Gestión de listas de espera hospitalarias mediante Programación Multiobjetivo Lineal Posibilística*.

Antomil, Ibias, José
jantomil@correo.uniovi.es
Arenas Parra, Mar
mariamar@correo.uniovi.es
Bilbao Terol, Amelia
ameliab@correo.uniovi.es
Pérez Gladish, Blanca
bperez@econo.uniovi.es
Rodríguez Uría, Mª Victoria.
vrodri@econo.uniovi.es

Universidad de Oviedo

Palabras clave: Programación Lineal Multiobjetivo, Decisión, Distribución de Posibilidad, Número Difuso, Intervalo Esperado, Gestión Hospitalaria.

RESUMEN

En el presente estudio analizamos la planificación óptima de la actividad de los servicios quirúrgicos de un hospital público, teniendo en cuenta los requisitos de máxima permanencia en lista de espera quirúrgica fijados por las autoridades sanitarias. El problema que abordamos contiene parámetros cuya cuantía no es conocida con precisión que representaremos mediante números difusos y es un modelo dinámico e interactivo que permite realizar cambios no sólo en el período de planificación sino en cualquier parámetro del mismo.

En este trabajo se muestra como es posible determinar los valores óptimos no difusos de las variables de decisión en un problema concreto como es la determinación de la actividad quirúrgica que permita cumplir los requisitos de máxima permanencia en lista establecidos por las Autoridades Sanitarias.

* *Este trabajo ha sido financiado por el Plan Nacional de Investigación Científica, Desarrollo e Innovación Tecnológica 2000-2003, Proyecto BFM 2000-0010.*

1. Introducción.

Uno de los principales problemas en los sistemas sanitarios públicos es el de las **listas de espera quirúrgicas**. En los últimos años la situación se ha agravado debido, en parte, a los avances científicos, técnicos y médicos que permiten estudios más complejos, así como al cambio experimentado en la población que es ahora más exigente al poseer más información.

El problema de las listas de espera no viene dado tanto por el número de pacientes incluidos en las mismas, como por el tiempo máximo que un paciente debe permanecer en ellas hasta ser atendido. Los Contratos de Gestión suscritos por las Autoridades Sanitarias con los centros hospitalarios en los últimos años, plantean entre sus objetivos funcionales, como prioritario, la reducción de la permanencia en listas de espera quirúrgicas, para resolver este problema.

La gestión cuantitativa de las listas de espera quirúrgicas es compleja, debido a que las listas son evidentemente dinámicas; cuyo cálculo, incluye además previsiones sobre inclusiones y exclusiones de las listas de espera basadas habitualmente en datos históricos.

En este trabajo planteamos un modelo matemático que permite planificar y gestionar de modo óptimo la demanda de actividad quirúrgica del Servicio de Cirugía General de un Hospital de agudos del INSALUD, modulando su programación en función de la relación entre oferta, demanda y tiempos de espera.

2. Metodología.

Los problemas de optimización reales se caracterizan por la incluir varios criterios de decisión que suelen estar en conflicto unos con otros. La Programación Multiobjetivo es una técnica de optimización que se aplica a modelos de optimización con objetivos múltiples. Tradicionalmente cualquier modelo de programación multiobjetivo incluye datos cuyos valores son asignados por los Decisores y que no se conocen con precisión. La Teoría de los Subconjuntos Difusos, debida a Lofti A. Zadeh (1965), y la Teoría de la Posibilidad asociada a la misma, tienen la capacidad de modelizar los modos de razonamiento no preciso, que juegan un papel esencial en la toma de decisiones racionales en entornos de incertidumbre e imprecisión.

El trabajo que presentamos tiene este marco: se trata de resolver un Programa Multiobjetivo Lineal, donde algunos de los datos del modelo vienen representados por números difusos definidos por sus distribuciones de posibilidad; matemáticamente tendrá la siguiente expresión:

$$\begin{array}{l} Minimizar\;\; z(x) = \left[z_1(x),\dots,z_k(x)\right] = \left(c_1x,\dots,c_kx\right) \\ sujeto\;\; a:\; x \in \chi\left(\tilde{A},\tilde{b}\right) = \left\{x \in IR^n \,/\, \tilde{A}x \geq \tilde{b}, x \geq 0\right\} \end{array} \tag{1}$$

que designaremos por (FMLP).

Este tipo de programas plantean problemas de factibilidad y de eficiencia o Pareto optimalidad de las soluciones obtenidas. Ambos problemas implican la necesidad de comparar números difusos, comparación que se realiza de muy diversos modos.

