La privación definida a partir de una función de utilidad.

Bárcena Martín, Elena. barcenae@uma.es
Imedio Olmedo, Luis. imedio@uma.es
Martín Reyes, Guillermina. gmartin@uma.es
Departamento de Estadística y Econometría.
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Universidad de Málaga.

Palabras claves: privación, satisfacción, utilidad, desigualdad, índice de Gini.

Abstract
En la literatura que se ocupa del concepto de privación, desde un punto de vista económico, (Yitzhaki (1979, 1982), Hey y Lambert (1980), Chakravarty y Chakraborty (1984), Berrebi y Silber (1985),...), se supone que la misma depende exclusivamente de la renta. En aportaciones posteriores, Podder (1996) o Chakravarty y Mukherjee (1998), se han propuesto definiciones basadas en funciones de utilidad, si bien la cuestión no se aborda de un modo general. El objetivo de este trabajo es la generalización del enfoque de Hey y Lambert (1980) cuando la privación / satisfacción de los individuos se formula a partir de la utilidad asociada a sus respectivos niveles de renta. Como es habitual en los planteamientos de tipo utilitarista, supondremos que la función de utilidad de la renta, U, es común a todos los individuos de la sociedad y que satisface las hipótesis que usualmente se imponen a estas funciones: crecimiento estricto respecto de la renta y decrecimiento de la utilidad marginal, sin embargo, no se opta por una forma funcional concreta. Bajo estas condiciones no es complicada la generalización de los resultados de Hey y Lambert, que se obtienen como caso particular cuando $U(x)=x$. Este desarrollo teórico se ilustra con una aplicación empírica de la medición de la privación en España para el 2000, cuando $U(x)=x$, $U(x)=x^{0,5}$ y $U(x)=\ln x$, empleando como fuente estadística la ECPF 1996 actualizada al 2000 y estimando para estos datos el modelo triparamétrico de Dagum.

Área temática
5. Economía del Sector Público

LA PRIVACIÓN DEFINIDA A PARTIR DE UNA FUNCIÓN DE UTILIDAD.

En los trabajos clásicos que se ocupan de la privación, casi todos ellos encuadrados en el ámbito de la sociología, se hace referencia a "sentimientos" que surgen como consecuencia de la desigualdad, entendida en sentido amplio, existente dentro de un grupo, subrayando la relatividad del concepto[1]. La idea de privación relativa aparece inicialmente en la obra de Stouffer, Suchman, Devinney, Star y Williams, (1949), *The American Soldier: Adjustment During Army Life*, aunque en ella no se llega a proponer una definición formal ni, mucho menos, indicaciones destinadas a su medición.

A pesar de que existe consenso en que la privación relativa afecta a sentimientos subjetivos, aspiraciones, actitudes y decisiones, no existe acuerdo en su significado exacto, por lo que no es extraño que Crosby (1979) encuentre cuatro versiones de la teoría de la privación relativa. De ellas, la que ha tenido una mayor repercusión al estudiar la privación desde un punto de vista económico ha sido la de Runciman[2] (1966). Esto es debido quizás a que sus enunciados son más precisos, lo que hace más abordable su tratamiento analítico, y, de hecho, se hace referencia a ella en todos los trabajos que se ocupan de esta cuestión.

La privación, al hacer referencia a sentimientos, es una variable no observable o latente, difícil de medir y que requiere el empleo de indicadores, técnicas factoriales o modelos econométricos de variables latentes. En esta forma de abordar la cuestión la mayor dificultad estaría en determinar qué indicadores reflejan o son causa de la privación, dado que ésta deriva de una carencia subjetiva. Por ello, en la literatura que se ocupa de este concepto, desde un punto de vista económico, nos encontramos con una situación análoga a la que es habitual en el ámbito de análisis de las funciones de bienestar social; esto es, se supone que la privación, como el bienestar, depende exclusivamente de la renta. Sin duda es una simplificación fuerte al existir otros factores que contribuyen a la privación de los individuos, especialmente si forman parte de los grupos cuyas rentas están situadas en los extremos de la distribución. Sin embargo, este tipo de aproximación se justifica al ser la renta una variable observable cuya relación con la privación parece razonable suponer que es monótona decreciente. Al intentar trasladar los enunciados de Runciman al ámbito económico, las distintas formulaciones que se han propuesto en la literatura (Yitzhaki (1979, 1982), Hey y Lambert (1980), Chakravarty y Chakraborty (1984), Berrebi y Silber (1985),...) definen la privación respecto a la renta. Bajo este supuesto es evidente que la privación relativa es consecuencia de la diferencia entre las rentas que perciben los

[1] La privación es relativa porque los individuos se sienten privados en relación a otros que constituyen su grupo de referencia.

[2] Runciman propone la siguiente definición de privación relativa:

"Una persona está relativamente privada de X cuando: (i) no tiene X, (ii) otro u otros individuos poseen X (pudiendo ser él mismo en el pasado uno de estos individuos), (iii) quiere X, (iv) considera factible tener X".

individuos, de modo que la privación media del conjunto de la sociedad viene expresada mediante una medida de desigualdad. En particular, si la distribución de renta es igualitaria la privación, tanto a nivel individual como para el conjunto de la sociedad, es nula. En aportaciones posteriores, Podder (1996) o Chakravarty y Mukherjee (1998), se han propuesto definiciones basadas en funciones de utilidad, si bien la cuestión no se aborda de un modo general, sino que se trata más bien de justificar la conveniencia de determinadas funciones, como la logarítmica, a fin de que la privación / satisfacción a nivel individual o sus valores medios para el conjunto de la sociedad, satisfagan ciertas propiedades que sus autores consideran deseables para este tipo de medidas.

El objetivo de este trabajo es la generalización del enfoque de Hey y Lambert (1980) cuando la privación / satisfacción de los individuos se formula a partir de la utilidad asociada a sus respectivos niveles de renta. Como es habitual en los planteamientos de tipo utilitarista, supondremos que la función de utilidad de la renta, U, es común a todos los individuos de la sociedad y que satisface las hipótesis que usualmente se imponen a estas funciones: crecimiento estricto respecto de la renta y decrecimiento de la utilidad marginal, sin embargo, no se opta por una forma funcional concreta. Si, para facilitar el tratamiento analítico, suponemos que U es dos veces derivable, las hipótesis anteriores equivalen a que $U'(x)>0$, para todo $x>0$, junto a la condición de concavidad, $U''(x)<0$, para todo $x>0$. Bajo estas condiciones no es complicada la generalización de los resultados de Hey y Lambert, que se obtienen como caso particular cuando $U(x)=x$.

El artículo se estructura de la siguiente forma: en la siguiente sección se expone la notación y conceptos empleados. En la segunda sección se revisa el enfoque de Hey y Lambert, en el que se basa nuestro estudio. El desarrollo del enfoque utilitarista de la privación, se expone en la tercera sección, deteniéndonos en casos particulares para dichas funciones. En la cuarta, se hace una aplicación empírica de la medición de la privación en España para el 2000 bajo el enfoque utilitarista. Para ello empleamos como fuente estadística la ECPF 1996 actualizada al 2000, para cuyos datos se estima el modelo triparamétrico de Dagum. En la última sección se recogen unos comentarios finales.

1. Notación y conceptos previos

Una cuestión que nos parece relevante al formular una definición para la privación es su punto de partida. Si la privación surge de la comparación entre individuos parece razonable que las distintas formulaciones se basen en las comparaciones interpersonales. Es decir, que comiencen definiendo la privación de un individuo con renta x respecto a otro con renta z, $P(x,z)$, $z>x$, para obtener a continuación la privación media asociada al nivel de renta x, $P(x)$, agregando la privación de ese individuo respecto a quienes tienen una renta mayor. Por último, el valor esperado de la función anterior, E(P(X)), proporcionará la privación social media. No todas las propuestas que encontramos en la literatura siguen este esquema. En algunas de ellas se parte de la definición de la función que asigna a cada nivel de renta su privación, con lo cual se elude la primera etapa y se omite lo que constituye un rasgo esencial de la privación: la comparación entre individuos en distinta situación.

Para facilitar el tratamiento analítico supondremos que la renta viene representada mediante una variable aleatoria continua, X, cuyo recorrido es [0, x*], siendo F(x) su función de distribución, derivable con continuidad, f(x)=F´(x) la función de densidad y μ la renta media. Un individuo con renta $x_i>0$ contempla una partición del recorrido en dos intervalos: $(x_i,x^*]$, que incluye las rentas mayores que la suya, respecto a las que siente privación, y $[0, x_i]$, al que pertenecen las rentas menores que la suya y respecto a las que está "satisfecho", lo que, para cada formulación concreta, permite definir la satisfacción como contrapartida de la privación.

