# PROCESOS DE NEGOCIACIÓN EN PROBLEMAS DE ALTA COMPLEJIDAD*

ESCOBAR URMENETA, Mª Teresa(1)
AGUARÓN JOVEN, Juan(2)
MORENO JIMÉNEZ, José María(3)

Departamento de Métodos Estadísticos
Facultad de Económicas y Empresariales
Universidad de Zaragoza

(1) mescobar@posta.unizar.es
(2) aguaron@posta.unizar.es
(3) moreno@posta.unizar.es

**RESUMEN**

La consideración del factor humano en la resolución de problemas de alta complejidad es uno de los requisitos exigidos en la actualidad a cualquier aproximación científica seguida en la toma de decisiones. A continuación, para el Proceso Analítico Jerárquico, una de las propuestas metodológicas de mayor aplicación práctica y que mejor permite la incorporación de las distintas visiones de la realidad, se propone un procedimiento sistemático que facilita el proceso de negociación entre los diferentes actores participantes en el proceso de Toma de Decisiones. Este procedimiento trabaja con matrices incompletas, donde los juicios iniciales del grupo se han tomado como promedio de aquellos juicios individuales suficientemente próximos, a partir de las cuales se obtienen las prioridades de las alternativas garantizando un nivel aceptable de consistencia para el grupo.

**Palabras clave**: Problemas de Alta Complejidad, Proceso Analítico Jerárquico, Procesos de Negociación, Matrices Incompletas, Consistencia.

**Área temática**: 8. Cuestiones Metodológicas Generales.

## 1. INTRODUCCIÓN

La resolución de problemas de alta complejidad, que con frecuencia se presentan en el ámbito de las ciencias sociales, requiere la utilización de aproximaciones científicas más realistas, abiertas y flexibles que el enfoque tradicional, en las que se haga explícita la consideración del factor humano, y el subjetivismo de los actores participantes en el Proceso de Toma de Decisiones sea combinado con el objetivismo del método científico.

En este sentido, la aproximación seguida en el Paradigma de la Racionalidad Procedimental Multicriterio (PRPM), que verifica los requisitos de rigor, accesibilidad y publicidad exigidos por Roy (1993) para poder ser considerada científica, reconoce de

---

* Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por el proyecto de investigación 'SISDECAP: Un Sistema Decisional para la Administración Pública' (ref.: P072/99 – E, DGA).

una manera explícita, la importancia del factor humano en el proceso de resolución de los problemas. El PRPM (Moreno-Jiménez, 1997; Moreno-Jiménez et al., 1999) combina el soporte metodológico de la racionalidad procedimental con el potencial operativo y calculista de las técnicas de decisión multicriterio.
La contribución de los actores participantes en el Proceso de Toma de Decisiones (Moreno-Jiménez, 1989; Roy, 1993), y por tanto, la importancia dada al factor humano en los nuevos enfoques metodológicos, sugiere la evaluación de la consistencia de los actores cuando éstos emiten sus juicios independientemente de la escuela seguida en el proceso de resolución.
Cuando varios individuos participan en el proceso de toma de decisiones se suele hablar de Toma de Decisiones con Múltiples Actores. Este proceso con múltiples actores puede clasificarse (Beroggi, 1999) en: (i) Toma de Decisiones en Grupo, cuando el grupo trabaja unido y ofrece una única solución, y (ii) Resolución de Conflictos y Negociación, cuando cada decisor proporciona su propia solución.
En ambos casos, los decisores deben comunicarse entre ellos para tratar de alcanzar un consenso en las diferentes etapas del proceso de toma de decisiones. Más aun, el proceso de comunicación debe ser incorporado al sistema, así como el aprendizaje del problema derivado de su resolución.
En lo que sigue, y para el Proceso Analítico Jerárquico (Saaty, 1980), la técnica de decisión multicriterio que es soporte del constructivismo cognitivo propuesto en el paradigma de la racionalidad procedimental multicriterio (Moreno-Jiménez et al, 1999; Moreno-Jiménez et al, 2001), se propone un procedimiento que ayude a los actores en el proceso de negociación y favorezca la construcción de caminos de consenso. Este procedimiento va a considerar aquellos juicios de los decisores que estén más cercanos, y para aquellas matrices de juicios que no estén completas se aplicará el procedimiento de matrices incompletas propuesto por Harker, garantizando que las matrices consideradas estén dentro de los límites aceptables de inconsistencia.
El trabajo ha quedado estructurado de la siguiente manera. En la siguiente sección se revisa el procedimiento seguido en el Proceso Analítico Jerárquico, la forma de medir la inconsistencia, las aproximaciones propuestas en la decisión en grupo, así como el método utilizado cuando las matrices son incompletas. En la sección 3 se presenta el procedimiento propuesto para facilitar el proceso de negociación entre los diferentes actores participantes en el proceso de Toma de Decisiones. La sección 4 ilustra con una aplicación práctica dicho procedimiento, y por último la sección 5 destaca las conclusiones más importantes del trabajo.

## 2. AHP. CONSISTENCIA, DECISIÓN EN GRUPO Y MATRICES INCOMPLETAS

### 2.1. Consistencia en el Proceso Analítico Jerárquico (AHP)

El Proceso Analítico Jerárquico (AHP) es una técnica de decisión Multicriterio propuesta por T.L. Saaty (1977, 1980) que combina aspectos tangibles e intangibles para obtener, en una escala de razón, las prioridades asociadas con las alternativas del problema. Las características principales de este enfoque son la modelización del problema mediante una estructura jerárquica, la utilización de comparaciones pareadas para incorporar las preferencias del decisor, y la obtención de una escala de razón que es válida para la toma de decisiones complejas.
El Proceso Analítico Jerárquico se divide en tres etapas: modelización, valoración y priorización. Entre los métodos de obtención de las prioridades locales destacan el método del autovector principal por la derecha (EGVM) propuesto por Saaty (1980) en la versión original de AHP y el método de la media geométrica por filas (RGMM), cuya

