SOBRE EL CÁLCULO ITÔ A LO LARGO DE UNA TRAYECTORIA

1. NOCIONES BÁSICAS.

Operamos sobre un espacio de probabilidad (Ω, F, P) con un espacio de los estados finito $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_s\}$. Consideramos un número finito de fechas de negociación t= 0,1,...,N, donde t=N, frecuentemente, corresponde al vencimiento del contrato del derivado en consideración. Utilizamos una filtración $\{F_n\}$, n = 0,1,...N para modelar la corriente de información a lo largo del tiempo: un suceso A$\in F_n$ si los agentes de nuestro modelo pueden decidir, en base a la información disponible para ellos en t = n, si ha acaecido o no el suceso A.

Respecto a los activos: consideramos dos en nuestro modelo, una cuenta mercado monetario (u.m) sin riesgo con el proceso precio S^0 y un título con riesgo S^1. Ninguno de estos activos paga dividendos entre t=0 y t=N. Operamos con un tanto de interés determinista anual r tal que $S_n^0 = (1+r)^n$. El factor de descuento viene dado por $d_n = (1+r)^{-n}$. El proceso precios de títulos actualizado viene dado por $\widetilde{S}_n^1 := d_n S_n^1$; el precio actualizado de la cuenta monetaria, evidentemente, es igual a $\widetilde{S}_n^0 \equiv 1$. Suponemos que el proceso precio de títulos es adaptado a $\{F_n\}$. Nos referiremos en lo sucesivo al espacio de probabilidad filtrado $\{\Omega, F, P\}, \{F_n\}$, conjunto de fechas de negociación y los procesos de precios S^0 y S^1 juntos, como modelo de mercado de títulos $\mathcal{M}$.

Respecto a las estrategias de negociación: en nuestro modelo se les permite a los inversores formar carteras dinámicas de títulos y cuentas monetarias. Formalmente, una estrategia de negociación (o estrategia de cartera dinámica) es un proceso estocástico (una sucesión de variables aleatorias) $\phi = (\phi_n^0, \phi_n^1), n = 1, ..., N$ con la siguiente interpretación económica: ϕ_n^0 y ϕ_n^1 representan, respectivamente, el número de unidades monetarias y número de acciones del título que el inversor selecciona para su cartera en t=n-1 y posee hasta el momento t=n inclusive. Para captar la realidad económica, la estrategia de negociación debe ser no-anticipadora, es decir, para decidir respecto a ϕ_n en el momento t=n-1 el inversor solamente tiene a su disposición la información contenida en F_{n-1} - tal como el precio del título S^1_{n-1}- y **no** la información contenida en F_n, lo que se formaliza de la siguiente forma:

Dado un modelo de mercado de títulos $\mathcal{M}$.

a) Una estrategia de negociación $\phi = (\phi_n)_{n=1,\dots,N}$, se denomina admisible si ϕ_n^o y ϕ_n^1 son F_{n-1} medibles para n=1,...N, es decir, si ϕ es un proceso predecible.

b) El valor de la estrategia ϕ en el momento t=n es igual a $V_n = V_n(\phi) = \phi_n^o S_n^0 + \phi_n^1 S_n^1$; el valor actualizado viene dado por $\widetilde{V}_n = d_n V_n = \phi_n^0 + \phi_n^1 S_n^1$.

c) Una estrategia admisible se denomina autofinanciadora si para todo n=1,...,N

$$V_n(\phi) = \phi_n^0 S_n^0 + \phi_n^1 S_n^1 = \phi_{n+1}^0 S_n^0 + \phi_{n+1}^t S_n^1 \tag{1.1}$$

Por otra parte, una estrategia admisible ϕ es autofinanciadora si y solamente si (sii) para todo n=1,...N se verifica

$$V_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{n} \phi_j^0 \left(S_j^0 - S_{j-1}^0\right) + \sum_{j=1}^{n} \phi_j^1 \left(S_j^1 - S_{j-1}^1\right) \tag{1.2}$$

El valor de una estrategia autofinanciadora consta de la inversión inicial V_0 y las ganancias (o pérdidas) de la negociación del título y de la cuenta monetaria.

Una estrategia admisible es autofinanciadora si y solamente si (sii) se verifica para todo n=1,...,N

$$\widetilde{V}_n(\phi) = \widetilde{V}_0(\phi) + \sum_{j=1}^{n} \phi_j^1 \left(\widetilde{S}_j^1 - \widetilde{S}_{j-1}^1\right) \tag{1.3}$$

Variación cuadrática

Denotamos por $\overline{T}$ el momento que representa el punto final en el que termina nuestro modelo. Para definir la variación primera y la variación cuadrática recordemos la noción de partición del intervalo [0, $\overline{T}$].

Una partición τ de [0, $\overline{T}$] es un conjunto de puntos $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = \overline{T}$. El diámetro de esta partición viene dado por $|\tau| := \sup_{1\le i\le n} |t_i - t_{i-1}|$.

Consideremos una función X:[0, $\overline{T}$]$\rightarrow \Re$. La "variación primera" de X sobre [0, $\overline{T}$] se define como

$$\text{Var(X):=sup}\{ \sum_{t_i \in \tau} \left| X(t_i) - X(t_{i-1}) \right|,\ \tau \text{ una partición de } [0,\ \overline{T}\,] \} \in [0,\ \infty) \quad (1.4)$$

Si Var(X)$<\infty$, se dice que la variación es finita (acotada).

Observaciones respecto a la notación

1) Denotamos por Var(f) la “variación primera” de una función f, mientras que var(Y), denota la “varianza” de una variable aleatoria Y.
2) Siempre que una fórmula de sumatorio tal como la (1.4) contenga el índice t_{-1} indica que el correspondiente sumando es igual a cero.