En este trabajo utilizamos el método de comparación de números difusos desarrollado por *Jiménez*, (1996), (ver Anexo 1). Este método permite transformar el problema en otro con coeficientes no difusos, que evalúe la factibilidad -en grado α- para cada vector de decisión del modelo.

Formalmente, se trata ahora de resolver un programa multiobjetivo α-paramétrico no difuso:

$$\begin{array}{l} Minimizar\;\; z(x) = \left[z_1(x),\dots,z_k(x)\right] = \left(c_1x,\dots,c_kx\right) \\ sujeto\;\; a:\; x \in \chi\left(\tilde{A},\tilde{b}\right) = \left\{x \in IR^n \,/\, Ax \geq_{\alpha} b, x \geq 0\right\} \end{array} \tag{2}$$

donde α es el grado de factibilidad de cada vector de decisión, así 1-α proporciona una medida del riesgo de que un determinado vector de decisión viole las restricciones; así que a mayor valor de α menor es el riesgo de violación de la restricción.

Mediante la resolución de (2) se obtienen las soluciones del (FMLP), para los distintos valores de α, es decir, para los distintos grados de factibilidad que el Decisor acepta valorar.

El Decisor fija los niveles de factibilidad que desee soportar $\alpha_i \in [0,1]$ $i = 1,2,\dots,r$, y se han de resolver r problemas multiobjetivo lineales no difusos. La resolución se puede realizar aplicando cualquier método de Programación Multiobjetivo no difusa que nos proporcionará para cada α_i un vector de decisión $x^0(\alpha_i)$ y su correspondiente valor objetivo $z^0(\alpha_i)$.

En este trabajo aplicaremos la Programación Compromiso. Esta técnica de Programación Multiobjetivo se basa en la idea de que cualquier Decisor racional elegirá siempre aquella solución Pareto óptima que se encuentre más cerca del punto donde todos los objetivos alcanzan su óptimo (punto ideal). El conjunto de puntos que verifican la propiedad anterior se denominan *Conjunto Compromiso*. *Blasco et al* (1999) generalizan a problemas con n objetivos, los resultados obtenidos por Yu (1973) para problemas biobjetivo y demuestran que bajo ciertas hipótesis, fácilmente asumibles en economía, las métricas $p = 1$ y $p =$ determinan los límites del conjunto compromiso, perteneciendo el resto de soluciones al conjunto limitado por estos puntos (ver anexo 2).

3. Aplicación: Gestión de listas de espera quirúrgicas.

Las decisiones sobre planificación de la actividad de un Hospital se toman por el Decisor del mismo, en el marco que para cada año impone el organismo financiador de su actividad, en este caso el INSALUD. Son dos agentes Decisores cuyos intereses, pretensiones y políticas han de conjugarse, aunque no siempre sean coincidentes. La realidad material y social en la que el hospital ha de desarrollar su actividad, completa el escenario decisional imponiendo sus propias restricciones.

En el presente trabajo tratamos de proporcionar a los gestores de un Hospital público datos numéricos suficientes sobre la máxima capacidad de funcionamiento de sus servicios quirúrgicos que sirviesen de soporte a la negociación del *Contrato de Gestión* que para el año 99 había de firmar dicho Hospital, con las autoridades sanitarias financiadoras de su actividad.

El Hospital, fuente de los datos que manejamos, es un centro hospitalario de los denominados de *agudos* y dispone por ello de los seis *Servicios Quirúrgicos* base:

- Cirugía General
- Ginecología/Obstetricia
- Oftalmología
- Otorrinolaringología
- Traumatología
- Urología

El modelo planteado en esta aplicación se realiza sobre datos proporcionados por el Hospital de referencia, pero es extensible a cualquier otro hospital del marco INSALUD que deba responder al mismo tipo de exigencias de funcionamiento durante el año para el cual se planifica la actividad. Son realizables modelos similares para estudiar la posibilidad de cumplimiento de objetivos de distinta especificidad con sólo introducir algunos cambios en el modelo base.

3.1. Datos y variables del problema.

Denotaremos las variables en base al servicio al que pertenecen, en este trabajo Cirugía General, y a éste por su inicial (*C*); cada variable será descrita mediante seis campos, los dos primeros, alfabéticos, denotarán el servicio y la forma de realización del proceso.

Si la actividad quirúrgica se lleva a cabo en forma horaria normal, la variable que define el servicio carecerá de prefijo y si se lleva a cabo en forma extraordinaria, sea interna o externa, el prefijo será una *X*.