Si $\overline{U} = E(U(X)) = \int_0^{x^*} U(x)dF(x)$ es la utilidad media, la curva de concentración de la utilidad se define mediante:

$$L_U(p) = \frac{1}{\overline{U}}\int_0^{x} U(s)dF(s), \quad p = F(x),$$

e indica la proporción de la utilidad total del conjunto de individuos con renta menor o igual a x. Conviene observar que al ser U estrictamente creciente, L_U coincide con la curva de Lorenz de la distribución de utilidad. Su índice de Gini asociado viene dado por:

$$G_U = 1 - 2\int_0^1 L_U(p)dp .$$

La utilidad media del conjunto de individuos cuya renta es mayor o igual que x, $\overline{U}(x^+)$, viene dada por:

$$\overline{U}(x^+) = \frac{1}{1-F(x)}\int_x^{x^*} U(z)dF(z) = \frac{\overline{U}(1-L_U(F(x)))}{1-F(x)},$$

mientras que la la utilidad media del conjunto de individuos con renta menor que x, $\overline{U}(x^-)$, es:

$$\overline{U}(x^-) = \frac{1}{F(x)}\int_0^{x} U(z)dF(z) = \frac{\overline{U}L_U(F(x))}{F(x)}.$$

2. El enfoque de Hey y Lambert.

Antes de abordar el objetivo principal de este trabajo, parece conveniente hacer referencia al enfoque de Hey y Lambert, no sólo por su mayor repercusión entre los trabajos sobre la privación, sino también porque nuestro planteamiento es una generalización de su enfoque.

Para Hey y Lambert, la privación relativa sentida por un individuo con renta x respecto a otro con renta z, P(x,z), es:

$$P(x,z) = \begin{cases} z - x & \text{si} \quad z \geq x \\ 0 & \text{si} \quad z \leq x. \end{cases} \qquad [1]$$

Con ello, la privación de un individuo con un determinado nivel de renta es nula respecto a quienes tienen rentas inferiores a la suya y coincide con la diferencia de rentas al compararse con quienes tienen una renta mayor.

La privación media para el nivel de renta x, si x* es la renta máxima de la distribución, viene dada por:

$$\begin{aligned} P(x) &= \int_0^{x^*} P(x,z)dF(z) = \int_x^{x^*} (z-x)dF(z) = \mu(1 - L(F(x))) - x(1 - F(x)) = \\ &= (1 - F(x))(\mu(x^+) - x), \end{aligned} \qquad [2]$$

siendo L(F(x)) la curva de Lorenz y $\mu(x^+) = \dfrac{\mu(1 - L(F(x))}{1 - F(x)}$ la renta media de los individuos cuya renta es mayor o igual que x. En consecuencia, la privación media del individuo con renta x es igual al producto de la proporción de individuos con renta mayor que x y de la diferencia entre la renta media de ese grupo y su propia renta.

La privación relativa media de la sociedad coincide con el índice de Gini absoluto. Esto es:

$$E(P(X)) = \mu G, \qquad [3]$$

siendo G el índice de Gini de la distribución. Es evidente que E(P(X)) es una función creciente del índice de Gini fijada la renta media.

Hey y Lambert (1980) proponen una formulación para la satisfacción que es la contrapartida de la definición de privación dada en [1]. Concretamente, definen la satisfacción de un individuo con renta x respecto a otro con renta z, S(x,z) del siguiente modo:

$$S(x,z) = \begin{cases} x - z & \text{si} \quad x \geq z \\ 0 & \text{si} \quad x \leq z. \end{cases} \qquad [4]$$

La simetría entre las definiciones [1] y [4] vuelve a reflejarse al obtener la satisfacción media asociada a un nivel de renta:

$$S(x) = \int_0^x S\ (x,z)dF(z) = \int_0^x (x-z)dF(z) = \\ = xF(x) - \mu L(F(x)) = F(x)(x - \mu(x^-)), \qquad [5]$$

siendo $\mu(x^-)$ la renta media de los individuos cuya renta es menor que x. La expresión anterior indica que la satisfacción media del individuo con renta x coincide con el producto de la proporción de individuos con renta menor que la suya y la diferencia entre esa renta y la media del citado grupo.

Para un nivel de renta dado, la relación entre la privación y la satisfacción se obtiene a partir de las igualdades [2] y [5]:

$$S(x)\text{-}P(x)=x\text{-}\mu \quad \text{para todo } x \geq 0. \qquad [6]$$

Esto es, la diferencia entre la satisfacción y la privación asociadas a un nivel de renta coincide con su desviación respecto de la media. Al primer miembro de la igualdad anterior se le denomina <u>satisfacción neta media</u> del nivel de renta x, SN(x). Es evidente que se trata de una función lineal estrictamente creciente de la renta. Para quienes perciben rentas inferiores a la media su satisfacción neta es negativa, lo contrario sucede para las rentas mayores que la media y es nula la satisfacción neta asociada a la renta media.

Una consecuencia inmediata de la igualdad [6] es que los valores de la satisfacción y de la privación medias de la sociedad coinciden y, ambos iguales al índice absoluto de Gini de la distribución:

$$E(S(X)) - E(P(X)) = E(X - \mu) = 0 \qquad [7]$$

y con ello:

$$E(S(X)) = E(P(X)) = \mu G,$$

mientras que la satisfacción neta media es nula.

3. Privación utilitarista

En el mismo trabajo de Hey y Lambert al que se viene haciendo referencia, sus autores sugieren una extensión de [1] en la que la privación entre individuos con diferentes rentas venga expresada mediante la diferencia entre los niveles de utilidad que las mismas les proporcionan. Argumentan que de este modo se cuantifica mejor la intensidad de la privación. Como sucede, en general, con los planteamientos de tipo utilitarista, para simplificar el tratamiento analítico, es necesario suponer la existencia de una función de utilidad común a todos los individuos de la sociedad. Si U es esa función, la privación de un individuo con renta x respecto a otro con renta z se define como:

$$P(x,z) = \begin{cases} U(z) - U(x) & \text{si} \quad x < z \\ 0 & \text{si} \quad x \geq z. \end{cases} \qquad [8]$$

Esta reformulación, de la que Hey y Lambert no hacen un estudio detallado, implica pasar del espacio de rentas al de utilidades. Las hipótesis antes impuestas a la función de utilidad hace que la generalización de los resultados obtenidos en la sección anterior, siguiendo un esquema análogo, no sea complicada. Al calcular, a partir de [8], la privación media asociada al nivel de renta x, resulta[3]:

$$\begin{aligned} P(x) &= (1 - F(x))(\overline{U}(x^+) - U(x)) = \\ &= \overline{U}(1 - L_U(F(x))) - U(x)(1 - F(x)) \end{aligned} \qquad [9]$$

Es evidente la analogía de la expresión anterior con [2]. Al considerar la función de utilidad, la privación media de un individuo con un nivel de renta dado coincide con el producto de la proporción de individuos con rentas superiores a la suya y la diferencia entre la utilidad media de ese grupo y su propia utilidad.

Bajo las hipótesis impuestas a U se comprueba que P(x) es una función creciente y convexa del nivel de renta, al ser:

$$P'(x) = -U'(x)(1 - F(x)) < 0 \ ,$$

$$P''(x) = U''(x)(F(x) - 1) + U'(x)f(x) > 0,$$

y que su valor para la renta mínima de la distribución, x_1, es la diferencia entre la utilidad media y la asociada a dicha renta, ($P(x_1) = \overline{U} - U(x_1)$), siendo nula la privación para la renta máxima, ($P(x^*)=0$).

La satisfacción entre individuos con diferentes niveles de renta se define, generalizando [4], como:

$$S(x,z) = \begin{cases} U(x) - U(z) & \text{si} \quad z < x \\ 0 & \text{si} \quad z > x, \end{cases} \qquad [10]$$

lo que implica que la satisfacción asociada al nivel de renta x venga dada mediante[4]:

$$\begin{aligned} S(x) &= F(x))(U(x) - \overline{U}(x^-) = \\ &= U(x)F(x) - \overline{U}L_U(F(x)), \end{aligned} \qquad [11]$$

---

[3] Este resultado, al igual que otros posteriores, se demuestra en el Anexo.

[4] Este resultado se demuestra en el Anexo.

Para un nivel de renta dado, x, S(x) es igual al producto de la proporción de individuos con renta menor que x, y la diferencia entre la utilidad asociada a ese nivel de renta y la utilidad media de dicho grupo.

