ANÁLISIS PREFERENCIAL DE CURVAS DE LORENZ POLIGONALES CON IGUAL ÍNDICE DE GINI.

Herrerías Pleguezuelo, Rafael, <rherreri@.ugr.es>
Palacios González, Federico < fpalacio@ugr.es>
García Fernández, Rosa Mª <rosamgf@ugr.es>

Departamento de Economía Aplicada – Universidad de Granada
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales.
Campus de Cartuja s/n 18071- Granada

RESUMEN

¿Tiene sentido establecer un orden de preferencias entre curvas de Lorenz con igual índice de Gini?. En este trabajo se contesta a la anterior pregunta, para ello, en primer lugar, se comparan dos curvas de Lorenz triangulares, procedentes de poblaciones con dos niveles de renta, que tienen igual índice de Gini. Se comprueba, que aquella curva cuyo vértice no trivial tiene una abscisa más cercana al valor 0,5 también tiene más cercanos sus dos niveles de renta. La aproximación de los dos niveles de renta se produce mediante mecanismos que pueden interpretarse como transferencias progresivas de renta, aunque éstos mecanismos difieren según que la mayor proximidad de la abscisa del vértice al valor 0,5 se produzca por la derecha o por la izquierda.

En segundo lugar, se generalizan el concepto de preferencia dentro de curvas de Lorenz poligonales con n vértices no triviales construidas para n+1 niveles de renta y con igual índice de Gini para lo cual constituyen un excelente instrumento de análisis.También, en este caso se interpreta el orden de preferencias entre dos funciones de Lorenz con igual índice de Gini como una consecuencia de transferencias progresivas de renta. Se revisa el concepto de transferencias de renta y se define un índice de progresividad sobre lo que se denomina vector neto de transferencias.

PALABRAS CLAVE: *Curvas de Lorenz Poligonales, Indice de Concentración de Gini, Transferencias de Renta, Orden de preferencia.*

CÓDIGO UNESCO: 530504

1.- INTRODUCCIÓN

Como muestra la literatura especializada, cada vez son más numerosas las publicaciones que hacen referencia a la medición de la desigualdad de la renta. El creciente interés en torno a este tema, se debe fundamentalmente a la estrecha relación existente entre la desigualdad de la renta y el bienestar social (Dagum, C. 2001) y a su utilidad para definir objetivos de determinadas políticas económicas así como contrastar el efecto de las correspondientes acciones de política económica.

Generalmente, no sólo se está interesado en analizar la desigualdad de la renta de una determinada distribución y ver su evolución en el tiempo, sino en comparar la desigualdad asociada a diferentes distribuciones de renta. Estas comparaciones, permiten establecer órdenes de preferencia de forma que en función del principio de aversión social a la desigualdad (Dagum C. 1993), se preferirán las distribuciones de renta que presenten menor desigualdad.

El criterio más utilizado para ordenar distribuciones de renta, es la comparación de curvas de Lorenz. Este criterio es válido siempre que las curvas de Lorenz no se crucen; situación que como muestran estudios al respecto, (Bishop, J.A., Formby, J.P. y Smith, W.J., 1991) es común, cuando los índices de concentración están próximos. Cuando las curvas de Lorenz se cruzan, lo más usual es ordenar las distribuciones en función de los diversos índices de desigualdad disponibles. No obstante existen otros enfoques alternativos, como trabajar con curvas de Lorenz ordenadas (Sarabia, J.M. y Pascual M., 2000) o utilizar la condición suficiente obtenida por Lafuente L. M. (1994a) que permite ordenar curvas de Lorenz que se cruzan a lo sumo una vez .

Aunque existen diferentes criterios de ordenación de distribuciones de renta, se ha demostrado la equivalencia entre algunos de ellos, así el criterio de dominancia de Lorenz es equivalente a la dominancia estocástica de segundo grado (Lafuente L, M. 1994b) y al orden de mayorización (Arnold, B.C. 1986). También se establece una equivalencia (Prieto A. M., 1998) entre el criterio de dominancia de Lorenz y el principio de Transferencias de Pigou-Dalton (Dalton, 1920). De acuerdo con este principio, la desigualdad debería disminuir cuando la renta se transfiere de una persona con mayor nivel de renta a otra con un nivel inferior, es decir, la desigualdad disminuye cuando tiene lugar una transferencia de renta progresiva. Sin embargo se observa con frecuencia que para pasar de una distribución de rentas a otra es necesario realizar un proceso mixto de transferencias de renta progresivas y regresivas. El Principio de Pigou- Dalton (Dalton, 1920) no es suficiente para clasificar las distribuciones. Aunque este principio deben cumplirlo todas las medidas de desigualdad, trabajos realizados por diversos autores, entre otros, Amiel, Y. y Cowell, F.A. (1992), Ballano, C. y Ruiz-Castillo, J. (1992) y Fleurbaey M. y Philippe M. (2001), cuestionan el cumplimiento y la validez del mismo .

En este trabajo, se analiza el problema de la ordenación de curvas de Lorenz con igual índice de Gini, utilizándose como herramienta base las Funciones de Lorenz Poligonales (FLP). Este tipo de Funciones de Lorenz, es de uso generalizado en las aplicaciones empíricas, debido a que la información sobre rentas habitualmente está ordenada en tablas de cuantiles[1] y permiten obtener una aproximación empírica de la curva de Lorenz, sin necesidad de modelos previamente especificados que pueden presentar problemas de rigidez y mala especificación.

Se comprueba fehacientemente la existencia de Funciones de Lorenz con igual índice de Gini que no son indiferentes. Este fenómeno se observa de forma muy intuitiva y sencilla sobre un caso particular de FLP que son las funciones con un solo vértice no trivial o triangulares (véase epígrafe 4).

[1] Obsérvese que la metodología elemental de construcción de curvas de Lorenz da como resultado una FLP cuando la información disponible se encuentra en tablas estadísticas de renta con agrupación de datos (por ejemplo tablas de deciles)

La estructura del artículo es la siguiente: en el segundo epígrafe se define el concepto de FLP y se demuestra que una curva de Lorenz es poligonal si y sólo si procede de una distribución con $n+1$ niveles de renta. Cuando se trabaja con datos de renta agrupados, los $n+1$ niveles de renta se corresponden con la marca de clase de los intervalos. En el tercer epígrafe se calcula el índice de Gini asociado a una FLP, en función de sus vértices y en función de los diferentes niveles de renta. En el epígrafe cuarto se introducen, en primer lugar, las Funciones Poligonales Triangulares (FLT) como caso particular de las FLP y en segundo lugar, se proporciona una sencilla y útil expresión para su índice de Gini. Las FLT permiten observar muy claramente, cómo puede establecerse un orden preferencial entre FLT que se cruzan y que tienen el mismo índice de Gini demostrando de forma intuitiva y clara la existencia de curvas de Lorenz que no son indiferentes a pesar de poseer igual índice de Gini.