Tabla 1. Formato de las variables de actividad o variables de decisión

Modalidad	Servicio	Proceso	Mes
--/X	*C*	*i*	*j*

Tabla 2. Formato de las variables de lista de espera o variables de Estado

Lista	Servicio	Proceso	Mes
L	*C*	*i*	*j*

La siguiente tabla explica, por servicio y proceso, el formato de los nombres que asignaremos a cada una de las variables del problema. Se incluyen también en la misma otros campos que proporcionan información de interés como son el número de código de cada proceso, el tiempo medio de quirófano que utiliza el mismo y la posibilidad de que sea realizable en horario extraordinario, sea concertado externo o autoconcertado, posibilidad que como en le problema primero no existe para todos los procesos. [1]

Tabla 3. Servicio: Cirugía General[2].

Código	Nombre Proceso	Variable	Tiempo	Posible extra
241	Bocio Multinodular	C01	151	1
278	Obesidad Mórbida	C02	155	1
454	Varices	C03	135	1
455	Hemorroides	C04	74	1
550	Hernias Inguinales	C05	114	1
553	Otras Hernias Abdominales	C06	134	1
565	Fisura/Fístula anal	C07	62	1
574	Colelitiasis	C08	135	1
685	Quiste Pilonidal	C09	63	1

Consideramos como dato difuso la duración de cada intervención quirúrgica que representaremos mediante un número difuso triangular:

$$\tilde{t}_i = \left(BE_i^t, RD_i^t, WE_i^t \right) \quad (3)$$

donde RD_i^t es el tiempo medio de duración de una intervención, que ha sido determinado utilizando los datos procedentes de los partes de quirófano, más veinte minutos, que es el tiempo requerido para preparar los quirófanos para la siguiente intervención; BE_i^t y WE_i^t son la mejor y peor estimación acerca de la duración de cada intervención, proporcionadas por el Centro Decisor aplicando un coeficiente pesimista w = 0.20, al tiempo medio de duración de las intervenciones para cada proceso y tomando como estimación optimista la duración media de las intervenciones:

$$\begin{aligned} BE_i^t &= RD_i^t \\ WE_i^t &= (1+w)RD_i^t \end{aligned} \quad (4)$$

El Centro Decisor del hospital de referencia nos proporcionó además, datos históricos de las admisiones y exclusiones que tuvieron lugar durante los años 1997 y 1998 para cada mes y proceso considerado. Las admisiones ($\tilde{A}_{ij}$) y exclusiones $\left(\tilde{S}_{ij}\right)$

[1] El campo **Posible extra** recoge, mediante variable binaria, si es o no posible realizar el Proceso que se informa fuera de la jornada normal de los quirófanos asignados al Servicio al que pertenece

[2] Los procesos en estudio suponen el 45% de la actividad del servicio.

para el año 1999 serán tratadas como números difusos triangulares dado su carácter desconocido y tendrán la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} &Admisiones \quad \tilde{A}_{ij} = \left(ME_{ij}^{A}, PR_{ij}^{A}, PE_{ij}^{A} \right) \\ &Exclusiones \quad \tilde{S}_{ij} = \left(PE_{ij}^{S}, PR_{ij}^{S}, ME_{ij}^{S} \right) \end{aligned}$$

donde PR_{ij}^{A} y PR_{ij}^{S} recogen los peores datos reales históricos para las admisiones y exclusiones respectivamente; PE_{ij}^{A} $y PE_{ij}^{S}$ son las estimaciones pesimistas del Decisor para el año 99 y ME_{ij}^{A} y ME_{ij}^{S} son sus estimaciones optimistas.

PE_{ij}^{A}, PE_{ij}^{S} se obtienen aplicando al peor dato real un coeficiente $p \in [0,1]$ que mide el pesimismo del Decisor hospitalario respecto de la evolución de las admisiones/exclusiones para el año 99 y que fija tanto para las admisiones como para las exclusiones en $p = 0,20$ de forma que:

$$\begin{aligned} PE_{ij}^{A} &= (1+p)\cdot PR_{ij}^{A} \\ PE_{ij}^{S} &= (1-p)\cdot PR_{ij}^{S} \end{aligned} \tag{5}$$

