Fijación de primas de seguros bajo criterio de decisión gamma-minimax

José María Pérez Sánchez[1]

Emilio Gómez Déniz[2]

F.J. Vázquez Polo[3]

[1]Dpto. de Métodos Cuantitativos en Economía y Gestión.
Universidad de Las Palmas de G.C.
35017 Las Palmas de G.C. España.
e-mail: josema@empresariales.ulpgc.es

[2] Dpto. de Métodos Cuantitativos en Economía y Gestión.
Universidad de Las Palmas de G.C.
35017 Las Palmas de G.C. España.
e-mail: emilio@empresariales.ulpgc.es

[3] Dpto. de Métodos Cuantitativos en Economía y Gestión.
Universidad de Las Palmas de G.C.
35017 Las Palmas de G.C. España.
e-mail: polo@empresariales.ulpgc.es

RESUMEN

El principio gamma-minimax es un criterio de decisión que se sitúa entre la metodología bayesiana y el análisis minimax. En el ambiente actuarial, generalmente el actuario no dispone de suficiente información para identificar una única distribución a priori (función estructura), proponiendo el principio minimax restringir el conjunto de estrategias posibles a aquéllas que sean compatibles con la información de que se dispone.

En este trabajo, se analiza el caso de función de estructura tipo Gamma combinada con una verosimilitud Poisson, siguiendo la línea de numerosos trabajos en el contexto actuarial. Obtendremos conclusiones acerca de la clase de distribuciones a priori que garantiza que la prima Bayes resultante es gamma-minimax respecto a dicha clase.

Palabras clave: *Principio minimax*, *gamma-minimax y Bayes*; *prima de seguros*.

Clasificación AMS: 62P05, 62F15

Fijación de primas de seguros bajo criterio de decisión gamma-minimax

1. Introducción

Existen infinidad de metodologías utilizadas para la fijación de primas de seguros. De entre todas ellas, en este trabajo se analizará el método de fijación basado en el principio gamma-minimax, ampliamente discutido por *Bühlmann* (1975) y *Eichenauer*, et al. (1988). Principio que se sitúa entre el Bayes y el minimax.

El método de fijación bayesiano basa su decisión final en minimizar la pérdida esperada, esto es, el valor medio de la pérdida con respecto a una distribución a priori, función estructura en términos actuariales, del parámetro de riesgo. La elección de esta distribución a priori depende únicamente de las creencias y experiencias que tenga el actuario. Por lo tanto, bajo esta metodología, el parámetro de riesgo es tratado como una variable aleatoria al que se le asigna una distribución de probabilidad. Esto ha supuesto gran parte de las críticas al modelo bayesiano como podemos observar, por ejemplo, en *Margolin* (1975). Sin embargo, el uso de la metodología bayesiana es un hecho indiscutible hoy en día en la estadística actuarial. Buena prueba de ello lo constituye los numerosos artículos y libros existentes sobre la materia; algunos ejemplos son *Eichenauer* et al. (1988), *Gómez* et al. (2000), *Heilmann* (1989), *Herzog* (1994), *Klugman* et al. (1998) y *Kuen* et al. (1999), entre otros.

Si no se dispone de una distribución a priori, se puede aplicar el principio minimax para el cálculo de la prima. En este caso el actuario restringe el conjunto de estrategias posibles a aquéllas que sean compatibles con la información de que disponga. Sin embargo se le critica el exceso de conservadurismo en sus tarifas finales. Para un mejor análisis de este principio, ver *Bühlmann* (1975), *Marazzi* (1976) y *Heilmann* (1989).

El principio gamma minimax ($\Gamma-$ minimax a partir de ahora) de fijación de primas de seguros trata de eliminar, de entre todas las estrategias posibles que puede adoptar el actuario, aquellas que sean incompatibles con la información de que disponga, analizando únicamente un subconjunto Γ de todas las posibles distribuciones a priori. El estudio se realizará considerando un juego en el que el jugador 1 es la naturaleza, compuesta por todos los posibles contratantes de pólizas, y el jugador 2, el actuario.