Para definir la “variación cuadrática”, consideremos una función X:[0, $\overline{T}$]$\rightarrow \Re$ y una sucesión τ_n de particiones de [0, $\overline{T}$] tal que $\left|\tau_n\right| \rightarrow 0$ cuando n $\rightarrow \infty$. Definimos para t$\in$[0, $\overline{T}$] la “Variación cuadrática” de X a lo largo de la partición τ_n mediante

$$V_t^2(X;\tau_n) := \sum_{t_i \in \tau_n ; t_i < t} \left[X(t_i) - X(t_{i-1}) \right]^2 .$$

Suponiendo que para todo t$\in$[0, $\overline{T}$] existe el límite $\langle X \rangle_t := \lim_{n \to \infty} V_t^2(X;\tau_n)$ y que la función t$\rightarrow \langle X \rangle_t$ es continua, en tal caso, se dice que X admite la variación cuadrática continua $\langle X \rangle_t$.

En principio $\langle X \rangle_t$ podría depender de la sucesión τ_n. Sin embargo, nosotros estamos principalmente interesados en el caso en que X es una trayectoria muestral de una semimartingala continua tal como el movimiento Browniano. Se puede demostrar que, en este caso, $\langle X \rangle_t$ es independiente de la sucesión de particiones utilizada en su definición. Evidentemente, $\langle X \rangle_t$ es creciente respecto a t y de variación finita.

2. EL CÁLCULO ITÔ A LO LARGO DE UNA TRAYECTORIA MUESTRAL.

2.1 Justificación

Consideremos una función f:$\Re \rightarrow \Re$ continuamente diferenciable una vez (f es C^1) con derivada f´ y una función X(C^1):$\Re^+ \rightarrow \Re$ con derivada $\dot{X} := \frac{\partial}{\partial t} X(t)$. El teorema fundamental del cálculo integral nos dice

$$f[X(t)]\text{-}f[X(0)] = \int_o^t f'\left[X(s)\right]\dot{X}(s)ds =: \int_0^t f'(X_s)dX_s \qquad (2.1)$$

Se puede obtener una expresión análoga para la diferencia $f(X_t)$-$f(X_0)$ si X no es C^1, sino solamente continua y de variación acotada:

Proposición 2.1: Consideramos una función continua X: [0, $\overline{T}$]$\rightarrow \Re$, que es de variación finita y una función f(C^1) $:\Re \rightarrow \Re$ con derivada f ′. Sea τ_n una sucesión de particiones de [0, $\overline{T}$] con $\lim_{n\to\infty}|\tau_n| = 0$. Entonces existe

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{t_i \in \tau_n, t_i \le t} f'(X_{t_i})(X_{t_i} - X_{t_i-1}) =: \int_0^t f'(X_s)dX_s \qquad (2.2)$$

y además, tenemos la regla del cambio de variable

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_r)dX_s \qquad (2.3)$$

La proposición 2.1 es un caso especial de la fórmula Itô siguiente:

2.2 Fórmula de Itô.

Aquí vamos a deducir la fórmula de Itô que en la bibliografía de financiera la denominan Lema de Itô, que generaliza la regla de la cadena (2.3) para funciones de variación primera infinita, pero variación cuadrática finita. Nuestra exposición se basa en el llamado “Cálculo Itô a lo largo de una trayectoria”. Este enfoque nos permite una deducción elemental y relativamente simple de la mayor parte de los resultados del cálculo estocástico que se necesitan para el modelo de valoración de opciones Black-Scholes sin tener que desarrollar toda la teoría de la integración estocástica. En lo que sigue, consideramos una función continua X:[0, $\overline{T}$]$\rightarrow \Re$ que admite una variación cuadrática continua, $\langle X \rangle_t$, lo cual se verifica para trayectorias del movimiento Browniano. En general, se puede demostrar que las trayectorias muestrales de toda semimartingala continua admiten una variación cuadrática continua.

Cuando $\langle X \rangle_t$ es creciente respecto a t, la integral $\int_0^t g(r)d\langle X \rangle_r$ está definida para toda función continua g:[0, $\overline{T}$]$\rightarrow \Re$ en el “sentido Riemann” normal; cuando $\langle X \rangle_t$ es continua, esta integral es, además, una función continua del límite superior t. Ahora podemos establecer:

-La fórmula de Itô:

Dada una función continua X:[0, $\overline{T}$]$\rightarrow \Re$, con variación cuadrática continua $\langle X \rangle_t$ y denotando por F:$\Re \rightarrow \Re$ una función dos veces contínuamente diferenciable. Entonces, tenemos para t$\leq \overline{T}$

$$\mathrm{F}(\mathrm{X}_t) = \mathrm{F}(\mathrm{X}_0) + \int_0^t F'(X_r)dX_r + \frac{1}{2}\int_0^t F''(X_r)d\langle X \rangle_r \tag{2.4}$$

Donde $\int_0^t F'(X_r)dX_r := \lim_{n\to\infty} \sum_{t_i \in \tau_n; t_i \leq t} F'(X_{t_i})(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})$ (2.5)

Observaciones:

1) La existencia del límite de (2.5) se muestra en la demostración de la fórmula de Itô. La integral $\int_0^t F'(X_r)dX_r$ se denomina integral Itô; es una función continua del límite superior t como consecuencia inmediata de la (2.4).

2) El caso clásico de la proposición (2.1), donde X es de variación acotada, es un caso especial de la fórmula de Itô. Si $\langle X \rangle_t$ no es cero, el "término corrección" adicional $\frac{1}{2}\int_0^t F''(X_r)d\langle X \rangle_r$ forma parte de la fórmula de la diferencial $F(X_t) - F(X_0)$. Veremos que este término es de importancia crucial para la mayor parte de los resultados en la financiera tiempo-continuo.

3) Observemos que las sumas utilizadas al definir la integral de Itô son no-anticipadoras, es decir, el integrando $F'(X_r)$ se valora en límite izquierdo del intervalo $[t_{i-1}, t_i]$; veremos posteriormente que esto hace que la Integral Itô sea el instrumento idóneo para modelar las ganancias de la negociación.

4) La fórmula (2.4) se expresa de forma simple: $dF(X_t) = F'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}F''(X_t)d\langle X \rangle_t$.

5) Es posible generalizar el teorema de la fórmula de Itô para el caso en que X tenga trayectorias muestrales discontinuas [ver Protter(1992)].