Es inmediato comprobar que S(x) es una función creciente del nivel de renta, ya que:

$$S'(x) = U'(x)F(x) > 0\,,$$

mientras que su derivada segunda no tiene signo constante a lo largo de la escala de rentas. Se anula para la renta mínima ($S(x_1)=0$) y para la renta máxima es igual a la diferencia entre la utilidad de esa renta y la utilidad media, ($S(x^*) = U(x^*) - \overline{U}$).

Una diferencia importante al pasar del espacio de rentas al de utilidades es lo que sucede con la privación y la satisfacción asociadas a la renta media de la distribución. Bajo el enfoque de Hey y Lambert se verifica:

$$P(\mu) = S(\mu) = \mu(F(\mu) - L(F(\mu)))\,,$$

es decir, la privación y satisfacción de la renta media coinciden y es la mitad de la desviación absoluta media de la distribución[5] y, por lo tanto, depende de la proporción total de renta que sería necesario transferir desde las situadas por encima de la media a las que están por debajo de ella si se pretendiese llegar a una distribución igualitaria.

En el caso que nos ocupa deja de ser válida la igualdad anterior como consecuencia de la concavidad de U. Bajo este supuesto se satisface la desigualdad de Jensen:

$$E(U(X)) < U(E(X))\,,$$

por lo que:

$$S(\mu) - P(\mu) = U(\mu) - \overline{U} > 0\,.$$

Esto es, la satisfacción asociada a la renta media es mayor que su privación.

La función de satisfacción neta, a partir de [9] y [11], se expresará mediante:

$$SN(x) = S(x) - P(x) = U(x) - \overline{U}\,, \qquad [12]$$

y su comportamiento, en cuanto a crecimiento y concavidad, será análogo al de la función de utilidad ya que difiere de ella en una constante, la utilidad media. Si U es continua, al

---

5 Es una medida absoluta de desigualdad que se define como:

$$DAM = E|X - \mu| = \int_0^{x^*} |x - \mu| dF(x) = 2\mu(F(\mu) - L(F(\mu)))$$

El cociente DAM/2μ=S es un índice relativo de desigualdad, el coeficiente de Shutz, que mide la proporción de renta que tendría que ser transferida desde las rentas situadas por encima de la media a las situadas por debajo de la misma, para obtener un reparto igualitario. Coincide también con la máxima distancia vertical entre la curva de Lorenz de la distribución de la renta y la línea de equidistribución.

ser estrictamente monótona, existe un único nivel de renta, x_0, en el que la satisfacción neta es nula. Ese nivel de renta será inferior a la media de la distribución, como consecuencia de la desigualdad de Jensen y del crecimiento estricto de U, ya que:

$$U(x_0) = \overline{U} < U(\mu) \Rightarrow x_0 < \mu .$$

Por otra parte, $x<x_0 \Rightarrow SN(x)<0$, mientras que $x>x_0 \Rightarrow SN(x)>0$.

A partir de [12] es evidente que E(SN(X))=0, lo que implica que los valores medios de la privación y de la satisfacción para el conjunto de la sociedad son iguales. Para obtener ese valor común es necesario considerar el índice de Gini asociado a la curva de Lorenz de la utilidad, L_U. Teniendo en cuenta [9] y [11], junto a la definición de G_U, resulta[6]:

$$E(P(X)) = E(S(X)) = \overline{U}G_U \qquad [13]$$

expresión formalmente análoga a la que se obtenía en el espacio de rentas (expresión [3]), sustituyendo la renta media y el índice de Gini de la distribución de la renta por la utilidad media y el índice de Gini de la distribución de utilidad, respectivamente.

Fijada la función de utilidad, la ordenación de distintas distribuciones de renta según su privación o satisfacción media es inmediata a partir de [13]. Para obtener conclusiones en este sentido sobre los niveles de renta individuales el concepto de dominancia estocástica de segundo orden, hay que adaptarlo al espacio de utilidades y considerar la dominancia estocástica de segundo orden respecto a una función[7]. Dada la función de utilidad U(x), si F y G son dos distribuciones de renta y respecto de ambas coincide la utilidad media, $\overline{U}_F = \overline{U}_G$, son equivalentes las afirmaciones siguientes:

(a) F domina estocásticamente a G en segundo orden respecto a la función de utilidad U(x).
(b) Para todos los niveles de renta, la privación y la satisfacción relativa bajo F es menor que bajo G.
(c) La curva de Lorenz de utilidad para F domina a la curva de Lorenz de utilidad para G, $L_U(F(x)) \geq L_U(G(x))$, para todo x>0.

3.1. Las funciones de utilidad isoelásticas.

Una medida que resulta particularmente adecuada al tratar de recoger el grado de aversión hacia la desigualdad de una función de utilidad es la elasticidad de la utilidad marginal de

6 Este resultado se demuestra en el Anexo.

7 Si F y G representan sendas distribuciones, se dice que F domina a G en segundo orden respecto de la función U(x) si se verifica $\int_0^x (F(z) - G(z))dU(z) \leq 0$, para todo x>0 y es válida la desigualdad estricta para algún x>0. Meyer (1977).

la renta respecto de la renta[8], $q_U(x) = \frac{-xU''(x)}{U'(x)}$. En el estudio de la desigualdad se ha dedicado una especial atención a las funciones de utilidad isoelásticas, aquellas cuya aversión a la desigualdad es constante para todos los niveles de renta[9], $q_U(x)=1-s$, $s<1$. Al imponer tal condición se obtiene la familia de funciones:

$$U(x) = \begin{cases} a + bx^s & \text{si} \quad s \neq 0, \quad b > 0 \\ a + b\ln x & \text{si} \quad s = 0, \end{cases} \qquad [14]$$

que son transformaciones afines de la función potencial y de la función logarítmica.

No supone dificultad el particularizar los resultados obtenidos anteriormente a estos casos. Además, no es restrictivo el trabajar con a=0 y b=1, lo que facilita el desarrollo analítico.

Para el caso potencial, $U(x)=x^s$, la función de utilidad será creciente y cóncava cuando $0<s<1$. Al plantear este tipo de función, la utilidad media se expresa a partir de la media generalizada[10] de orden s, M_s, que se define como: $M_s=(E(X^s))^{1/s}$, con lo cual: $E(X^s)=(M_s)^s$.

Si $U(x)=x^s$, $0<s<1$, la privación y satisfacción de un individuo con renta x respecto a otro con renta z se formula haciendo uso de las expresiones [8] y [10], con lo que la privación y la satisfacción del individuo con renta x es:

$$P(x) = (M_s)^s(1 - L_{X^s}(F(x)) - x^s(1 - F(x))$$

$$S(x) = x^sF(x) - (M_s)^s L_{X^s}(F(x)).$$

siendo $L_{X^s}(F(x))$ la curva de concentración[11] de la distribución de X^s. las funciones anteriores cumplen las propiedades ya mencionadas para la privación y la satisfacción relativas.

---

[8] Se trata en realidad de una medida de aversión al riesgo, introducida en el ámbito de la desigualdad por Atkinson (1970).

[9] Ello se debe a que esta condición es necesaria y suficiente para que el índice de desigualdad de Atkinson sea invariante frente a cambios equiproporcionales de todas las rentas.

[10] M_s es la media cuadrática para s=2, la media aritmética para s=1, la media geométrica cuando $s\rightarrow 0$ y la media armónica para s=-1, pero dado las características de concavidad y crecimiento exigibles a la función de utilidad, los valores de s quedan restringidos al intervalo [0, 1] excluyendo los valores extremos si se exige crecimiento y concavidad estricta.

[11] Al ser una función estrictamente creciente de x, coincide con la curva de Lorenz:

$$L_{x^s}(F(x)) = \frac{1}{E(X^s)}\int_0^p t^s dF(t)$$

La satisfacción neta para el nivel de renta x viene dado por:

$$SN(x) = x^s - (M_s)^s,$$

lo que indica que el nivel de renta que separa a los individuos cuya satisfacción neta es positiva de aquellos otros para los que es negativa es $x_0=M_s$; es decir, la media generalizada de orden s.

La privación media de la sociedad, que coincide con la satisfacción media, se expresa ahora como:

$$E(P(X)) = (M_s)^s G_{X^s} = E(S(X)),$$

el producto de la esperanza de la variable X^s por el índice de Gini asociado a dicha variable. Por tanto, la satisfacción neta media de la sociedad es nula.

Si la función de utilidad es logarítmica, U(x)=lnx, la privación y satisfacción relativa de un individuo de renta x al comparase con otro de renta z queda definida igualmente a partir de las expresiones [8] y [10], particularizadas a este caso.

