Un Modelo de Selección de Carteras Vía Programación por Metas. Una Aplicación a la Bolsa Española.

Caballero Fernández, Rafael.
González Lozano, Mercedes.
Rodríguez Avilés, Rafael.

r_caballero@uma.es
m_gonzalez@uma.es
rr_aviles@uma.es

Departamento de Economía Aplicada (Matemáticas)
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales.
Universidad de Málaga.

Palabras Clave: *Selección de carteras, Programación por Metas, Rentabilidad, Riesgo.*

RESUMEN

En este papel aplicamos el método de programación por metas a un modelo cuadrático de selección de carteras, siendo los objetivos a considerar: rentabilidad, riesgo total, medido por la varianza de la cartera y riesgo sistemático, medido por el coeficiente Beta. Dicho método se aplica sobre los datos semanales del mercado continuo español desde el año 95 hasta agosto del 2000, distinguiendo tres escenarios diferentes: estable, crecimiento y decrecimiento, estudiándose en cada uno de ellos distintos tamaños muestrales.

Cada una de las carteras seleccionadas es evaluada posteriormente, comparando su valor de realización con su equivalente del IBEX, utilizando este índice como cartera de referencia o de mercado.

El programa utilizado emplea la hoja de cálculo como soporte para la entrada y salida de datos, siendo el lenguaje de programación Visual Basic para Aplicaciones y la librería NAG de cálculo numérico.

1.- Introducción.

Es de todos conocido que la selección de cartera es una de las piezas angulares de la moderna gestión de activos financieros, entendiendo por cartera *una determinada combinación de valores mobiliarios adquiridos por una persona física o jurídica, y que pasan, por tanto, a formar parte de su patrimonio* (Suárez, 1990).

En general, el inversor trata siempre de garantizarse una rentabilidad, seguridad y liquidez aceptables o mínimas al decidir cómo combinar los valores en su cartera. No obstante, es casi una norma que estos objetivos no sean compatibles entre sí: los valores más líquidos suelen ser poco rentables, los más rentables, en la mayoría de los casos, poseen característica de inseguros, los más seguros, normalmente, no permiten una liquidez rápida, etc. Todo ello, nos permite tratar esta problemática desde la óptica de la programación multiobjetivo, ya que, nos encontramos con la existencia de varios objetivos en conflicto entre sí.

De hecho, el modelo que dio origen a la moderna teoría de selección de carteras, propuesto por Markowitz en 1952, no es ni más ni menos que un problema multiobjetivo, para ser más exactos, biobjetivo: maximizar el rendimiento de una cartera de valores, minimizando su riesgo o viceversa, siendo el método de resolución utilizado por el autor el de la restricción, donde se elige uno de los objetivos y el otro pasa a ser una restricción del problema.

En este trabajo utilizaremos el método de la programación por metas para nuestra problemática de selección de carteras, donde vamos a considerar tres metas a alcanzar, una para la rentabilidad de la cartera, otra para la varianza como representativa del riesgo total de la misma y una tercera para el riesgo sistemático medido por lo que se conoce como coeficiente beta (β). Tras plantear el modelo correspondiente para conseguir una solución satisfactoria y eficiente, lo aplicaremos a los precios de cierre semanales reales del mercado continuo español desde el año 95 hasta agosto del 2000, distinguiendo tres escenarios diferentes en nuestro análisis: periodo estable, periodo de crecimiento y periodo de decrecimiento, estudiándose en cada uno de ellos distintos tamaños muestrales, en concreto, 3 meses, 6 meses, 12 meses y 18 meses.

Las carteras seleccionadas en cada escenario son evaluadas posteriormente mediante la comparación de su valor de realización con el de una cartera de referencia, utilizando para ello el IBEX, puesto que puede ser considerado como la cartera representativa del mercado. Actuando de esta forma podemos observar cuándo la cartera elegida se aleja negativamente de la tendencia del mercado, momento que puede ser el oportuno para revisar dicha cartera, comprando y vendiendo.

Como hemos comentado, la técnica multiobjetivo que vamos a utilizar es la programación por metas, siendo precisamente esta técnica la empleada en las primeras referencias a la selección de carteras y la programación multiobjetivo que encontramos en la literatura. Así Lee y Lerro (1973) y Lee y Chesser (1980) utilizaron dicho método para analizar la selección de carteras, considerando como metas, medidas de la rentabilidad, y del riesgo. Además, incluyeron restricciones sobre el grado de concentración en cualquier título, puesto que es normal que existan limitaciones legales sobre este sentido, junto con restricciones adicionales de diversificación por sector o industria. Más recientemente, Powell y Premachandra (1998) actualizan las aplicaciones de programación por metas anteriores teniendo en cuenta los avances recientes en la literatura sobre gestión de carteras, tales como requerimientos de prudencia gerencial, necesidades de liquidez, preocupaciones sobre responsabilidad social, y cuestiones sobre gestión de obligaciones. En Tamiz y otros (1996) se desarrolla un modelo en dos etapas: en la primera se formula un modelo de programación por metas que predice la sensibilidad de las acciones a unos indicadores económicos, entre los que nos encontramos, entre otros, los tipos de interés y las tasas de inflación de varios países así como los índices de cotización de las principales bolsas. Posteriormente, en la segunda etapa se utilizan los resultados obtenidos para seleccionar una cartera óptima de entre los conjuntos de títulos dados.