Lema : Para toda función continua g:[0, T]$\rightarrow \Re$, se verifica:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{t_i\in\tau_n;t_i\le t} g(t_{i-1})(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2 = \int_0^t g(r)d\langle X\rangle_r \qquad (2.6)$$

3. PROPIEDADES DE LA INTEGRAL ITÔ

3.1 Variación cuadrática.

En esta sección consideramos una función continua X(t) con variación cuadrática continua $\langle X\rangle_t$.

Proposición 3.1: Sea $F\in C^1(\Re)$; entonces la función $t\to F(X_t)$ tiene la variación cuadrática $\int_0^t (F'(X_t))^2 d\langle X\rangle_r$.

Corolario 3.1: Para $f\in C^1(\Re)$ la integral Itô:=$\int_0^t f(X_r)dX_r$ está definida, su variación cuadrática es igual a $\langle I\rangle_t = \int_0^t f^2(X_r)d\langle X\rangle_r$.

3.2 Propiedad martingala de la integral Itô.

Hasta ahora solamente hemos utilizado propiedades analíticas de la función X, tal como el hecho de que X admitía una variación cuadrática continua en nuestro análisis de la integral Itô. Si X(t) es la trayectoria muestral de un proceso estocástico tal como el movimiento Browniano, podemos estudiar propiedades probabilistas de los procesos .

$I_t(\omega) = \int_0^t f(X_r(\omega))dX_r(\omega)$. En particular, podemos considerar el caso en que nuestro integrador sea una martingala.

Si M es una martingala con trayectorias de variación cuadrática continua y f una función C^1, podemos esperar que la integral Itô $I_t := \int_0^t f(M_r)dM_r$ conserve la propiedad martingala de M, cuando I_t está definida como límite de sumas no-anticipadoras, $I_t = \lim_{n\to\infty} I_t^n$ con $I_t^n = \sum_{t_i\in\tau_n;t_i\le t} f(M_{t_{i-1}})(M_{t_i} - M_{t_{i-1}})$.

La propiedad martingala de la I_t^n es una variación de la ganancia que "no se puede obtener mediante apuestas en una martingala", argumento utilizado ya en nuestra demostración de que las ganancias actualizadas de la negociación de una estrategia autofinanciadora admisible es una martingala según una medida martingala equivalente.

Desafortunadamente, surgen ciertos problemas con respecto a la integrabilidad cuando se pasa de las sumas aproximadoras al límite, de tal forma que sólo aproximadamente el resultado es verdadero. Para establecer este resultado necesitamos la noción de martingala local.

Definición.

Un proceso estocástico M se denomina "martingala local" si hay tiempo de parada $T_1 \leq ... \leq T_n \leq ...$ tales que

(1) $\lim_{n \to \infty} T_n(\omega) = \infty, \quad \forall n$

(2) $(M_{T_n \wedge t})_t$ es una martingala para todo n.

Generalmente, toda martingala es una martingala local. El recíproco no es cierto.

Teorema

Consideramos una martingala local M con trayectorias continuas y de variación cuadrática continua $\langle M \rangle_t$ y una función $f \in C^1[\Re]$. Entonces, $I_t(\omega) = \int_0^t f(M_t(\omega) dM_r(\omega)$ es una martingala local.

Si f está definida solamente sobre un subconjunto $G \subseteq \Re$, el proceso $\int_0^t f(M_r) dM_r$ se puede definir hasta el momento de parada $\tau = \inf.\{t > 0,\ M_t \notin G\}$ y es una martingala local hasta τ.

En las aplicaciones, frecuentemente se necesita decidir si una martingala local M es efectivamente una martingala completa.

La proposición siguiente nos proporciona un criterio útil.

Proposición.

Sea M una martingala local con trayectorias continuas. Entonces, son equivalentes las dos afirmaciones:

1) M es una martingala completa y $E(M_t^2) < \infty \quad \forall t \geq 0$.

2) $E(\langle M_t \rangle < \infty \quad \forall t$.

Si se verifica la 1) o la 2), tenemos: $E(M_t^2) = E(\langle M \rangle_t)$.

Demostraciones en Protter (1992).

Nota

El proceso siguiente es un ejemplo de martingala local que no es una martingala completa. Consideremos un movimiento Browniano tridimensional $W_t = \left(W_t^1, W_t^2, W_t^3\right)$ con $W_0 = (1,1,1)$ y definimos

$$M_t = \frac{1}{\|W_t\|} = \frac{1}{\sqrt{(W_t^1)^2 + (W_t^2)^2 + (W_t^3)^2}}$$

Entonces, M es una martingala local, lo cual se puede comprobar utilizando la fórmula Itô en dimensiones superiores, pero no es una martingala completa (ver Protter (1992)).

La proposición siguiente nos muestra que las martingalas interesantes con trayectorias continuas son necesariamente de variación infinita.

Proposición

Consideremos una martingala local M con trayectorias continuas de variación cuadrática cero, es decir, con $\langle M(\omega)\rangle_t = 0$ casi seguramente. Entonces las trayectorias de M son constantes, es decir, $M_t = M_0$, casi seguramente.

Corolario.

Sea M una martingala local con trayectorias continuas de variación finita. Entonces, $M_t = M_0$, casi seguramente.

Nota: Si las trayectorias de M son discontinuas, no se verifica la conclusión del corolario.

Para terminar esta sección damos una definición formal de semimartingala.

Definición.

Un proceso estocástico X de la forma $X_t = M_t + A_t$, donde M es una martingala local y A un proceso adaptado con trayectorias continuas por la izquierda de variación acotada, se denomina semimartingala; M se denomina parte martingala de X y A la parte de variación finita.

Nota:

1) Observemos que la continuidad por la izquierda de A implica que el valor de A_t se puede predecir de los valores de A_r para r<T.
2) La descomposición de X en parte martingala y parte de variación acotada es única. Además, se puede demostrar que si X es continua, M y, por tanto, A, también deben ser continuas.
3) En la teoría general de semimartingalas, generalmente se toma A que sea predecible; este es un requisito menos estricto, pero más abstracto, requisito que supone A es adaptado y continua por la izquierda.