ME_{ij}^{A} y ME_{ij}^{S} se obtienen aplicando al peor dato real un coeficiente $m \in [0,1]$ que mide el optimismo del Decisor hospitalario respecto de la evolución de las admisiones/exclusiones para el año 99 y que fija tanto para las admisiones como para las exclusiones en $m = 0,10$ de forma que:

$$\begin{aligned} ME_{ij}^{A} &= (1-m)\cdot PR_{ij}^{A} \\ ME_{ij}^{S} &= (1+m)\cdot PR_{ij}^{S} \end{aligned} \tag{6}$$

3.2. Restricciones.

Las restricciones del modelo que nos ocupa que serán de cuatro tipos:

- Ecuaciones de estado.
- Horas de quirófanos por servicio.
- Límites superiores a la permanencia en lista de espera.
- Cotas superiores de actividad extraordinaria.

a) Ecuaciones de estado, j = 4,...,12.

$$LC_{i(j+1)} = LC_{ij} + A_{ij} - S_{ij} - XC_{ij} - C_{ij} \tag{7}$$

donde A_{ij} recoge el número de **admisiones estimadas** para el proceso i del servicio C por mes j; S_{ij} representa el número de **exclusiones** sin sometimiento a proceso quirúrgico, también estimadas, para cada proceso i, cada mes j y para el servicio C**.** En estas ecuaciones, son *variables de decisión las* referentes a la actividad, XC_{ij} y C_{ij}, y serán proporcionadas con la resolución del problema; las variables correspondientes al *estado* de la lista de espera $LC_{i(j+1)}$ y LC_{ij} también se obtendrán con la resolución del problema. Quedan, por tanto, como *datos* que se han de fijar para el modelo, los referentes a las previsiones de entradas así como los de previsiones de exclusiones mencionadas en el párrafo anterior.

b) Horas de quirófano por servicio y mes:

Estas restricciones sólo afectan a la planificación quirúrgica que se lleva a cabo en horario ordinario:

$$\sum_i \tilde{t}_i \, C_{ik} \leq CQ_k \tag{8}$$

donde CQ_k indica en minutos el tiempo de quirófano del que dispone este servicio para el mes k y donde t_i es el tiempo medio de quirófano, expresado también en minutos, que utiliza cada uno de los procesos en estudio en este servicio.

Los datos referentes al tiempo de quirófano asignados, en este caso, al servicio de *Cirugía* son los que se muestran en la tabla siguiente:

Tabla 4. Horas de quirófano asignadas al servicio de *Cirugía*.
(expresadas en minutos)

	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC
minutos	3955	4704	4976	3316	2997	2997	5183	4815	4385

***c) Límites superiores a la permanencia en lista de espera: no más de seis meses*.**

Dado que a lo largo del año 1999 el tiempo máximo que un paciente puede permanecer en lista de espera debe ser de seis meses, el modelo se formula exigiendo que la suma de las actividades ordinaria y extraordinaria realizadas entre enero del año en curso y el mes k-esimo, supere al número de paciente que llevarían seis o más meses en lista de espera para cada proceso i de cada servicio de *Cirugía General C* en el momento k:

$$\sum_{j=04}^{k} \left[\ C_{ij} + \left(XC_i\right)_j\ \right] \geq s_{ik} \tag{9}$$

d) Cotas al número de procesos realizables fuera de horario normal

Estas restricciones tan solo consistirán en desigualdades del tipo:

$$XC_{ij} \geq r_{ij} \tag{10}$$

donde XC_{ij} será la actividad extraordinaria en el mes j del proceso i y r_{ij} su cota inferior. El significado de estas ecuaciones no es otro que el de acotar la actividad global mínima que a priori se acuerda derivar, en base a los datos históricos. Esta actividad mínima ha de indicarse por proceso y mes.

Estas restricciones reflejan información de tipo cualitativo: el Decisor conoce de antemano que algunos procesos, imposibles de asumir, serán derivados en al menos ciertas cantidades, que a lo largo del año se irán concretando. Igualmente conoce que algunos otros procesos no se derivarán, salvo graves problemas.

No impondremos que las variables de este problema sean enteras por dos razones: Una de ellas es que los tiempos estimados por proceso son tiempos medios, lo que imposibilita la exactitud de resultados, y la otra deriva de la complejidad computacional asociada a un problema entero con gran número de variables como es nuestro caso.

3.3. Los Objetivos.

Para determinar el número de procesos que es necesario realizar por mes y servicio, se han considerado tres criterios: la capacidad funcional del centro, las listas de espera residuales y la actividad a realizar mediante modalidad extraordinaria.