Resumiendo, podemos indicar que existen interesantes aportaciones de la programación multiobjetivo al campo de la selección de carteras. Nuestro pequeño grano de arena pretende presentar una aproximación al mercado bursátil español en la última década, combinando la idea de selección de carteras con la detección del punto de una futura revisión de la cartera elegida.

2.- **Planteamiento del modelo.**

A la hora de decidir cuáles iban a ser las metas a considerar en nuestro modelo, debíamos tener en cuenta que nuestra pretensión era llevar a cabo una primera aproximación al funcionamiento de la bolsa española en los últimos años. Por ello, nos pareció conveniente considerar solamente las tres metas propuestas: alcanzar una cierta rentabilidad, un riesgo total, medido por la varianza de la cartera y un riesgo sistemático, medido por el coeficiente Beta.

En cuanto a la rentabilidad, sabemos que cada título financiero produce tres clases de rendimiento: por plusvalías, por dividendos y por ampliaciones de capital. Si sumamos algebraicamente estas partidas y dividimos la suma por el desembolso inicial, obtendremos el rendimiento porcentual para el valor concreto. Pero de los tres tipos de rendimiento sólo los dos primeros pueden recibir un adecuado tratamiento estadístico y, por tanto, se pueden incluir de forma generalizada en un modelo de optimización. Puesto que las ampliaciones se producen relativamente pocas veces en la vida de una compañía, y sin ninguna cadencia identificable, habría de tratarse individualmente para cada valor, según el momento en que decidiéramos construir nuestra cartera óptima y según el horizonte temporal que deseáramos para nuestra inversión, todo ello a partir de datos prácticamente ciertos, es decir, a partir de las declaraciones de las propias compañías con intención de ampliar el capital.

En cualquier caso, en un mercado de valores lo suficientemente eficiente, todas las circunstancias que afecten a una compañía deberán reflejarse en su cotización, incluidos los dividendos, por lo que, en la mayor parte de la literatura el rendimiento de un valor se define únicamente con la cotización. Por ello, a efectos de la teoría de carteras, el rendimiento porcentual de un título *i* en el periodo *t* se define del siguiente modo:

$$R_{it} = \frac{P_{it} - P_{i\,t-1}}{P_{i\,t-1}}$$

donde P_{it} es el precio de mercado o valor de cotización del título *i* al final del periodo *t* y $P_{i\,t-1}$ representa el precio al final del periodo *t*-1.

Esta definición del rendimiento de un título en un periodo de tiempo es la que Martínez (1993) denomina rentabilidad simple por periodo, o J.P. Morgan (1996) rentabilidad porcentual o cambio relativo del precio.

Si la rentabilidad bruta del título se define como $1+R_{it}$, entonces el cambio logarítmico del precio o rentabilidad continua compuesta del mismo, r_{it}, es definida como el logaritmo natural de su rentabilidad bruta, o sea:

$$r_{it} = \mathrm{Ln}(1 + R_{it}) = \mathrm{Ln}\left(\frac{P_{it}}{P_{i\,t-1}}\right)$$

Esta forma de calcular las rentabilidades tiene tres ventajas, razones por las que nosotros utilizaremos esta definición:

1. Es fácil anualizar las rentabilidades de periodos de menor duración. Es fácil demostrar (Martínez (1993)) que la rentabilidad anual es el producto de la rentabilidad media continua de un determinado periodo por el número de periodos anuales.
2. La rentabilidad continua no está sesgada, al contrario de la simple, que lo está por exceso, sesgo que se incrementa cuando anualizamos.
3. En el mercado bursátil está bastante aceptado que las rentabilidades se ajustan a una distribución lognormal.

Como sabemos, la rentabilidad, a priori, es una variable aleatoria, que tomará diferentes valores con sus correspondientes probabilidades en el caso discreto, o se ajustará a alguna de las distribuciones de probabilidad teórica de tipo continuo. Así, la esperanza matemática de dicha variable nos proporcionará una medida de la rentabilidad media del correspondiente activo financiero.

En cuanto a la rentabilidad de una cartera p formada por una combinación de valores mobiliarios o activos individuales en determinadas proporciones, x_i, $i = 1, 2, ..., N$, siendo N el número de valores que se toman en consideración, vendrá dada por:

$$r_p = \sum_{i=1}^{N} x_i r_i$$

siendo también una variable aleatoria al ser la suma de variables aleatorias.