4. COVARIACIÓN Y FÓRMULA DE ITÔ p-DIMENSIONAL.

4.1 Covariación

Fijada una sucesión τ_n de particiones de [0, $\overline{T}$] con $\tau_n \to 0$ y funciones continuas X, Y que admiten una variación cuadrática continua $\langle X \rangle_t$ y $\langle Y \rangle_t$ a lo largo de la sucesión τ_n.

<u>Definición.</u>

Supongamos que para todo $t \in [0, \overline{T}]$, existe el límite siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{t_i \in \tau_n; t_i \le t} (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})(Y_{t_i} - Y_{t_{i-1}}) =: \langle X, Y \rangle_t$$

Entonces, $\langle X, Y \rangle_t$ se denomina <u>covariación de X e Y.</u>

<u>Teorema.</u>

$\langle X, Y \rangle_t$ existe si existe $\langle X + Y \rangle_t$; en tal caso, tenemos la también llamada <u>identidad-polarización</u>

$$\langle X, Y \rangle_t = \frac{1}{2}\left(\langle X + Y \rangle_t - \langle X \rangle_t - \langle Y \rangle_t\right) \tag{4.1}$$

Observemos que $\langle X, Y \rangle_t$ es de variación acotada cuando lo es la diferencia de funciones monótonas. Utilizaremos la identidad de polarización para calcular la covariación para algunos ejemplos importantes:

1) Si X es una función continua con variación cuadrática continua $\langle X\rangle_t$ y A una función continua de varición acotada, se verifica que $\langle X+A\rangle_t = \langle X\rangle_t$ y, por tanto, $\langle X,A\rangle_t = 0$.
2) Consideremos dos movimientos Brownianos independientes B^1, B^2 en nuestro espacio de probabilidad (Ω, F, P). Entonces, $\langle B^1(\omega), B^2(\omega)\rangle_t$ =0. Para probar esta afirmación tenemos que calcular $\langle B^1 + B^2\rangle_t$. Basta observar que $(B_t^1 + B_t^2)/\sqrt{2}$ es también un movimiento Browniano y tiene variación cuadrática igual a t. Por tanto,
$$\frac{1}{2}\left(\langle B^1 + B^2\rangle_t - \langle B^1\rangle_t - \langle B^2\rangle_t\right) = \frac{1}{2}(2t - t - t) = 0$$
3) Consideremos una función continua X con variación cuadrática continua y f y g funciones C^1. Definimos $Y_t := \int_0^t f(X_r)dX_r$ y $Z_t := \int_0^t g(X_r)dX_r$. Entonces, $\langle Y,Z\rangle_t = \int_0^t f(X_r)g(X_r)d\langle X\rangle_r$. Esto se deduce de la identidad de polarización y del cálculo siguiente:
$$\langle Y+Z\rangle_t = \int_0^t (f+g)^2(X_r)d\langle X\rangle_r = \langle Y\rangle_t + \langle Z\rangle_t + 2\int_0^t f(X_r)g(X_r)d\langle X\rangle_r$$

El ejemplo 3) es un caso especial de la regla más general para las integrales Itô.

4.2 La fórmula-Itô p-dimensional.

Teorema.

Dadas funciones continuas $X = (X^1, ..., X^p) : [0, \overline{T}] \to \Re$ con covariación continua

$$\langle X^k, X^l\rangle_t = \begin{Bmatrix} \langle X^k\rangle_t, k = l \\ \frac{1}{2}\left(\langle X^k + X^l\rangle_t - \langle X^k\rangle_t - \langle X^l\rangle_t\right) k \neq l \end{Bmatrix}$$

y una función continua dos veces diferenciable $F : \Re^p \to \Re$.

Entonces

$$F(X_t) = F(X_0) + \sum_{i=1}^{p} \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_i} F(X_r) dX_r^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{p} \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} F(X_r) d\left\langle X^i, X^j \right\rangle_r$$

Utilizando la notación: $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ por F_{x_i} y $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$ por $F_{x_i x_j}$, la fórmula p-dimensional de Itô se puede escribir de forma sencilla:

$$dF(X_t) = \sum_{i=1}^{p} F_{x_i}(X_t) dX_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{p} F_{x_i x_j}(X_t) d\left\langle X^i, X^j \right\rangle_t$$

Fórmula producto de Itô.

Dadas X, Y con variación cuadrática continua $\langle X \rangle_t, \langle Y \rangle_t$ y la covariación $\langle X, Y \rangle_t$. Entonces,

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_r dY_r + \int_0^t Y_r dX_r + \langle X, Y \rangle_t .$$

La fórmula producto de Itô se puede expresar de forma sencilla:

$$d(XY)_t = X_t dY_t + Y_t dX_t + d\langle X, Y \rangle_t$$

-Fórmula Itô para funciones dependientes del tiempo.

Dadas una función continua X con variación cuadrática continua $\langle X \rangle_t$ y una función $F(t,x)$, que es una vez diferenciable continua respecto a t y dos veces diferenciable continua respecto a x. Entonces,

$$F(t, X_t) = F(0, X_0) + \int_0^t F_t(r, X_r) dr + \int_0^t F_x(r, X_r) dX_r + \frac{1}{2} \int_0^t F_{xx}(r, X_r) d\langle X \rangle_r .$$

A continuación, consideramos varias aplicaciones de la fórmula Itô p-dimensional.

1) **Movimiento Browniano Geométrico**.