Respecto al primero el objetivo es *maximizar la capacidad operativa* del servicio en su horario y configuración ordinarios; respecto al segundo el objetivo es determinar la mínima lista de espera residual (lista de espera al final del período de planificación) que permita verificar el requisito marco de máxima permanencia en lista de espera y respecto al tercero, establecer la actividad mínima indispensable para cumplir los requisitos de máxima permanencia en lista de espera.

La primera de las funciones objetivo, F_1, la formularemos como la minimización de la lista de espera residual expresada en minutos:

$$F_1 = Mín \sum_{i=1}^{9} \tilde{t}_i LC_{i13} \qquad (11)$$

La segunda función objetivo se formulará simplemente como la maximización del total de la actividad a realizar de manera ordinaria por mes, proceso y servicio, a lo largo del año:

$$F_1 = Max \sum_{i=1}^{9} \sum_{j=04}^{12} [\ C_{ij}\ ] \qquad (12)$$

En último lugar, consideraremos la minimización de la actividad a realizar mediante modalidad extraordinaria:

$$F_3 = Min \sum_{i=1}^{9} \sum_{j=04}^{12} \left[XC_{ij} \right] \qquad (13)$$

El problema a resolver será por tanto el siguiente:

$$
\begin{aligned}
&Min \quad (F_1, -F_2, F_3) \\
&s.t: \\
&F_1 = Min \sum_{i=1}^{9} \tilde{t}_i C_{i13} \\
&F_2 = Max \sum_{i=1}^{9} \sum_{j=4}^{12} \left[C_{ij} \right] \\
&F_3 = Min \sum_{i=1}^{9} \sum_{j=4}^{12} \left[XC_{ij} \right] \\
&LC_{i(j+1)} = LC_{ij} + \tilde{A}_{ij} - \tilde{S}_{ij} - XC_{ij} - C_{ij} \\
&\sum_{i=1}^{9} \tilde{t}_i C_{ik} \le CQ_k \\
&\sum_{i=1}^{9} \sum_{j=4}^{k} \left[C_{ij} + XC_{ij} \right] \ge s_{ik} \\
&XC_{ij} \ge r_{ij}
\end{aligned}
\qquad (14)
$$

para el que calcularemos las soluciones $\alpha - eficientes$ resolviendo el siguiente programa lineal multiobjetivo α-paramétrico:

$$
\begin{aligned}
&Min \quad (F_1, -F_2, F_3) \\
&s.t: \\
&F_1 = Min \sum_{i=1}^{9} EV_i^{\tilde{t}} C_{i13} \\
&F_2 = Max \sum_{i=1}^{9} \sum_{j=4}^{12} \left[C_{ij} \right] \\
&F_3 = Min \sum_{i=1}^{9} \sum_{j=4}^{12} \left[XC_{ij} \right] \\
&LC_{i(j+1)} = LC_{ij} + \left[(1-\alpha) E_2^{\tilde{A}_{ij}} + \alpha E_1^{\tilde{A}_{ij}} \right] - \left[(1-\alpha) E_2^{\tilde{S}_{ij}} + \alpha E_1^{\tilde{S}_{ij}} \right] XC_{ij} - C_{ij} \\
&\sum_{i=1}^{9} \left[(1-\alpha) E_1^{\tilde{t}_i} + \alpha E_2^{\tilde{t}_i} \right] C_{ik} \le CQ_k \\
&\sum_{i=1}^{9} \sum_{j=4}^{k} \left[C_{ij} + XC_{ij} \right] \ge s_{ik} \\
&XC_{ij} \ge r_{ij}
\end{aligned}
\qquad (15)
$$

Concretando el modelo para los grados de factibilidad α comunicados por el Decisor, el problema proporciona los siguientes resultados[3]:

[3] Se ha utilizado para la resolución del problema el programa HYPERLINDO.

Table 5. Soluciones ideales.

a	F_1^*	F_2^*	F_3^*	F_{1*}	F_{2*}	F_{3*}
0	0	436	743	116.287	305	1894
0.2	0	425	752	104.573	304	1794
0.4	0	408	766	93.003	301	1696
0.6	0	402	771	81.655	304	1595
0.8	0	391	780	70.825	284	1519
1	0	374	813	56.495	322	1373

La optimización individual de los objetivos considerados implica por un lado la saturación de los tiempos de quirófano internos y por otro, la no existencia de lista de espera residual, independientemente del riesgo que el Decisor hospitalario desee asumir. Sin embargo, en general, alcanzar simultáneamente los óptimos individuales de cada objetivo no es posible, debido al nivel de conflicto existente entre ellos dadas las restricciones del modelo. Por ello se le ofrece al Decisor una solución de "compromiso" entre los dos objetivos considerados.

