# Intervalos de Estabilidad Global en el Proceso Analítico Jerárquico

AGUARÓN JOVEN, Juan[1]
ESCOBAR URMENETA, M Teresa [2]
MORENO JIMÉNEZ, José María[3]

Departamento de Métodos Estadísticos
Facultad de Económicas y Empresariales
Universidad de Zaragoza

**Resumen**

Considerando como técnica de decisión el Proceso Analítico Jerárquico, los Intervalos de Estabilidad nos indican el intervalo en que puede variar uno o varios juicios de una matriz de comparaciones pareadas sin que por ello se modifique la ordenación de las alternativas. En trabajos previos (Aguarón y Moreno, 2000; Aguarón, Escobar y Moreno, 2001) se han presentado los resultados que permiten determinar estos intervalos en el caso local (equivalente a la consideración de un solo criterio). En este trabajo se aborda el cálculo de dichos intervalos en el caso global, es decir, considerando la jerarquía completa del problema. El estudio de estos intervalos de estabilidad permiten alcanzar un mayor conocimiento acerca del problema considerado.

**Palabras clave:** Proceso Analítico Jerárquico, Intervalos de Estabilidad

**Area temática:** 8. Cuestiones Metodológicas Generales

## 1 Introducción

En Aguaron y Moreno-Jimenez (2000) se realiza un estudio de sensibilidad local de los juicios empleados en el Proceso Analítico Jerárquico (Saaty, 1980). Considerando la ordenación de un conjunto finito de alternativas con respecto a un único criterio (una única matriz de juicios) se consideran dos contextos diferentes: la selección de la mejor alternativa (problema $P.\alpha$) y la ordenación de todas ellas (problema $P.\gamma$).

En ambos casos, y considerando que se utiliza el método de la media geométrica como procedimiento de priorización, se han obtenido para cada juicio, para cada alternativa y para la matriz completa los intervalos de estabilidad y los índices que nos permiten garantizar, en cada caso, el mantenimiento de la mejor alternativa o la ordenación de todas ellas. Estos intervalos se pueden emplear para la obtención de caminos de consenso entre los diferentes actores durante el proceso de negociación.

A continuación extendemos estas ideas a un problema multicriterio, es decir, estudiamos la relación existente entre la ordenación de las alternativas y la al modificación de juicios asociados a cualquier matriz de la jerarquía (problema multicriterio), en dos contextos (problemas $P.\alpha$ y $P.\gamma$) y tres situaciones (modificaciones en un juicio, en los juicios de una fila y en lo juicios de una matriz).

Para los seis escenarios vamos a obtener los intervalos de estabilidad globales, en los que pueden oscilar los juicios de cualquier matriz de la jerarquía sin que se produzca cambio de rango entre las alternativas del problema.

A diferencia de lo que ocurría con los intervalos de estabilidad locales, donde se alcanzaban expresiones cerradas para los mismos, en el caso de intervalos de estabilidad globales no sucede lo mismo, siendo necesario recurrir a métodos aproximados para su obtención.

En la sección 2, se incluyen los resultados teóricos necesarios para los desarrollos posteriores. En las secciones 3, 4 y 5 se obtienen los intervalos de estabilidad global para un juicio, para una fila y para una matriz cualquiera de la jerarquía. Finalmente, en la sección 6 se recogen las conclusiones del trabajo.

# 2 Conceptos y Resultados Previos

Sea $\mathcal{H}$ una jerarquía con $h$ niveles. Cada uno de estos niveles $L_k$, $k = 0, \ldots, h$ tiene un total de $m_k$ elementos. En el nivel superior ($L_0$) se coloca exclusivamente ($m_0 = 1$) la meta u objetivo global ($G$). En el primer nivel se colocan sus sucesores o descendientes directos $\{G_j,\ j = 1, \ldots, m_1\}$. En el segundo nivel se encuentran los los sucesores de cada uno de los $m_1$ nodos situados en el primer nivel, hasta un total de $m_2$ elementos, y así sucesivamente. En el penúltimo nivel ($L_{h-1}$) se sitúan los “atributos” de la jerarquía:

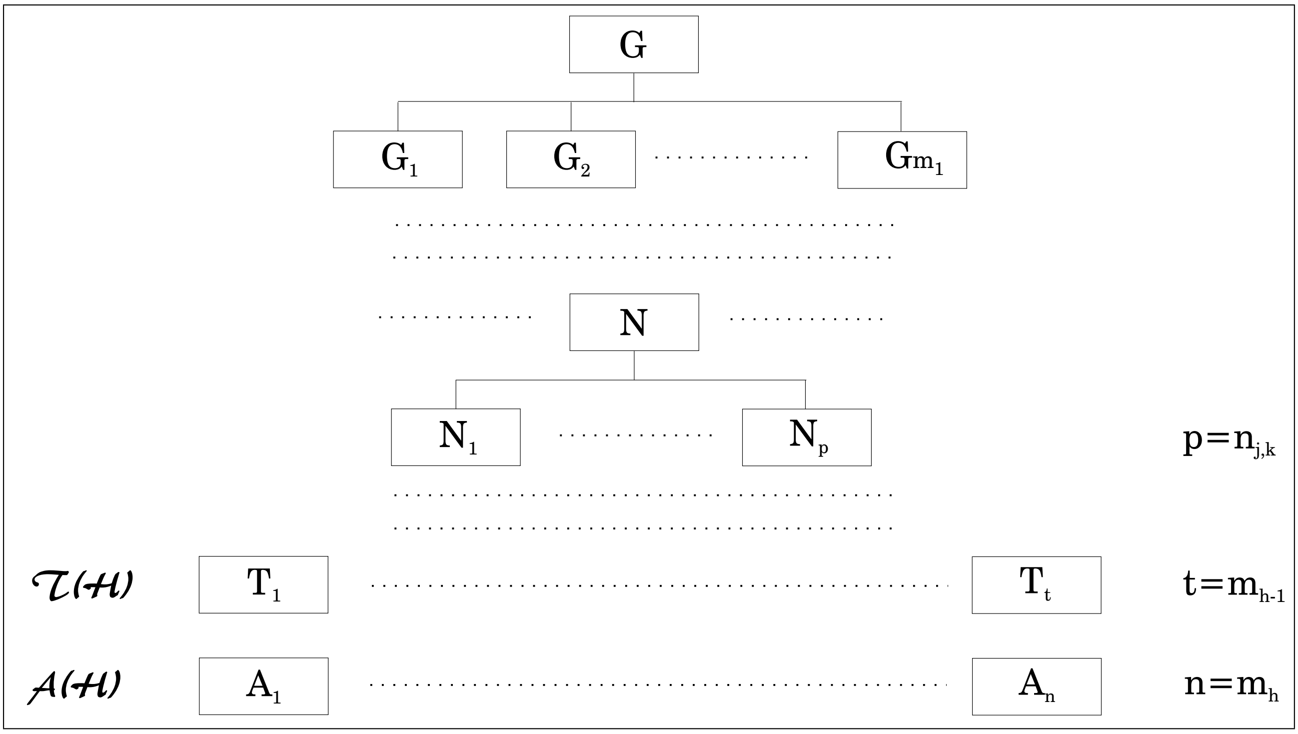
$$\mathcal{T}(\mathcal{H}) = \{T_j,\ j = 1, \ldots, t = m_{h-1}\}$$

y en el último nivel ($L_h$) las alternativas de la jerarquía:

$$\mathcal{A}(\mathcal{H}) = \{A_l,\ l = 1, \ldots, n = m_h\}$$

**Definición 1** Dado un nodo $N \in L_k$, $k < h - 1$, llamaremos *atributos del nodo* $N$, y lo representaremos como $\mathcal{T}(N)$, al conjunto de atributos $T_i \in L_{h-1}$ que son descendientes de $N$. Es evidente que $\mathcal{T}(G) = \mathcal{T}(\mathcal{H})$.

Consideremos ahora un nodo cualquiera de la jerarquía, $N_{j,k}$, que supondremos se encuentra en el nivel $k$-ésimo y en la posición $j$-ésima ($j = 1, \ldots, m_k$). En lo sucesivo, y por simplificar la notación, denotaremos por $N = N_{j,k}$ al nodo en concreto considerado, por $p = n_{j,k}$ el número de sucesores de este nodo, y por $N^+ = \{N_i,\ i = 1, \ldots, p\}$ al conjunto de sucesores de un nodo cualquiera $N$ donde cada $N_i = N_{j,k/i}$.