La estructura de este trabajo es la que sigue. La sección 2 contiene los elementos principales de trabajo analizados en la fijación de primas de seguros: la prima de riesgo, colectiva y Bayes. En la sección 3 analizaremos algunos conceptos y definiciones esenciales, en particular, los relacionados con la teoría de juegos. En la sección 4, exponemos el resultado fundamental del este trabajo al que hemos llegado considerando una distribución estructura Gamma y una verosimilitud Poisson, combinación muy usual en la fijación de primas de seguros. Por último, en la sección 5 se exponen conclusiones, comentarios y posibles vías de investigación que se abren con este tipo de análisis.

2. Consideraciones generales

En estadística actuarial es usual considerar variables aleatorias $\theta, X, X_1, X_2,...$ tales que θ toma valores en un espacio paramétrico Θ y, dado $\Theta=\theta$, $X, X_1, X_2,...$ son independientes e idénticamente distribuidas con función de densidad $f(x|\theta)$. En la práctica las variables X_i, $i=1,...,t$, representan la experiencia de siniestralidad de un asegurado en el período de tiempo *i*, mientras que θ recoge las características particulares del mismo en la cartera de seguros o colectivo.

Un principio de cálculo de prima asigna a cada asegurado una prima $\mathcal{P}$ que depende de θ, denominada *prima de riesgo*. Bajo el principio de equivalencia o prima neta dicha prima viene dada por

$$\mathrm{P}(\theta) = \int_X x\, f(x|\theta)\,dx, \quad \theta \in \Theta. \tag{1}$$

En la práctica el parámetro de riesgo θ se desconoce y de ahí que también se desconozca el valor de $\mathrm{P}(\theta)$, la prima justa que debiera cobrarse en un escenario teórico. Distintas aproximaciones pueden utilizarse entonces para obtener un estimador lo más justo posible de dicha prima. Una primera aproximación consiste en calcular la media de todas esas primas para obtener la denominada *prima colectiva*. Si $\pi(\theta)$ es la distribución que sigue θ en el colectivo, esto es la distribución a priori, entonces la prima colectiva, P, se calcula como

$$\mathrm{P} = \int_\Theta \mathrm{P}(\theta)\pi(\theta)\,d\theta\,.$$

Otra aproximación consiste en combinar la información a priori, medida en términos de $\pi(\theta)$, y la información muestral para obtener la prima Bayes. Generalmente y bajo el principio de prima neta suelen obtenerse expresiones de la prima Bayes que adoptan la forma de *fórmula de credibilidad*,

$$\delta = Z \cdot \bar{x} + (1 - Z) \cdot E(\theta),$$

donde $\bar{x}$ es la media muestral, $E(\theta)$ la media del colectivo y Z, el factor de credibilidad, viene dado por

$$Z = \frac{n}{n + k}, \qquad k = \frac{Var[E(\theta|x)]}{E[Var(\theta|x)]} \tag{2}$$

Una lectura más detallada sobre fórmulas de credibilidad puede encontrarse en *Bühlmann* (1967), *Gerber* (1979), *Herzog* (1994), *Klugman* et al. (1998); entre otros.

Formalmente, el procedimiento de cálculo de la prima Bayes requiere de los elementos que se introducen en la siguiente sección.

3. Primas Bayes, minimax y $\Gamma-$ minimax

El problema de la tarificación de seguros puede analizarse como un juego bipersonal de suma nula en el que los jugadores son el actuario, jugador 2, y la naturaleza, jugador 1. Las estrategias del actuario se corresponden con procedimientos de cálculo de primas, mientras que las estrategias de la naturaleza se presentan en la forma de distribuciones de probabilidad a priori.

Sea $L(\mathrm{P}(\theta),\delta)$ una función que mide la pérdida soportada por elegir δ en lugar de la prima justa, aunque desconocida, $\mathrm{P}(\theta)$. La función de riesgo

$$R(\theta,\delta)=E_{\Theta}\left[L(\mathrm{P}(\theta),\delta)\right] \tag{3}$$

mide la pérdida esperada por tomar dicha decisión.

Ahora, si el actuario sabe cómo se distribuyen los valores del parámetro de riesgo θ en la cartera de seguros podrá asignarle una distribución $\pi(\theta)$ a dicho parámetro, la distribución a priori o función estructura, y calcular la función

$$r(\pi,\delta)=\int_{\Theta} R(\theta,\delta)\pi(\theta)d\theta\ , \tag{4}$$

que se denomina función de riesgo de Bayes de δ con respecto a $\pi\in\Pi$, el conjunto de todas las medidas de probabilidad sobre Θ .