Los límites del conjunto compromiso nos ofrecen una solución de máxima eficiencia (solución obtenida para la métrica $p = 1$) y una solución de máximo equilibrio entre los niveles de logro de los objetivos (solución obtenida para la métrica $p = \infty$). Una vez fijado el nivel de riesgo de violación de las restricciones que desee asumir, el Decisor podrá elegir aquella solución que le parezca más adecuada. Podemos observar como, evidentemente, a medida que aumenta el nivel exigido de factibilidad, empeora la solución obtenida debido a que el conjunto factible es más reducido. En la siguiente tabla recogemos las soluciones compromiso obtenidas:

Table 6. Soluciones Compromiso .

á	Solution for metric $p = 1$			Solution for metric p =		
	$F_1^{L_1}$	$F_2^{L_1}$	$F_3^{L_1}$	$F_1^{L_\infty}$	$F_2^{L_\infty}$	$F_3^{L_\infty}$
0	24.308	436	1585	116.287	422	743
0.2	51.440	425	1130	104.573	413	752
0.4	54.350	408	1063	93.003	399	766
0.6	49.425	402	1012	81.655	394	771
0.8	21.187	391	1168	70.825	385	780
1	16.858	378	1120	58.185	374	791

4. Conclusiones.

Hemos planteado y resuelto el problema de la planificación de la actividad quirúrgica del servicio de Cirugía General de un hospital público, como un programa multiobjetivo lineal posibilístico y aplicando un método de resolución que permite la toma de decisiones de manera interactiva.

Mediante la idea de solución eficiente factible en grado α, el Decisor puede elegir los grados de factibilidad que está dispuesto a admitir dependiendo del contexto. Es importante destacar que aunque en el modelo trabajamos con datos imprecisos, las soluciones eficientes factibles en grado α, son soluciones precisas; se han obtenido de manera sencilla resolviendo un programa multiobjetivo lineal no difuso.

La aplicación de la programación compromiso a la resolución de este programa ofrece al Centro Decisor hospitalario un conjunto de soluciones donde elegir, que van desde una planificación quirúrgica que busque la máxima eficiencia hasta una planificación que maximiza el equilibrio entre el nivel de logro de los objetivos considerados.

5. Bibliografía.

Arenas, M.; Bilbao, A.; Cerdá, E.; Rodríguez Uría, M. V. (1998): "Management of Surgical Waiting Lists in Public Hospitals" in: Haimes, Y. And Steuer, R. Eds.: *Research and Practice in Multiple Criteria Decision Making*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, nº 487, Springer-Verlag, Berlin.

Ballestero y Romero (1998): Multiple Criteria Decision Making and its Applications to Economic Problems. Ed. Kluwer Academic Publishers. Boston.

Blasco, F.; Cuchillo-Ibáñez, E.; Morón, M. A.; Romero, C. (1999): "On the monotonicity of the Compromise Set in Multicriteria Problems". *Journal of Optimization Theory and Applications,* vol. 102, nº 1, pp. 69-82.

Bitran, G. R.; Valor-Sabatier, J. (1987): "Some mathematical Programming based Measures of Efficiency in Health Care Institutions". *Advances in Mathematical Programming and Financial Planning,* 1, pp. 61-84.

Bortolan, G.; Degani, R. (1985): "A review of some methods for ranking fuzzy subsets". *Fuzzy Sets and Systems* 15, pp. 1-19.

Cadenas, J. M.; Verdegay, J.L. (1997): "Using fuzzy numbers in linear programming". *IEEE Trans. Systems Man Cybernet. - Part B: Cybernetic*, Vol. 27, No. 6, pp. 1016-1022.

Delgado, M.; Verdegay, J.L.; Vila, M.A. (1988): "A procedure for ranking fuzzy relations". *Fuzzy Sets and Systems* 26, pp. 49-62.

Heilpern, S. (1992): "The expected value of a fuzzy number". *Fuzzy Sets and Systems* 47, pp. 81-86.

Heilpern, S. (1997): "Representation and application of fuzzy numbers". *Fuzzy Sets and Systems* 91, pp. 259-268.

Jiménez, M. (1996): "Ranking fuzzy numbers through the comparison of its expected intervals". *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, Vol.4, No.4, pp. 379-388.