utilización se ha incrementado significativamente en los últimos tiempos (Crawford y Williams, 1985; Aguarón y Moreno-Jiménez, 2000b; Aguarón et al., 2001).
Una de las ventajas del Proceso Analítico Jerárquico (AHP) es que permite medir la consistencia del decisor al emitir sus juicios. Se define la consistencia de una matriz de comparaciones pareadas $A = (a_{ij})$, $i,j = 1,\ldots,n$, como la transitividad cardinal entre los juicios, esto es, cuando $a_{ij} \cdot a_{ij} = a_{ij}\ \forall i,j,k$.
Saaty sugiere para el método AHP convencional (en el que se utiliza el método del autovector principal para obtener las prioridades), que la inconsistencia sea capturada por un único valor, $\lambda_{\max}-n$, que refleja la desviación de los juicios $a_{ij}$ con respecto al cociente estimado entre las prioridades, $w_i/w_j$. La medida de la consistencia propuesta se denomina *Índice de Consistencia* (*CI*) y se define como:

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} (e_{ij} - 1) \ \text{ con } \ e_{ij} = a_{ij} \cdot \frac{w_j}{w_i}$$

donde $A = (a_{ij})$, $i,j = 1,\ldots,n$, es la matriz de comparaciones pareadas; $\lambda_{\max}$ el valor propio máximo de A; y $w = (w_j)$, $j = 1,\ldots,n$, el correspondiente vector de prioridades obtenido mediante el método EGVM.
Como esta medida depende del orden de la matriz ($n$), Saaty propone la utilización de la *Razón de Consistencia* (*CR*) que se obtiene dividiendo *CI* por su valor esperado, calculado a partir de un gran número de matrices recíprocas positivas de orden $n$ generadas aleatoriamente. Se considera que el vector de prioridades tiene una inconsistencia aceptable (Saaty, 1980, 1994) cuando el *CR* es menor del 10% (5% y 8% para $n = 3$ y $n = 4$ respectivamente).
Otra medida que permite evaluar la consistencia es el *Índice de Consistencia Geométrico* (*GCI*) (Crawford y Williams, 1985; Aguarón y Moreno-Jiménez, 2000b) definido como:

$$GCI = \frac{2}{(n-1)(n-2)} \sum_{1 \le i < j \le n} \log^2 e_{ij} \ \text{ con } \ e_{ij} = a_{ij} \cdot \frac{w_j}{w_i}$$

donde $A = (a_{ij})$, $i,j = 1,\ldots,n$, es la matriz de comparaciones pareadas; y $w = (w_j)$, $j = 1,\ldots,n$, el correspondiente vector de prioridades obtenido mediante el método RGMM.
Aguarón y Moreno-Jiménez (2000b) establecieron los umbrales, dependiendo del orden de la matriz, que permiten una inconsistencia análoga a la del 10% para la Razón de Consistencia de Saaty. Estos valores son 0.31 para $n = 3$; 0.35 para $n = 4$ y 0.37 para $n > 4$.

### 2.3. Decisión en Grupo en AHP

En Decisión en Grupo con AHP se suelen seguir dos procedimientos para la obtención de las prioridades (Ramanathan y Ganesh, 1994; Forman y Peniwati, 1998): (1) la Agregación de Juicios Individuales (AIJ); y (2) la Agregación de Prioridades Individuales (AIP). En el primer caso, se construye una nueva matriz de juicios del grupo agregando los juicios individuales y a partir de esta matriz se calcula el vector de prioridades por alguno de los procedimientos existentes. En el segundo caso, se agregan las prioridades individuales para obtener directamente la prioridad del grupo.
En cuanto a los procedimientos de agregación, existen diferentes propuestas (Saaty, 1989; Basak y Saaty, 1993; Barzilai, 1997), aunque el más extendido es el de la media geométrica ponderada (WGMM) ya que es la única función de agregación separable, que satisface las propiedades de unanimidad, homogeneidad y reciprocidad (Aczel y Saaty, 1983).
Se ha demostrado que, cuando se considera únicamente una matriz, el procedimiento de agregación de la media geométrica ponderada (WGMM) verifica el principio de Pareto

de la Teoría de elección social. En el caso general de una jerarquía con más niveles, esta propiedad sólo se cumple cuando se agregan las prioridades individuales totales (Ramanathan y Ganesh, 1994). Como respuesta a este inconveniente, estos autores proponen un método basado en autovectores para derivar los pesos de los decisores y utilizan como procedimiento de agregación una media aritmética ponderada.
La limitación del método de agregación de la media geométrica ponderada en cuanto al no cumplimiento del axioma de Pareto ha motivado la aparición de un gran número de contribuciones. Van den Honert y Lootsma (1996) defienden su utilización y demuestran que la violación del axioma de Pareto puede atribuirse a la representación utilizada para modelizar el proceso de decisión en grupo, y por tanto cuestionan la legitimidad del axioma de Pareto-optimalidad. Estos autores proponen una modificación del procedimiento de agregación de la media geométrica ponderada que sí verifica los cinco axiomas de elección social. Por su parte, Forman y Peniwati (1998) argumentan que en la aproximación AIJ, los individuos trabajan juntos para ponerse de acuerdo en una jerarquía común, antes de trabajar en la agregación de sus juicios. Por tanto, el grupo se funde al acordar la importancia relativa de los criterios. Una vez que este proceso ha sido realizado, los juicios individuales previos son irrelevantes, y en consecuencia no hay una síntesis de juicios individuales y el principio de Pareto no es aplicable a este caso. Por el contrario, Chwolka y Raith (2001) sugieren la utilización de un procedimiento que sí verifique formalmente dicho principio y proponen una versión utilitarista del método de agregación de la media aritmética ponderada propuesto por Ramanathan y Ganesh (1994).
Entre otras ideas desarrolladas para la búsqueda del consenso destacan la de Bryson y Joseph (1999) quienes presentan un modelo de programación por metas logarítmico para la generación del vector de prioridades de consenso a partir del conjunto de vectores de prioridades individuales, y la desarrollada por Moreno-Jiménez et al. (2000), quiénes plantean buscar aquella alternativa que minimice el pesar conjunto del grupo. Definiendo el pesar del grupo como la media geométrica de los pesares individuales, medidos éstos en términos relativos, estos autores demuestran que la alternativa que maximiza el vector de prioridades del grupo obtenido con el WGMM es la que minimiza el pesar del grupo medido en términos relativos. La idea de minimizar la máxima discrepancia entre los decisores ha sido también utilizada en otros enfoques multicriterio para la búsqueda del consenso (González-Pachón y Romero, 1999; Wei et al., 2000).
En lo que sigue utilizaremos el procedimiento de agregación de la media geométrica ponderada, que para una sola matriz (caso local) sí que verifica el principio de Pareto. Sea $A^{[k]} = (a_{ij}^{[k]})$ la matriz de juicios proporcionados por el $k$-ésimo decisor cuando compara un conjunto de $n$ elementos ($i, j = 1,...,n$), $w^{[k]} = (w_i^{[k]})$ el correspondiente vector de prioridades y $\beta_k$ el peso del decisor $k$-ésimo ($k = 1,...,m$) en el grupo ($\beta_k \geq 0$; $\sum_{k=1}^{m} \beta_k = 1$). La matriz de juicios del grupo y el vector de prioridades del grupo obtenidos utilizando el método de la media geométrica ponderada (WGMM) vienen dados respectivamente por:

$$A^G = (a_{ij}^G) \text{ con } a_{ij}^G = \prod_{k=1}^{m} \left(a_{ij}^{[k]}\right)^{\beta_k} \quad (i, j = 1,...,n).$$

$$w^G = (w_i^G) \text{ con } w_i^G = \prod_{k=1}^{m} \left(w_i^{[k]}\right)^{\beta_k} \quad (i, j = 1,...,n).$$

Las prioridades finales de las alternativas para los dos enfoques de agregación (AIJ y AIP) se obtienen, respectivamente, siguiendo las siguientes secuencias:

**[AIJ]** A partir de las matrices de juicio individuales ($A^{[k]}$), utilizando el WGMM, se obtiene la matriz de juicios del grupo ($A^G$), y a partir de ésta se derivan las prioridades del grupo ($w^G$).

**[AIP]** A partir de las matrices de juicio individuales ($A^{[k]}$) se derivan los vectores de prioridades para cada individuo ($w^{[k]}$), y a partir de éstos, utilizando el WGMM, las prioridades del grupo ($w^G$).

Cuando se utiliza el RGMM como procedimiento de priorización, ambos enfoques de agregación (AIJ y AIP) proporcionan los mismos resultados con la misma complejidad calculista (Barzilai y Golany, 1994). Por el contrario, cuando se utiliza el EGVM esto no es cierto.

$$w_i^G(AIJ) = \left(\prod_{j=1}^{n} a_{ij}^G\right)^{1/n} = \prod_{j=1}^{n}\left(\left[\prod_{k=1}^{m} a_{ij}^{[k]}\right]^{\beta_k}\right)^{1/n} = \prod_{k=1}^{m}\left(\left[\prod_{j=1}^{n} a_{ij}^{[k]}\right]^{1/n}\right)^{\beta_k} = \prod_{k=1}^{m}\left(w_i^{[k]}\right)^{\beta_k} = w_i^G(AIP)$$

En cuanto a la consistencia en decisión en grupo, Xu (2000) demuestra que si se utiliza el método del autovector principal (EGVM) para obtener las prioridades y el método de la media geométrica ponderada (WGMM) para agregar los juicios individuales, entonces si los juicios de los decisores individuales tienen todos una inconsistencia aceptable, entonces los juicios del grupo también son de inconsistencia aceptable. Escobar et al. (2001) demuestran un resultado análogo (la inconsistencia del grupo es menor que la mayor inconsistencia de los individuos) cuando se utiliza el método de la media geométrica por filas (RGMM) para obtener las prioridades y la consistencia se mide con el GCI, manteniendo el método de la media geométrica ponderada para agregar los juicios.

### 2.4. Matrices de juicio incompletas en AHP

AHP requiere un total de $n(n-1)/2$ juicios a la hora de incorporar las preferencias del decisor entre $n$ distintos elementos. En ocasiones este proceso puede ser muy costoso en cuanto al tiempo requerido, o puede que el decisor no se encuentre cómodo al tener que comparar dos alternativas directamente, o también es posible que tenga dudas acerca de un determinado juicio. Para abordar estas situaciones, Harker (1987) propuso un procedimiento para la obtención del vector de prioridades a partir de matrices de comparaciones pareadas incompletas, esto es, matrices en las que no se han emitido los $n(n-1)/2$ juicios que se requerirían para tener completa la matriz y poder aplicar los métodos de priorización habituales.

Dada una matriz de comparaciones pareadas incompleta $A = (a_{ij})$, Harker (1987) propone obtener el vector $w$ de prioridades resolviendo el siguiente problema de autovector:

$$Bw = \lambda_{max}(B)w, \text{ con } \sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

donde $\lambda_{max}(B)$ es el autovalor principal de $B(n\text{x}n)$ y $B$ es la matriz construida como $B = (b_{ij})$ siendo:

$b_{ij} = a_{ij},\ i \neq j$ si $a_{ij}$ ha sido emitido por el decisor

$b_{ij} = 0,\ i \neq j$ si $a_{ij}$ no ha sido emitido por el decisor

$b_{ii} = 1+N_i$ donde $N_i$ es el número de juicios no emitido en la fila $i$ de la matriz $A$.