En el quinto epígrafe se definen las combinaciones lineales convexas de FLT y se demuestra que una función de Lorenz es poligonal si y sólo si es combinación convexa de funciones triangulares, existiendo más de una combinación convexa que genera la misma FLP. Se demuestra que toda FLP con n vértices y $n+1$ niveles de renta tiene una descomposición triangular única cuyas n-1 primeras FLT tienen sus vértices sobre el eje de abscisas. Esta descomposición recibe el nombre de Espectro Triangular de la FLP. Tales descomposiciones permiten demostrar de forma fácil la existencia de FLP que tienen más de un vértice no trivial, con igual índice de Gini y que tampoco son indiferentes

En el sexto epígrafe se particulariza el concepto de FLP a funciones poligonales de paso constante, que serán aquellas en las que sus vértices tienen las abscisas definidas mediante una malla regular sobre el intervalo (0,1) siendo, por tanto, equidistantes. Este es el caso de una curva de Lorenz construida a partir de los intervalos de renta determinados por los deciles o por cualquier otro conjunto regular de cuantiles.

En el séptimo epígrafe, se estudian los fenómenos de transferencias de renta y el efecto sobre las FLP y sus índices de Gini. Se comprueba que es factible realizar transferencias de renta progresivas que dejan invariante el índice de Gini. Se delimita el concepto de transferencia progresiva y regresiva y se define un índice de progresividad y regresividad asociado a cualquier operación de redistribución de renta.

En el epígrafe octavo, se muestra un ejemplo con datos reales correspondiente a La Rioja y Baleares que tienen índices de Gini similares y sus curvas de Lorenz se cortan. Se muestra como se pasa de una estructura de renta a otra mediante una transferencia que aunque no es totalmente progresiva, tiene más de progresividad que de regresividad.

2. FUNCIONES DE LORENZ POLIGONALES.

2.1 DEFINICIÓN.

Sea un conjunto de *n* vértices $V=\{(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{d}_1),(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{d}_2)......(\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{d}_n)\}$ que verifican las siguientes condiciones

a- $0<\boldsymbol{a}_1<\boldsymbol{a}_2<......<\boldsymbol{a}_n<1$ (1)

b- $0<\boldsymbol{d}_i\le\boldsymbol{a}_i \quad \forall i=1,2......n$ (2)

c- $\dfrac{\boldsymbol{d}_1-\boldsymbol{d}_0}{\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_0}<\dfrac{\boldsymbol{d}_2-\boldsymbol{d}_1}{\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_1}<....<\dfrac{\boldsymbol{d}_{n+1}-\boldsymbol{d}_n}{\boldsymbol{a}_{n+1}-\boldsymbol{a}_n}<\infty$ (3)

donde $(\boldsymbol{a}_0,\boldsymbol{d}_0)\equiv(0,0)$ y $(\boldsymbol{a}_{n+1},\boldsymbol{d}_{n+1})\equiv(1,1)$.

Llamaremos Función de Lorenz Poligonal (FLP) sobre el conjunto V de *n* vértices no triviales a la función

$$L_{ad}(p)=\frac{\boldsymbol{d}_i-\boldsymbol{d}_{i-1}}{\boldsymbol{a}_i-\boldsymbol{a}_{i-1}}(p-\boldsymbol{a}_{i-1})+\boldsymbol{d}_{i-1} \quad \forall p\in[\boldsymbol{a}_{i-1},\boldsymbol{a}_i] \quad \forall i=1,2,....,n+1 \qquad (4)$$

Esta función posee además de los *n* vértices del conjunto V los dos vértices triviales (0,0) y (1,1) de toda curva de concentración de Lorenz.

2.2 PROPOSICIÓN.

Una curva de Lorenz es poligonal si y solo si proviene de una distribución con *n+1* niveles de renta.

Supongamos en primer lugar una distribución de rentas con *n+1* niveles. Más concretamente sean

$$0<K_1^{'}<K_2^{'},....<K_{n+1}^{'}<+\infty \qquad (5)$$

los niveles de renta y

$$\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_0,\ \boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_1,......,\ \boldsymbol{a}_{n+1}-\boldsymbol{a}_n \qquad (6)$$

las correspondientes proporciones de población que percibe cada nivel de renta. Sea

$$m'=\sum_{i=1}^{n+1}K_i^{'}(\boldsymbol{a}_i-\boldsymbol{a}_{i-1}) \qquad (7)$$

el nivel medio de renta, y

$$K_i=K_i^{'}/m' \quad \forall i=1,2,....,n+1 \qquad (8)$$

Es obvio que la curva de concentración de Lorenz para esta distribución de rentas es

$$L_{a,K}(p)=\sum_{j=1}^{i-1}K_j(\boldsymbol{a}_j-\boldsymbol{a}_{j-1})+K_i(p-\boldsymbol{a}_{i-1}) \quad \forall p\in[\boldsymbol{a}_{i-1},\boldsymbol{a}_i] \quad \forall i=1,...,n+1 \qquad (9)$$

Si llamamos

$$\boldsymbol{d}_i = \sum_{j=1}^{i} K_j \left(\boldsymbol{a}_j - \boldsymbol{a}_{j-1}\right) \qquad (10)$$

entonces puede escribirse

$$K_i = \frac{\boldsymbol{d}_i - \boldsymbol{d}_{i-1}}{\boldsymbol{a}_i - \boldsymbol{a}_{i-1}} \quad \forall i = 1,....n+1 \qquad (11)$$

y la ecuación (9) queda de la forma

$$L_{a,K}(p) = \boldsymbol{d}_{i-1} + K_i\left(p - \boldsymbol{a}_{i-1}\right) \quad \forall p \in \left[\boldsymbol{a}_{i-1}, \boldsymbol{a}_i\right] \quad \forall i = 1,..., n+1 \qquad (12)$$

Sustituyendo (11) en (12) resulta (4) y por tanto se puede concluir que toda curva de Lorenz correspondiente a una distribución de renta discreta con *n+1* niveles de renta es una FLP

Obsérvese que los niveles estandarizados de renta $K_i = K_i^{'} / m'$ pueden considerarse expresados en unidades de tamaño igual a la renta media poblacional, y que la curva de Lorenz resultante es independiente de este valor medio de los niveles de renta. Si dichos niveles de renta se han estandarizado entonces

$$\sum_{i=1}^{n+1} K_i \left(\boldsymbol{a}_i - \boldsymbol{a}_{i-1}\right) = 1 \qquad (13)$$

si por el contrario no lo han sido, hay que estandarizarlos para construir la función de Lorenz.

Veamos que toda FLP corresponde a una curva de Lorenz sobre una distribución de renta discreta. Dado $V = \{(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{d}_1), (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{d}_2)......(\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{d}_n)\}$ conjunto de vértices no triviales de la FLP, se puede utilizar la expresión (11) para obtener el conjunto de las *n+1* rentas estandarizadas que perciben las proporciones de población

$$\boldsymbol{a}_i - \boldsymbol{a}_{i-1} \quad \forall i = 1,..., n+1 \qquad (14)$$

y donde se supone $\boldsymbol{a}_0 = 0$ y $\boldsymbol{a}_{n+1} = 1$. Obsérvese que este resultado es válido para cualquier nivel medio de renta μ que es irrecuperable desde la FLP.

