$

$$B_1 = \{(r_{N_+}, r_{N_-}) / r_{N_+} = r'_{N_+} - c_{N_+}; r_{N_-} = r'_{N_-} + c_{N_-} / (r'_{N_+}, r'_{N_-}) \in \Gamma\} \quad (13)$$

$$B_2 = \{(r_{N_+}, r_{N_-}) / r_{N_+} = r'_{N_+} + c_{N_+}; r_{N_-} = r'_{N_-} - c_{N_-} / (r'_{N_+}, r'_{N_-}) \in \Gamma\} \quad (14)$$

donde las componentes de  $(c_{N_+}, c_{N_-})$  son no negativas y al menos una de ellas es estrictamente positiva. Se verifica entonces que

$$VAN(r_{N_+}, r_{N_-}) > 0 \Leftrightarrow (r_{N_+}, r_{N_-}) \in B_1 \quad (15)$$

$$VAN(r_{N_+}, r_{N_-}) < 0 \Leftrightarrow (r_{N_+}, r_{N_-}) \in B_2 \quad (16)$$

La demostración resulta evidente si se tienen en cuenta que (7) es estrictamente decreciente o estrictamente creciente según el signo del correspondiente flujo de caja y se utiliza la expresión del VAN proporcionada en (3)

Nótese, que en el análisis clásico del TIR el problema es tratado en dos dimensiones, en el seno de una curva sobre el plano real, donde la frontera de separación entre los valores positivos y negativos del VAN es un punto que tradicionalmente es conocido como TIR. Este valor se interpreta como el máximo de las rentabilidades exigidas que se pueden imponer a una inversión viable. Esta metodología es válida cuando dicha función es estrictamente decreciente y por tanto solo cambia de signo en una ocasión. Por ejemplo, cuando solo hay flujos positivos. Si el problema exige un tratamiento en  $n+1$  dimensiones (superior a 2), la frontera de separación deja de ser un punto y pasa a ser el conjunto  $\Gamma$  que representa una hipersuperficie de dimensión  $n-1$  que separa la hipersuperficie del VAN (de dimensión  $n$ ) en las dos zonas positiva y negativa. Un punto cualquiera de  $\Gamma$  representa un juego de máximos de rentabilidades exigidas (para los flujos positivos) y de mínimos de tipos de financiación (para los flujos negativos) que pueden imponerse manteniendo viable la inversión. Un problema con dos periodos en el que un flujo es positivo y otro negativo, necesita un tratamiento tridimensional. En este caso, el VAN es una superficie separada en dos regiones por una curva que hace de frontera. El número de puntos separadores que corresponderían al concepto TIR es infinito. Sin embargo cualquier punto en la frontera admite una interpretación generalizada de TIR es el máximo de las rentabilidades exigidas y el mínimo de los tipos de financiación que puede imponerse a una inversión viable, pero con la libertad adicional que implica aumentar la dimensión del espacio: A cada máximo de las rentabilidades exigidas admisibles, que se quiera fijar le corresponde un mínimo de las financiaciones admisibles, de forma que el par obtenido corresponda a un punto en la frontera. Un desplazamiento sobre dicha frontera

representa pasar de un par a otro con interpretaciones análogas, que son extensiones del TIR. Como puede observarse, lo importante no es la unicidad sino, de qué lado de la frontera está la situación del mercado financiero y mis exigencias de rentabilidad en los distintos periodos de la inversión, atendiendo a otras oportunidades del mercado, (debidas a la estructura temporal de tipos de interés u otras alternativas de inversión). En Dominguez, Durban y Martín (1980) puede encontrarse una argumentación interesante al respecto. Obsérvese que la solución analítica allí proporcionada básicamente es la ecuación de la curva frontera  $\Gamma$ , bajo un planteamiento tridimensional.

### 3.- EJEMPLO GRÁFICO

Consideremos una inversión con un desembolso inicial de 50 u.m. y periodos en los que el primer flujo de caja vale 85 u.m. y el segundo -35 u.m.. En este caso la función VAN define una superficie inmersa en el espacio tridimensional de ecuación