La condición que se debe verificar para poder aplicar el procedimiento anterior es que la matriz inicial $A$ sea irreducible. Esto es equivalente a exigir que el grafo definido por la matriz $A$ sea fuertemente conexo, que traducido al contexto de AHP, significa que debe existir una comparación directa o indirecta entre todo par de elementos.

Aunque la nueva matriz de comparaciones pareadas $B$ no sea recíproca positiva, al igual que ocurre con matrices recíprocas positivas completas ($a_{ij}a_{ji} = 1$; $a_{ii} = 1$; $a_{ij} > 0$), se cumple que $\lambda_{max}(B) \geq n$ (Harker, 1987). Este hecho permite medir la inconsistencia en matrices de comparaciones pareadas incompletas utilizando una expresión análoga a la propuesta inicial de AHP, esto es:

$$CI(B) = \frac{\lambda_{max}(B) - n}{n - 1} \tag{1}$$

La expresión anterior permite evaluar la consistencia en el sentido de Harker, quién propone que una matriz de comparaciones pareadas incompleta sea considerada consistente si y sólo si $a_{ij}a_{jk} = a_{ik}$ para todos los juicios tales que $a_{ij}$, $a_{jk}$, $a_{ik} > 0$; es decir, los juicios emitidos deben verificar la condición de consistencia. Takeda y Yu (1995) proponen una definición de consistencia más exigente que la anterior al observar que una matriz incompleta consistente no tendría porqué tener como valor propio máximo asociado, $\lambda_{max}(B) = n$. Para estos autores una matriz de comparaciones pareadas incompleta es consistente si y sólo si los juicios emitidos conducen a un único vector de prioridades, esto es, si $CI(B) = 0$.

Para poder hacer comparaciones entre los Índices de Consistencia calculados a partir de la expresión (1), Forman (1990) calculó unos nuevos índices de consistencia aleatorios que dependen no sólo del tamaño de la matriz, sino también del número de juicios emitidos por el decisor.

## 3. PROCEDIMIENTO DE NEGOCIACIÓN

En un trabajo previo (Moreno-Jiménez et al., 2000) se presentaban una serie de procedimientos analíticos de búsqueda de los posibles caminos de consenso en el que los actores participantes no intervienen de forma directa. Este proceso de asistencia a los decisores utiliza dos herramientas decisionales, las estructuras de preferencia y los intervalos de estabilidad (Aguarón y Moreno-Jiménez, 2000a), así como distribuciones de probabilidad recíprocas (Escobar, 1998; Escobar y Moreno-Jiménez, 2000), que permiten enriquecer el proceso de toma de decisiones en grupo mediante la extracción de distintas ideas, tendencias, pautas de comportamiento y oportunidades de decisión, siguiendo una aproximación basada en el paradigma de la racionalidad procedimental multicriterio (Moreno-Jiménez, 1996, 1997).

El proceso de búsqueda automática del consenso consiste en definir intervalos de juicio para los elementos de la matriz de comparaciones pareadas, para lo cuál son útiles los intervalos de estabilidad. A continuación, se simula en los intervalos definidos utilizando distintas distribuciones de probabilidad recíprocas. De los resultados de la simulación se obtienen las distintas estructuras de preferencia u ordenaciones, que permiten detectar qué alternativas ocupan la primera posición, cuántas veces aparece cada estructura de preferencias o qué posibilidades existen de que se produzcan cambios de rango. En todas las simulaciones se presta una especial atención a la posibilidad de que aparezcan combinaciones de juicios que resulten inconsistentes, en cuyo caso los juicios se reemplazan por unos nuevos.

La aplicación de este proceso puede conducir a la obtención de una solución de consenso para el problema, o en caso de existir ambigüedades, ser el punto de partida de una segunda fase, que consistirá en la búsqueda del consenso participativo. En esta segunda etapa se incorporará la información que proporcionan las conclusiones e ideas extraídas del proceso descrito, y se caracterizará por la negociación y diálogo entre los actores involucrados para llegar a un equilibrio o acuerdo entre las partes.

En el presente trabajo se propone un procedimiento sistemático que facilite el proceso de negociación entre los diferentes actores participantes en el proceso de Toma de

Decisiones. Cada uno de los actores emite sus juicios, de forma que a partir de éstos se pueden obtener los vectores de prioridades individuales y del grupo, así como evaluar la inconsistencia de cada unos de los individuos al emitir sus juicios, y la del grupo resultante de utilizar el procedimiento WGMM.
El procedimiento que se propone consiste en considerar una matriz de comparaciones pareadas para el grupo en la que se incorporen únicamente aquellos juicios para los que los decisores tengan una discrepancia aceptable, y de esta matriz, que puede ser incompleta al no recoger todos los posibles juicios, se deriva el vector de prioridades. Kim y Ahn (1999) y Kim y Han (1999) abordan también la toma decisiones con múltiples decisores utilizando información incompleta, señalando que ésta puede producirse por la presión del tiempo, la ausencia de conocimiento o datos, o la experiencia limitada relacionada con el dominio del problema.
Para poder calcular el vector de prioridades a partir de una matriz de comparaciones pareadas incompleta, se necesita tener al menos $n-1$ juicios emitidos. Para elegir y estimar dichos juicios se va a seguir el siguiente procedimiento:
1) Calcular una matriz de distancias $D = (d_{ij})$ a partir del número de saltos en la escala fundamental {1/9, 1/8, …, 1/2, 1, 2, …, 8, 9} entre los juicios de los decisores.
Si son dos decisores, obtener $d_{ij}$ como el número de saltos entre los juicios de los dos decisores, $a_{ij}^{[I]}$ y $a_{ij}^{[II]}$, esto es, $d_{ij} = \left|c_{ij}^{[I]} - c_{ij}^{[II]}\right|$, con $c_{ij}^{[k]} = g\left(a_{ij}^{[k]}\right)$