2.3 PROPOSICIÓN.

Sea d_i la distancia del vértice *i*-ésimo de la FLP a la bisectriz del cuadrado. Se verifica que

$$K_i = 1 - \frac{d_i - d_{i-1}}{\boldsymbol{a}_i - \boldsymbol{a}_{i-1}}\sqrt{2} \quad \forall i = 1,2..., n+1 \qquad (15)$$

En efecto, no es difícil comprobar que la intersección de la perpendicular a la bisectriz que pasa por el vértice no trivial de coordenadas $(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{d}_i)$ con la propia bisectriz, es el punto de coordenadas $((\boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{d}_i)/2, (\boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{d}_i)/2)$ y que la distancia entre ambos puntos es

$$d_i = (\boldsymbol{a}_i - \boldsymbol{d}_i) / \sqrt{2} \qquad (16)$$

Si ahora tenemos en cuenta (11) podemos escribir

$$K_i = 1 - \frac{(\boldsymbol{a}_i - \boldsymbol{d}_i) - (\boldsymbol{a}_{i-1} - \boldsymbol{d}_{i-1})}{\boldsymbol{a}_i - \boldsymbol{a}_{i-1}} \qquad (17)$$

de donde resulta ser cierta la proposición, teniendo en cuenta que para los dos vértices triviales, situados sobre la bisectriz, evidentemente se verifica que $d_0 = d_{n+1} = 0$.

3. INDICE DE GINI DE FUNCIONES POLIGONALES.

Para cualquier curva de Lorenz el índice de Gini se calcula mediante la expresión (Dagum C, 1987)

$$G = 1 - 2\int_0^1 L(p)dp \qquad (18)$$

Cuando la curva es poligonal, la integral de (18) representa la suma de las áreas de los trapecios de base $\boldsymbol{a}_i - \boldsymbol{a}_{i-1}$ y alturas mayor y menor $\boldsymbol{d}_i$ y $\boldsymbol{d}_{i-1}$ respectivamente. Como consecuencia, puede escribirse

$$G(\mathbf{á},\mathbf{ä}) = 1 - \sum_{i=1}^{n+1} (\boldsymbol{a}_i - \boldsymbol{a}_{i-1})(\boldsymbol{d}_i + \boldsymbol{d}_{i-1}) \qquad (19)$$

3.1 PROPOSICION.

Se verifica que

$$G(\mathbf{á},\mathbf{ä}) = \sum_{i=2}^{n+1} \boldsymbol{a}_{i-1}\boldsymbol{d}_i - \boldsymbol{a}_i\boldsymbol{d}_{i-1} \qquad (20)$$

$$G(\mathbf{á},\mathbf{ä}) \equiv G(\mathbf{ä},\mathbf{K}) = 1 - \sum_{i=1}^{n+1} \left(\boldsymbol{d}_i^2 - \boldsymbol{d}_{i-1}^2\right) / K_i \qquad (21)$$

$$G(\mathbf{á},\mathbf{ä}) \equiv G(\mathbf{á},\mathbf{K}) = 1 - 2\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{i} K_j (\boldsymbol{a}_j - \boldsymbol{a}_{j-1})(\boldsymbol{a}_i - \boldsymbol{a}_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n+1} K_i (\boldsymbol{a}_i - \boldsymbol{a}_{i-1})^2 \qquad (22)$$

En efecto, (20) resulta casi trivialmente quitando los paréntesis en (19) y simplificando; la expresión (21) resulta inmediatamente de (11) y (19). En lo que respecta a la expresión (22) se ha de tener en cuenta que en virtud de (10) puede escribirse

$$\boldsymbol{d}_i = \boldsymbol{d}_{i-1} + K_i (\boldsymbol{a}_i - \boldsymbol{a}_{i-1}) \qquad (23)$$

Sustituyendo (23) en (19) y sustituyendo δ_{i-1} por su equivalente según (10) resulta

$$G(\mathbf{á},\mathbf{ä}) \equiv G(\mathbf{á},\mathbf{K}) = 1 - 2\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{i-1} K_j (\boldsymbol{a}_j - \boldsymbol{a}_{j-1})(\boldsymbol{a}_i - \boldsymbol{a}_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n+1} K_i (\boldsymbol{a}_i - \boldsymbol{a}_{i-1})^2 \qquad (24)$$

de donde se obtiene trivialmente (22)

4. FUNCIONES DE LORENZ TRIANGULARES (FLT).

Las FLT son un caso particular de FLP con un solo vértice no trivial, pero muestran de forma clara e intuitiva que puede establecerse un orden preferencial entre dos FLT que se cruzan y con un mismo índice de concentración de Gini; por ello, particularizaremos la notación del apartado anterior con objeto de describir las razones de esta preferencia.

Una función de Lorenz triangular con vértice no trivial $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ tiene de ecuación

$$L_{a,b}(p) = \begin{cases} K_1 p & p \leq \boldsymbol{a} \\ K_2(p - \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{b} & p \geq \boldsymbol{a} \end{cases} \qquad (25)$$

donde en virtud de (11)

$$K_1 = \boldsymbol{b}/\boldsymbol{a} \quad \text{y} \quad K_2 = (1 - \boldsymbol{b})/(1 - \boldsymbol{a}) \qquad (26)$$

son los dos niveles de renta estandarizados correspondientes a esta FLT. Usando (20) es trivial comprobar que el índice de Gini es

$$G = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \qquad (27)$$

La expresión (27) muestra claramente que $0 \leq G \leq \boldsymbol{a}$. Como consecuencia, todas las FLT con índice de Gini G tienen el vértice con abcisa superior o igual a G y obviamente el vértice no trivial de cualquier FLT es de la forma $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} - G)$. Por otra parte, de (26) y (27) se pueden obtener fácilmente las expresiones

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{1 + G/(1 - \boldsymbol{a})}{1 - G/\boldsymbol{a}} \qquad (28)$$

$$K_2 - K_1 = \frac{G}{\boldsymbol{a}(1 - \boldsymbol{a})} \qquad (29)$$

Manteniendo G constante y haciendo variar α entre G y 1 se obtienen en (29) distintas diferencias entre los dos niveles de renta. El denominador de (29) es un polinomio de grado 2 en α que posee un máximo en 0,5. Como consecuencia la mínima diferencia entre los dos niveles de renta de una FLT se alcanza en $\alpha = 0,5$.

La diferencia entre los niveles alto y bajo de renta (D) puede utilizarse como criterio de ordenación de FLT que se cortan y tienen igual índice de Gini. De esta forma, en función del principio de aversión social a la desigualdad (Dagum, C., 1993) se preferirá aquella distribución con menor diferencia entre niveles de renta.

A modo de ejemplo, supongamos dos FLT L_1 y L_2 cuyos respectivos vértices son (á , G-á) y (á', G-á'). Dependiendo de la posición de los vértices se distinguen dos situaciones:

1) 0,5 á < á' 1

En virtud de la expresión (27), el nivel de renta alto y bajo está más próximo en L_1 que en L_2, es decir $D_1 < D_2$. Además, la proporción de población que percibe el nivel bajo de renta (á) en L_1 es por hipótesis inferior al de L_2. Resulta indiscutible que la primera FLT es preferida a la segunda a pesar de que ambas se corten y posean el mismo índice de Gini.

Se puede pasar de la segunda distribución a la primera, disminuyendo el porcentaje de individuos con renta baja y la diferencia entre niveles de renta (*D*) mediante transferencias de renta progresivas.

2) á’< á 0,5

En este caso la diferencia entre niveles de renta (29) continua siendo favorable a L_1, aunque la proporción de rentas del nivel bajo se eleva con respecto a la proporción de rentas bajas en L_2.