Las siguientes definiciones (véase *Berger*, 1985) son útiles para la estimación de δ bajo el criterio $\Gamma-$ minimax.

Definición 1. Una decisión $\delta^{\pi^*}\in\Delta$ es *bayes* con respecto a $\pi\in\Pi$ si

$$r\left(\pi^*,\delta^{\pi^*}\right)=\inf_{\delta\in\Delta} r\left(\pi^*,\delta\right),\ \pi^*$$

es la distribución a posteriori de θ dada la información muestral $\bar{x}$. El uso de este método de cálculo quedará supeditado, como ya hemos comentado, a la disponibilidad de información subjetiva acerca de la distribución del colectivo.

Definición 2. Una decisión $\delta^M \in \Delta$ es *minimax* si

$$\sup_{\pi\in\Pi} r(\pi,\delta^M) = \inf_{\delta\in\Delta} \sup_{\pi\in\Pi} r(\pi,\delta).$$

Usaremos este principio en los casos en que se desconoce la distribución del colectivo.

Definición 3. Una decisión $\delta^\Gamma \in \Delta$ es $\Gamma -$ *minimax* con respecto al subconjunto $\Gamma \in \Pi$ si

$$\sup_{\pi\in\Gamma} r(\pi,\delta^\Gamma) = \inf_{\delta\in\Delta} \sup_{\pi\in\Gamma} r(\pi,\delta).$$

Este principio se usará cuando podamos asegurar la pertenencia de la distribución a priori a un subconjunto $\Gamma \in \Pi$.

Además, diremos que la distribución a priori $\pi^* \in \Gamma$ es la *menos favorable* con respecto al subconjunto Γ si

$$\inf_{\delta\in\Delta} r(\pi^*,\delta) = \sup_{\pi\in\Gamma} \inf_{\delta\in\Delta} r(\pi,\delta).$$

Las posibles estrategias de los “jugadores” estarán recogidas en los distintos métodos de fijación de primas $\delta \in \Delta$, para el jugador 2, y en las posibles formas que puede adoptar $\pi \in \Pi$, para el jugador 1. De esta forma, el juego queda definido con la tripleta (Π,Δ,r); (Γ,Δ,r) en caso de que el actuario disponga de información a priori sobre el colectivo. El valor del juego V puede calcularse como

$$V = \sup \inf r(\pi,\delta) = \sup \inf r(\pi,\delta),$$

para $\pi \in \Gamma$ y $\delta \in \Delta$. Sólo tendrá sentido calcularlo cuando efectivamente se cumpla la igualdad $\sup \inf r(\pi,\delta) = \sup \inf r(\pi,\delta)$.

4. Un resultado $\Gamma-$ minimax para el par Poisson-gamma

En estadística actuarial es usual considerar que las reclamaciones $X_1, X_2, ..., X_t$ siguen una distribución de Poisson de parámetro θ, dada por

$$f(x|\theta) = \frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!},$$

con $x \in (0,\infty)$ y $\theta \in \Theta$, y asumir una distribución a priori gamma para el parámetro de riesgo

$$\pi_0(\theta) = \frac{b^a}{\Gamma(a)}\theta^{a-1}e^{-b\theta}, \qquad a > 0, b > 0.$$

El caso Poisson-Gamma está muy extendido en literatura actuarial (véase a *Heilmann* (1989), *Klugman* et al. (1998), *Gómez* et al. (2000), entre otros). Se supone en este caso que el número de reclamaciones para un asegurado de la cartera de seguros tiene la distribución de Poisson con parámetro θ desconocido, y que la distribución de θ en el colectivo tiene la distribución gamma. La prima calculada entonces no es una prima dada en términos monetarios, sino de reclamaciones. En la práctica, el coste medio por reclamación se considera fijado, y la prima a cobrar al asegurado se calculará como

Coste medio $\times$ Prima calculada.