**Definición 2** Dado un nodo cualquiera, $N \notin \mathcal{A}(\mathcal{H})$, denotamos por $\omega(N)$ la prioridad local de dicho nodo (prioridad respecto al nodo del que cuelga), y por $\omega^G(N) = \omega(N|G)$ su prioridad global (producto de las prioridades locales de los nodos que forman el camino que une $G$ con $N$).

De una forma mas general, denotaremos por $\omega(N|M)$ al producto de las prioridades locales de los nodos que forman el camino que une $M$ con $N$ ($N$ descendiente de $M$). Si $M, X_1, \ldots, X_r, N$ es dicho camino: $\omega(N|M) = \omega(X_1)\omega(X_2)\cdots\omega(X_r)\omega(N)$. Con esta notación se pueden representar las prioridades locales de un nodo $N_i \in N^+$ como $\omega(N_i) = \omega(N_i|N)$, y su prioridad global como $\omega^G(N_i) = \omega(N_i|G)$.

**Lema 1** *Dados tres nodos $Q, M, N$ en una trayectoria pero en niveles diferentes ($L_Q < L_M < L_N$), se tiene*

$$\omega(N|Q) = \omega(N|M)\omega(M|Q)$$

*en particular, si $N$ es descendiente de $M$ ($M, N \in \mathcal{H}$) se verifica:*

$$\omega^G(N) = \omega(N|G) = \omega(N|M)\omega(M|G)$$

**Definición 3** Dada una alternativa $A_l \in \mathcal{A}(\mathcal{H})$ denotamos por $\omega(A_l)$ su prioridad total, o prioridad respecto al nodo $G$. Su valor viene dado por

$$\omega(A_l) = \sum_{T_i \in \mathcal{T}(\mathcal{H})} \omega(A_l|T_i)\omega^G(T_i)$$

donde $\omega(A_l|T_i)$ es su prioridad local respecto al atributo $T_i$ ($T_i \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$).

**Definición 4** Llamaremos *prioridad total de la alternativa $A_l$ respecto al nodo $N$* ($N \in L_k$, con $k < h$) y lo representaremos como $\omega(A_l|N)$ a la prioridad total de dicha alternativa considerando exclusivamente la subjerarquía con nodo superior $N$:

$$\omega(A_l|N) = \sum_{T_i \in (N)} \omega(A_l|T_i)\omega(T_i|N)$$

A partir de esta definición la prioridad total de una alternativa $A_l$, $\omega(A_l)$, la podemos expresar también como $\omega(A_l|G)$.

**Lema 2** *Dada $A_l \in \mathcal{A}(\mathcal{H})$, $N \in \mathcal{H}$ y $N_i \in N^+$ ($N, N_i \notin \mathcal{A}(\mathcal{H})$), se verifica:*

*i)* $\omega(A_l|N) = \sum_{i=1}^{p} \omega(A_l|N_i)\omega(N_i|N)$

*ii)* $\omega(A_l|G) = \omega(A_l|G, N) + \omega(A_l|G, N^c)$

*iii)* $\omega(A_l|G, N) = \omega(A_l|N)\omega(N|G)$

*iv)* $\omega(A_l|G,N) = \sum_{i=1}^{p} \omega(A_l|N_i)\omega(N_i|G)$

*v)* $\omega(A_l|G) = \sum_{i=1}^{p} \omega(A_l|N_i)\omega(N_i|G) + \omega(A_l|G,N^c)$

*donde $\omega(A_l|G,N)$ es la prioridad total de la alternativa $A_l$ a través de todas las trayectorias que van desde $A_l$ hasta $G$ pasando por el nodo $N$, y $\omega(A_l|G,N^c)$ es la prioridad global (total) de la alternativa $A_l$ a través de todas las trayectorias que van desde $A_l$ hasta $G$ sin pasar por $N$.*

NOTA 1. Si el nodo $N$ corresponde con el nodo superior de la jerarquía ($G$) (meta del problema), el termino $\omega(A_k|G,N^c)$ es nulo. Además consideramos $\omega(N|N) = 1$.