De igual modo que en el caso anterior, se puede pasar de la primera a la segunda distribución, mediante transferencias progresivas de renta, de forma que se eleva el nivel de renta baja y disminuye el nivel de renta alta, disminuyendo a su vez la proporción de individuos con rentas altas. En efecto:

$$K_1' = \frac{\alpha'}{(\alpha' - G)} < K_1 = \frac{\alpha}{(\alpha - G)} \qquad (30)$$

$$K_2' = \frac{(1-\alpha')}{(1-\alpha'+G)} > K_2 = \frac{\alpha}{(1-\alpha+G)} \qquad (31)$$

Siendo (30) y (31) ciertas en virtud de G á’< á 0,5, se puede afirmar también que la primera FLT es preferida a la segunda a pesar de poseer ambas el mismo índice de Gini.

Resumiendo, se puede afirmar que dadas dos FLT con igual índice de Gini, se prefiere aquella con vértice de abscisa más próxima al valor 0.5.

Ha de destacarse que en las dos situaciones descritas, como ya se ha dicho con anterioridad, es posible disminuir la diferencia entre niveles altos y bajos de renta, mediante transferencias progresivas de la misma, permaneciendo el índice de Gini constante. Por lo tanto, la ordenación de distribuciones de renta, en función de *D*, cumple el principio de Pigou-Dalton[2] (Dalton, 1920), no ocurriendo igual con el índice de Gini que permanece constante ante transferencias de niveles superiores a inferiores de renta.

5. COMBINACIONES CONVEXAS DE FUNCIONES DE LORENZ TRIANGULARES.

5.1 PROPOSICION.

Toda combinación lineal convexa de *n* FLT con vértices $(\alpha_i, \beta_i)\ i = 1,2,...,n$ con coeficientes $\theta_i\ i = 1,2,....,n$ es una FLP cuyo conjunto de vértices no triviales es $V = \{(\alpha_i, \delta_i)\ i = 1,2....,n\}$ donde

$$\delta_i = \sum_{j=1}^{i-1} \theta_j \left\{ K_{j,2}(\alpha_i - \alpha_j) + \beta_j \right\} + \sum_{j=i}^{n} \theta_j K_{j,1} \alpha_i \quad (32)$$

y donde para ambas sumatorias en (32) se entiende que si en alguna de ellas el valor final del índice es más pequeño que el inicial dicha sumatoria vale cero. Por ejemplo, para *i* = 1, en (32), la primera

[2] Principio de Pigou-Dalton: Siempre que se realizan transferencias progresivas de renta, el valor del índice de desigualdad disminuye.

sumatoria es cero porque el índice de la sumatoria debe comenzar en 1 y terminar en cero. Dicho de otra forma en este caso de i = 1 la expresión (32) queda reducida a la segunda sumatoria.

En efecto, la expresión (32) es consecuencia inmediata de (25), siendo $K_{j,1}, K_{j,2} \;\; j = 1,2...,n$ los niveles altos y bajos de renta de las respectivas FLT que forman parte de la combinación convexa; de acuerdo con (26), dicha expresión (32) puede expresarse de la siguiente forma

$$d_i = \sum_{j=1}^{i-1} q_j \left\{ \left(\frac{1-b_j}{1-a_j} \right) \left(a_i - a_j \right) + b_j \right\} + \sum_{j=i}^{n} q_j \frac{b_j}{a_j} a_i \qquad (33)$$

Según la regla excepcional establecida para las sumatorias en (32) y por añadidura en (33), no es difícil comprobar que también pueden obtenerse de ellas los valores triviales $\delta_0 = 0$ y $\delta_{n+1} = 1$

5.2 PROPOSICIÓN.

Se verifica que los niveles de renta de la FLP resultante de la combinación convexa son

$$K_i = \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} q_j K_{j,2} + \sum_{j=i}^{n} q_j K_{j,1} \right\} \quad \forall i = 1,2....n+1 \qquad (34)$$

En efecto, en virtud de (32) se verifica que

$$d_i - d_{i-1} = \left(a_i - a_{i-1} \right) \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} q_j K_{j,2} + \sum_{j=i}^{n} q_j K_{j,1} \right\} \quad \forall i = 1,2,...,n+1 \qquad (35)$$

y teniendo en cuenta (11), de (35) se obtiene inmediatamente (34).

5.2.1 COROLARIO.

Para toda FLP y toda descomposición triangular de ella se verifica que

$$K_{i+1} - K_i = q_i \left(K_{i,2} - K_{i,1} \right) \quad \forall i = 1,2,...,n \qquad (36)$$

La demostración es trivial desde (34).

5.3 LEMA.

Para toda FLP con n+1 niveles de renta se verifica que

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left(K_{i+1} - K_i \right) \left(1 - a_i \right) < 1 \qquad (37)$$

En efecto

$$\sum_{i=1}^{n} \left(K_{i+1} - K_i \right) \left(1 - a_i \right) = \sum_{i=1}^{n+1} K_i \left(a_i - a_{i-1} \right) - K_1 \qquad (38)$$

La igualdad (38) se obtiene fácilmente quitando paréntesis y reordenando convenientemente los sumandos en el término izquierdo. Usando (13) puede escribirse

$$\sum_{i=1}^{n} \left(K_{i+1} - K_i \right) \left(1 - a_i \right) = 1 - K_1 \qquad (39)$$

Por último, en virtud de (5), (7) y (8) se verifica que $0 < K_1 < 1$ y como consecuencia (37) es cierta.

Nótese que si se admite un primer nivel de renta $K_1 = 0$ ó $K_1 = 1$, la desigualdad (37) sigue siendo válida.

5.4 PROPOSICIÓN.

Toda FLP con n vértices no triviales y n+1 niveles de renta, admite un infinito no numerable de descomposiciones en combinación lineal convexa de n FLT.

En efecto, para cada juego de coeficientes θ_i $i = 1,2,...,n$ tales que

$$\theta_i \geq (1-\alpha_i)(K_{i+1}-K_i) \quad \forall i = 1,2,...,n \qquad (40)$$

de los que existe un infinito no numerable en virtud de (37), es posible calcular desde (36) las siguientes diferencias

$$K_{i,2}-K_{i,1} = (K_{i+1}-K_i)/\theta_i \quad \forall i = 1,2,...,n \qquad (41)$$

Como consecuencia, teniendo en cuenta (27) y (29) puede escribirse

$$\frac{\alpha_i-\beta_i}{\alpha_i(1-\alpha_i)} = \frac{K_{i+1}-K_i}{\theta_i} \quad \forall i = 1,2,...,n \qquad (42)$$

de donde resulta

$$\beta_i = \alpha_i \left\{1-\frac{(1-\alpha_i)(K_{i+1}-K_i)}{\theta_i}\right\} \qquad (43)$$

Nótese que (42), en virtud de (40), siempre proporciona valores admisibles. Es decir

$$0 \leq \beta_i \leq \alpha_i \ \forall i = 1,2,...,n \qquad (44)$$

5.4.1 COROLARIO.

Toda FLP con n vértices y n+1 niveles de renta no nulos tiene una descomposición triangular única cuyas $n-1$ primeras FLT tienen sus vértices sobre el eje de abscisas. Dicha descomposición recibirá el nombre de Espectro Triangular de la FLP.