Dados un movimiento Browniano W, su valor inicial $S_0 > 0$ y las constantes μ, σ con $\sigma > 0$, definimos el movimiento Browniano geométrico S mediante

$$S_t = S_0 \exp\left[\sigma W_t + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t\right]$$

El movimiento Browniano geométrico será nuestro modelo asociado a la fluctuación de los precios del activo. Utilizando la fórmula Itô deducimos una expresión más intuitiva para la dinámica de S. Definimos $X_t := \sigma B_t$ y $Y_t := \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t$ y observemos que $\langle X \rangle_t = \sigma^2 t$ y $\langle Y \rangle_t = \langle X, Y \rangle_t = 0$. Sea $F(x,y) := S_0 \exp(x+y)$ tal que $F_x = F_y = F_{xx} = F$. Por definición, $S_t = F(X_t, Y_t)$ y obtenemos

$$\begin{aligned} S_t &= S_0 + \int_0^t F(X_r, Y_r) dX_r + \int_0^t F(X_r, Y_r) dY_r + \frac{1}{2}\int_0^t F(X_r, Y_r) d\langle X \rangle_r \\ &= S_0 + \int_0^t F(X_r, Y_r)\sigma dB_r + \int_0^t F(X_r, Y_r)\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dr + \frac{1}{2}\int_0^t F(X_r, Y_r)\sigma^2 dr \qquad (4.2) \\ &= S_0 + \int_0^t \sigma S_r dB_r + \int_0^t \mu S_r dr \end{aligned}$$

Mediante la notación abreviada, la ecuación resuelta en S podemos escribirla como $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$. Para $\mu = 0$ obtenemos $S_t = S_0 + \int_0^t \sigma S_r dB_r$, que es una martingala local.

5. EL MODELO DE VALORACIÓN DE OPCIONES BLACK-SCHOLES.

Ahora vamos a estudiar la valoración y cobertura de derivados mediante el modelo clásico de Black-Scholes.

5.1 Dinámica de los precios de los activos.

Como en el trabajo clásico de Black y Scholes (1973), consideramos un mercado con dos activos, uno con riesgo que no paga dividendos y uno sin riesgo. El precio del título en el momento t se denota S_t^1, el saldo de la cuenta monetaria por S_t^0. Para simplificar, operamos con un tanto de interés instantáneo determinista r, tal que $S_t^0 = \exp(rt)$. Ahora, buscamos modelos apropiados para la dinámica del precio del título. Como de costumbre, operamos sobre un espacio de probabilidad filtrado

(Ω, F, P), $\{F_t\}$ dotado de un movimiento Browniano estándar W_t que representa la incertidumbre en nuestro mercado.

Bachelier (1900) propuso, en su tesis doctoral "Theorie de la Spéculation" (1900), modelar los precios del activo mediante un movimiento Browniano aritmético, es decir, propuso el modelo $S_t^1 = S_0 + \sigma W_t + \mu t$ para constantes $\mu, \sigma > 0$. Ahora bien, el movimiento Browniano aritmético tiene un gran inconveniente: cuando S_t^1 se distribuye $N(S_0 + \mu_t, \sigma^2 t)$, el precio del activo puede llegar a ser negativo con probabilidad positiva, lo cual no es correcto debido a que los precios de los títulos en el mundo real son siempre no negativos, ya que la responsabilidad de los accionistas es limitada.

Samuelson (1965) sugirió reemplazar el movimiento Browniano aritmético por el movimiento Browniano geométrico.

$$S_t^1 = S_t^0 \exp\left(\sigma W_t + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right) \tag{5.1}$$

Sabemos de la (4.2) que este modelo satisface la ecuación diferencial estocástica (EDE)

$$dS_t^1 = \mu S_t^1 dt + \sigma S_t^1 W_t$$

El movimiento Browniano geométrico, frecuentemente denominado modelo Black.Scholes, se utiliza ampliamente hoy día como modelo de referencia tanto en la teoría de la valoración de opciones como en la teoría de la optimización de la cartera. Por tanto, adoptamos este modelo como modelo de la dinámica del precio del título.

El modelo (5.1) implica que los log-rendimientos

$$\ln\left(S_{t+h}^1\right) - \ln\left(S_t^1\right) = \sigma\left(W_{t+h} - W_t\right) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)h$$

están distribuidos $N\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)h, \sigma^2 h\right]$; en particular, la volatilidad σ es la varianza instantánea de los log.rendimientos. Además, según la (5.1), los log-rendimientos no solapados a lo largo del tiempo son estocásticamente independientes.

Hay cantidad de consideraciones teóricas y prácticas que hacen atractivo el movimiento Browniano geométrico como modelo asociado a la dinámica del precio de los títulos:

- El movimiento Browniano geométrico se adapta razonablemente bien a los datos de los precios de los títulos, incluso si la adaptación (ajuste) está lejos de ser perfecta. Véase Embrechts, Frey y Furrer (1999).
- El movimiento Browniano geométrico tiene en cuenta las fórmulas de valoración explícitas para una clase de derivados lo suficientemente amplia.
- El modelo Black-Scholes es completamente adecuado como modelo para la cobertura de derivados: si la dinámica del precio del activo “no es demasiado diferente del movimiento Browniano geométrico”, las estrategias de cobertura calculadas mediante el modelo Black-Scholes se comportan razonablemente bien.

Hay también algunas consideraciones teóricas posibles a favor del modelo Black-Scholes:

- El modelo va de acuerdo con las hipótesis del mercado eficiente. Además, hay modelos económicos que mantienen que el modelo Black-Scholes se puede establecer como modelo para el equilibrio económico; por ejemplo, para un modelo basado en el concepto de equilibrio temporal. Fölmer y Schweizer (1993).
- El modelo de Black-Scholes es un modelo completo y libre de arbitraje que valora derivados de forma directa desde un punto de vista conceptual.

5.2 <u>**Valoración y cobertura del valor final de las reclamaciones**</u>

Consideremos una obligación (derecho, indemnización) aleatoria, con fecha de vencimiento T y pago (indemnización) H. Queremos obtener una estrategia de negociación dinámica que reproduzca la reclamación; tal estrategia se puede utilizar con el propósito de valoración y cobertura. Se puede demostrar que en el contexto del modelo de Black-Scholes existe una estrategia para cada reclamación cuyo pago es medible con respecto a la información generada por el precio del título. Sin embargo, tal resultado requiere la noción de la integral estocástica de Itô, $\int_0^t \xi_r dS_r^1$, para procesos predecibles generales ξ que no tenemos a nuestra disposición. Por tanto, restringimos nuestro análisis a los llamados reclamaciones de valor final cuyo pago es de la forma $H = h(S_T^1)$.

Para estas indemnizaciones se puede encontrar estrategias de cobertura que son funciones del tiempo y del precio actual del título, véase Bingham, Kiesel (1998) o Karatzas Shreve (1998).