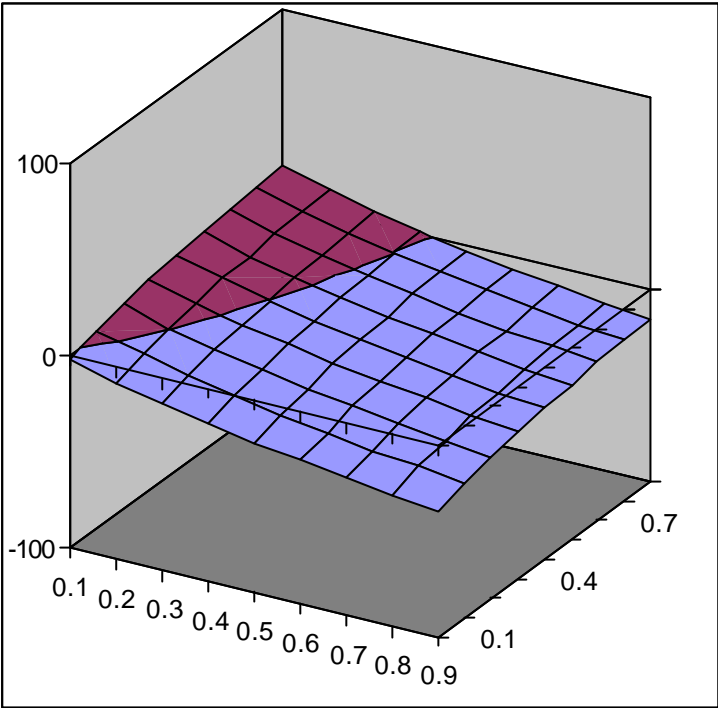
$$VAN(r_1, r_2) = -50 + \frac{85}{(1+r_1)} + \frac{-35}{(1+r_2)^2} \quad (17)$$

El gráfico 1 muestra una imagen de tal superficie. Como puede observarse, la zona azul corresponde a valores del VAN negativos, y la roja corresponde a valores positivos. La línea de VAN cero es la frontera entre ambas.

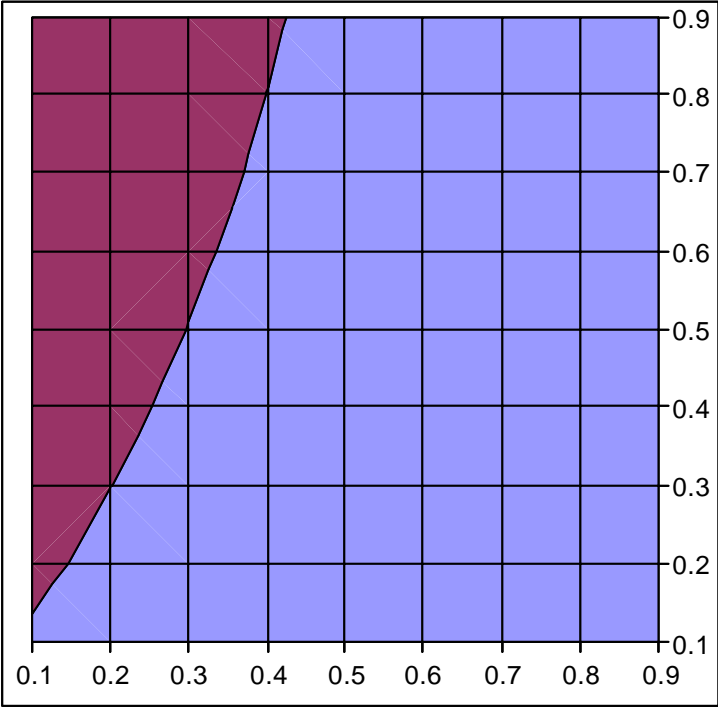
Si proyectamos esta superficie sobre el plano  $r_1 r_2$ , y representamos su curva de nivel cero, se obtiene el gráfico 2. En dicho gráfico, la zona roja se corresponde con el conjunto  $B_1$  definido en (13). La zona de color azul es el conjunto  $B_2$  definido en (14) y  $\Gamma$ , definido en (12), es la citada curva de nivel que hace de frontera entre ambos. El eje de abscisas es  $r_1$  y el de ordenadas es  $r_2$ .

Si la rentabilidad exigida para el periodo 1 y el tipo de interés previsible para la financiación del segundo flujo negativo definen un punto en la zona azul del gráfico 2 la inversión no será viable. El concepto TIR queda ahora substituido por el de frontera  $\Gamma$

**Gráfico 1: Superficie del VAN**



**Gráfico 2: Proyección del VAN sobre el plano  $r_1r_2$**



#### 4.- INTRODUCCIÓN DE LA ALEATORIEDAD

En los epígrafes anteriores, se ha definido una formulación matemática para el análisis de inversiones que permite considerar la estructura de tipos de interés vigente en el momento de analizar el proyecto, y que tiene la capacidad de considerar los costes financieros que son consecuencia de los flujos negativos de algún periodo. Sin embargo, el razonamiento siempre se ha realizado bajo condiciones de certidumbre. Veamos la utilidad que podría darse a semejante formulación si paulatinamente vamos transformando en variables aleatorias los elementos que intervienen en el VAN y pasamos a trabajar en un ambiente de riesgo.