En efecto, dadas las FLT de vértices $(\alpha_i, 0)\ i = 1,2,...,n-1$ en virtud de (26) y (41) se tiene

$$\theta_i = (1-\alpha_i)(K_{i+1}-K_i) \quad \forall i = 1,2,...,n-1 \qquad (45)$$

La última FLT tiene el vértice (α_n, β_n) donde, en virtud de (43)

$$\beta_n = \alpha_n \left\{1-\frac{(1-\alpha_n)(K_{n+1}-K_n)}{1-\sum_{i=1}^{n-1}\theta_i}\right\} \qquad (45b)$$

Pero como consecuencia de (45) y de (39) se puede escribir que

$$\sum_{i=1}^{n-1}\theta_i + (1-\alpha_n)(K_{n+1}-K_n) = 1-K_1 \qquad (46)$$

y por tanto

$$\boldsymbol{q}_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} \boldsymbol{q}_i = K_1 + (1 - \boldsymbol{a}_n)(K_{n+1} - K_n) \qquad (47)$$

lo que conduce a

$$\boldsymbol{b}_n = \frac{\boldsymbol{a}_n K_1}{K_1 + (1 - \boldsymbol{a}_n)(K_{n+1} - K_n)} \qquad (48)$$

Si se admite un primer nivel de renta nulo entonces (48) se anula y la *n*-ésima FLT del espectro triangular también tiene su vértice sobre el eje de abscisas. En este caso (47) se transforma en (45) para el caso particular de $i = n$.

5.4.2 COROLARIO.

Sea una FLP de vértices $(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{d}_i)\ i = 1,2,...,n$ y niveles de renta $K_1, K_2, ..., K_{n+1}$ y sea $s_i = K_{i+1} - K_i$. Se verifica que el índice de Gini puede calcularse mediante la expresión

$$G(\mathbf{á}, \mathbf{K}) = \sum_{i=1}^{n} s_i \boldsymbol{a}_i (1 - \boldsymbol{a}_i) \qquad (49)$$

Dada una descomposición triangular cualquiera de la citada FLP, en virtud de (29) se verifica para cada FLT que

$$G_i = (K_{i,2} - K_{i,1}) \boldsymbol{a}_i (1 - \boldsymbol{a}_i) \qquad (50)$$

Puesto que el índice de Gini de la combinación convexa es la combinación de los índices de Gini (Fellman. J., 2001) de las componentes, puede afirmarse que

$$G(\mathbf{á}, \mathbf{K}) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{q}_i G_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{q}_i (K_{i,2} - K_{i,1}) \boldsymbol{a}_i (1 - \boldsymbol{a}_i) \qquad (51)$$

si ahora se tiene en cuenta (40) la proposición resulta evidentemente cierta.

Nótese que, manteniendo constantes las abscisas de los vértices, si se produce una disminución en algún s_j, para dejar inalterable el índice de Gini es necesaria una compensación aumentando alguno o varios s_i alternativos. Siempre que $i < j$ se puede interpretar este movimiento como una transferencia progresiva de rentas que hace la nueva FLP más preferida que la original a pesar de que el índice de Gini es constante.

5.4.3 COROLARIO.

Para todo i=1,2,...,n+1, sea $s_i = K_{i+1} - K_i$ y $a_i = \boldsymbol{a}_i - 0{,}5$. Se verifica entonces que

$$G(\mathbf{a}, \mathbf{s}) \equiv G(\mathbf{á}, \mathbf{K}) = \sum_{i=1}^{n} s_i (0{,}25 - a_i^2) \qquad (52)$$

En efecto, $\boldsymbol{a}_i (1 - \boldsymbol{a}_i) = (0{,}5 + a_i)(0{,}5 - a_i) = 0{,}25 - a_i^2$ y sustituyendo en (49) se obtiene (52).

Nótese que si los vértices de la FLP sufren un movimiento tal que su abscisa se aproxima al valor 0,5 (lo que significa una disminución de los valores α_i^2) entonces, para mantener el índice de Gini constante, es necesario disminuir las distancias entre los niveles de renta, con lo cual la nueva FLP es más preferida.

5.4.4 COROLARIO.

Sea

$$r_i = \alpha_{i-1}(1-\alpha_{i-1}) - \alpha_i(1-\alpha_i) \; i = 1,2,...,n+1 \qquad (53)$$

se verifica entonces que

$$G(\mathbf{r},\mathbf{K}) \equiv G(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{K}) = \sum_{i=1}^{n+1} r_i K_i \qquad (54)$$

La demostración es inmediata a partir de (49)

5.4.5 COROLARIO.

Sean dos vectores de rentas $\mathbf{K_1}$ y $\mathbf{K_2}$ correspondientes a sendas FLP con *n* vértices no triviales cuyas abscisas son comunes en ambas. Sea $\mathbf{d} = \mathbf{K_2} - \mathbf{K_1}$ y sea $\mathbf{r}$ el vector columna cuyas componentes están definidas en (53). Se verifica que ambas FLP tienen igual índice de Gini si y solo si $\mathbf{r} \perp \mathbf{d}$.

En efecto, en virtud de (54) ambas FLP tienen igual índice de Gini si y solo si

$$\mathbf{r}'\mathbf{K}_1 = \mathbf{r}'\mathbf{K}_2 \Leftrightarrow \mathbf{r}'(\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_2) = 0 \qquad (55)$$

5.5 PROPOSICIÓN

Como consecuencia inmediata de las proposiciones 5.1 y 5.4 se tiene que una Función de Lorenz es poligonal si y solo si es combinación convexa de funciones triangulares. Aunque siempre existe más de una combinación convexa que generan la misma FLP.

5.6 PROPOSICION.

Todas FLP con *n* vértices de abscisas fijas e índice de Gini *G* constante están generadas por vectores de *n*+1 niveles de renta rentas que pertenecen a un subespacio de dimensión *n*-1.

En efecto dichos vectores de renta han de verificar dos restricciones lineales que se corresponden con la condición (13) de rentas normalizadas y con la condición (54) para que el índice de Gini tenga un valor determinado *G*.

Puesto que la combinación convexa de FLP con *n* vértices de abscisas fijas e índice de Gini constante es otra FLP con *n* vértices cuyas abscisas son las mismas anteriores y con igual índice de Gini, se puede afirmar que dicha clase de FLP es un espacio vectorial convexo isomorfo al espacio vectorial de niveles de renta y dimensión *n*-1 anterior.