El siguiente resultado permite asegurar bajo qué condiciones la prima Bayes es $\Gamma-$minimax. Esto será cierto bajo una clase Γ que incorpora restricciones acerca de los momentos de primer y segundo orden de la prima colectiva.

Teorema. Consideremos que la distribución del número de reclamaciones tiene una distribución de Poisson de parámetro θ y $\theta \sim Ga(a,b) = \pi_0$, entonces bajo la función de pérdida cuadrática $L[\mathrm{P}(\theta),\delta] = (\mathrm{P}(\theta) - \delta)^2$, y dado

$$\delta^{\pi_0} = \frac{a + n\bar{x}}{b + n},$$

entonces:

(a) δ^{π_0} es Bayes con respecto a π_0.

(b) δ^{π_0} es una fórmula de credibilidad.

(c) π_0 es la *menos favorable* en Γ_1, con

$$\Gamma_1 = \left\{\pi \in \Pi : E(\mathrm{P}) \geq \frac{b}{a}, E(\mathrm{P}^2) \leq \frac{b(b+1)}{a^2}\right\}.$$

(d) δ^{π_0} es Γ_1 - *minimax*.

(e) El valor del juego es

$$V = \frac{b(b^3 + b^2 - a^2 b + an)}{a^2 (b + n^2)}.$$

<u>*Demostración:*</u>

(a) De la definición 1 es fácil deducir que

$$\delta^{\pi_0} = \int_\Theta \mathrm{P}(\theta) \pi_0(\theta|\bar{x}) d\theta,$$

donde $\pi_0(\theta|\bar{x})$ es la distribución a posteriori del parámetro dada la información muestral $\bar{x} = (1/n)\sum_{i=1}^{n} x_i$, que es un gamma de parámetros $a + n\bar{x}$ y $b + n$, por lo que la prima Bayes viene dada por

$$\delta^{\pi_0} = \int_\Theta \theta \frac{(a+n)^{(b+n\bar{x})}}{\Gamma(b+n\bar{x})} \theta^{b+n\bar{x}-1} e^{(a+n)\theta} d\theta = \frac{a+n\bar{x}}{b+n}.$$

(b) Es inmediato rescribir la expresión anterior como un fórmula de credibilidad,

$$\delta^{\pi_0} = \frac{a + n\bar{x}}{b+n} = \frac{n\bar{x}}{b+n} + \frac{a}{b+n} = \frac{b}{b+n}\cdot\frac{a}{b} + \frac{n}{b+n}\bar{x} = Z\cdot\bar{x} + (1-Z)\cdot E_{\Pi}\left[\mathrm{P}(\theta)\right].$$

De esta forma, la prima aparece escrita como una suma ponderada de la información muestral y de la media del colectivo. Ahora es un simple ejercicio comprobar que el factor de credibilidad Z es como en (2).

(c) Sólo necesitamos demostrar que $\inf_{\delta\in\Delta} r(\pi_0,\delta) = \sup_{\pi\in\Gamma_1} r(\pi,\delta^{\pi})$, pero ya sabemos que $\inf_{\delta\in\Delta} r(\pi_0,\delta) = r(\pi_0,\delta^{\pi})$ debido a que δ^{π} es la prima bayesiana. Únicamente debemos comprobar que también se cumple $\sup_{\pi\in\Gamma_1} r(\pi,\delta^{\pi}) = r(\pi_0,\delta^{\pi})$.

La función de riesgo se calcula tal y como se indica en la expresión (2), que para el caso que nos ocupa queda

$$R(\theta,\delta) = E_X\left[L(\theta,\delta)\right] = E_X\left[\left(\mathrm{P}(\theta) - \delta^{\pi}\right)^2\right] = E_X\left[\left(\theta - \frac{a+n\bar{x}}{b+n}\right)^2\right] = \frac{1}{(b+n)^2}\left[b^2\theta^2 - (2ab-n)\theta + a^2\right]$$

Por lo tanto, el riesgo bayes resulta

$$r(\pi,\delta^{\pi}) = E_{\Theta}\left[R(\theta,\delta^{\pi})\right] = E_{\Theta}\left[\frac{1}{(b+n)^2}\left[b^2\theta^2 - (2ab-n)\theta + a^2\right]\right] =$$

$$= \frac{1}{(b+n)^2}\left[b^2 E_{\Theta}(\theta^2) - (2ab-n)E_{\Theta}(\theta) + a^2\right]$$