En cuanto al riesgo total soportado por la inversión, debemos indicar que la mayoría de modelos de selección de carteras utilizan la varianza de la misma como una medida representativa de dicho concepto. Es evidente que se pueden utilizar otras medidas, como el coeficiente de variación, la desviación media absoluta, la desviación semi-interquartílica, etc., pero, no obstante, todas estas alternativas, aunque presentan algunas ventajas sobre la varianza, no superan, en general a esta última. Por ello, la meta que hemos impuesto al riesgo total de la cartera tiene como medida del mismo:

$$Var(r_p) = \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij}$$

La última meta recoge la idea del riesgo sistemático o de mercado, el cual se suele medir por el denominado coeficiente Beta. Sharpe (1963) consideró que la dependencia estadística entre los rendimientos de los diferentes títulos no es una dependencia directa, sino derivada de la relación existente entre esos rendimientos y un grupo fundamental de índices representativos de la evolución de la actividad económica: producto interior bruto, índice general de precios, renta por habitante, índice general de la bolsa, etc. Se estudió, en primer lugar, el caso en que el rendimiento depende de un sólo índice: un índice bursátil o de mercado, suponiendo que la relación de dependencia entre dichas variables viene definida por un modelo econométrico del tipo:

$$R_i = \alpha_i + \beta_i I + \varepsilon_i$$

donde I representa el índice bursátil representativo de la evolución del mercado y β_i es el parámetro a estimar que nos indica el peso o grado de intensidad con que las variaciones de I afectan a R_i. Por ello, se toma como medida del riesgo sistemático o de mercado del título i, denominándose coeficiente de volatilidad, o simplemente beta.

Para el caso de la rentabilidad de la cartera tendremos:

$$R_p = \sum_{i=1}^{N} x_i(\alpha_i + \beta_i I + \varepsilon_i) = \sum_{i=1}^{N} x_i\alpha_i + \beta_p I + \sum_{i=1}^{N} x_i\varepsilon_i$$

en donde $\beta_p=(x_1\beta_1+x_2\beta_2+...+x_N\beta_N)$ nos proporciona una medida del riesgo sistemático o de mercado de la cartera p.

Calculando la varianza de la relación anterior tenemos:

$$\sigma^2(R_p) = \sigma_p^2 = \beta_p^2\sigma_I^2 + \sum_{i=1}^{N} x_i^2\sigma_i^2$$

donde el término $\sigma^2(R_p)$ nos mide el riesgo total de la cartera, mientras que los términos $\beta_p{}^2\sigma_I^2$ y $\sum_{i=1}^{N} x_i^2\sigma_i^2$ nos representan, respectivamente, el riesgo sistemático o de mercado y el riesgo propio o específico de dicha cartera. No obstante, como medida del riesgo sistemático es frecuente utilizar simplemente β_p.

Como se puede ver, cuanto mayor sea la beta de la cartera, mayor será el grado de vinculación entre el rendimiento de la cartera y el mercado y, por consiguiente, un inversor averso al riesgo, o poco agresivo, intentará comprar títulos que tengan un coeficiente β_i reducido, al objeto de que β_p sea lo menor posible.

Una vez vistos estos tres conceptos, estableciendo unos niveles de aspiración para cada uno de ellos, pretendemos obtener una solución satisfactoria en cuanto a la rentabilidad y al riesgo de la cartera seleccionada.

En cuanto a las restricciones de nuestro problema tenemos la restricción presupuestaria, que nos indica que la suma de las proporciones que el inversor destina de su presupuesto de inversión a la adquisición de cada valor debe ser la unidad, junto con la condición de no negatividad de estas proporciones. Si no incluimos las condiciones de no negatividad, estaríamos admitiendo las ventas a corto, con lo que el porcentaje de inversión en unos activos podría ser negativo y en otros mayor que la unidad, aunque la suma total de las participaciones habría de mantenerse en la unidad.

Además hemos incluido restricciones sobre el grado de concentración en cada título y en cada sector, cuya justificación viene dada por el deseo de reducir el riesgo adicionalmente mediante la diversificación.

Una vez establecidas las metas decidimos situarlas en diferentes niveles de preferencia resolviendo el problema resultante mediante la programación por metas lexicográfica. Así, en el primer nivel situamos la meta correspondiente a la rentabilidad, en el segundo la del riesgo total y en el tercero la del riesgo sistemático con lo cual nos encontramos con los siguientes problemas:

$$
\begin{aligned}
& Lex \min \ \{n_1, p_2, p_3\} \\
& s.\,a. \ \ \boldsymbol{r}^t \boldsymbol{x} + n_1 - p_1 = r^* \\
& \qquad \boldsymbol{x}^t V \boldsymbol{x} + n_2 - p_2 = V^* \\
& \qquad \hat{\boldsymbol{a}}^t x + n_3 - p_3 = \beta^* \\
& \qquad \sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \\
& \qquad \sum_{j \in K_h} x_j \leq u_h \\
& \qquad 0 \leq x_i \leq u_i \qquad i = 1, \ldots, N \\
& \qquad n_1, p_1, n_2, p_2, n_3, p_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

siendo $\boldsymbol{x}$ el vector con las participaciones en la cartera de cada título, r^*, V^* y β^* los niveles de aspiración que establecemos en cada una de las metas, K_h el conjunto de títulos del sector h, u_h la cota superior de dicho sector y u_i la cota individual del título i-ésimo.