Bajo este supuesto, la utilidad media es:

$$\overline{U} = E(\ln X) = \ln(g),$$

siendo g la media geométrica de la distribución. Si mediante $\ln g(x^+)$ se denota al logaritmo neperiano de la media geométrica de las rentas mayores[12], que x, la privación relativa de un individuo con renta x viene dada por:

$$P(x) = (1 - F(x))(\ln g(x^+) - \ln x) =$$
$$= \ln g(1 - L_{\ln x}(F(x))) - \ln x(1 - F(x)).$$

Esta expresión determina que la privación relativa de un individuo con renta x es el producto de la proporción de individuos con rentas mayores que x y de la diferencia entre la utilidad media de ese grupo, o logaritmo neperiano de la media geométrica de la renta de ese grupo, y su propia utilidad.

Si mediante $\ln g(x^-)$ denotamos al logaritmo neperiano de la media geométrica de las rentas inferiores[13] a x, la satisfacción relativa de un individuo con renta x es:

En ese caso G_{X^s} es el índice de Gini asociado a la curva de Lorenz de X^s es:

$$G_{x^s} = 1 - 2\int_0^1 L_{x^s}(p)dp$$

12 $\ln g(x^+) = E(\ln X / X \geq x) = \frac{1}{1-F(x)} \int_x^{x^*} \ln z dF(z)$.

$$S(x) = F(x)(\ln x - (\ln g(x^{-})) =$$
$$= \ln xF(x) - \ln gL_{\ln x}(F(x)),$$

por lo que la satisfacción relativa de un individuo con renta x es el producto de la proporción de individuos con rentas menores que x y de la diferencia de la utilidad del individuo con renta x y la media de la utilidad de los individuos con rentas superiores a x.

De esta forma, la función de privación relativa es decreciente respecto al lnx y, por tanto, respecto a x y, además, es convexa. Mientras que la función de satisfacción relativa es creciente respecto al lnx y, por tanto, respecto a x, pero, no se puede afirmar nada acerca de la concavidad o convexidad, ya que la segunda derivada no tiene signo constante en el dominio.

La satisfacción neta tiene la expresión:

$$SN(x)= S(x) - P(x)=\ln x-\ln g , \qquad [15]$$

lo que indica que el nivel de renta que separa a quienes tienen satisfacción neta positiva de los que la tienen negativa es la media geométrica de la distribución.

La privación y satisfacción media de la sociedad es:

$$E(P(x)) = E(S(x)) = \ln gG_{\ln x} .$$

Por lo que, tanto la privación como la satisfacción social coinciden con el producto del logaritmo neperiano de la media geométrica y el índice de Gini del logaritmo de la renta, de forma que, cuanto mayor sea la desigualdad y mayor sea g, mayor es la privación y la satisfacción.

4. Aplicación empírica.

Empleando la Encuesta Continua de Presupuestos Familiares (E.C.P.F.) del Instituto Nacional de Estadística (INE.) para 1996, de periodicidad trimestral, se han extraído datos sobre el ingreso anual familiar disponible para 1904 familias representativas de todas las unidades económicas de España y que han sido observadas a lo largo de los cuatro trimestres del año. Los ingresos anuales familiares disponibles de 1996 se han actualizado al 2000 indiciándolos con la evolución del IPC durante el periodo 1996-2000

---

[13] $\ln g(x^{-}) = E(\ln x / X \le x) = \frac{1}{F(x)}\int_0^x \ln z dF(z)$.

Dado que vamos a trabajar con tres tipos de funciones de utilidad para el cálculo de la privación / satisfacción, $U(x)=x$, $U(x)=x^s$, para s=0,5, y $U(x)=\ln x$, hemos de caracterizar la distribución empírica para la renta de 2000. Para ello, se ha estimado el modelo triparamétrico de Dagum (1977) cuya función de distribución viene dada por:

$$F(x) = (1 + \lambda x^{-\delta})^{-\beta}, \quad x > 0, \quad \beta, \lambda, \delta > 0,$$

$$F(x) = 0, \quad x \leq 0$$

Este modelo es obtenido al imponer que la elasticidad de la función de distribución de la renta, respecto de la renta, presente las características que están presentes en las distribuciones de renta observadas. Esta función es la solución de la ecuación diferencial:

$$E(F(x), x) = \frac{d \log F(x)}{d \log x} = \beta_1 (1 - F(x)^{\beta_2}), \; x > 0, \; \beta_1, \beta_2 > 0 \; ,$$

donde $\beta=1/\beta_2$ y $\delta=\beta_1\beta_2$ son parámetros de desigualdad, mientras que λ es un parámetro de escala positivo. Cabe resaltar el hecho de que se puede ajustar tanto a distribuciones no modales o ceromodales ($0<\delta\beta\leq 1$) como a distribuciones unimodales ($\delta\beta>1$).

La expresión para la curva de Lorenz obtenida a partir del citado modelo es la siguiente:

$$L(F) = B(F^{1/\beta}, \beta + 1/\delta, 1 - 1/\delta) / B(\beta + 1/\delta, 1 - 1/\delta),$$

donde $B(\beta+1/\delta,1-1/\delta)$ es la función beta y $B(F^{1/\beta}, \beta+1/\delta,1-1/\delta)$ es la función de distribución beta acumulada de la variable $F^{1/\beta}$.

De la distribución de renta ajustada mediante el método no lineal de minimización de la suma de los cuadrados de las diferencias entre los valores observados y estimados, se obtienen los parámetros que figuran en la Tabla 1. Junto a ellos se recogen los valores estimados para la media[14], mediana[15], moda, índice de Gini[16], así como la suma de

---

[14] La renta media estimada a través del modelo viene dada por:

$$\mu = \beta \lambda^{1/\delta} B(\beta + 1/\delta, 1 - 1/\delta) \; .$$

[15] La mediana y moda respectivamente son:

$$x_m = \lambda^{1/\delta} \left[2^{1/\beta} - 1 \right]^{1/\delta}$$

$$x_{mo} = \lambda^{1/\delta} \left(\frac{\beta\delta - 1}{\delta + 1} \right)^{1/\delta}$$

[16] La expresión del índice de Gini que se deriva del modelo empleado, a partir de la función de distribución y de la curva de Lorenz, es:

$$G = E\left[(x/\mu) F(x) - L(x) \right]$$

cuadrados de los errores (S.C.E.) y el valor observado del estadístico de Kolmogorov (K) del modelo estimado a través del programa EPID[17] proporcionado por Dagum.

Tabla 1. Parámetros estimados del modelo triparamétrico de Dagum para la renta de 2000.

β	1,370
λ*	6171,277
δ	2,758
$\beta\delta$	3,779
Media estimada*	34,345
Mediana estimada*	27,554
Moda estimada*	21,225
Gini	0,3419
SCE de F(x)	19,301
K	0,028

(*) Correspondientes al ingreso medido en 10^5 pesetas.
Fuente: Elaboración propia a partir de los resultados de EPID.

El ajuste realizado es bueno dado los pequeños valores de la suma de los errores al cuadrado y del estadístico de Kolmogorov[18]. Además, las diferencias entre los valores estimados y observados para la media, mediana y moda no superan el 7,7%. El producto $\beta\delta>1$ indica que la distribución es unimodal, tal y como muestra el Gráfico 1 en el que se representa la función de densidad. Es asimétrica a la derecha, con una cola pesada, como es característico de este tipo de distribuciones. Su expresión a partir de los valores estimados de los parámetros es:

$$f(x) = 23319{,}8037\ x^{-3{,}758}(1+6171{,}277\ x^{-2{,}758})^{-2{,}370}$$

Los valores, de las curvas de Lorenz estimadas, así como los valores correspondientes de la variable (en 10^5 pesetas.) figuran en la Tabla 2. Evidentemente, la curva de Lorenz para $U(x)=\ln x$ y $U(x)=x^{0,5}$, han sido obtenidas mediante las expresiones:

$$L_{\ln x}(F(x)) = \frac{1}{\ln g}\int_0^x \ln x\, dF(x)$$

$$L_{x^s}(F(x)) = \frac{1}{(M_s)^s}\int_0^x x^s\, dF(x)$$

calculando las integrales en el programa Mathematica.

[17] Este programa calcula los parámetros del modelo utilizando el modelo no lineal de mínimos cuadrados y aplicando un algoritmo (Birta, 1976) mediante el cual se minimiza la suma de los cuadrados de las desviaciones de las funciones de distribución observadas y estimadas.

[18] A un nivel de significación del 1%, el contraste de Kolmogorov-Smirnov nos lleva a aceptar la hipótesis nula de que el modelo de Dagum se ajusta bien a la función de distribución observada.

Dado el ajuste del modelo de distribución de probabilidad, la función que asigna a cada nivel de renta su privación media para las distintas funciones de utilidad, es la representada en los Gráficos 2, 3, y 4, cuyos valores (en 10^5 pesetas) vienen recogidos en la Tabla 3.