donde $g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 1 \\ 2 - \dfrac{1}{x} & \text{si } x < 1 \end{cases}$ es la inversa de la función propuesta por Hauser y Tadikamalla (1996), y generalizada por Escobar (1998) para la generación de distribuciones de probabilidad recíprocas a partir de distribuciones simétricas.
Si hay más decisores ($m$), la distancia se puede calcular de diferentes formas, como por ejemplo, $d_{ij}$ = número de saltos entre los juicios de los dos decisores más distantes; ó $d_{ij}$ = media del número de saltos entre los juicios de cada para de decisores. Las expresiones correspondientes a estas definiciones son:

$$d_{ij} = \underset{k1,k2=1,\ldots,m}{Max}\left\{\left|c_{ij}^{[k1]} - c_{ij}^{[k2]}\right|, k1 \neq k2\right\}, \text{ ó } \quad d_{ij} = \frac{1}{m(m-1)/2}\sum_{\substack{k1,k2=1 \\ k1<k2}}^{m}\left|c_{ij}^{[k1]} - c_{ij}^{[k2]}\right|, \text{ con } c_{ij}^{[k]} = g\left(a_{ij}^{[k]}\right)$$

Es suficiente calcular esta distancia para los elementos que se encuentran por encima de la diagonal principal, ya que $d_{ij} = d_{ji}$.
2) Seleccionar los $n-1$ elementos de la matriz de distancias de menor valor. Estos elementos seleccionados tienen que formar un árbol conexo. Si no es así, seleccionar más elementos hasta que esta condición se verifique (hasta que los elementos seleccionados formen un grafo conexo). Una alternativa consiste en seleccionar aquellos elementos cuya distancia sea menor que un valor fijado de antemano (al menos, siempre hay que seleccionar $n-1$ elementos que formen un grafo conexo).
Se entiende que si queda seleccionado el elemento $a_{ij}$) también queda seleccionado el $a_{ji}$.
3) Formar una matriz de comparaciones pareadas (incompleta) en la que los elementos seleccionados en el paso anterior se completan a partir de la media geométrica ponderada de los correspondientes juicios de cada decisor.
4) Derivar el correspondiente vector de prioridades y presentar el resultado a los decisores como punto de partida para el proceso de negociación. Cada decisor puede comparar este resultado con el que se alcanza al considerar todos sus juicios.
El vector de prioridades así obtenido es el más cercano a todos los actores al haber omitido aquellos juicios para los que los decisores individuales tenían un mayor grado de discrepancia. Además, el valor de la distancia entre juicios mínima que hay que

aceptar para que se tengan al menos $n-1$ juicios puede dar una idea de la discrepancia entre los decisores.

#### 4. EJEMPLOS DE APLICACIÓN

A continuación se van a presentar dos ejemplos que ilustran el procedimiento descrito en el apartado anterior. El primer ejemplo consta de dos decisores cuyos juicios conducen a soluciones que difieren en la ordenación de las alternativas. En el segundo de los ejemplos participan cuatro individuos con importancias distintas pero cuyos juicios no son muy distantes, ya que las ordenaciones que se tienen coinciden, aunque hay pequeñas diferencias en las intensidades de las preferencias.
Veamos el primer ejemplo (Moreno-Jiménez et al., 2000) en el que se consideran dos decisores que comparan 4 alternativas: A, B, C y D. Las matrices de comparaciones pareadas de los dos decisores así como la del grupo obtenida utilizando el método de la media geométrica ponderada (los dos decisores reciben pesos idénticos) son las siguientes:

$$A^{\mathrm{I}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1/3 & 1 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 2 & 1 & 3 \\ 1/5 & 1 & 1/3 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^{\mathrm{II}} = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1/2 & 1/4 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{\mathrm{G}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \sqrt{10} \\ 1 & 1 & \sqrt{1/2} & 2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 & 3 \\ \sqrt{1/10} & 1/2 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

Los vectores de prioridades obtenidos aplicando el RGMM a estas tres matrices se muestran en la Tabla 4.1, así como los respectivos índices de consistencia geométricos y las ordenaciones que se alcanzan.

**Tabla 4.1.** Prioridades para los juicios individuales y del grupo

| Alternativa | I | II | G |
|---|---|---|---|
| **A** | 0.487217 | 0.163831 | 0.307379 |
| **B** | 0.133016 | 0.401302 | 0.251364 |
| **C** | 0.273982 | 0.337453 | 0.330814 |
| **D** | 0.105784 | 0.097414 | 0.110443 |
| **GCI** | 0.045112 | 0.041194 | 0.028021 |
| **Ordenación** | A > C > B > D | B > C > A > D | C > A > B > D |

De los resultados anteriores se observa la discrepancia entre los dos decisores: el decisor 1 prefiere la alternativa A mientras que el decisor 2 prefiere la alternativa B. Además, no sólo proponen una alternativa distinta como la mejor, sino que la que propone un individuo no es bien valorada por el otro. Utilizando los juicios del grupo, la mejor alternativa es la C que ocupa la segunda posición para los decisores individuales.

En cuanto a la consistencia se observa que las tres matrices de juicio se mantienen dentro de los niveles de inconsistencia aceptables (el umbral para matrices de orden 4 es 0.35), y que la matriz de juicios del grupo es más consistente que las dos matrices individuales.

Para favorecer el proceso de negociación entre los actores se aplica el procedimiento descrito en el apartado anterior. La siguiente matriz mide la distancia entre los juicios de los dos decisores, y permite elegir los juicios más cercanos para el procedimiento iterativo propuesto:

$$D = \begin{bmatrix} - & 4 & 2 & 3 \\ & - & 1 & 3 \\ & & - & 0 \\ & & & - \end{bmatrix}$$

El menor número de juicios para poder obtener las prioridades es $k = 3$ y el mayor en el que todos los juicios están incluidos es $k = 6$. Para $k = 3$ se toman los juicios $a_{34}$, $a_{23}$ y $a_{13}$ que forman un grafo conexo; para $k = 4$ se añade aquél de entre $a_{14}$ y $a_{24}$ que produzca una menor inconsistencia; para $k = 5$ se añade el que no se haya escogido en la iteración anterior; y para $k = 6$ se añade el que falta, que es $a_{12}$. La mínima distancia para conseguir tres juicios es 2.