Lee, S. (1973): "An aggregative Resource Allocation Model for Hospital Administration". *Socio-Economic Planning Science,* 7, pp. 381-395.

Nakamura, K. (1986): “Preference relation on a sets of fuzzy utities as a basis for decision making”. *Fuzzy Sets and Systems* 20, pp. 147-162.

Rodríguez Uría, M;. V. (1999): “Métodos Cuantitativos de apoyo a la decisión: aplicación a la gestión de listas de espera quirúrgicas”. *Proyecto de Investigación de Cátedra de Universidad*. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad de Oviedo.

Sakawa, M. (1993): *Fuzzy sets and interactive multiobjective optimization*. Plenun Press, New York-London.

Tanaka, H.; Asay, K. (1984): “Fuzzy linear programming problems with fuzzy numbers”. *Fuzzy Sets and Systems* 13, pp. 1-10.

Tong, R. M.; Bonissone, P. P. (1980): “A linguistic approach to decision making with fuzzy sets”. *IEEE Trans. Systems Man Cybernet*, 10, pp. 716-723.

Wang, X.; Kerre, E. (1996): “On the classification and the dependencies of the ordering methods”, in: D. Ruan (Ed), *Fuzzy logic Foundation and industrial Applications, International series in Intelligent Technologies,* Kluwer, Dordrecht, pp. 73-90.

Yu, P. L. (1973): “A class of solutions for group decision problems”. *Management Science,* Vol.19, pp. 936-946.

Yuan, Y. (1991): “Criteria for evaluating fuzzy ranking methods”. *Fuzzy Sets and Systems* 44, pp. 139-157.

Zeleny, M. (1974): *Linear Multiobjective Programming*. Ed. Springer-Verlag. Berlín.

ANEXO 1

Definición 1.1 Dado un número difuso $\tilde{N}$, si denotamos por $\left[N_a^L, N_a^R\right]$ con $a \in [0,1]$ sus conjuntos de nivel a o a-cortes, su **intervalo esperado** es:

$$EI\left(\tilde{N}\right) = \left[E_1, E_2\right] = \left[\int_0^1 N_a^L d a,\ \int_0^1 N_a^R d a\right] \tag{1}$$

En particular, si $\tilde{N} = [a_1, a_2, a_3, a_4]$ es un número difuso triangular o trapezoidal, el cálculo de la expresión anterior es inmediata:

$$EI\left(\tilde{N}\right) = \left[\frac{1}{2}\left(a_1 + a_2\right),\ \frac{1}{2}\left(a_3 + a_4\right)\right] \tag{2}$$

Definición 1.2 El **valor esperado** $\mathrm{VE}(\tilde{N})$ de un número difuso $\tilde{N}$, es el punto medio de su intervalo esperado:

$$VE\left(\tilde{N}\right) = \frac{E_1^{\tilde{N}} + E_2^{\tilde{N}}}{2} \tag{3}$$

Definición 1.3 Dados dos números difusos $\tilde{a}$ y $\tilde{b}$, definimos la **relación difusa de preferencia** $M(\tilde{a}, \tilde{b})$, $\tilde{a}$ es preferido a $\tilde{b}$, mediante la siguiente función de pertenencia:

$$m_{M(\tilde{a},\tilde{b})} = \begin{cases} 0 & \text{si } E_1^a > E_2^b \\ \dfrac{E_2^b - E_1^a}{E_2^a - E_1^a + E_2^b - E_1^b}, & \text{si } 0 \in \left[E_1^b - E_2^a, E_2^b - E_1^a\right] \\ 1 & \text{si } E_2^a < E_1^b \end{cases} \tag{4}$$

Siendo $\left[E_1^a, E_2^a\right]$ y $\left[E_1^b, E_2^b\right]$ los **intervalos esperados** de $\tilde{a}$ y $\tilde{b}$ respectivamente.

Si $\mu_M\left(\tilde{a}, \tilde{b}\right) \geq \alpha$, lo representaremos por $\tilde{a} \leq_a \tilde{b}$ y diremos que $\tilde{a}$ es preferido a $\tilde{b}$ por lo menos en un grado igual a α.