**Lema 3** *Sea $N$ un nodo cualquiera de la jerarquía ($N \notin \mathcal{A}(\mathcal{H})$), $A = (a_{ij})$, $i,j = 1,\ldots,p$ la matriz de comparaciones pareadas obtenida al comparar sus $p$ descendientes ($N_i$, $i = 1,\ldots,p$) entre sí y $\omega = (\omega_i)$, $i = 1,\ldots,p$ el vector de prioridades locales obtenido al aplicar algún método de priorización sobre las matriz $A$. Si consideramos una modificación de la matriz $A$, $A'$, y el correspondiente vector de prioridades $\omega' = (\omega'_i)$ se verifica:*

$$\omega'(A_l|G,N) = \frac{s}{s'} \sum_{i=1}^{p} \rho_i \omega(A_l|N_i)\omega^G(N_i) \tag{1}$$

*donde $\rho_i = \frac{\omega'_i}{\omega_i}$, $s = \sum_j \omega_j$ y $s' = \sum_j \omega'_j$.*

**Lema 4** *En las mismas condiciones del lema anterior consideremos dos alternativas, $A_k$ y $A_l$, tales que $\omega(A_k) > \omega(A_l)$. Para que se mantenga la ordenación relativa de estas dos alternativas debe verificarse:*

$$\sum_{i=1}^{p} \rho_i \omega(N_i) \left[\Delta_{kl}^{G,N^c} + \omega^G(N)\Delta_{kl}^{N_i}\right] > 0 \tag{2}$$

*donde $\Delta_{kl}^{G,N^c} = \omega(A_k|G,N^c) - \omega(A_l|G,N^c)$ y $\Delta_{kl}^{N_i} = \omega(A_k|N_i) - \omega(A_l|N_i)$.*

NOTA 2. En concreto la desigualdad anterior se verifica en el caso trivial en que $\rho_i = 1$ para todo $i$, es decir, cuando no se han realizado modificaciones en los juicios de la matriz.

**Lema 5** *Si en una matriz de comparaciones $A = (a_{ij})$, el juicio $a_{rs}$ $(r \neq s)$ se convierte en el valor $a'_{rs}$, el nuevo vector de prioridades obtenido empleando el método de la media geométrica es, salvo factor de normalización:*

$$\begin{aligned}
\omega'_i &= \omega_i \qquad \forall\ i \neq r, s \\
\omega'_r &= \omega_r t_{rs}^{1/n} = \omega_r \left(\frac{a'_{rs}}{a_{rs}}\right)^{1/n} \\
\omega'_s &= \omega_s t_{sr}^{1/n} = \omega_s \left(\frac{a_{rs}}{a'_{rs}}\right)^{1/n}
\end{aligned}$$

# 3 Intervalos de Estabilidad Global de un Juicio

Sea $N$ un nodo de la jerarquía $\mathcal{H}$ con sucesores $N^+ = \{N_i,\ i = 1, \ldots, p\}$. Llamaremos juicio $(r, s)$ del nodo $N$ y lo denotaremos como $a_{rs}(N)$ al juicio correspondiente a la comparación de $N_r$ con $N_s$. Si $A$ es la matriz de comparaciones pareadas de los nodos de $N^+$, $a_{rs}(N)$ coincide con el juicio $a_{rs}$. Si no hay lugar a equívocos lo denotaremos indistintamente de las dos maneras.

De forma análoga se hablará de la variación relativa $(r, s)$ del nodo $N$ y lo denotaremos como $t_{rs}(N)$ al cociente entre el juicio modificado y el juicio sin modificar correspondientes a la comparación de $N_r$ y $N_s$:

$$t_{rs}(N) = \frac{a'_{rs}(N)}{a_{rs}(N)} = \frac{a'_{rs}}{a_{rs}}$$

**Definición 5** Dada una matriz recíproca positiva $A = (a_{ij})$ con $i, j = 1, \ldots, p$, correspondiente a las comparaciones pareadas de $p$ elementos $N_i$, $i = 1, \ldots, p$, respecto a un nodo $N$ cualquiera de una jerarquía $\mathcal{H}$ con alternativas $A_k$, $k = 1, \ldots, n$, se denominan:

(5a) *intervalo de estabilidad relativa global del juicio* $a_{rs}(N)$ para un problema $P.\alpha$, al intervalo $\left[\underline{\alpha}_{rs}^G(N), \bar{\alpha}_{rs}^G(N)\right]$ en el que puede oscilar su variación relativa, $t_{rs}(N)$, sin que se produzca cambio de rango en la mejor alternativa del problema.