Para el análisis que estamos realizando, las esperanzas $E_{\Theta}[\theta]$ y $E_{\Theta}[\theta^2]$ son equivalentes a $E_{\Theta}[\mathrm{P}(\theta)]$ y $E_{\Theta}[\mathrm{P}^2(\theta)]$ por lo que podemos rescribir la anterior expresión, quedando

$$r(\pi,\delta^{\pi}) = \frac{1}{(b+n)^2}\left[b^2 E_{\Theta}\left[\mathrm{P}(\theta^2)\right] - (2ab-n)E_{\Theta}[\mathrm{P}(\theta)] + a^2\right].$$

Podemos calcular, tanto $E_{\Theta}[\mathrm{P}(\theta)]$ como $E_{\Theta}[\mathrm{P}^2(\theta)]$ para el caso poisson-gamma,

$$E_{\Theta}[\mathrm{P}(\theta)] = \int_{\Theta}\mathrm{P}(\theta)\pi_0(\theta)d\theta = \int_{\Theta}\theta\,\frac{a^b}{\Gamma(b)}\theta^{b-1}e^{-a\theta} = \frac{a}{b},$$

$$E_{\Theta}[\mathrm{P}(\theta)] = \int_{\Theta}\mathrm{P}(\theta)\pi_0(\theta)d\theta = \int_{\Theta}\theta^2\,\frac{a^b}{\Gamma(b)}\theta^{b-1}e^{-a\theta} = \frac{(a+1)a}{b^2}.$$

Puesto que $\Gamma_1 = \left\{\pi\in\Pi : E_{\Theta}(\mathrm{P}) \geq \frac{a}{b}, E_{\Theta}(\mathrm{P}^2) \leq \frac{a(a+1)}{b^2}\right\}$, el $\sup_{\pi\in\Gamma_1} r(\pi,\delta^{\pi})$ se alcanzará cuando $E_{\Theta}[\mathrm{P}^2(\theta)]$ tome el mayor valor posible, que es $\frac{(a+1)a}{b^2}$, y $E_{\Theta}[\mathrm{P}(\theta)]$ tome el menor valor posible, que es $\frac{a}{b}$, en $r(\pi,\delta^{\pi})$. Sustituyendo, pues $E_{\Theta}[\mathrm{P}^2(\theta)]$ por $\frac{(a+1)a}{b^2}$ y $E_{\Theta}[\mathrm{P}(\theta)]$ por $\frac{a}{b}$ se obtiene que $\inf_{\delta\in\Delta} r(\pi_0,\delta) = \sup_{\pi\in\Gamma_1} r(\pi,\delta^{\pi}) = r(\pi_0,\delta^{\pi})$, por lo que (c) estaría probado.

(d) Tenemos que $\sup_{\pi\in\Gamma_1} r(\pi,\delta^{\pi_0}) < \sup_{\pi\in\Gamma_1} r(\pi,\delta)^{\pi}$, $\forall\delta\in\Delta$ y δ^{π_0} sería Γ_1 - minimax. Pero esto es inmediato, ya que

$$r(\pi_0,\delta^{\pi_0}) = \frac{1}{(b+n)^2}\left[a^2\,\frac{(a+1)b}{b^2} - (2ab-n)\frac{a}{b} + a^2\right] \geq r(\pi,\delta^{\pi_0}).$$

Por lo tanto, tenemos que $r(\pi_0,\delta^{\pi_0}) \geq r(\pi,\delta^{\pi_0})$ $\pi\in\Gamma_1$ y además, $r(\pi_0,\delta^{\pi_0}) \leq r(\pi_0,\delta^{\pi_0})$, por ser δ^{π_0} la prima bayes. Entonces,

$$\sup_{\pi\in\Gamma_1} r\left(\pi,\delta^{\pi}\right) \geq \sup r\left(\pi_0,\delta^{\pi}\right) \geq r\left(\pi_0,\delta^{\pi_0}\right) \geq r\left(\pi,\delta^{\pi_0}\right)$$

de donde se deduce que

$$\sup_{\pi\in\Gamma_1} r\left(\pi,\delta^{\pi}\right) \geq \sup_{\pi\in\Gamma_1} r\left(\pi_0,\delta^{\pi_0}\right),$$

resultando que $\sup r\left(\pi,\delta^{\pi}\right) \leq \sup r(\pi,\delta)$, y el apartado (d) estaría probado.