6. FUNCIONES DE LORENZ POLIGONALES DE PASO CONSTANTE.

Es muy habitual, en los estudios de la desigualdad social, utilizar curvas de Lorenz que se construyen sobre los deciles o sobre los percentiles de la distribución. La propia metodología impone trabajar con FLP para las que además las distancias entre las abscisas de los vértices son constantes

(0,1 en el caso de deciles y 0,01 en el de percentiles) es por esto que se dedica especial atención a esta clase de FLP. Sea

$$\alpha_i = \frac{i}{n+1} \quad \forall i = 0,1,...,n+1 \qquad (56)$$

con lo cual

$$\alpha_i - \alpha_{i-1} = \frac{1}{n+1} \quad \forall i = 1,2.....,n+1 \qquad (57)$$

La forma funcional (4), se transforma obviamente en la siguiente

$$L_d(p) = \frac{\delta_i - \delta_{i-1}}{n+1}(p - \alpha_{i-1}) + \delta_{i-1} \quad \forall p \in \left[\frac{i-1}{n+1}, \frac{i}{n+1}\right] \quad \forall i = 1,2,....,n+1 \qquad (58)$$

Las relaciones (10) y (11) entre niveles de renta y los vértices de la FLP quedan obviamente de la forma

$$\delta_i = \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{i} K_j \ (59) \quad K_i = (n+1)(\delta_i - \delta_{i-1}) \ (60)$$

y el índice de Gini puede escribirse

$$G(\delta) = 1 - \frac{1 + 2\sum_{i=1}^{n}\delta_i}{n+1} \qquad (61)$$

6.1 PROPOSICION.

El Espectro Triangular de toda FLP con paso constante y n vértices no triviales está definido por la combinación lineal convexa de las n-1 FLT de vértices ($i/(n+1)$, 0) i=1,2,… n-1 y coeficientes

$$\theta_i = (\delta_{i+1} - 2\delta_i + \delta_{i-1})(n+1-i) \quad i = 1,2,...,n-1 \qquad (62)$$

y de la FLT con coeficiente $\theta_n = (n+1)\delta_1 + \{1 - 2\delta_n + \delta_{n-1}\}$ y vértice ($n/(n+1)$, β); donde

$$\beta = \frac{n\delta_1}{(n+1)\delta_1 + \{1 - 2\delta_n + \delta_{n-1}\}} \qquad (63)$$

La demostración es trivial desde (45) (47) y (48) teniendo presente (60).

Obsérvese que si el primer nivel de renta es cero entonces δ_1 vale cero y como consecuencia se anula (63). El n-ésimo coeficiente de la combinación convexa adquiere la misma forma que los restantes particularizando (62) al caso de $i = n$. Todas Las FLT del espectro triangular de la FLP tienen el vértice sobre la abscisa en este caso

7. TRANSFERENCIAS DE RENTA.

Dadas dos FLP con n vértices cuyas abscisas son comunes en ambas funciones y cuyos vectores de renta son $\mathbf{K_1}$ y $\mathbf{K_2}$, puede interpretarse que una FLP se obtiene de la otra mediante una transferencia de rentas.

En efecto; los vectores de rentas se consideran normalizados, y por tanto obligados a cumplir la condición (13); también se considera que la operación de normalización establecida en (8) equivale a un cambio de unidades en la medición de la renta estableciéndose la renta media como la unidad o patrón de medida en cada caso. Para la primera FLP, con vector de rentas $\mathbf{K_1}$**,** considerando una población de tamaño N el total de renta percibido por cada uno de los grupos asociados a los distintos niveles de renta queda recogido en el vector Nx$\mathbf{F_1}$ donde

$$F_{i,1} = (\alpha_i - \alpha_{i-1})K_{i,1} \; i = 1,2,..n+1 \qquad (64)$$

Una operación de redistribución de estas rentas que deja a esa misma población en la posición Nx$\mathbf{F_2}$ es una transformación lineal definida por una matriz estocástica **T** cuyas columnas tienen sus elementos no negativos y suman la unidad de manera que

$$N \times \mathbf{F}_2 = \mathbf{T} \times N \times \mathbf{F}_1 \qquad (65)$$

Considerar el tamaño de población N hace más inteligible la formulación matemática del proceso de transferencia de rentas, pero esta es totalmente innecesaria ya que (65) puede simplificarse de la forma

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{T} \times \mathbf{F}_1 \qquad (66)$$

En el caso de FLP de paso constante, en virtud de (57), puede escribirse (66) de la forma

$$\frac{1}{n+1}\mathbf{K}_2 = \mathbf{T} \times \frac{1}{n+1}\mathbf{K}_1 \qquad (67)$$

y, consecuentemente, simplificada hasta quedar como

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{T} \times \mathbf{K}_1 \qquad (68)$$

7.1 PROPOSICIÓN.

Sea una FLP con vector de rentas $\mathbf{K_1}$ y correspondiente vector $\mathbf{F_1}$ definido según (64). Sea una transferencia de rentas definida mediante la matriz estocástica **T** y sea

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{T} \times \mathbf{F}_1 \qquad (69)$$

entonces se verifica que

$$\sum_{i=1}^{n+1} F_{i,2} = 1 \qquad (70)$$

En efecto, según (69)

$$F_{i,2} = \sum_{j=1}^{n+1} t_{i,j} F_{j,1} \qquad (71)$$

y como consecuencia, teniendo en cuenta (13), (64) y que las columnas de la matriz T suman la unidad se puede escribir

$$\sum_{i=1}^{n+1} F_{i,2} = \sum_{i=1}^{n+1}\left(\sum_{j=1}^{n+1} t_{i,j} F_{j,1}\right) = \sum_{j=1}^{n+1} F_{j,1}\left(\sum_{i=1}^{n+1} t_{i,j}\right) = \sum_{i=1}^{n+1} F_{i,1} = 1 \qquad (72)$$

Nótese que esta proposición garantiza que el vector de rentas que se obtiene como consecuencia de transferencias de renta definidas mediante matrices estocásticas cumple la condición de normalización ya que, en virtud de (64), la expresión (72) no es sino una forma alternativa de escribir (13).

7.2 PROPOSICIÓN.

Sea **T** una matriz de transferencia de rentas entre dos FLP cuyos vectores de rentas son $\mathbf{K_1}$ y $\mathbf{K_2}$. Sea **U** la matriz cuyos elementos son

$$u_{i,j} = t_{i,j}\,\frac{\boldsymbol{a}_j - \boldsymbol{a}_{j-1}}{\boldsymbol{a}_i - \boldsymbol{a}_{i-1}} \quad \forall\, 1 \le i, j \le n+1 \quad (73)$$

Se verifica entonces que

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{U} \times \mathbf{K}_1 \quad (74)$$

En efecto, según (64) y (71) se puede escribir que

$$\left(\boldsymbol{a}_i - \boldsymbol{a}_{i-1}\right) K_{i,2} = \sum_{j=1}^{n+1} t_{i,j} \left(\boldsymbol{a}_j - \boldsymbol{a}_{j-1}\right) K_{j,1} \qquad (75)$$

con lo cual (74) es ya evidente.

7.2.1 COROLARIO.

Si las FLP son de paso constante, entonces las matrices T y U son idénticas corroborándose de nuevo la expresión (68).

7.3 PROPOSICIÓN.

Una transferencia de rentas **T** mantiene invariante el índice de Gini si y solo si se verifica

$$\mathbf{r}'\left(\mathbf{U} - \mathbf{I}\right)\mathbf{K}_1 = 0 \qquad (76)$$

siendo **I** la matriz identidad y **U** la matriz que se define en (72).