Las siguientes tablas muestran, para los dos individuos y para el grupo, los vectores de prioridades que se obtienen aplicando el procedimiento de Harker para matrices incompletas cuando se utiliza un número de juicios $k$, el Índice de Consistencia de Saaty y la Razón de Consistencia. Señalar que estos vectores de prioridades se han obtenido aplicando el EGVM y por tanto, no coinciden con los mostrados en la Tabla 4.1. que fueron obtenidos con el RGMM, aunque se puede comprobar que los resultados son muy similares.

**Tabla 4.2.** Prioridades según número de juicios incluidos

| **DECISOR 1** | ***k* = 3** | ***k* = 4** | ***k* = 5** | ***k* = 6** |
|---|---|---|---|---|
| **A** | 0.521739 | 0.504094 | 0.516615 | 0.487082 |
| **B** | 0.130435 | 0.133429 | 0.116467 | 0.133530 |
| **C** | 0.260870 | 0.267599 | 0.264717 | 0.273247 |
| **D** | 0.086957 | 0.094878 | 0.102201 | 0.106141 |
| **CI** | 0 | 0.000924 | 0.004651 | 0.011323 |
| **CR** | 0 | 0.003081 | 0.007935 | 0.012779 |
| **Ordenación** | A > C > B > D | A > C > B > D | A > C > B > D | A > C > B > D |

| **DECISOR 2** | ***k* = 3** | ***k* = 4** | ***k* = 5** | ***k* = 6** |
|---|---|---|---|---|
| **A** | 0.176471 | 0.193666 | 0.185034 | 0.163950 |
| **B** | 0.352941 | 0.348679 | 0.370066 | 0.401799 |
| **C** | 0.352941 | 0.351091 | 0.345209 | 0.337002 |
| **D** | 0.117647 | 0.106563 | 0.099690 | 0.097249 |
| **CI** | 0 | 0.002306 | 0.003454 | 0.010328 |
| **CR** | 0 | 0.007688 | 0.005893 | 0.011656 |
| **Ordenación** | B = C > A > D | C > B > A > D | B > C > A > D | B > C > A > D |

| **GRUPO** | ***k* = 3** | ***k* = 4** | ***k* = 5** | ***k* = 6** |
|---|---|---|---|---|
| **A** | 0.328900 | 0.333452 | 0.337044 | 0.308015 |
| **B** | 0.232567 | 0.231611 | 0.225406 | 0.252123 |
| **C** | 0.328900 | 0.327622 | 0.328035 | 0.329534 |
| **D** | 0.109633 | 0.107315 | 0.109515 | 0.110327 |
| **CI** | 0 | 0.000077 | 0.000260 | 0.007031 |
| **CR** | 0 | 0.000257 | 0.000444 | 0.007935 |
| **Ordenación** | A = C > B > D | A > C > B > D | A > C > B > D | C > A > B > D |

Las diferencias en las ordenaciones que se alcanzan no son tan acusadas con $k = 3$ que cuando se utilizan todos los juicios ($k = 6$). Al utilizar únicamente tres juicios, el decisor 2 ordena la alternativa C en primera posición junto con la alternativa B. En la ordenación del grupo aparecen en primera posición las alternativas A y C. En cambio para el decisor 1, la alternativa A es la única que ocupa la primera posición.

Además de presentar los resultados cuando se eligen tres juicios se han recogido los vectores de prioridades con cuatro, cinco y seis juicios para que se puedan comparar los resultados que se alcanzan para los dos decisores y para el grupo. Destaca el diferente comportamiento para el decisor 1, que siempre mantiene la misma ordenación, y la del decisor 2 y la del grupo, para los que las ordenaciones van sufriendo ligeras

modificaciones (sólo hay diferencias entre las dos primeras alternativas). Podríamos decir que el decisor A está más 'anclado' en sus juicios y por tanto va a ser más difícil conseguir que el decisor 1 ceda en sus valoraciones y se acerque a las posiciones del otro decisor.
En cuanto a la consistencia, en todos los casos los juicios se encuentran dentro de los límites aceptables de inconsistencia (CR < 0.08), y además la correspondiente matriz de juicios del grupo presenta un valor de la medida de inconsistencia menor que la de los dos individuos.
El segundo ejemplo que se presenta (Xu, 2000) corresponde a una situación en la que intervienen cuatro decisores (I, II, III y IV) con diferentes importancias ($\beta_1 = 0.1$, $\beta_2 = 0.2$; $\beta_3 = 0.3$ y $\beta_4 = 0.4$) que comparan 4 alternativas (A, B, C y D). Las correspondientes matrices de comparaciones pareadas para los cuatro decisores, así como las de los dos grupos obtenidas aplicando el WGMM se muestran a continuación:

$$A^{\mathrm{I}} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 7 \\ 1/4 & 1 & 3 & 4 \\ 1/6 & 1/3 & 1 & 2 \\ 1/7 & 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^{\mathrm{II}} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 1/5 & 1 & 4 & 6 \\ 1/7 & 1/4 & 1 & 2 \\ 1/9 & 1/6 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{\mathrm{III}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 8 \\ 1/3 & 1 & 4 & 5 \\ 1/5 & 1/4 & 1 & 2 \\ 1/8 & 1/5 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^{\mathrm{IV}} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 1/4 & 1 & 3 & 3 \\ 1/5 & 1/3 & 1 & 2 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{\mathrm{G}} = \begin{bmatrix} 1 & 3.837 & 5.446 & 7.204 \\ 0.261 & 1 & 3.464 & 4.134 \\ 0.184 & 0.287 & 1 & 2 \\ 0.139 & 0.242 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Los vectores de prioridades obtenidos aplicando el método del autovector principal por la derecha y los correspondientes CIs de las cinco matrices se muestran en la Tabla 4.3.