Las soluciones que verifiquen los tres niveles a la vez serán satisfactorias. Pero, las soluciones de un problema de programación por metas, cuando son satisfactorias, normalmente no serán eficientes, puesto que una vez que la variable no deseada de una meta alcanza el valor 0, esta técnica no explora la posibilidad de alcanzar aún mejores valores para el objetivo que se considera en dicha meta. Sin embargo, la eficiencia es una propiedad muy importante en un problema multiobjetivo, puesto que, en la mayoría de los problemas, si una solución está dominada entonces para el decisor será más deseable precisamente el punto o los puntos que la dominan.

Este aspecto constituyó una crítica para la programación por metas y provocó la aparición de diversas variantes y extensiones con el objetivo de paliar este problema, las cuales se conocen como técnicas de Detección y Restauración de la Eficiencia. Dichas técnicas se van a caracterizar por la maximización en algún momento de las variables de desviación que no se habían incluido en la función de realización de cada meta, evitando de alguna forma que las variables no deseadas empeoren su valor.

Existen diferentes estrategias de restauración, adaptadas a las diferentes preferencias del decisor. Estas técnicas tienen en común la imposición de restricciones a las variables de desviación para evitar un empeoramiento de la solución satisfactoria obtenida en la etapa anterior, y se diferencian en la forma de incluir las preferencias del decisor. La que nosotros hemos utilizamos en este estudio se denomina Restauración Interactiva. En este método, se le muestra al decisor el conjunto de metas para que elija cuál de ellas desea mejorar. Una vez elegida, se maximiza la variable deseada de esta meta. En nuestro ejemplo, restauramos la eficiencia en la meta de rentabilidad puesto que en definitiva, lo que los inversores van buscando es obtener el mayor rendimiento posible. Por lo tanto, resolvemos un cuarto problema:

$$
\begin{aligned}
&Min\ \ -p_1\\
&s.\,a.\ \ \boldsymbol{r}^t\boldsymbol{x}+n_1-p_1=r^*\\
&\qquad \boldsymbol{x}^t V\boldsymbol{x}+n_2-p_2=V^*\\
&\qquad \hat{\boldsymbol{a}}^t x+n_3-p_3=\beta^*\\
&\qquad \sum_{i=1}^{N} x_i=1\\
&\qquad \sum_{j\in K_h} x_j\le u_h\\
&\qquad 0\le x_i\le u_i \qquad i=1,\dots,N\\
&\qquad n_1,p_1,n_2,p_2,n_3,p_3\ge 0
\end{aligned}
$$

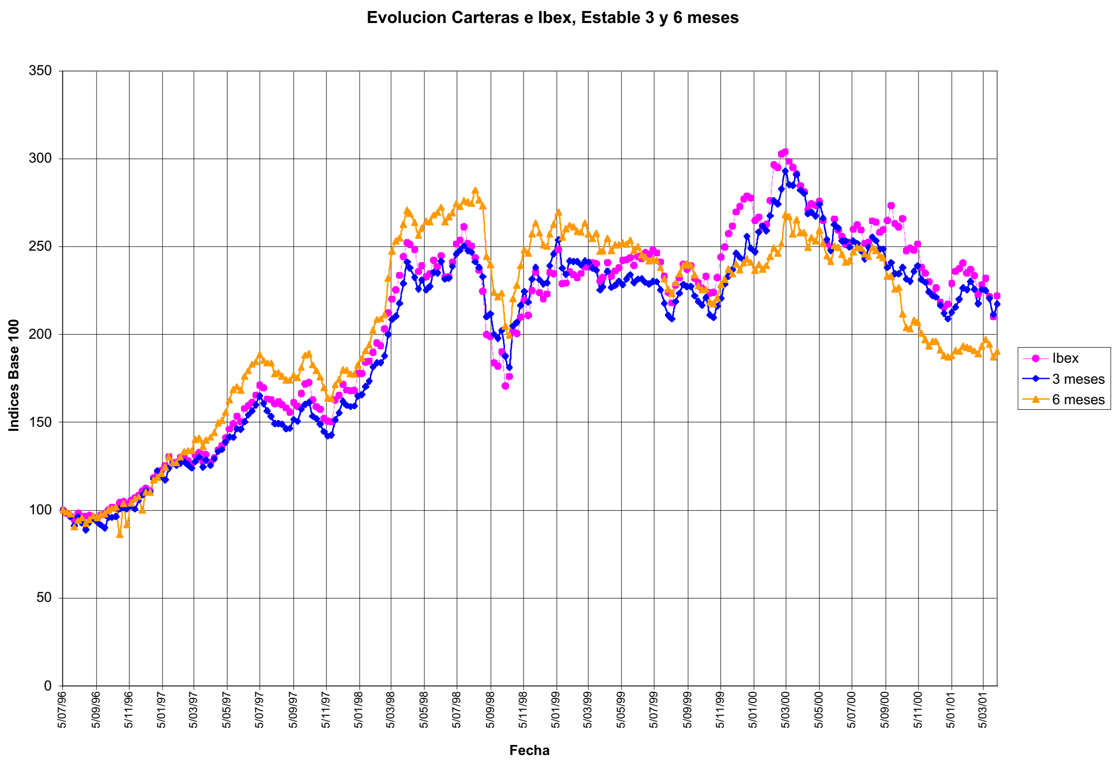
3.- Aplicación y análisis de resultados.