El resultado se obtiene de (55) y teniendo en cuenta que según (74)

$$\mathbf{d} = \mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_1 = \left(\mathbf{U} - \mathbf{I}\right)\mathbf{K}_1 \qquad (77)$$

7.3.1 COROLARIO.

Si la FLP inicial es de paso constante entonces (76) puede escribirse como

$$\mathbf{r}'\left(\mathbf{T} - \mathbf{I}\right)\mathbf{K}_1 = 0 \qquad (78)$$

7.4 TRANSFERENCIAS DE RENTA Y VECTOR DE DIFERENCIAS DE NIVELES DE RENTA.

Dados dos vectores de renta $\mathbf{K_1}$ y $\mathbf{K_2}$ correspondientes a sendas FLP L_1 y L_2, el vector diferencia

$$\mathrm{d} = \mathrm{K}_2 - \mathrm{K}_1 \quad (79)$$

es un claro exponente de la transferencia final y neta que sería necesario realizar para transformar L_1 en L_2. Aunque la matriz **T** representa el mecanismo detallado de redistribución de renta, puesto que refleja desde que nivel sale cada unidad de renta y como se reparte cada una de ellas entre los distintos niveles, el resultado final de tal redistribución queda reflejado en el vector **d.** Por otra parte es muy conveniente tener en cuenta que a un mismo resultado neto recogido en (79) puede llegarse mediante multitud de forma de redistribución; es decir hay infinitas matrices de transferencia que conducen al mismo resultado neto final. Este argumento es muy importante a la hora de interpretar el significado de transferencia progresiva de rentas; en efecto una trasferencia desde el nivel 3 de renta hasta el nivel 4 puede ser clasificada como regresiva, pero si lleva aparejado en la misma matriz (proposición 7.2) una transferencia mayor desde el nivel 4 hacia el 2 puede suceder que el resultado neto final sea progresivo aunque para alcanzarlo se hayan realizado movimientos parciales de rentas desde niveles inferiores a niveles superiores. Si se aplica estrictamente el principio de Pigou-Dalton a la matriz **T**, ésta deberá ser triangular superior para que la transferencia sea progresiva; es decir $t_{i,j} = 0$ para todo *j* > *i*. Pero si se atiende al resultado final y se es un poco laxo con la matriz **T**, se pueden obtener resultados realmente progresivos y que no habrían sido considerados como tales. El siguiente ejemplo aclara la idea: La tabla 1 muestra los dos vectores de renta y el de diferencias para sendas FLP de paso constante construidas sobre las abscisas $a_i = i/10 \; i = 1,2,....,9$ de los nueve vértices no triviales

Tabla 1: Vectores de rentas y diferencia

K_1	K_2	D
0,1	0,12392178	0,02392178
0,8	0,88303308	0,08303308
0,9	1,00245879	0,10245879
1	1,12930528	0,12930528
1,05	1,18551715	0,13551715
1,1	1,02172903	-0,07827097
1,12	1,04694091	-0,07305909
1,13	1,06515278	-0,06484722
1,14	1,08336466	-0,05663534
1,66	1,45857654	-0,20142346

El vector diferencia muestra de forma clara que las rentas altas disminuyen y las bajas aumentan al pasar de la primera a la segunda FLP y se puede, por tanto, interpretar que de la primera a la segunda FLP se pasa mediante una transferencia progresiva de rentas. Sin embargo la matriz **T** que se muestra en la tabla 2 transforma el primer vector de rentas en el segundo y no es triangular superior. Si se aplica el principio de Pigou-Dalton de forma estricta a dicha matriz **T** se concluirá que no es progresiva

Tabla 2: Matriz de transferencias T

0,9064	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0079	0,0075	0,0073	0,0071	0,0000
0,0100	0,8944	0,0000	0,0000	0,0000	0,0281	0,0281	0,0281	0,0280	0,0244
0,0101	0,0104	0,9036	0,0012	0,0000	0,0292	0,0292	0,0292	0,0292	0,0287
0,0102	0,0112	0,0111	0,9112	0,0112	0,0303	0,0303	0,0303	0,0303	0,0304
0,0103	0,0120	0,0120	0,0121	0,9122	0,0314	0,0314	0,0314	0,0314	0,0320
0,0104	0,0128	0,0129	0,0131	0,0132	0,7325	0,0325	0,0325	0,0325	0,0336
0,0105	0,0136	0,0138	0,0141	0,0143	0,0335	0,7336	0,0336	0,0337	0,0353
0,0106	0,0144	0,0147	0,0151	0,0153	0,0346	0,0347	0,7348	0,0348	0,0369
0,0107	0,0152	0,0156	0,0161	0,0164	0,0357	0,0358	0,0359	0,7359	0,0386
0,0108	0,0160	0,0164	0,0171	0,0174	0,0368	0,0369	0,0370	0,0370	0,7402

7.4.1 ÍNDICE DE PROGRESIVIDAD DEL VECTOR DE TRANSFERENCIAS.

Un vector **d** de transferencias será totalmente progresivo si todos los signos negativos del mismo están en la zona de niveles de renta más altos y todos los positivos agrupados en la zona complementaria sin intercalarse los valores positivos y los negativos. Empíricamente suele observarse que los signos positivos y negativos se intercalan y que un vector no es totalmente progresivo (como el mostrado en la tabla 1) ni totalmente regresivo sino que presenta un mayor o menor grado de progresividad dependiendo de la cantidad de transferencias desde rentas superiores a inferiores en relación con las que se realizan en sentido contrario. Una primera aproximación para medir este grado de progresividad es contar la proporción de pares de componentes del vector **d** que muestran una disposición progresiva, entendiendo por disposición progresiva que la componente de orden inferior es positiva o nula y la superior negativa. En este orden de ideas se define la siguiente función indicadora de progresividad sobre cualquier par ordenado de componentes del vector **d**.

$$I(d_i, d_j) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad d_i \geq 0 \text{ y } d_j \leq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad \forall i, j / \, i < j \quad (80)$$

El índice de progresividad del vector **d** puede definirse de la siguiente forma

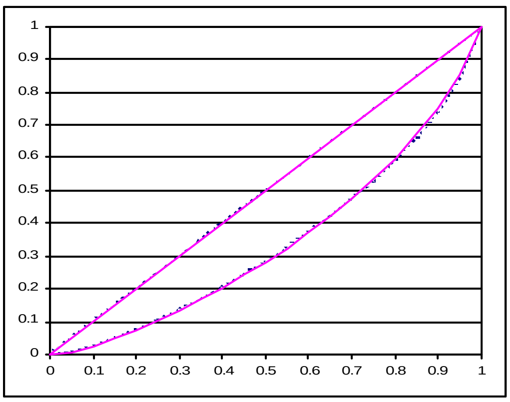
$$Ip(\mathbf{d}) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} I(d_i, d_j) \qquad (81)$$

Este índice toma valores comprendidos entre cero y uno. Puede definirse un índice de regresividad como $Ir(\mathbf{d}) = 1 - Ip(\mathbf{d})$ que evidentemente representa la proporción de pares ordenados del vector **d** que son regresivos. Por ejemplo el vector de la tabla 1 tiene índice de progresividad 1

8. EJEMPLO SOBRE DATOS REALES.

En éste ejemplo se compara la curva de Lorenz de La Rioja (gráfico 1 línea continua) con la de Baleares (línea de puntos); ambas FLP de paso constate con 19 vértices no triviales construidas a partir de los 19 percentiles de renta per-cápita disponible de la EPF 90/91, “datos corregidos por ocultación: tasa de ocultación progresiva” recogidos en Pena y col. (1996). Los respectivos índices de Gini facilitados por los propios autores son respectivamente de 0,3225 y 0,3259 que a efectos prácticos consideraremos como iguales. Las dos FLP están muy próximas pero se cortan.

Gráfico 1



Los vectores de rentas relativas y el vector de transferencias necesario para que la renta de La Rioja se redistribuya hasta alcanzar la misma estructura que la de Baleares se muestran en la tabla 3.