Como puede observarse en el Gráfico 2, la privación cuando la función de utilidad es $U(x)=x$, es decir, para la definición de Hey y Lambert, es una función decreciente y convexa del nivel de renta. La privación corta al eje de ordenadas en la renta media, $\mu=34,345\ 10^5$ pesetas., decrece al aumentar la renta, siendo nula para la renta máxima. Para la renta media, la ordenada de la función de privación, $P(\mu)=\mu(F(\mu)-L(F(\mu))$, proporciona la cantidad media de renta, aproximadamente 832.200 pesetas, que sería necesario transferir de los que poseen rentas superiores a la media a los de renta inferior, si se pretendiese conseguir una distribución igualitaria.

La privación definida a partir de la función de utilidad $U(x)=x^{0,5}$, y de la función $U(x)=\ln x$, cumple las mismas propiedades que para definición de Hey y Lambert. Para estos casos el valor de la ordenada en el origen es la diferencia entre la utilidad media y la asociada a la renta mínima, mientras que la privación es nula para la renta máxima, tal y como se aprecia en los Gráficos 3 y 4.

La satisfacción relativa de un individuo con renta x a partir de $U(x)=x$, es una función creciente y convexa. Se anula para la renta mínima y para la renta máxima su valor es la diferencia entre dicha renta y la media de la distribución (Gráfico 5). En la Tabla 3 se recogen los valores de la satisfacción formulada a partir de las distintas funciones de utilidad.

Para el caso en que la satisfacción se define a partir de las otras funciones de utilidad, Gráfico 6 y 7, la función es creciente y aparentemente convexa, aunque no se puede hacer una afirmación general sobre esta característica, debido a que la segunda derivada no tiene signo constante a lo largo de la escala de rentas, si bien ésta es una condición suficiente pero no necesaria. Para ambos casos se anula en la renta mínima y para la renta máxima es igual a la diferencia entre la utilidad de esa renta y la utilidad media. Para $U(x)=x^{0,5}$ este valor es $7,105\ 10^5$ pesetas, mientras que para $U(x)=\ln x$ es $1,737\ 10^5$ pesetas.

Las funciones de privación y satisfacción se cortan en el nivel de renta x_0, tal que $U(x_0)=\overline{U}$, de forma que la función de satisfacción neta es negativa para los niveles de renta inferiores a x_0 y positiva para los superiores a la misma. Para el caso $U(x)=x$, Gráfico 8,esta renta es $34,3454\ 10^5$ pesetas, mientras que para $U(x)=x^{0,5}$ es $30,9608\ 10^5$ pesetas, Gráfico 9, y para $U(x)=\ln x$ es $28,2307\ 10^5$ pesetas, Gráfico 10. Los valores de la satisfacción neta para las tres funciones de utilidad se presentan en la Tabla 3.

En la Tabla 4 se presenta el nivel de renta, x_0, para el que se anula la satisfacción neta, junto al índice de Gini y los valores medios de la privación y de la satisfacción social para las distintas funciones de utilidad.

Tabla 4.Valores significativos para la población total para las distintas funciones de utilidad.

Función de utilidad	**$x_0=M_s$**	**G_U**	**$E(P(X))=E(S(X))=M_sG_U$**
$U(x)=x$	M_1=34,34041	0,3419	10,19910
$U(x)=x^{0,5}$	$M_{0,5}$=30,96077	0,1676	0,86246
$U(x)=\ln x$	M_0=28,23070	0,0983	0,31400

Fuente: Elaboración propia.

Como se demostró en la sección 3 al aumentar el grado de concavidad de U disminuye el nivel de renta para el que se anula la satisfacción neta ($M_0<M_{0,5}<M_1=\mu$). También lo hace el índice de concentración G_U de modo que la combinación de ambos efectos implica la disminución de la privación / satisfacción social media.

5. Comentarios finales.

Si la privación / satisfacción de los individuos se define a partir de una función de utilidad, pasando del espacio de rentas al de utilidades, generalizando el esquema propuesto por Hey y Lambert, se obtienen resultados formalmente análogos a los que se derivan cuando en la definición se emplean los valores de la variable renta, siempre bajo las hipótesis de que la función de utilidad sea estrictamente creciente y estrictamente cóncava respecto de la renta.

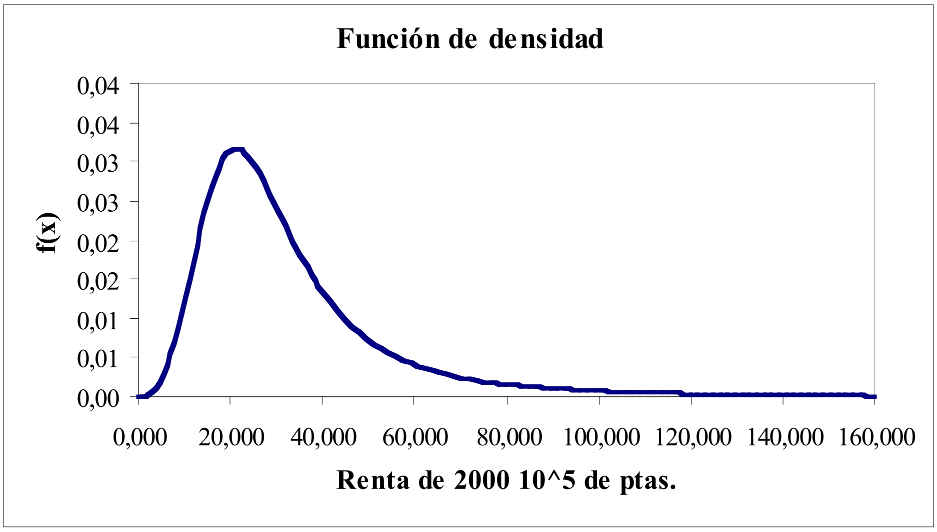
Una diferencia significativa entre ambas formulaciones es que el nivel de renta en el que se igualan privación y satisfacción ya no coincide con la renta media sino que, como consecuencia de la concavidad de U, esa igualdad tiene lugar para un nivel de renta estrictamente menor.

Cuando se consideran las funciones de utilidad con aversión constante frente a la desigualdad, al aumentar el grado de aversión, lo que equivale a lo haga el grado de concavidad[19], menor es el nivel de renta a partir del cual la satisfacción neta individual es positiva y también es menor el valor medio de la privación / satisfacción para el conjunto de la sociedad. En la aplicación empírica, utilizando como funciones de utilidad la identidad, la raíz cuadrada y la función logarítmica, se ponen de manifiesto esas propiedades. En consecuencia, la elección de una función de utilidad conlleva la incorporación de juicios de valor acerca de la actitud de los individuos hacia la desigualdad, lo que incide en el comportamiento las respectivas funciones de privación, de satisfacción y de satisfacción neta, así como en los valores medios de esas magnitudes para el conjunto de la población.

[19] En Pratt (1964) se prueba que si U y V son funciones de utilidad con aversión constante frente al riesgo y $q_u(x)>q_v(x)$, para todo $x>0$, la función V es una transformación cóncava de U: existe una función ϕ estrictamente cóncava tal que $V(x)=\phi(U(x))$, para todo $x>0$.

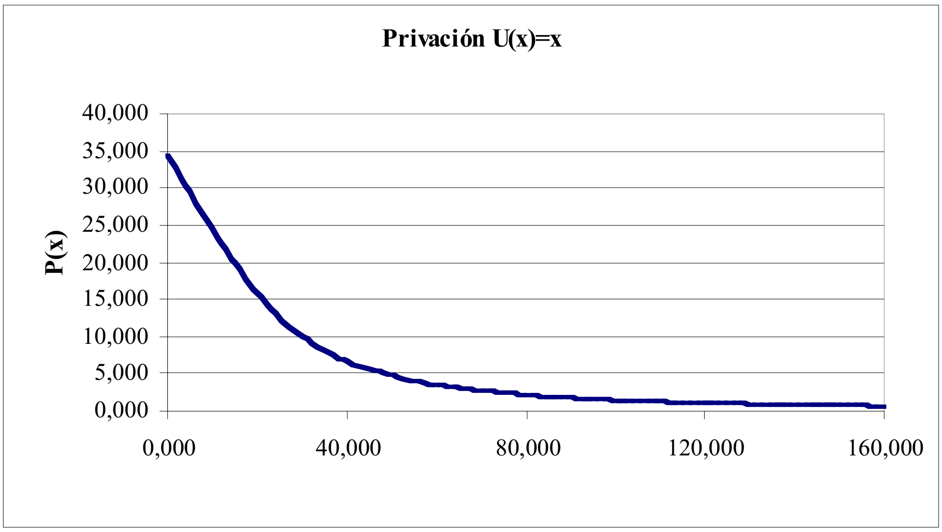
Gráficos y Tablas.