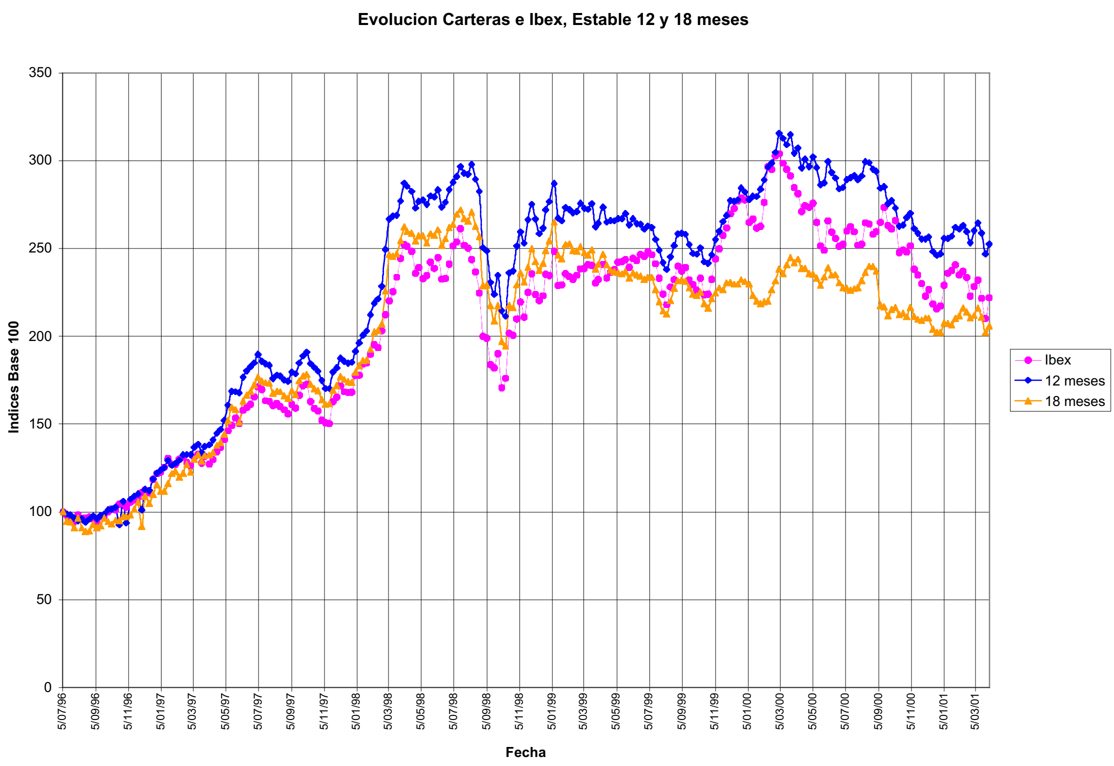
Una vez planteado el modelo correspondiente para conseguir una solución satisfactoria y eficiente, lo aplicamos a datos semanales reales del mercado continuo español desde el año 95 hasta agosto del 2000, distinguiendo tres escenarios diferentes en nuestro análisis: periodo estable (del 05/01/95 al 28/06/96), periodo de crecimiento (del 24/01/97 al 17/07/98) y periodo de decrecimiento (del 08/04/98 al 06/08/99), estudiándose en cada uno de ellos distintos tamaños muestrales, en concreto, 3 meses, 6 meses, 12 meses y 18 meses.

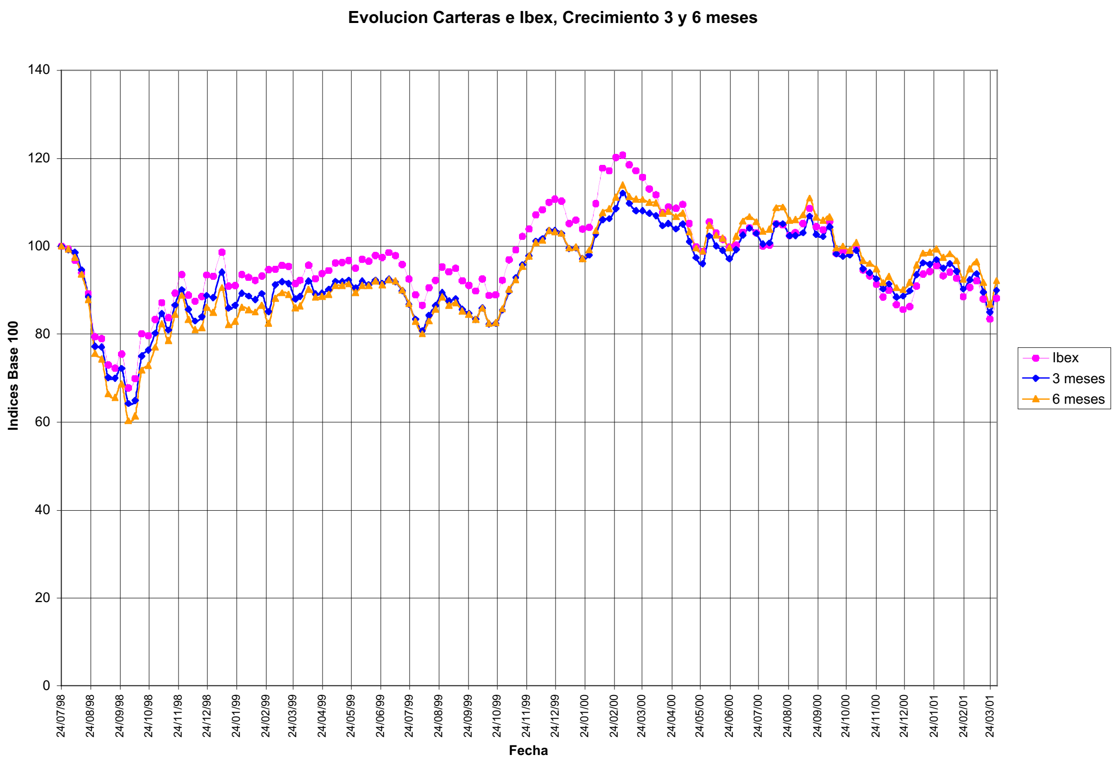
En cuanto a los niveles de aspiración de cada una de las metas propuestas, decidimos establecer un nivel fácilmente alcanzable para la rentabilidad, habida cuenta que después restauramos eficiencia en ella, por ello, aceptamos una rentabilidad de 0, para la varianza escogimos la del mercado, representado por el IBEX y para la beta también la de mercado, o sea, la unidad.