5.2.1 Nociones básicas

Una estrategia de negociación de Markov viene dada por un par $[\varphi(t,S)\ ), \eta(t,S)]$ de funciones suaves. Aquí $\varphi(t,S_t^1)$ y $\eta(t,S_t^1)$ modelan el número de títulos y cuenta monetaria respectivamente en la cartera en el momento t. El valor en el momento t de esta estrategia viene dado por

$$V(t,S_t^1) = S_t^1\ \varphi(t,S_t^1) + \eta(t,S_t^0)S_t^0$$

Observemos que la estrategia se puede describir alternativamente especificando $\varphi(t,S)$ y $V(t,S)$; la situación en la cuenta monetaria viene dada por

$$\eta(t,S_t^0) = [V(t,S) - S\phi(t,S)] /\ S_t^0$$

Por otra parte, para motivar las definiciones siguientes, introducimos aproximaciones constantes a lo largo de una trayectoria para nuestras estrategias de valoración. Consideremos una sucesión de particiones τ_n con $\lfloor \tau_n \rfloor \to 0$ y definamos

$$\phi_t^n(w) = \sum_{t_i \in \tau_n; t_i \le t} \phi[t_{i-1}, S_{t_{i-1}}(w)]\ 1_{(t_{i-1},t_i\ ]}(\mathrm{t}) \qquad (5.2)$$

$$\eta_t^n(w) = \sum_{t_i \in \tau_n; t_i \le t} \eta[t_{i-1}, S_{t_{i-1}}(w)]\ 1_{(t_{i-1},t_i\ ]}(\mathrm{t}) \qquad (5.3)$$

y $V_t^n = \phi_t^n S_t^1 + \eta_t^n S_t^0$. Entonces, esta estrategia constante a lo largo de una trayectoria es autofinanciadora si y solamente si se verifica para todo $t_i \in \tau_n$

$$V_{t_i}^n = V_0 + G_t^n, \quad \text{donde} \quad G_t^n = \sum_{1 \le j \le i} \left[\phi_{t_j}^n (S_{t_j} - S_{t_{j-1}}) + \eta_{t_j}^n (\beta_{t_j} - \beta_{t_{j-1}}\right]$$

Ahora, recordemos que , por definición, de la integral Itô G_t^n converge hacia

$\int_o^t \phi(r,S_r^1)dS_r^1 + \int_0^t \eta(r,S_r^1)dS_r^0$. Por tanto, se puede establecer la siguiente definición.

Definición

Dada una estrategia $[\ \varphi(t,S_t^1),\ \eta(t,S_t^1)\ ]$ inducida por funciones suaves $\phi,\eta : [0,T] \times R^+ \to R.$

a) Las ganancias de negociación de esta estrategia vienen dadas por:

$$G_t = \int_o^t \phi(r,S_r^1)dS_r^1 + \int_0^t \eta(r,S_r^1)dS_r^0$$

b) La estrategia es autofinanciadora, si

$V(t,S_t^1) = V(0,S_0) + G_t$ para todo $t \leq T$

c) Consideremos un valor de una indemnización con pago $h(S_T)$.

Una estrategia autofinanciadora es una estrategia reproductora de una indemnización si $V(T,S) = h(S)$ para todo $S > 0$; en cuyo caso $V(t,S_t^1)$ es el precio equitativo de la indemnización (obligación) en el momento t.

5.2.2 La ecuación de valoración para el valor final de las indemnizaciones

Ahora, deducimos una ecuación diferencial parcial (EDP) para el valor de la estrategia reproductora.

Teorema

Sea $V : [0,\overline{T}] \times R^+ \to$ _ una función continua solución de la EDP.

$$V_t(t,S) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS}(t,S) + rSV_S(t,S) = rV(t,S), (t,S) \in [0,T] \times R^+ \tag{5.4}$$

Entonces, la estrategia cobertura con posesión-título $\phi(t,S) = V_S(t,S)$ y valor $V_S(t,S)$ es autofinanciadora. Si V satisface además la condición final $V(T,S) = h(S_T)$, la estrategia reproduce el valor final de la indemnización con pago $h(S_T)$ y el precio equitativo en el momento t de la reclamación es igual a $V(t,S_t^1)$.

5.3 **La Fórmula Black-Scholes**

- Para una opción call Europea, tenemos $h(S) = (S-k)^{+}$. El problema del valor final correspondiente generalmente se resuelve reduciendo la EDP (5.4) a la "ecuación de calor". Diseñamos la solución de por si importante también para llevar a cabo esquemas numéricos para resolver la EDP de valoración.

- Definimos $\tau(t) = \sigma^2(T-t)$ y $z(t,S) = \ln S - (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)$

Denotamos por $U(0,z) : [0,T] \times \_ \to \_$ la solución de la ecuación del calor $U_t = \frac{1}{2} U_{ZZ}$ con la condición inicial $U(0,z) = (e^Z - k)^{+}$ .Entonces,

$C(t,S) := e^{-r(T-t)} u[\tau(t), z(t,S)]$ es solución del problema valor final para el precio de una call Europea.

En efecto, tenemos $C(T,S) = u(\tau(T), z(T,S)) = u(0, \ln S) = (S-k)^{+}$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = e^{-r(T-t)} (ru - \sigma^2 u_\tau + (\frac{1}{2}\sigma^2 + r) u_z)$$

$$\frac{\partial C}{\partial S} = e^{-r(T-t)} \, u_z 1/S,$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = e^{-r(T-t)} \, u_{zz} (1/S)^2 - u_z (1/S)^2$$

Introduciendo estas expresiones en la EDP (5.4) se obtiene el resultado.