Gráfico 1. Función de densidad de la renta de 2000.



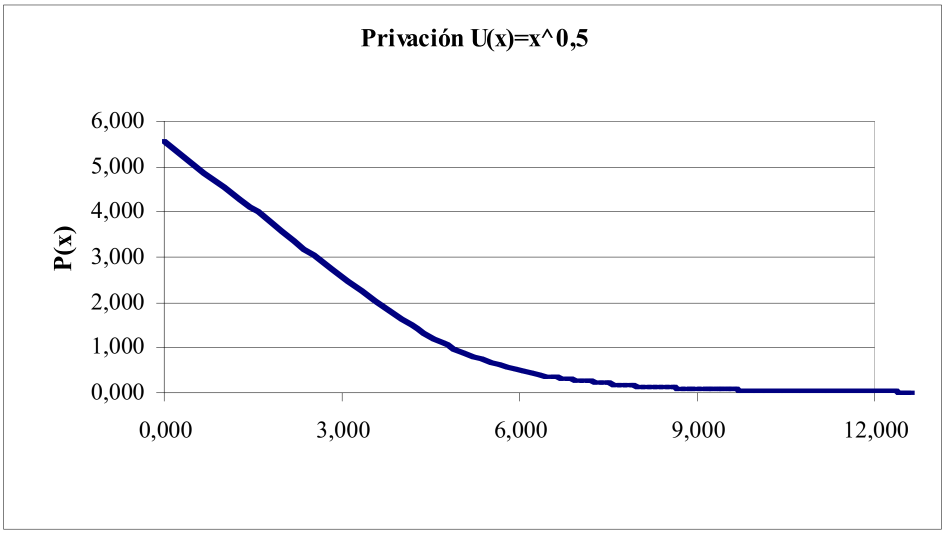
Fuente: Elaboración propia.

Gráfico 2. Privación definida a partir de U(x)=x para la renta de 2000.



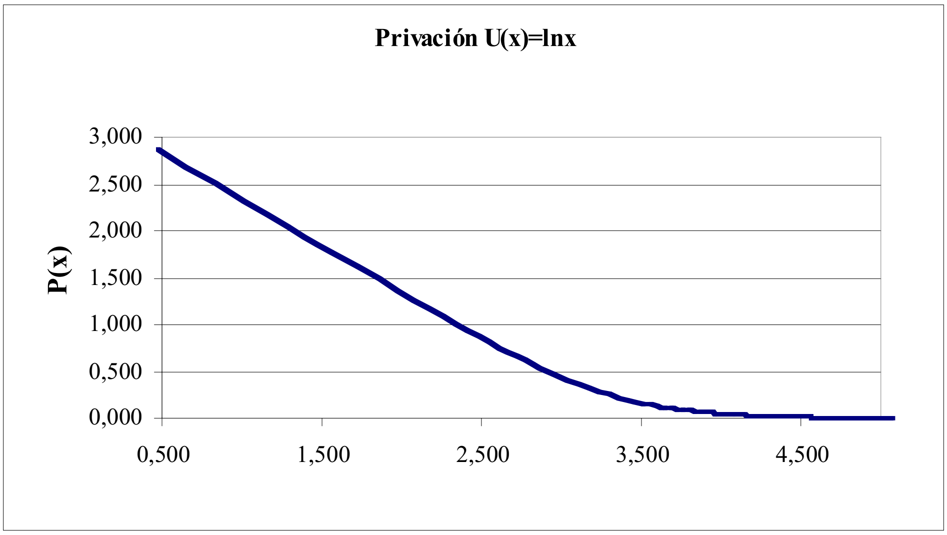
Fuente: Elaboración propia.

Gráfico 3. Privación definida a partir de $U(x)=x^{0,5}$ para la renta de 2000.



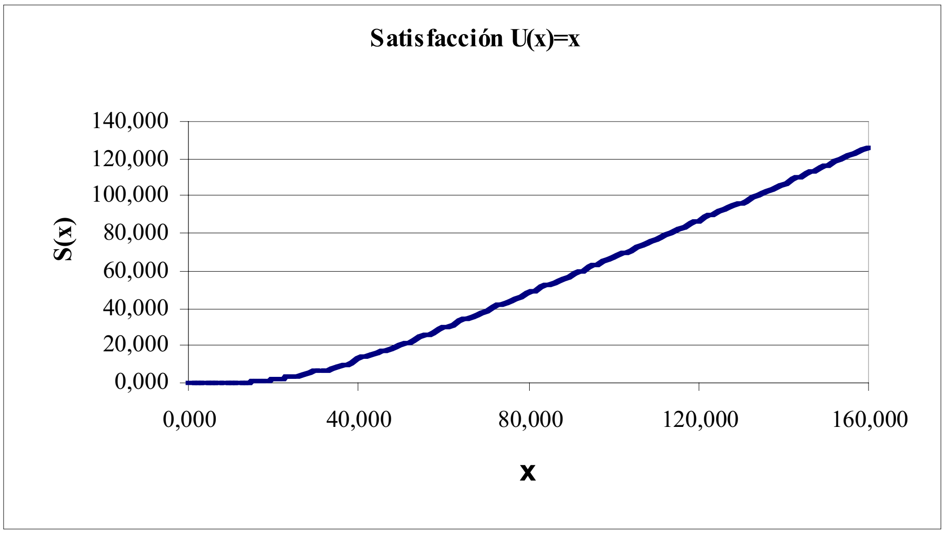
Fuente: Elaboración propia.

Gráfico 4. Privación definida a partir de U(x)=lnx para la renta de 2000.



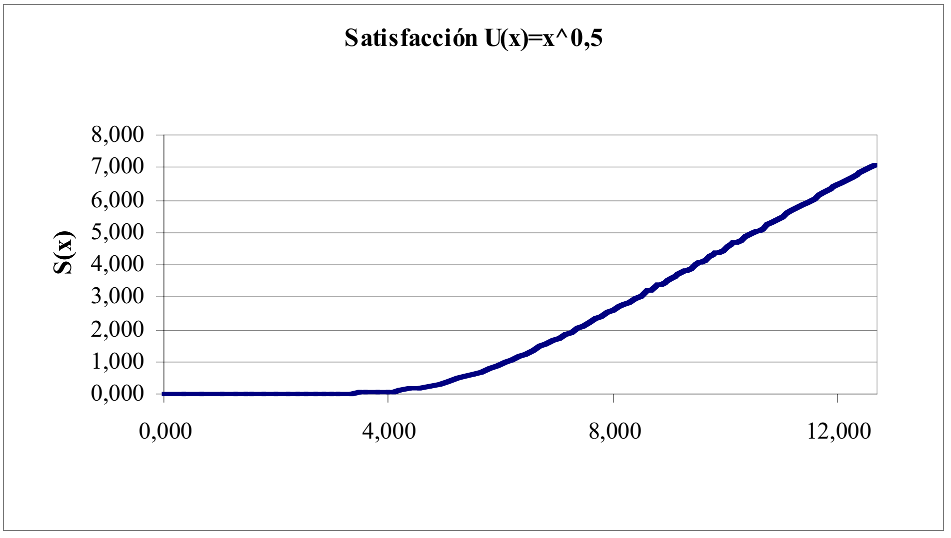
Fuente: Elaboración propia.

Gráfico 5. Satisfacción definida a partir de U(x)=x para la renta de 2000.



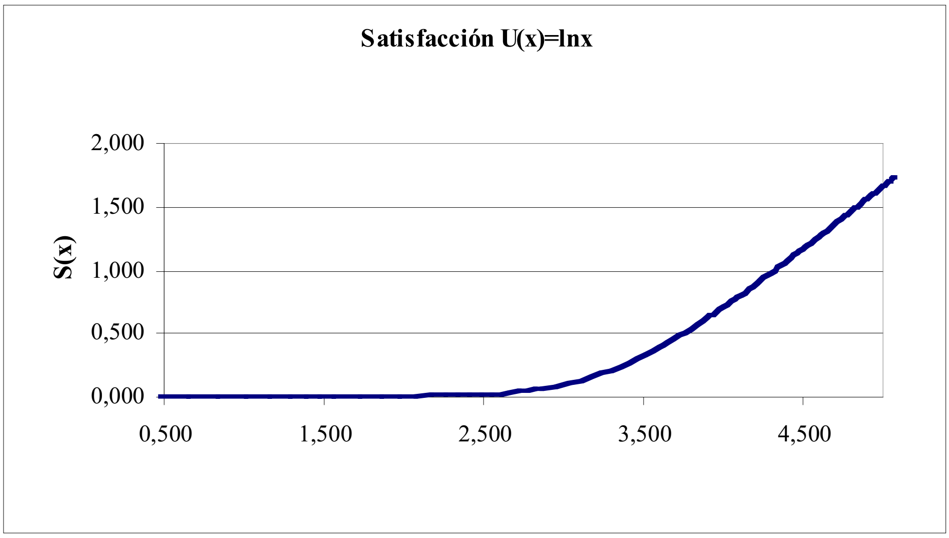
Fuente: Elaboración propia.