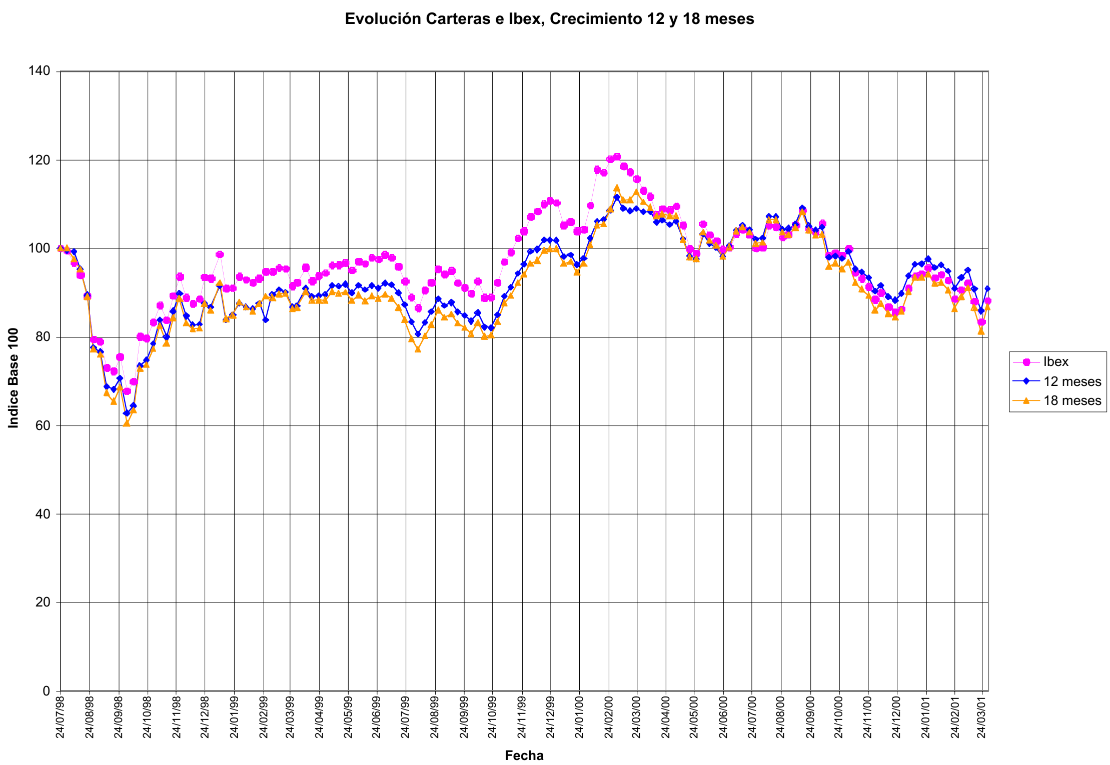
Por último, para establecer las cotas sectoriales tomamos como referencia la ponderación de cada sector en el IBEX, en cada momento de la selección, redondeándola hacia arriba en uno o varios puntos para lograr obtener un valor entero, operación que repetimos para seleccionar las cotas individuales de cada título.