(5b) *intervalo de estabilidad global del juicio* $a_{rs}(N)$ para un problema $P.\alpha$, al intervalo en el que puede oscilar el mismo, $\left[\underline{a}_{rs}^G(N), \bar{a}_{rs}^G(N)\right]$, sin que se produzca cambio de rango en la mejor alternativa del problema.

(5c) *índice de estabilidad global del juicio* $a_{rs}^G(N)$ para un problema $P.\alpha$ a

$$\alpha_{rs}^G(N) = \min\{1/\underline{\alpha}_{rs}^G, \bar{\alpha}_{rs}^G\}$$

(5d) *Juicio más Crítico o Inestable* de la matriz de juicios de un nodo $N$ en un problema $P.\alpha$, al juicio con menor índice de estabilidad global.

**Definición 6** En las mismas condiciones de antes se definen:

(6a) *intervalo de estabilidad relativa global del juicio* $a_{rs}(N)$ para un problema $P.\gamma$, al intervalo $\left[\underline{\gamma}_{rs}^G(N), \bar{\gamma}_{rs}^G(N)\right]$ en el que puede oscilar su variación relativa, $t_{rs}(N)$, sin que se produzca cambio de rango en la ordenación de todas las alternativas del problema.

(6b) *intervalo de estabilidad global del juicio* $a_{rs}(N)$ para un problema $P.\gamma$, al intervalo en el que puede oscilar el mismo, $\left[\underline{g}_{rs}^G(N), \bar{g}_{rs}^G(N)\right]$, sin que se produzca cambio de rango en la mejor alternativa del problema.

(6c) *índice de estabilidad global del juicio* $a_{rs}^G(N)$ para un problema $P.\gamma$ a

$$\gamma_{rs}^G(N) = \min\{1/\underline{\gamma}_{rs}^G, \bar{\gamma}_{rs}^G\}$$

(6d) *Juicio más Crítico o Inestable* de la matriz de juicios de un nodo $N$ en un problema $P.\gamma$, al juicio con menor índice de estabilidad global.

**Teorema 1** *Dado un nodo $N$ cualquiera de la jerarquía, y dos alternativas $A_k$, $A_l$, tales que $\omega(A_k) > \omega(A_l)$, la condición necesaria y suficiente para que al modificar el juicio $a_{rs}$ del nodo $N$ no exista cambio de rango entre dichas alternativas es:*

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{\substack{i=1\\ i\neq r,s}}^{p} \omega(N_i)\left[\Delta_{kl}^{G,N^c} + \omega^G(N)\Delta_{kl}^{N_i}\right] \quad &+ \quad \rho\omega(N_r)\left[\Delta_{kl}^{G,N^c} + \omega^G(N)\Delta_{kl}^{N_r}\right] + \\ &+ \quad \tfrac{1}{\rho}\omega(N_s)\left[\Delta_{kl}^{G,N^c} + \omega^G(N)\Delta_{kl}^{N_s}\right] \geq 0 \end{aligned} \tag{3}$$

*donde* $\rho = t_{rs}^{1/p}$.

Nota 3. La condición (3) nos conduce a una inecuación de segundo grado que siempre tendrá soluciones puesto que se verifica para el caso trivial $\rho = 1$. Por lo tanto existirá un intervalo de $\rho$ conteniendo al 1, $[\underline{\rho}, \bar{\rho}]$, en el cual será válida. En caso de que la desigualdad se cumpla para valores negativos tomaremos $\underline{\rho} = 0$.

**Teorema 2** *Sea una jerarquía $\mathcal{H}$ con alternativas $A_l,\ l=1,\ldots,n,$ tales que $\omega(A_1)\geq \ldots \geq \omega(A_n)$. Dado un nodo $N$ cualquiera de la jerarquía, el intervalo de estabilidad relativo global del juicio $a_{rs}$ de $N$ para un problema $P.\alpha$ viene determinado por $[\underline{\alpha}^G_{rs}, \bar{\alpha}^G_{rs}]$ donde*

$$[\underline{\alpha}^G_{rs}, \bar{\alpha}^G_{rs}] = \bigcap_{l>1} [\underline{\rho}^p_l, \bar{\rho}^p_l]$$

*siendo $[\underline{\rho}_l, \bar{\rho}_l]$ el intervalo en el que se verifica la desigualdad:*