Sabemos que la solución u de la ecuación-calor con la condición inicial $u(0,z) = u_0(z)$ es igual a

$$u(\tau, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U_0(z + x\sqrt{\tau}) e^{-x^2/2} dx$$

Ver: Wilmott, Dewynne y Howison (1993)

Teorema

El precio no-arbitraje de una call Europea con precio ejercicio K y vencimiento T en el modelo de Black-Scholes con volatilidad σ y tanto de interés r viene dado por

$$C_{BS}(t, S; \sigma, r, k, T) := SN(d_1) - e^{-r(T-t)} KN(d_2)$$

donde $d_1 = \dfrac{\ln\left(S/K\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$ y $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$

La correspondiente cartera-cobertura consta de $\frac{\partial}{\partial S}C_{BS} = N(d_1)$ unidades del activo con riesgo y $\left[C_{BS}(t,S) - N(d_1)S)/e^{rt} = e^{-rT}KN(d_2)\right]$ unidades monetarias.

4. Aplicación de la fórmula: estimación de la volatilidad

Ahora, consideramos algunas observaciones respecto a posibles enfoques para determinar la volatilidad σ. Como la volatilidad no es directamente observable - en contraste con los otros parámetros de la fórmula Black-Scholes – encontrar un "buen" valor de σ es la parte más problemática para aplicar la fórmula de Black-Scholes. El hecho de que en el mercado real la volatilidad frecuentemente no es constante pero tiende a fluctuar de forma más bien impredecible, hace que la cuestión sea más difícil. La naturaleza estocástica de la volatilidad ha dado origen al desarrollo de los modelos de valoración estocástica. Hay dos enfoques para determinar σ.

1)Volatilidad histórica

Esta solución está basada en consideraciones estadísticas.

Recordemos que, según la (4.2), los log - rendimientos en períodos no solapados de longitud Δ son independientes y se distribuyen $N\left[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta, \sigma^2\Delta\right]$. Dados los precios de los activos en los momentos t_i, i=1,..., N con $t_i - t_{i-1} = \Delta$ (por ejemplo, rendimientos diarios) definimos $Y_i = \ln S_{t_i} - \ln S_{t_{i-1}}$.

El estimador estandar de los estadísticos elementales de σ_Δ, la volatilidad de los log – rendimientos en el período de tiempo Δ, viene dado por

$\hat{\sigma}_\Delta = \left[\dfrac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(Y_i - \overline{Y})^2\right]^{1/2}$, donde $\overline{Y} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i$

La volatilidad histórica estimada viene dada por $\hat{\sigma}_{hist} = \hat{\sigma}_\Delta / \sqrt{\Delta}$

2) Volatilidad implícita

La idea subyacente del concepto de la volatilidad implícita es el uso de los precios observados de los derivados negociados para encontrar la "predicción del mercado" para la volatilidad del título. Para explicar el concepto, consideremos el ejemplo siguiente: supongamos que una opción call con precio de ejercicio K y vencimiento T se negocia en el momento t y en un precio del título dado (S_t^1) para un precio de C_t^* . La volatilidad implícita $\hat{\sigma}_{impl}$ viene dada por la solución de la ecuación

$$C_{BS}[t,(S_t^1);\hat{\sigma}_{impl},K,T] = C_t^*$$

Cuando C_{BS} es estrictamente creciente respecto a σ existe una solución única de la ecuación; generalmente se determina mediante procedimientos numéricos.

En la práctica los especuladores tienden a utilizar una combinación de ambas soluciones, la volatilidad implícita es un concepto algo más popular.

5.5 Riesgo del modelo en el modelo Black-Scholes

Ahora estudiamos las implicaciones de la misespecificación de la volatilidad y volatilidad estocástica para el comportamiento de las estrategias de cobertura. Veáse El Karoui, Jeanblane –Piqué and Shreve (1998) y Gibson (2000).

Supongamos que el precio del título sigue la ecuación diferencial estocástica (EDE)

$$dS_t^1 = \mu S_t^1 dt + \sigma_t S_t^1 dW_t$$

para cierta volatilidad σ_t (posiblemente estocástica). Para simplificar supongamos que r=0. Consideremos un especulador que utiliza el modelo Black-Scholes con volatilidad σ^* para valorar y cubrir el valor final de la indemnización y quien posee una cartera autofinanciadora. Denotando por h^{BS} la solución de la ecuación diferencial parcial (EDP) del problema valor final para r=0, es decir,

$$h_t^{BS}(t,S)+\frac{1}{2}(\sigma^*)^2 S^2 h_{SS}^{BS} = 0, \qquad h^{BS}(T,S)=h(S) \tag{5.6}$$

Suponemos que el especulador sigue el modelo Black-Scholes y posee $h_t^{BS}(t,S_t^1)$ acciones del título en el momento t. Si mantiene una cartera autofinanciadora, el valor actual en T de su cartera es igual a

$$V_T = V_0 + \int_0^T h_S^{BS}\left(t, S_t^1\right) dS_t^1$$

Definición

El error de seguimiento de nuestra cobertura viene dado por $e_T = h\left(S_T\right) - V_T$. Observemos que nuestra cobertura produce una pérdida si $e_T > 0$ y una ganancia si $e_T < 0$. Tenemos la siguiente expresión para el error de seguimiento.

Proposición: El error de seguimiento es igual a

$$e_T = \frac{1}{2}\int_0^T \left(S_t^1\right)^2 \left(\sigma_t^2 - \left(\sigma^*\right)^2\right) h_S^{BS} S\left(t, S_t^1\right)$$

La proposición muestra que el error de seguimiento es proporcional a $\left(\sigma_t^2 - \left(\sigma^*\right)^2\right)$ el error de la estimación para la volatilidad y para la media de la "Gamma" $h_{SS}^{BS}\left(t, S_t^1\right)$ a lo largo de la trayectoria futura del proceso precio-título.

Si $h_{SS}^{BS}\left(t, S_t^1\right) > 0$: pérdidas (ganancias) de la cobertura monetaria si $\sigma_t > \sigma_t^*\left(\sigma_t < \sigma_t^*\right)$; si $h_{SS}^{BS}\left(t, S_t^1\right) < 0$: pérdidas (ganancias) monetarias, cobertura si $\sigma_t < \sigma_t^*\left(\sigma_t > \sigma_t^*\right)$.