**Tabla 4.3.** Prioridades obtenidas con el EGVM y CIs para los juicios individuales y de los grupos

| Alternativa | I | II | III | IV | G |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 0.616823 | 0.652559 | 0.570463 | 0.597006 | 0.603599 |
| B | 0.223829 | 0.224669 | 0.277105 | 0.221727 | 0.238743 |
| C | 0.097234 | 0.076226 | 0.095910 | 0.108442 | 0.096739 |
| D | 0.062114 | 0.046545 | 0.056522 | 0.072825 | 0.060919 |
| CI | 0.034073 | 0.060358 | 0.030180 | 0.041906 | 0.039157 |
| CR | 0.038455 | 0.068121 | 0.034062 | 0.047296 | 0.044194 |

La ordenación que se alcanza en este problema es la misma para todos los decisores (A > B > C > D) y por tanto, también es la ordenación del grupo. Se aprecian diferencias únicamente en la intensidad de sus preferencias. Tanto las matrices de juicio individuales como la del grupo tienen una inconsistencia aceptable (CR < 0.08).
En este segundo ejemplo se va a mostrar el proceso iterativo solamente para los juicios de la matriz del grupo. En primer lugar se calcula la matriz de distancias, y como hay más de dos decisores se ha decidido calcular las distancias utilizando aquellos juicios de los cuatro decisores que estén más distantes. La matriz de distancias resultante es:

$$D = \begin{bmatrix} - & 2 & 2 & 3 \\ & - & 1 & 3 \\ & & - & 0 \\ & & & - \end{bmatrix}$$

Para $k = 3$ se seleccionarán los juicios $a_{34}$, $a_{23}$ y el $a_{12}$ ó el $a_{13}$ (en cualquiera de los dos casos se tiene un grafo conexo). Para $k = 4$ se seleccionarán los juicios $a_{34}$, $a_{23}$, $a_{12}$ y $a_{13}$. Para $k = 5$, además de los anteriores se añadirá el juicio $a_{12}$ ó el $a_{13}$. La mínima distancia para que se puedan tener $n-1$ juicios es 2.

En la tabla siguiente se muestran los vectores de prioridades de las matrices de comparaciones pareadas formadas a partir de la matriz del grupo (media geométrica ponderada de las matrices de juicio individuales) en las que se ha incluido distinto número de juicios.

**Tabla 4.4.** Prioridades del grupo según número de juicios incluidos

| GRUPO | $k = 3$ | $k = 4$ | $k = 5$ | $k = 6$ |
|---|---|---|---|---|
| **A** | 0,728067 | 0,647036 | 0,643098 | 0,603599 |
| **B** | 0,189763 | 0,226187 | 0,219658 | 0,238743 |
| **C** | 0,054780 | 0,086353 | 0,089903 | 0,096739 |
| **D** | 0,027390 | 0,040424 | 0,047341 | 0,060919 |
| **CI** | 0 | 0,022702 | 0,023956 | 0,039157 |
| **CR** | 0 | 0,075689 | 0,040871 | 0,044194 |

Estos resultados muestran que al utilizar un número inferior de juicios las intensidades en las preferencias son más acusadas. En cuanto a la consistencia, todas las matrices se encuentran dentro de los límites de inconsistencia aceptable (CR < 0.08), aunque se observa que para $k$=4 el índice de consistencia se acerca mucho al umbral máximo permitido, disminuyendo éste al añadir un nuevo juicio.

## 5. CONCLUSIONES

La contribución del factor humano en la resolución de problemas de alta complejidad es uno de los requisitos que se viene exigiendo en la actualidad a las aproximaciones científicas seguidas en la Toma de Decisiones. En este trabajo se ha presentado, para el Proceso Analítico Jerárquico, un procedimiento que ayuda en el proceso de negociación entre los actores participantes en el Proceso de Toma de Decisiones.

Este procedimiento trabaja con matrices incompletas, donde los juicios iniciales del grupo se han tomado como promedio de aquellos juicios individuales suficientemente próximos, a partir de las cuales se obtienen las prioridades de las alternativas garantizando un nivel aceptable de consistencia para el grupo. El procedimiento propuesto ha sido ilustrado con su aplicación a dos sencillos ejemplos.

## REFERENCIAS


ACZÉL, J.; SAATY, T.L. (1983): Procedures for Synthesizing Ratio Judgements, *Journal of Mathematical Psychology*, **27** (1), 93−102.

AGUARÓN, J.; ESCOBAR, M.T.; MORENO-JIMÉNEZ, J.M. (2001): Consistency Stability Intervals for a Judgement in AHP Decision Support Systems. *En evaluación* (EJOR).

AGUARÓN, J.; MORENO-JIMÉNEZ, J.M. (2000a): Stability Intervals in the Analytic Hierarchy Process, *European Journal of Operational Research*, **125**, 114−133.

AGUARÓN, J.; MORENO-JIMÉNEZ, J.M. (2000b): The Geometric Consistency Index. Approximated Thresholds. *En evaluación* (EJOR).

BARZILAI, J. (1997): Deriving weights from pairwise comparison matrices, *Journal of the Operational Research Society*, **48**, 1226−1232.

BARZILAI, J.; GOLANY, B. (1994): AHP rank reversal, normalization and aggregation rules. *INFOR*, **32**, 57−64.

BASAK, I.; SAATY, T.L. (1993): Group Decision Making using the Analytic Hierarchy Process, *Mathematical Computer Modelling*, **17** (4/5), 101−109.

BEROGGI, G.E.C. (1999): *Decision Modelling in Policy Management. An Introduction to the Analytic Concepts*. KAP.