Simplemente como estrategia de aproximación, supóngase que  $r_N$  es una variable aleatoria con función de distribución conocida  $F(r_N)$ . Dados unos flujos de caja podemos plantear el problema de viabilidad de una inversión, en términos de riesgo. La inversión es viable si la probabilidad o riesgo de pérdidas es asumible. Esta probabilidad se calcularía de la siguiente forma

$$P\left(\frac{VAN < 0}{Q_N}\right) = \int_{B_2} dF(r_N) \quad (18)$$

Si ahora consideramos que los flujos de caja también son una variable multivariante con función de distribución  $F(Q_N)$ , entonces la probabilidad de VAN negativo o "riesgo en pérdidas" se calcularía de la siguiente forma

$$P(VAN < 0) = \int_{\mathfrak{R}^n} P\left(\frac{VAN < 0}{Q_N}\right) dF(Q_N) = \iint_{\mathfrak{R}^n B_2} dF(r_N) dF(Q_N) \quad (19)$$

Es difícil que en problemas de análisis de inversiones, exista información previa suficiente como para poder estimar las dos funciones de distribución mencionadas en (18) y (19). En estos casos, como ya se ha visto en múltiples trabajos anteriores (véase Herrerías y Calvete (1987), Herrerías y Pérez (1991) y Herrerías (1998)), pueden utilizarse las estimaciones periciales clásicas para cada uno de los elementos citados con objeto de ajustar unas distribuciones subjetivas de los flujos de caja y tasas de descuento. Salvado este primer obstáculo (y sin perjuicio de posteriores mejoras en la metodología para determinar las dos funciones de distribución), una forma muy sencilla de resolver aproximadamente (19) es utilizando el método de Simulación por Montecarlo. El método tiene una puesta en práctica muy simple:

a.- Se genera una muestra aleatoria de vectores  $Q_N$  y  $r_N$  de tamaño suficientemente elevado.

b.- Se calcula el VAN para cada elemento muestral.

c.- Se calcula la proporción  $p$  de elementos muestrales que verifican  $VAN < 0$ . Esta proporción muestral es la aproximación deseada para (19).

d.- El radio del intervalo de confianza para proporciones da una cota del error de estimación:

$$P\left(|\hat{p} - p| < z_0 \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) = 1 - \alpha \quad (20)$$

siendo  $z_0$  el cuantil  $1 - \frac{\alpha}{2}$  de la distribución  $N(0, 1)$  y  $p$  el resultado de la integral (19).

e.- El tamaño muestral necesario para que la estimación tenga una precisión determinada se obtiene de (20) y mediante un muestreo en dos etapas. Una primera que se hace para conseguir una estimación previa  $\hat{p}_0$  que se usa para calcular el tamaño de muestra final y la estimación definitiva  $p$ . La expresión de dicho tamaño muestral para una cota de error  $e$  es

$$n = \left(\frac{z_0}{e}\right)^2 \hat{p}_0 \hat{q}_0 \quad (21)$$

#### 4.1 EJEMPLO.

Supóngase, que la información proporcionada por un experto, ha conducido a las siguientes distribuciones de probabilidad para los flujos de caja y las tasas de descuento en una inversión con dos periodos

$$\begin{aligned} Q_1 &\rightarrow \text{Beta}(0; 100; 3,5; 2,5) & Q_2 &\rightarrow \text{Beta}(-10; 0; 2; 4) \\ r_1 &\rightarrow \text{Beta}(0; 3; 2,5; 3,5) & r_2 &\rightarrow \text{Beta}(0; 0,1; 3; 3) \end{aligned}$$

Generada una muestra de tamaño 1000 la proporción muestral de resultados con VAN negativo es  $\hat{p} = 0,137$  la cota de error de estimación, para  $\alpha = 0,05$  y calculada según (20), es 0,0209. Puede por tanto afirmarse que el riesgo en pérdidas está comprendido entre 0,1161 y 0,1579 con un 95% de confianza.

## **5.- REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS.**

**Brealey, R.A. y Myers, S.C (1995).**- Fundamentos de Financiación Empresarial.- (4ª edición).- Ed. McGraw-Hill

**Brealey, R.A. ; Myers, S.C y Marcus, A.J. (1999).**- Principios de Dirección Financiera.- Ed. McGraw-Hill

**Dominguez Machuca, J.A.; Durbán Oliva, S. Y Martín Armario, E (1980).**- El subsistema de inversión y financiación de la empresa. Problemas y fundamentos teóricos.- Ed. Pirámide.- Madrid

**Herrerias Pleguezuelo, R. Y Calvete Fernandez, H (1987).**- Una ley de probabilidad para el estudio de los flujos de caja de una inversión.- Libro homenaje al Prof Arnaiz Vellando, INE. Madrid, pp 279-296.

**Herrerias Pleguezuelo, R y Pérez Rodríguez, E. (1991).**- Estimación de una distribución beta como modelo para su utilización en el método PERT".- Actas de la V Reunión Asepelt-España, pp 1191-1199, Las Palmas de Gran Canaria.

**Herrerias Pleguezuelo, R (1998).**- Revisión de los modelos probabilísticos usados en el PERT.- Actas de la I Reunión Científica de Programación, Selección y Control de Proyectos, pp 9-20. Almería