Definición 1.4 Un vector de decisión $x \in IR^n$, diremos que es **factible en grado a** ó **a-factible** si:

$$\underset{j=1,\ldots,m}{Min}\left\{m_M\left(\tilde{a}_j x, \tilde{b}_j\right)\right\} = a \tag{5}$$

es decir si:

$$\tilde{a}_j x \leq_a \tilde{b}_j, \quad \forall j = 1, \ldots, m \tag{6}$$

Teniendo en cuenta la definición 1.3, (5) es equivalente a:

$$\frac{E_2^{b_j} - E_1^{a_j x}}{E_2^{a_j x} - E_1^{a_j x} + E_2^{b_j} - E_1^{b_j}} \geq \boldsymbol{a}, \qquad \forall j = 1,\ldots,m. \tag{7}$$

que, operando, se puede escribir como:

$$\left[(1-\boldsymbol{a})\,E_1^{a_j} + \boldsymbol{a}E_2^{a_j}\right]x \leq \boldsymbol{a}E_1^{b_j} + (1-\boldsymbol{a})\,E_2^{b_j}, \quad \forall\, j=1,\ldots,m \tag{8}$$

Denotaremos por $\aleph(\alpha)$, al conjunto formado por todos los vectores de decisión que sean α-factibles. Es evidente que:

$$\alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow \aleph(\alpha_1) \supset \aleph(\alpha_2) \tag{9}$$

ANEXO 2

Para medir la proximidad de una solución del espacio de objetivos al punto ideal, introduciremos el concepto de distancia generalizada.

Definición 2.1 La **distancia generalizada** en el espacio de objetivos normalizados y ponderados, viene expresada por la siguiente función:

$$L_p = \left[\sum_{j=1}^{n} W_j^p \left| \frac{f_j^* - f_j(x)}{f_j^* - f_{*j}} \right|^p \right]^{1/p} \tag{10}$$

donde j es el número de objetivos, W_j es la ponderación introducida por el Decisor, f_j^* es el valor ideal del objetivo j-ésimo, f_{*j} su valor antiideal (peor valor que puede adoptar un objetivo dentro del conjunto eficiente) y $f_j(x)$ el valor de dicho objetivo para cada punto del conjunto eficiente.

Teorema 1. Si los objetivos considerados en un programa multiobjetivo lineal son dos, las soluciones compromiso además de monótonas con respecto a p, están acotadas por las soluciones extremas correspondientes a las métricas p=1 y p= ∞. (*Yu*, 1973).

Por lo tanto si podemos hallar las soluciones compromiso asociadas a las distancias de métricas p=1 y p= ∞, tendremos los límites del conjunto compromiso para la clase entera $1 \le p \le \infty$.

Definición 2.2 La mejor **solución compromiso** (o punto más próximo al ideal) cuando se utiliza la **métrica p = 1**, se obtiene mediante la resolución del siguiente programa lineal:

$$
\begin{aligned}
&Min \quad L_1 = \sum_{j=1}^{n} W_j \left| \frac{f_j^* - f_j(x)}{f_j^* - f_{*j}} \right| \\
&s.t. \\
&x \in F.
\end{aligned} \tag{11}
$$

La solución compromiso correspondiente a la métrica p = 1, minimiza la suma de las desviaciones individuales respecto del punto ideal.

Definición 2.3 Para la **métrica p = ¥** la mejor **solución compromiso** o punto más próximo al punto ideal, se puede obtener mediante la resolución del siguiente programa:

$$
\begin{aligned}
&\underset{x}{Min} \left(\underset{j}{Max} \left| \frac{f_j^* - f_j(x)}{f_j^* - f_{*j}} \right| \right) \\
&s.t. \\
&x \in F.
\end{aligned} \tag{12}
$$

Para la métrica p = ∞, se minimiza la máxima desviación de entre todas las desviaciones individuales; esto es, para p = ∞ sólo la desviación mayor influye en el proceso de minimización.

Yu, (1973) demuestra que para la métrica p = ∞ la mejor solución compromiso o punto más próximo al ideal se puede obtener mediante la resolución de un programa lineal equivalente:

$$
\begin{aligned}
&Min L_\infty = d \\
&s.t.: \\
&x \in F \\
&W_1 \left| \frac{f_1^* - f_1(x)}{f_1^* - f_{*1}} \right| \le d \\
&\vdots \\
&\vdots \\
&W_q \left| \frac{f_q^* - f_q(x)}{f_q^* - f_{*q}} \right| \le d
\end{aligned} \tag{13}
$$

donde d representa la desviación más grande y F el conjunto de soluciones posibles.

Las soluciones proporcionadas por los programas lineales (11) y (13) caracterizan los límites del conjunto compromiso, perteneciendo las otras mejores soluciones compromiso al conjunto acotado por los puntos L_1 y L_∞.