BRYSON, N; JOSEPH, A. (1999): Generating consensus priority point vectors: a logarithmic goal programming approach, *Computers and Operation Research*, **26**, 637–643.

CHWOLKA, A.; RAITH, M.G. (2001): Group preference aggregation with the AHP implications for multiple-issue agendas, *European Journal of Operational Research*, **132**, 176–186.

CRAWFORD, G.; WILLIAMS, C. (1985): A note on the analysis of subjective judgement matrices, *Journal of Mathematical Psychology*, **29**, 387–405.

ESCOBAR, M.T. (1998): *La Incertidumbre en las Técnicas de Decisión Multicriterio Jerárquicas. El Problema del Cambio de Rango*. Tesis Doctoral.

ESCOBAR, M.T.; AGUARÓN, J.; MORENO-JIMÉNEZ, J.M. (2001): A Note on AHP Group Consistency with the GCI. *En Evaluación*.

ESCOBAR, M.T.; MORENO-JIMÉNEZ, J.M. (2000): Reciprocal Distributions in the Analytic Hierarchy Process, *European Journal of Operational Research*, **123**, 154–174.

FORMAN, E.H. (1990): Random Indices for Incomplete Pairwise Comparison Matrices. *European Journal of Operational Research* **48**(1), 153–155.

FORMAN, E.; PENIWATI, K. (1998): Aggregating individual judgments and priorities with the Analytic Hierarchy Process, *European Journal of Operational Research*, **108**, 165–169.

GONZÁLEZ-PACHÓN, J.; ROMERO, C. (1999): Distance-based consensus methods: a goal programming approach, *Omega*, 27, 341–347.

HARKER, P.T. (1987): The Incomplete Pairwise Comparisons in the Analytic Hierarchy Process. *Mathematical Modelling*, **9**, 837–848.

HAUSER, D.; TADIKAMALLA, P. (1996): The Analytic Hierarchy Process in an Uncertain Environment: A Simulation Approach, *European Journal of Operational Research*, **91**, 27–37.

HWANG, C.L.; LI, M.J. (1987): Group Decision Making under Multiple Criteria, *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, **281**, Springer-Verlag.

KIM, S.H.; AHN, B.S. (1999): Interactive group decision making procedure under incomplete information, *European Journal of Operational Research*, **116**, 498–507.

KIM, S.H.; HAN, CH.H. (1999): An interactive procedure for multi-attribute group decision making with incomplete information, *Computers and Operations Research*, **26**, 755–772.

MORENO-JIMÉNEZ, J.M. (1989): El Proceso de Toma de Decisiones en el Contexto Económico-Empresarial. Modelo AEIOU, *Cuadernos de Bioestadística y sus aplicaciones informáticas*, **7** (13), 31–41. Universidad de Zaragoza.

MORENO-JIMÉNEZ, J.M.; AGUARÓN, J.; ESCOBAR, M.T. (2001): Metodología Científica en Valoración y Selección Ambiental, aceptado para su publicación en *Pesquisa Operational* (revista de la Sociedad Brasileña de I.O.).

MORENO-JIMÉNEZ, J.M. (1996): Metodología Multicriterio en el Plan Nacional de Regadíos (*Documento Privado*).

MORENO-JIMÉNEZ, J.M. (1997): Priorización y Toma de Decisiones Ambientales, *Actas del I Encuentro Iberoamericano de Evaluación y Decisión Multicriterio*, Santiago de Chile, 113–145.

MORENO-JIMÉNEZ, J.M.; AGUARÓN, J.; ESCOBAR, M.T.; JIMÉNEZ, J. (2000): Búsqueda del Consenso en el Proceso Analítico Jerárquico, *Actas de la XIV Reunión Asepelt-España*, Oviedo. ISBN 84-699-2357-9.

MORENO-JIMÉNEZ, J.M.; AGUARÓN, J.; ESCOBAR, M.T.; TURÓN, A. (1999): The Multicriteria Procedural Rationality on Sisdema, *European Journal of Operational Research*, **119** (2), 388–403.

RAMANATHAN, R.; GANESH, L.S. (1994): Group Preference Aggregation Methods employed in AHP: An Evaluation and Intrinsic Process for Deriving Menmbers' Weightages, *European Journal of Operational Research*, **79**, 249–265.

ROY, B. (1993): Decision science or decision-aid science?, *European Journal of Operational Research*, **66**, 184–203.

SAATY, T.L. (1977): A Scaling Method for Priorities in Hierarchical Structures, *Journal of Mathematical Psychology*, **15** (3), 234–281.

SAATY, T.L. (1980): *Multicriteria Decision Making: The Analytic Hierarchy Process*. Mc Graw-Hill, New York. (2ª impresión 1990, RSW Pub. Pittsburgh)

SAATY, T.L. (1989): Group decision-making and the AHP, in B.L. Golden; E.A. Wasil : P.T. Harker (eds.) *The Analytic Hierarchy Process: Applications and Studies*. Springer-Verlag, New York, pp. 59–67.

SAATY, T.L. (1994): *The Fundamentals of Decision Making and Priority Theory with the Analytic Hierarchy Process*. RSW Publications, **VI**, AHP Series.

TAKEDA, E.; YU, P.L. (1995): Assessing priority weights from subsets of pairwise comparisons in multiple criteria optimization problems. *European Journal of Operational Research*, **86**, 315–331.

VAN DEN HONERT, R.C.; LOOTSMA, F.A. (1996): Group preference aggregation in the multiplicative AHP. The model of the group decision process and Pareto Optimality, *European Journal of Operational Research*, **97**, 363–370.

WEI, Q.; YAN, H.; MA, J.; FAN, Z. (2000): A compromise weight for multi-criteria group decision making with individual preference, *Journal of the Operational Research Society*, **51**,625–634.

XU, Z. (2000): On consistency of the weighted geometric mean complex judgement matrix in AHP, *European Journal of Operational Research*, **126**, 683–687.