Gráfico 6. Privación definida a partir de U(x)=x^{0,5} para la renta de 2000.



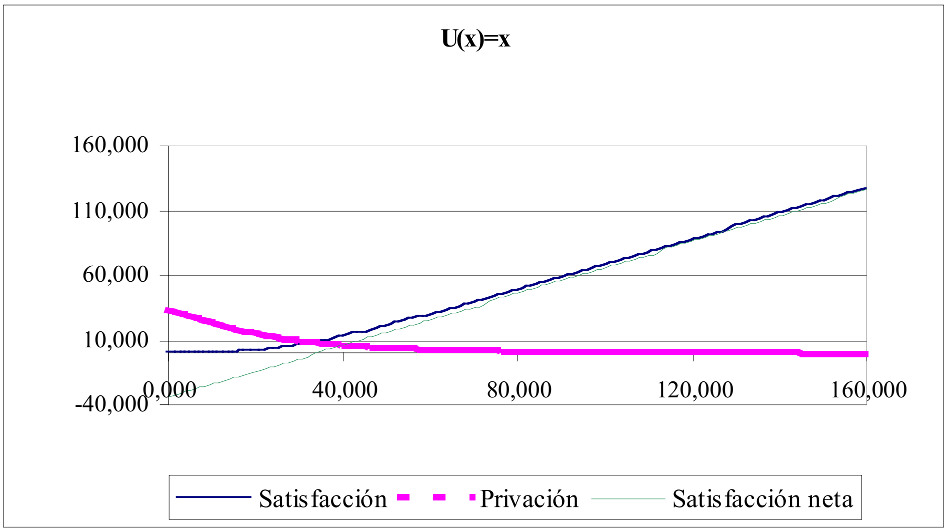
Fuente: Elaboración propia.

Gráfico 7. Satisfacción definida a partir de U(x)=lnx para la renta de 2000.



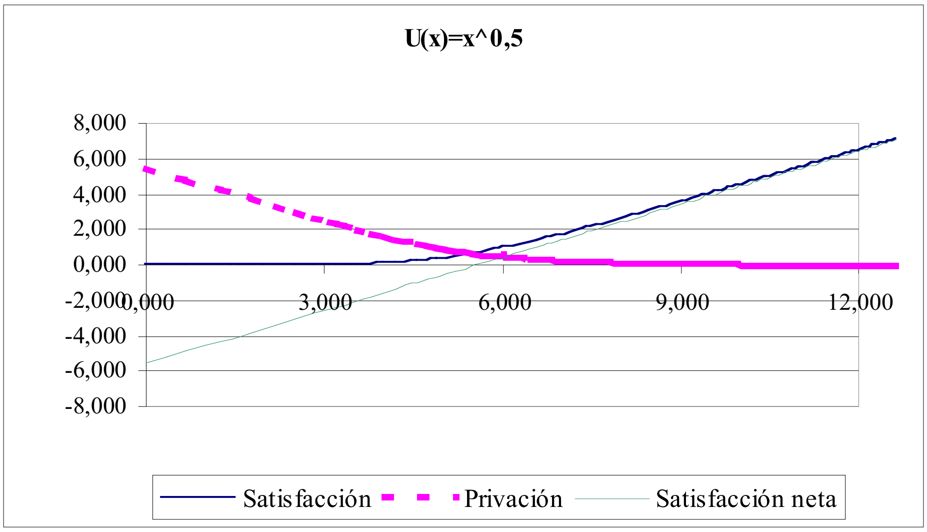
Fuente: Elaboración propia.

Gráfico 8. Satisfacción neta definida a partir de U(x)=x para la renta de 2000.



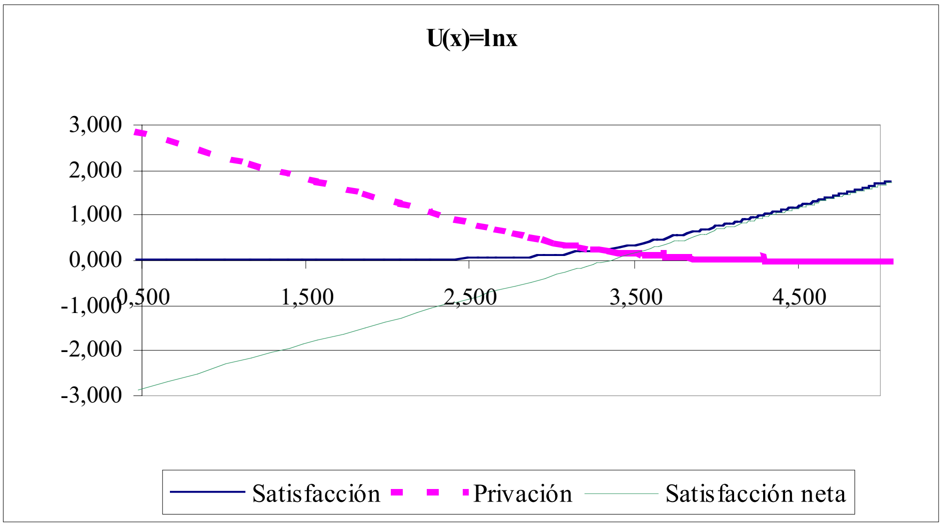
Fuente: Elaboración propia.

Gráfico 9. Satisfacción neta definida a partir de $U(x)=x^{0,5}$ para la renta de 2000.



Fuente: Elaboración propia.

Gráfico 10. Satisfacción neta definida a partir de U(x)=lnx para la renta de 2000.



Fuente: Elaboración propia.

Tabla 2. Valores de la renta, función de distribución y curva de Lorenz para las distintas funciones de utilidad.

$X(10^5$ ptas.)	F(x)	L(F(x))	$X^{0,5}$ (10^5 ptas.)	$L_{X^s}(F(x))$	lnX (X en 10^5 ptas.)	$L_{\ln X}(F(x))$
11,200	0,050	0,013	3,347	0,026	2,416	0,032
14,400	0,112	0,036	3,795	0,066	2,667	0,079
16,000	0,152	0,054	4,000	0,095	2,773	0,112
17,600	0,198	0,076	4,195	0,128	2,868	0,150
19,200	0,246	0,102	4,382	0,165	2,955	0,193
20,800	0,296	0,131	4,561	0,206	3,035	0,238
22,400	0,347	0,163	4,733	0,248	3,109	0,284
24,000	0,397	0,197	4,899	0,291	3,178	0,331
25,600	0,445	0,231	5,060	0,334	3,243	0,377
27,200	0,490	0,266	5,215	0,376	3,303	0,422
30,400	0,573	0,335	5,514	0,455	3,414	0,505
32,000	0,609	0,369	5,657	0,492	3,466	0,542
33,600	0,643	0,400	5,797	0,527	3,515	0,577
36,800	0,701	0,460	6,066	0,588	3,605	0,639
40,000	0,748	0,513	6,325	0,642	3,689	0,691
44,800	0,804	0,582	6,693	0,707	3,802	0,754
51,200	0,857	0,655	7,155	0,772	3,936	0,815
59,200	0,900	0,724	7,694	0,830	4,081	0,867
78,400	0,952	0,825	8,854	0,906	4,362	0,932
139,200	0,990	0,935	11,798	0,973	4,936	0,984
x*	1	1	$(x^*)^{0,5}$	1	lnx*	1

Fuente: Elaboración propia a partir de los resultados de EPID.

Tabla 3. Valores de la función de distribución, privación, satisfacción y satisfacción neta para las distintas funciones de utilidad para el año 2000.