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{\substack{i=1\\ i\neq r,s}}^{p} \omega(N_i)\left[\Delta_{1l}^{G,N^c} + \omega^G(N)\Delta_{1l}^{N_i}\right] &+ \rho\omega(N_r)\left[\Delta_{1l}^{G,N^c} + \omega^G(N)\Delta_{1l}^{N_r}\right] + \\ &+ \tfrac{1}{\rho}\omega(N_s)\left[\Delta_{1l}^{G,N^c} + \omega^G(N)\Delta_{1l}^{N_s}\right] \geq 0\end{aligned}$$

**Teorema 3** *Sea una jerarquía $\mathcal{H}$ con alternativas $A_l,\ l=1,\ldots,n,$ tales que $\omega(A_1)\geq \ldots \geq \omega(A_n)$. Dado un nodo $N$ cualquiera de la jerarquía, el intervalo de estabilidad relativo global del juicio $a_{rs}$ de $N$ para un problema $P.\gamma$ viene determinado por $[\underline{\gamma}^G_{rs}, \bar{\gamma}^G_{rs}]$ donde*

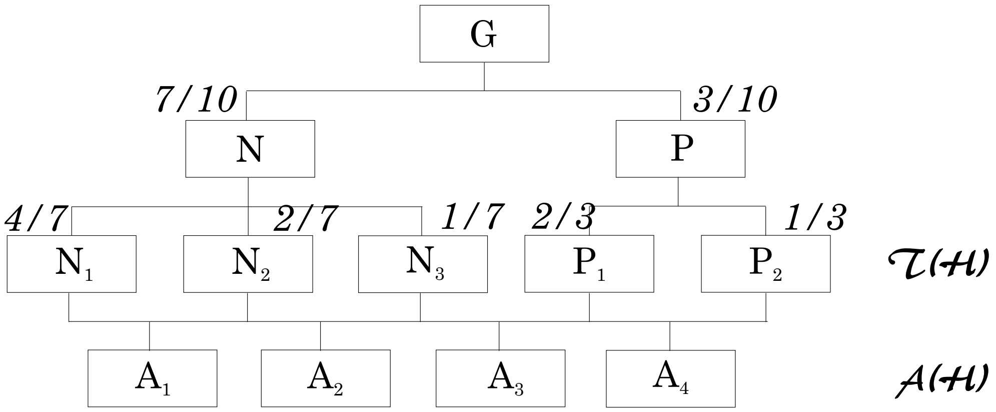
$$[\underline{\gamma}^G_{rs}, \bar{\gamma}^G_{rs}] = \bigcap_{l>1} [\underline{\rho}^p_l, \bar{\rho}^p_l]$$

*siendo $[\underline{\rho}_l, \bar{\rho}_l]$ el intervalo en el que se verifica la desigualdad:*

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{\substack{i=1\\ i\neq r,s}}^{p} \omega(N_i)\left[\Delta_{l-1l}^{G,N^c} + \omega^G(N)\Delta_{l-1l}^{N_i}\right] &+ \rho\omega(N_r)\left[\Delta_{l-1l}^{G,N^c} + \omega^G(N)\Delta_{l-1l}^{N_r}\right] + \\ &+ \tfrac{1}{\rho}\omega(N_s)\left[\Delta_{l-1l}^{G,N^c} + \omega^G(N)\Delta_{l-1l}^{N_s}\right] \geq 0\end{aligned}$$

## 3.1 Ejemplo Numérico

Sea la jerarquía



en la que se han indicado las prioridades locales para los nodos $N, P, N_i, P_i$. Vamos a realizar modificaciones en los juicios correspondientes a $N_1$.

La matriz de comparaciones pareadas para el nodo $N$ es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Las prioridades (locales) de las alternativas para cada atributo, así como las prioridades globales de los mismos son:

| | 0.4<br>$N_1$ | 0.2<br>$N_2$ | 0.1<br>$N_3$ | 0.2<br>$P_1$ | 0.1<br>$P_2$ | $\omega(A_i\|G)$ | $\omega(A_i\|G, N^c)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 0.4 | 0.3 | 0.2 | 0.2 | 0.4 | 0.32 | 0.08 |
| $A_2$ | 0.2 | 0.2 | 0.4 | 0.5 | 0.3 | 0.29 | 0.13 |
| $A_3$ | 0.3 | 0.2 | 0.1 | 0.2 | 0.2 | 0.23 | 0.06 |
| $A_4$ | 0.1 | 0.3 | 0.3 | 0.1 | 0.1 | 0.16 | 0.03 |