(c) Recordemos que el valor del juego lo podíamos calcular mediante la expresión $V = \sup\inf r(\pi,\delta) = \sup\inf r(\pi,\delta)$, para $\pi \in \Gamma$ y $\delta \in \Delta$. Esto sólo se puede cumplir para $\pi = \pi_0$ y para $\delta = \delta^{\pi}$, por lo que el valor del juego viene dado por

$$V = \sup\inf r(\pi,\delta) = \sup\inf r(\pi,\delta) = r\left(\pi_1,\delta^{\pi}\right) = \frac{1}{(b+n)^2}\left[a^2\,\frac{(a+1)a}{b^2} - (2ab-n)\frac{a}{b} + a^2\right]$$
$$= \frac{a\left(a^3 + a^2 - ab^2 + bn\right)}{b^2(b+n)^2}.$$

5. Conclusiones

En este artículo se ha ilustrado el uso del análisis Γ – minimax para el principio de prima neta en el modelo Poisson-gamma. El análisis asume la existencia de una función estructura π_0, y presupone su pertenencia a un subconjunto Γ de distribuciones de acuerdo con la información que posee el actuario.

Los resultados obtenidos desvelan la existencia de una prima bayesiana δ^{π_0} que es $\Gamma-$minimax bajo ciertas condiciones impuestas sobre los momentos de primer y segundo orden de la prima colectiva. Además, este análisis permite ofrecer resultados acerca de la distribución estructura π_0. En concreto, llegamos a la conclusión de que dicha distribución es la *menos favorable* en Γ_1, lo que refuerza la idea de realizar análisis de robustez de la prima obtenida, en la línea de trabajo de *Gómez* et al. (2000).

Por último, hay que destacar que la metodología seguida en este artículo es susceptible de ser aplicada a otros principios de cálculo de primas distintos del de prima neta presentado aquí; una excelente revisión de los mismos puede verse en *Heilmann* (1989) y *Gerber* (1979)

Bibliografía

Berger, J. (1985). “Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis”. Second Edition. Springer-Verlag.

Bühlmann, H.(1967). “Experience rating and credibility”. Astin Bulletin, 5, II, pp. 157-165.

Bühlmann, H. (1975). “Minimax credibility”. Proceedings of Actuarial research Conference on credibility. Berkeley. CA. Academic Press. New York. P.M. Kahn. “Credibility: Theory and Applications”, pp. 1-18.

Eichenauer, J., Lehn, J. y Rettig, S. (1988). “A gamma-minimax result in credibility theory”. Insurance: Mathematics and Economics, 7, pp. 49-57.

Gerber, H. (1979). “An Introduction to Mathematical Risk Theory”. Huebner Foundation.

Gómez, E., Hernández, A y Vázquez, F. (2000). “Robust Bayesian Premium Principles in Actuarial Science”. Journal of the Royal Statistical Society (Series D. The Statistician), 49, 2, pp. 241-252.

Heilmann, W. y Schöter, K. (1987). "On the robustness of premium principles." Insurance: Mathematics and Economics, 6, pp. 145-149.

Herzog, T. (1994). Introduction to Credibility Theory. ACTEX Publications, Winsted.

Klugman, S., Panjer, H. y Willmot, G. (1988). Loss Models: From Data to Decisions. John Wiley & Sond, Inc. New York.

Kuen, S. y Yang, H. (1999). "Subjetive Risk Measures: Bayesian Predictive Scenarios Analysis." Insurance: Mathematics and Economics, 25, pp. 157-169.

Marazzi, A. (1976). Minimax credibility. Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker, pp. 219-229.

Margolin, M. (1975). " Are the Classical and Bayesian Approaches to Credibility Empirically Valid?". Proceedings of Actuarial research Conference on credibility. Berkeley. CA. Academic Press. New York. P.M. Kahn. "Credibility: Theory and Applications", pp. 281-288.