	U(x)=x			$U(x)=x^{0,5}$			U(x)=lnx		
F(x)	P(x)	S(x)	SN(x)	P(x)	S(x)	SN(x)	P(x)	S(x)	SN(x)
0,050	23,270	0,125	-23,145	2,238	0,021	-2,218	0,939	0,014	-0,924
0,112	20,322	0,377	-19,945	1,825	0,056	-1,770	0,707	0,034	-0,673
0,152	18,933	0,588	-18,345	1,647	0,083	-1,564	0,615	0,048	-0,568
0,198	17,612	0,867	-16,745	1,486	0,117	-1,369	0,537	0,064	-0,473
0,246	16,367	1,221	-15,145	1,341	0,158	-1,182	0,469	0,083	-0,385
0,296	15,200	1,655	-13,545	1,210	0,207	-1,004	0,411	0,105	-0,305
0,347	14,115	2,170	-11,945	1,093	0,262	-0,831	0,360	0,129	-0,231
0,397	13,110	2,765	-10,345	0,989	0,324	-0,665	0,317	0,154	-0,162
0,445	12,183	3,438	-8,745	0,896	0,391	-0,505	0,279	0,182	-0,098
0,490	11,332	4,186	-7,145	0,813	0,464	-0,349	0,247	0,210	-0,037
0,573	9,836	5,890	-3,945	0,674	0,623	-0,051	0,195	0,269	0,074
0,609	9,182	6,836	-2,345	0,615	0,708	0,093	0,174	0,299	0,125
0,643	8,583	7,838	-0,745	0,563	0,795	0,232	0,156	0,330	0,174
0,701	7,536	9,990	2,455	0,474	0,976	0,502	0,126	0,391	0,265
0,748	6,657	12,311	5,655	0,403	1,164	0,760	0,103	0,452	0,348
0,804	5,590	16,044	10,455	0,321	1,450	1,129	0,078	0,540	0,462
0,857	4,517	21,371	16,855	0,244	1,835	1,591	0,055	0,651	0,595
0,900	3,558	28,413	24,855	0,179	2,309	2,130	0,038	0,778	0,741
0,952	2,213	46,267	44,055	0,097	3,387	3,290	0,018	1,039	1,021
0,990	0,817	105,672	104,855	0,027	6,261	6,234	0,004	1,599	1,596

Fuente: Elaboración propia a partir de los resultados de EPID.

Anexo.

Proposición.

$$P(x) = \overline{U}(1 - L_U(F(x))) - U(x)(1 - F(x)) = \\ = (1 - F(x))(\overline{U}(x^+) - U(x)) \qquad [9]$$

siendo $\overline{U}$ la utilidad media, L_U la curva de concentración o de Lorenz de la utilidad.
Demostración. A partir de [8], es:

$$P(x) = \int_x^{x^*}(U(z) - U(x))dF(z) = \int_x^{x^*}U(z)dF(z) - U(x)(1 - F(x)),$$

y teniendo en cuenta la definición de la curva de Lorenz de la distribución de utilidad, $L_U(F(x))$, se obtiene:

$$\int_x^{x^*}U(z)dF(z) = \int_0^{x^*}U(z)dF(z) - \int_0^{x}U(z)dF(z) = \\ = \overline{U} - \int_0^{x}U(z)dF(z) = \overline{U}(1 - L_U(F(x))).$$

expresión que sustituida en la anterior, prueba la primera igualdad de [9]. La obtención de la segunda es inmediata a partir de la definición de $\overline{U}(x^+)$.

Proposición

$$S(x) = F(x))(U(x) - \overline{U}(x^-) = \\ = U(x)F(x) - \overline{U}L_U(F(x)) \qquad [11]$$

Demostración. Se procede de manera análoga al caso anterior.

Proposición

$$E(P(X)) = E(S(X)) = \overline{U}G_U \qquad [13]$$

Demostración. En efecto, [13] se expresa como:

$$E(P(x)) = \int_0^{x^*}P(z)dF(z) = \int_0^{x^*}(\overline{U}(1 - L_U(F(z))) - U(z)(1 - F(z)))dF(z)$$

La primera integral del segundo miembro, a partir de la definición del índice de Gini de la distribución de la utilidad, es:

$$\overline{U}\int_0^{x^*}(1-L_U(F(z))dF(z)=\overline{U}(\frac{1+G_U}{2}).$$

La segunda integral, haciendo p=F(x), teniendo en cuenta que $\frac{d(L_U(F(x))}{d(F(x))}=\frac{U(x)}{\overline{U}}$, e integrando por partes:

$$\int_0^{x^*}U(z)(1-F(z))dF(z)=\overline{U}\left(1-\int_0^1 pL'_U(p)dp\right)=\overline{U}\int_0^1 L_U(p)dp=\frac{1}{2}\overline{U}(1-G_U).$$

Por lo tanto:

$$E(P(X))=\overline{U}(\frac{1+G_U}{2})-\frac{1}{2}\overline{U}(1-G_U)=\overline{U}G_U$$

Al ser $S(x)-P(x)=U(x)-\overline{U}$, se verifica E(S(X))=E(P(X)), lo que prueba [13].

Referencias bibliográficas.

Atkinson, A.B. (1970): On the measurement of inequality. *Journal of Economic Theory* 2, pp. 244-263.

Berrebi, Z. M. y Silber, J. (1985): Income Inequality Indices and Deprivation: A Generalisation, *Quarterly Journal of economics*. 100: pp. 807-810.

Birta, L.G: (1976): OPTPK a Program Package for Unconstrained Function Minimization. *Technical report TR 76-02. University of Ottawa*.

Chakravarty, S.R. (1990) The measurement of relative deprivation. *Ethical social index numbers.* Cap. 5. Springer-Verlag.

Chakravarty, S.R. (1997): Relative Deprivation and Satisfaction orderings. *Indian Statistical institute*, Calcuta, India.

Chakravarty, S.R. y A.B. Chakraborty (1984). On Indices of Relative Deprivation, *Economic Letters*. 14: pp. 283-287.

Chakravarty, S.R. y Mukherjee (1998): Lorenz Transformation, utilitarian deprivation rule and equal sacrifice principle. *The Manchester school Journal*.66 pp. 521-531.

Crosby, F. (1979): Relative deprivation Revisited: A response to Miller, Bolce and Halligan. *American Political Science Review* 73, pp. 103-112.

Dagum C. (1977) A new model of personal income distribution: specification and estimation. *Economie Apliquée.* XXX nº 3, pp. 413-437.

Dagum, C. y Chiu, K. (1991): User´s manual for the program EPID (Econometric Package for income distribution) for personal computers. Versión revisada. Ottawa: Statistics Canada.

Dagum, C. y Zenga, M. (Eds.) (1990): “Income and wealth distribution, inequality and poverty”, Ed. Springer-Verlag, Berlín.
Fellman, J. (1976): “The effects of transformations on Lorenz curves”, *Econometrica* 44, pp. 823-824.
Hey, J.D. y P.J. Lambert (1980). Relative Deprivation and the Gini Coefficient: Comment, *Quarterly Journal of Economics*. 95: pp. 567-573.
Imedio, L. Parrado, M. Sarrión , M.D. (1999): “Privación relativa e imposición sobre la renta” Hacienda Pública Española, 149-2, pp. 137
Instituto Nacional de Estadística. Encuesta Continua de Presupuestos Familiares 1996.
Jakobsson, U. (1976): “On the measurement of the degree of progression”, *Journal of Public Economis* 5, 161-168.
Kakwani, N. (1977): “Applications of Lorenz curves in economics analysis”, *Econometrica* 45, pp. 719-727.
Kakwani, N. (1984): “The relative Deprivation curve and its applications”*, J. Business and Economics Statistics* 2: pp. 384-405.
Lambert, P.(1996): La distribución y redistribución de la renta. Un análisis matemático. Instituto de Estudios Fiscales. Madrid.
Layard, R. (1980) Human satisfaction and public policy. *Econom*.90: pp. 737-750
Meyer, J. (1977): Second degree stochastic dominance with respect to a function. International Economic Review XVIII (junio 1977), pp. 477-487
Paul, S. (1991): An index of relative deprivation, Economics letters, 36: pp. 337-341.
Podder, N.(1996): Relative deprivation, Envy and Economic Inequality. *Kyklos*, 49:353-376.
Pratt, J. W. (1964): Risk aversion in the small and in the large. *Econometrica*, 32.
Runciman, W.G. (1966): Relative deprivation and Social justice, Routledge, London.
Stouffer S.A., Suchman E.A., L.C. DeVinney, S.A. Star y R.M. Williams, (1949) The American Soldier: Adjustment During Army Life. Vol. 1. Princeton: Princeton University Press.
Yitzhaki, S. (1979). Relative Deprivation and the Gini Coefficient, *Quarterly Journal of Economics*. 93: pp. 321-324.
Yitzhaki, S. (1980): Relative Deprivation and the Gini Coefficient: reply, *Quarterly Journal of Economics.* 95: pp. 575-576.
Yitzhaki, S. (1982). Relative Deprivation and Economic Welfare, *European Economic Review*. 17: pp. 99-113.