En efecto, cuando $h^{BS}\left(T, S\right) = h\left(S\right)$ de la Fórmula de Itô obtenemos:

$$h\left(S_T\right) = h^{BS}\left(0, S_0\right) + \int_0^T h_S^{BS}\left(t, S_t^1\right) dS_t^1 + \int_0^T \left(h_S^{BS}\left(t, S_t^1\right) dS_t^1 + \frac{1}{2}\sigma_t^2\left(S_t^1\right) h_{SS}^{BS}\left(t, S_t^1\right) \right) dt$$

lo que implica que

$$e_T = \int_0^T \left(h_S^{BS}\left(t, S_t^1\right) dS_t^1 + \frac{1}{2}\sigma_t^2\left(S_t^1\right) h_{SS}^{BS}\left(t, S_t^1\right) \right) dt$$

Por la EDP de Black-Scholes (5.6), tenemos

$$h_t^{BS}\left(t, S\right) = -\frac{1}{2}\left(\sigma^*\right)^2 S^2 h_{SS}^{BS}\left(t, S\right)$$; por tanto,

$$e_T = \frac{1}{2}\int_0^T \left(S_t^1\right)^2 + \left(\sigma_t^2 - \left(\sigma^*\right)^2\right) h_{SS}^{BS}\left(t, S_t^1\right) dt$$

Para terminar, diremos respecto a la integral estocástica de Itô que la referencia original es el artículo de Itô (1944). Estos trabajos, cuyo precursor fue Wiener, se han desarrollado enormemente después en el marco de una teoría general de los procesos estocásticos, en particular, por Meyer (1976), Métivier et Pellaumail (1980) y Dellacherie et Meyer (1978,1982).

El Lema de Itô se ha convertido en el "paso obligado" de todos los trabajos que se refieran a la modelación en tiempo continuo. En tanto el valor de un activo financiero sea una función (suficientemente regular) de una o varias variables aleatorias, la aplicación de este Lema permite expresar el precio de este activo mediante ecuaciones diferenciales estocásticas que constituyen una prolongación de los trabajos relativos a la integral estocástica. Nosotros hemos considerado el modelo de valoración de opciones de Black y Scholes. Ahora bien, conviene tener en cuenta que cuando los activos presenten características específicas, será necesario recurrir a métodos numéricos de valoración.

Por otra parte, desde que Black-Scholes (1973) y –Merton (1973) publicaron sus trabajos sobre las posibles aplicaciones del Cálculo Estocástico al campo económico-financiero-actuarial, la idea de utilizar el cálculo estocástico para modelar los precios de los activos financieros se ha aceptado de forma general.

Tan es así, que hay ahora un gran número de libros excelentes que pueden utilizarse para completar las demostraciones de algunos temas que hemos tratado:

- Libros elementales, como el de Cox and Rubinstein (1985) o Jarrow and Turnbull (1996); Hull (1997).
- Libros algo más avanzados, como Lamberton and Lapeyre (1996), Björk (1998).
- Libros de un nivel más avanzado como son Musiela and Rutkowski (1997) y Karatzas and Shreve (1998).
- Para ampliar los conocimientos sobre teoría de la valoración de activos y fundamento teórico-económico se puede recomendar el libro de Duffie (1992) y para la parte básica de teoría de la probabilidad, el libro de Williams (1991).

BIBLIOGRAFÍA

- BACHELIER,L. (1990): “Theorie de la spéculation in the Random Character of Stock Market Prices”. ed. By P. Cootner, pp. 17-78. MIT Press Cambridge. Mass (196-t).
- BINGHAM,N. And R. KIESEL (1998): Risk-neutral valuation. Springer.
- BJÖRK,T. (1998): Arbitrage theory in continuous time. Oxford University Press. Oxford.
- BLACK; F. and M. SCHOLES (1973): The Pricing of Options and Corporate Liabilities, Journal of Political Economy. (81), (31,637-654)
- COX, J. and RUBINSTEIN (1985): Options markets. Prentice Hall. Englewood Cliffs.
- DELLACHERIE, C. et P.A. MEYER (1978). Probabilities and potential. North Holland.
- DELLACHERIE, C. et P.A. MEYER (1982). Probabilitîes and potential B: Theory of martingales. North Holland.
- DUFFIE, D. (1992): Dynamic Asset Pricing Theory. Princeton Press. Princeton. New Jersey.
- EL KAROUI, N., M. JEANBLANC-PIQUÉ and S. SHREVE (1998): “Robustness of Black and Scholes Formula” Mathematical Finance, 8, 93-126.
- EMBRECHTS, P.,R. FREY, AND H. FURRER (1999): “Stochastic Processes in Insurance and Finance” in Handbook of Statistics, Vol.18. North Holland
- FOLLMER, H. and M. SCHWEIZER (1993): A Microeconomic Approach to Diffusion Models for Stock Prices”, Mathematical Finance, (1), 1-23.
- GIBSON, R. (ed. 2000): Model Risk. Concepts. Calibration and Pricing Risk Publications. London.
- HULL, J. (1997): Options, futures and other derivatives. 3ª ed. Prentice Hall.
- ITÔ, K. (1994). Stochastic Integral. Proccedings of the Imperial Academy. Tokyo, vol.20.
- JARROW, R: and S. TURNBULL (1996): Derivative Securities. South Western Publishing. Cincinnati. Ohio.
- KARATZAS, L. and S. SHREVE (1998): Methods of Mathematical Finance. Springer.

- LAMBERTON, D.., and B. LAPEYRE (1996): Introduction to Stochatic Calculus Applied to Finance. Chapman and Hall. London.
- METIVIER, M. et S. PELLAUMAIL (1980): Stochastic Integration. Academic Press.
- MEYER, P.A (1976): Un cours sur les integrales stochastiques. Lecture notes in mathematics, nº 511 . Verlag.
- MUSIELA, M.., and RUTKOWSKi (1997): Martingale Methods in Financial Modelling Applications of Mathematics. Springer.
- PROTTER, P. (1992): Stochastic Integration and Differential Equations: A New Approach Applications of Mathematics. Springer.
- WILLIAMS, D. (1991): Probability with Martingales. Cambridge University Press. Cambridge.
- WILMOTT, P, J. DEWYNNE and S. HOWISON (1993): Option Pricing. Mathematical Models and Computation. Oxford Financial Press. Oxford.