El índice de progresividad calculado según (79) para este vector de transferencias es de 0,1158 por lo cual podemos concluir que las transferencias en este sentido son más bien regresivas (índice de regresividad 0,8862) pudiéndose concluir que es más preferida la FLP correspondiente a La rioja. El vector de transferencias de rentas en Baleares para que la renta de esta comunidad se redistribuya hasta alcanzar la misma estructura que la de Rioja es el mismo de la tabla 3 pero con sus componentes cambiadas de signo; el índice de progresividad es ahora 0,8864. Nótese que si intentamos justificar este efecto por la ligera diferencia entre los índices de Gini nos encontraremos que la progresividad de las transferencias va en sentido contrario de los respectivos índices

Tabla 3

Baleares	La Rioja	Diferencia
Niv. Rel. Renta	Niv. Rel. Renta	Rioja->Bal
$K_{i,1}$	$K_{i,2}$	di
0,143950	0,175659	-0,03170923
0,347826	0,394771	-0,04694489
0,454536	0,469708	-0,01517197
0,525922	0,521696	0,0042261
0,574272	0,572960	0,00131229
0,621860	0,625429	-0,00356949
0,667403	0,667783	-0,00038029
0,712519	0,716268	-0,00374938
0,758186	0,760461	-0,0022755
0,802792	0,802475	0,00031751
0,858154	0,860315	-0,00216049
0,922901	0,914236	0,00866475
1,000763	0,967094	0,03366836
1,099912	1,022952	0,07695952
1,190871	1,104400	0,08647164
1,286166	1,230382	0,05578395
1,408297	1,386364	0,02193297
1,622841	1,578199	0,04464156
2,026690	1,984853	0,04183729
2,974138	3,243993	-0,26985471

9. CONCLUSIONES.

1.- Las FLP son un excelente instrumento para mostrar que la igualdad en los índices de concentración de Gini correspondiente a sendas curvas de Lorenz no significa necesariamente indiferencia entre las dos distribuciones subyacentes en ellas. En particular, el fenómeno se hace patente y diáfano en FLT con dos niveles de renta donde la equidad en la distribución de renta se percibe por la mera comparación de esas dos cantidades o niveles de renta en conjunción con los respectivos porcentajes de población que a cada uno de ellos corresponde.

2.- Las clases de FLT caracterizadas por un índice de Gini constante son fácilmente reconocibles y de un tratamiento sencillo; están formadas por todas aquellas FLT cuyo único vértice no trivial se sitúa sobre una recta paralela a la diagonal principal del cuadrado unidad siendo la distancia entre ambas rectas quien determina el valor del índice de Gini (G= distancia/√2).

El hecho de poder definir una FLP con *n* vértices no triviales como una combinación lineal convexa de *n* FLT y la seguridad de que dichas FLP están asociadas a un sistema de *n*+1 niveles de renta, hacen sencilla la tarea de encontrar dos FLP con igual índice de Gini y que tampoco son indiferentes

3.- Las clases de FLP con un mismo número *n* de vértices no triviales de abscisas constantes e incluso igualmente espaciadas constituyen el instrumento básico de análisis de muchos investigadores de la desigualdad y el bienestar social puesto que es la primera aproximación empírica que realizan al problema de la concentración. Ello se debe a que la mayor parte solo tiene acceso a las tablas de deciles o de percentiles de la distribución de renta, siendo la FLP asociada a estas tablas el primer instrumento de exploración antes de introducir un modelo que no siempre tiene la suficiente flexibilidad para no distorsionar la información disponible.

En el presente trabajo se establece una metodología para decidir el orden preferencial entre dos distribuciones de renta que poseen índices de Gini prácticamente coincidentes y cuyas FLP se cruzan.

4.- Las transferencia de rentas quedan matemáticamente formuladas como un automorfismo en el espacio lineal de los vectores de renta cuya matriz es estocástica por columnas (sus columnas suman 1 y son valores no nulos). Queda patente que distintas formas de transferencia producen una misma estructura final de niveles de renta; es decir, la matriz de transferencias que relaciona los vectores de renta de dos FLP no es única. Esto ha obligado a definir el vector de transferencia neta como la diferencia entre los respectivos vectores de renta. El concepto de transferencia progresiva se muestra ambiguo en este contexto y se constata que pueden encontrase transferencias que no son totalmente progresivas ni totalmente regresivas por lo que ha sido necesario definir un índice de progresividad que permita ordenar dos FLP basándose en el grado de progresividad del vector de transferencias que transforma una FLP en la otra. Dicho índice adquiere el valor 1 cuando el vector de transferencia neta se encuentra partido en dos subvectores, uno que tiene todos sus valores negativos o nulos y corresponde a la zona de rentas altas y otro con todas sus componentes positivas o nulas correspondientes al resto de niveles de renta más bajos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMIEL, Y. y COWELL, F.A. (1992): Measurement of Income Inequality. Experimental Test by Questionnarie. *Journal of Public Economics*, 47, 3-26.

BALLANO, C. y RUIZ-CASTILLO, J. (1992): Searching Questionnarie for the Meaning of Income Inequality. *Revista Española de Economía*, 10, 233-259.

BISHOP, J.A., FORMBY, J.P. y SMITH W.J. (1991): International comparisons of income inequality-test for Lorenz dominance across nine coutries. *Economica*, 58, 461-478.

DAGUM, C. (1987) : *The New Palgrave Dictionary of Economics*, vol. 2, 529-532. London: Macmillan Press. New York: Stockton Press.

DAGUM, C. (1993): Fundamentos de bienestar social de las medidas de desigualdad en la distribución de la renta. *Cuadernos de Ciencias Económicas y Empresariales*. Universidad de Málaga, 24, 11-36.
DAGUM, C.(2001): Desigualdad del rédito y bienestar social, descomposición, distancia direccional y distancia métric a entre distribuciones. *Estudios de Economía aplicada* 17 5-52.
DALTON, H. (1920): The measurement of de Inequality of Incomes. *Economic Journal*, 30, 348-361.
FELLMAN J. (2001): Mathematical propierties of classes of income redistributive policies. *European Journal of Political Economy*,17, 179-192.
FEURBAEY, M. y PHILIPPE, M. (2001): Transfer principles and inequality aversion, with an application to optimar grown. *Mathematical Social Sciences*, 42, 1-11.
LAFUENTE L. M. (1994a): *Medidas de cuantificación de la desigualdad: la desigualdad de la renta en España según la E.P.F. 1990-1991*. Tesis doctoral. Cap.I, p. 50-54. Universidad de Murcia.
LAFUENTE L. M. (1994b): *Medidas de cuantificación de la desigualdad: la desigualdad de la renta en España según la E.P.F. 1990-1991*. Tesis doctoral. (Cap. I, p. 45-50).
Universidad de Murcia.
PENA J.B., CALLEALTA F.J., CASAS J.M., MEREDIZ A., NÚÑEZ J.J. (1996): *Distribución Personal de la Renta en España*, Ed. Pirámide Madrid p 502-503.
PRIETO, A. M. (1998): Modelización Parámetrica de la Distribución Personal de la Renta para España mediante Métodos Robustos. Tesis doctoral, p.57-49. Universidad de Valladolid.
SARABIA, J.M. y PASCUAL, M. (2000): Rankings de distribuciones de renta basados en curvas de Lorenz ordenadas. XIV Reunión ASEPELT ESPAÑA.