Los resultados obtenidos se pueden observar en las siguientes gráficas:

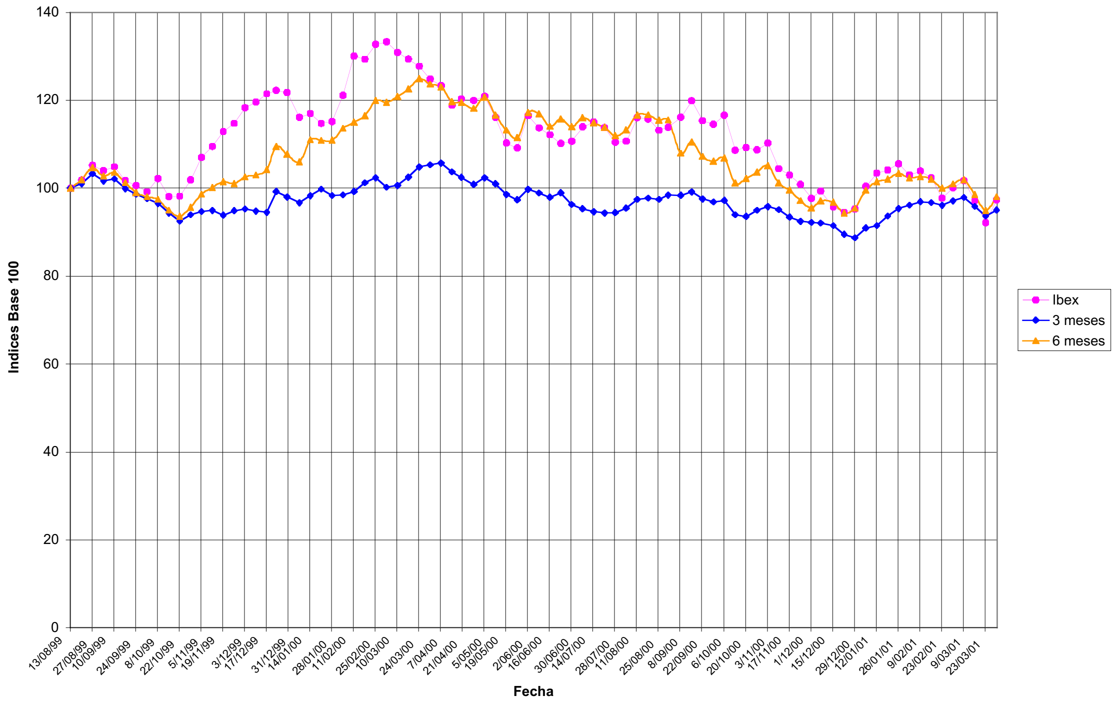

Evolucion Carteras e Ibex, Estable 3 y 6 meses
Indices Base 100
Fecha
Ibex
3 meses
6 meses
0
50
100
150
200
250
300
350
5/07/96
5/09/96
5/11/96
5/01/97
5/03/97
5/05/97
5/07/97
5/09/97
5/11/97
5/01/98
5/03/98
5/05/98
5/07/98
5/09/98
5/11/98
5/01/99
5/03/99
5/05/99
5/07/99
5/09/99
5/11/99
5/01/00
5/03/00
5/05/00
5/07/00
5/09/00
5/11/00
5/01/01
5/03/01


Evolucion Carteras e Ibex, Estable 12 y 18 meses
Indices Base 100
Fecha
Ibex
12 meses
18 meses
0
50
100
150
200
250
300
350
5/07/96
5/09/96
5/11/96
5/01/97
5/03/97
5/05/97
5/07/97
5/09/97
5/11/97
5/01/98
5/03/98
5/05/98
5/07/98
5/09/98
5/11/98
5/01/99
5/03/99
5/05/99
5/07/99
5/09/99
5/11/99
5/01/00
5/03/00
5/05/00
5/07/00
5/09/00
5/11/00
5/01/01
5/03/01

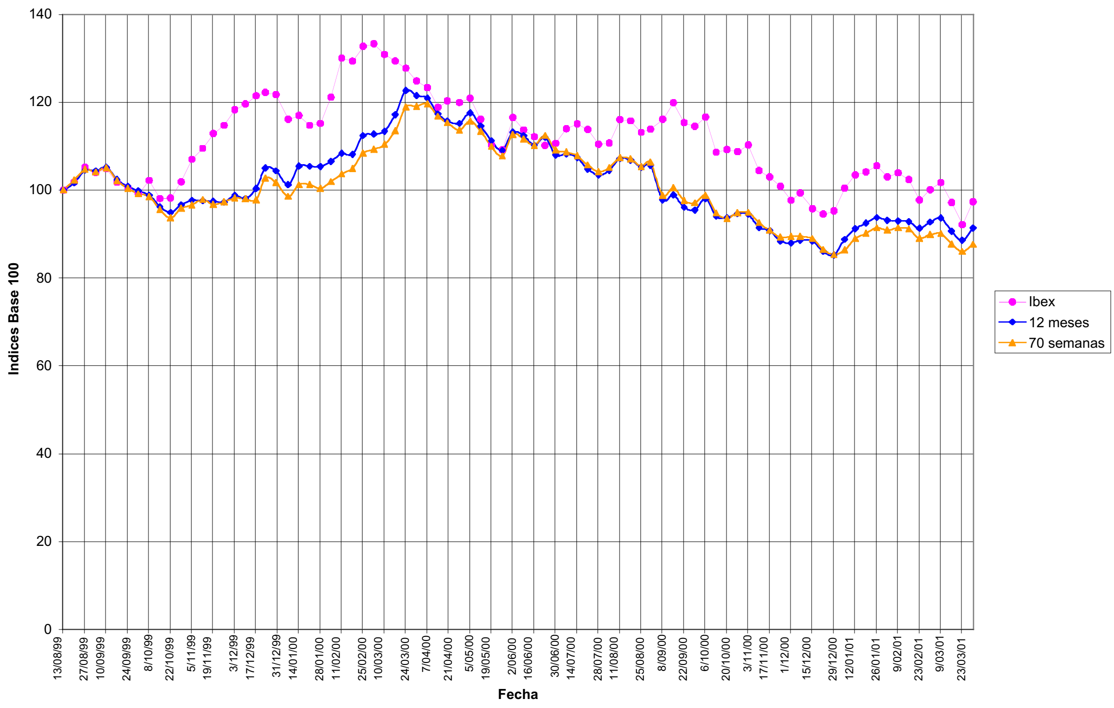

Evolucion Carteras e Ibex, Crecimiento 3 y 6 meses
Indices Base 100
Fecha
Ibex
3 meses
6 meses


Evolución Carteras e Ibex, Crecimiento 12 y 18 meses
Indice Base 100
Fecha
Ibex
12 meses
18 meses

Evolucion Carteras e Ibex, Decrecimiento 3 y 6 meses



Evolucion Carteras e Ibex, Decrecimiento 12 meses y 70 semanas



Cada gráfica refleja la evolución de la cartera seleccionada en cada escenario, contrastada con la evolución del valor del IBEX en base 100.
El análisis de dichas gráficas nos permitió observar que en el escenario estable, con un claro crecimiento posterior, la cartera seleccionada, para los distintos tamaños muestrales, bate al mercado razonablemente. Por otra parte, en el escenario de crecimiento con un posterior decrecimiento, no logramos los resultados anteriores aunque la diferencia con respecto al mercado no es sustancial. Por último en el periodo de decrecimiento obtenemos los peores resultados, puesto que el mercado logra batir casi sistemáticamente a nuestra cartera.
Este hecho nos llamó la atención y, por ello, comprobamos la evolución, a posteriori, del valor de los títulos que componían la cartera observando que algunos títulos habían cambiado radicalmente su tendencia, es decir, dichos títulos pasaron de tener una clara rentabilidad positiva, a priori, a una negativa con lo cual una parte de los títulos de la cartera experimentaron un claro cambio estructural imposible de detectar por nuestro modelo.
Todo esto nos lleva a la lógica conclusión de que las carteras, si se pretenden mantener a un corto y medio plazo, deben ser revisadas de acuerdo con algún criterio racional, tarea que intentamos acometer en un futuro próximo.
Además analizamos los resultados obtenidos por distintas gestoras financieras durante el período considerado y pudimos comprobar que en los momentos de decrecimiento sus carteras lograban batir al mercado pero no eran comparables con las nuestras porque permitían la compraventa de títulos extranjeros.

4.- Conclusión.

Tras analizar la evolución seguida por cada una de las carteras elegidas observamos cómo logramos batir al mercado en los escenarios de estabilidad y crecimiento, mientras que en el de decrecimiento ocurre lo contrario. Este hecho nos lleva a pensar que en este último escenario debemos ser más cautos y utilizar, más frecuentemente, indicadores que nos señalen el momento de revisar la cartera seleccionada, además de incluir otros atributos importantes que configuran el valor de un título como los dividendos, la liquidez, los beneficios, etc.

5.- Bibliografía.

Lee, S.M. y Chesser, D.L. (1980). *"Goal Programming for Portfolio Selection"*. The Journal of Portfolio Management, Spring, págs. 22-26.

Lee, S.M. y Lerro, A.J. (1973). *"Optimizing the Portfolio Selection for Mutual Funds"*. The Journal of Finance, vol. XXVIII, págs. 1087-1101.

Markowitz, H. (1952). *"Portfolio Selection"*, Journal of Finance, vol. 7, nº 2, págs. 77-91.

Markowitz, H. (1959). *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments.* John Wiley. Nueva York.

Markowitz, H. (1987). *Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets*. Basil Blackwell. Nueva York.

Martínez, E. (1993). *Futuros y Opciones*. McGraw-Hill. Madrid.

Morgan, J.P. (1996). *RiskMetrics-Technical Document.* Nueva York.

Powell, J.G. y Premachandra, I.M. (1998). *"Accommodating Diverse Institutional Investment Objectives an Constraints Using Non-Linear Goal Programming".* European Journal of Operational Research, 105, págs. 447-456.

Sharpe, W.F. (1963). *"A Simplified Model for Portfolio Analysis".* Management Science, vol. IX, nº 2, págs. 277-293.

Sharpe, W.F. (1970). *Portfolio: Theory and Capital Markets.* McGraw-Hill. Nueva York.

Suárez, A. (1990). *Decisiones Óptimas de Inversión y Financiación en la Empresa.* Pirámide. Madrid.

Tamiz, M., Hasham, R., Jones, D.F., Hesni, B. y Fargher, E.K. (1996). *"A Two Staged Goal Programming Model for Portfolio Selection".* En: **Tamiz, M. (Ed.).** *Multi-Objective Programming and Goal Programming, Theories and Applications,* págs. 286-299. Springer. Portsmouth.