En la siguiente tabla se calculan los términos necesarios para determinar los intervalos en los que se preserva la ordenación de la alternativa $A_1$:

| | $\Delta^{G,N^c}$ | $\Delta^{N_1}$ | $\Delta^{N_2}$ | $\Delta^{N_3}$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1 - A_2$ | -0.05 | 0.2 | 0.1 | -0.2 |
| $A_1 - A_3$ | 0.02 | 0.1 | 0.1 | 0.1 |
| $A_1 - A_4$ | 0.05 | 0.3 | 0 | -0.1 |

Vamos a determinar el intervalo de estabilidad global relativa del juicio $a_{23}(N)$.

Para las alternativas $A_1$ y $A_2$ obtenemos:

$$\frac{4}{7}[-0.05 + 0.7 \times 0.2] + \frac{2}{7}\rho[-0.05 + 0.7 \times 0.1] + \frac{1}{7}\frac{1}{\rho}[-0.05 + 0.7 \times (-0.2)] \geq 0$$

donde $\rho = t_{23}^{1/3}$.

$$\frac{0.36}{7} + \frac{0.04}{7}\rho + \frac{-0.19}{7\rho} \geq 0$$

$$0.36 + 0.04\rho - \frac{0.19}{\rho} \geq 0$$

Resolviendo la desigualdad se obtiene:

$$\rho \in (-\infty, -9.5] \bigcup \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$$

Siempre nos quedamos con el máximo intervalo positivo que contiene al 1:

$$\rho \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$$

De forma análoga para $A_1$ y $A_3$ se obtiene:

$$0.36 + 0.18\rho + \frac{0.09}{\rho} \geq 0$$

que se verifica para todo valor de $\rho$, por lo que nos quedamos con el intervalo $(0, \infty)$.

Finalmente, para $A_1$ y $A_4$:

$$1.04 + 0.1\rho - \frac{0.02}{\rho} \geq 0$$

obteniéndose el intervalo (aproximado) $\left[\frac{1}{52}, \infty\right)$.

En consecuencia el intervalo de estabilidad global relativo de $a_{23}(N)$ para un problema $P.\alpha$ es $[(1/2)^3, \infty) = [1/8, \infty)$.

El correspondiente intervalo de estabilidad global de $a_{23}(N)$ para el problema $P.\alpha$ viene dado por: $[\underline{a}_{23}^G(N), \bar{a}_{23}^G(N)]$ donde

$$\underline{a}_{23}^G(N) = 2 * \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \qquad \bar{a}_{23}^G(N) = \infty$$

Análogamente se determina el correspondiente intervalo para el problema $P.\gamma$. A partir de la información de la siguiente tabla

| | $\Delta^{G,N^c}$ | $\Delta^{N_1}$ | $\Delta^{N_2}$ | $\Delta^{N_3}$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1 - A_2$ | -0.05 | 0.2 | 0.1 | -0.2 |
| $A_2 - A_3$ | 0.07 | -0.1 | 0 | 0.3 |
| $A_3 - A_4$ | 0.03 | 0.2 | -0.1 | -0.2 |

se construyen las correspondientes inecuaciones cuyas soluciones respectivas para $\rho$ son aproximadamente $[0.5, \infty)$, $(0, \infty)$ y $[0.165, 8.33]$. El intervalo intersección es $[0.5, 8.33]$ y el intervalo de estabilidad global para el problema $P.\gamma$ es $[0.5^3, 8.33^3] \approx [0.125, 578]$.

# 4 Intervalos de estabilidad global para los juicios de una fila

Sea $N$ un nodo de la jerarquía $\mathcal{H}$ con sucesores $N^+ = \{N_i,\ i = 1, \ldots, p\}$. Llamaremos fila $r$ del nodo $N$ y lo denotaremos como $a_r(N)$ a los juicios correspondientes a las comparaciones de $N_r$ con $N_i,\ i = 1, \ldots, p$. Si $A$ es la matriz de comparaciones pareadas de los nodos de $N^+$, $a_r(N)$ coincide con la fila $r$-ésima de la matriz $A$.

**Definición 7** Dada una matriz recíproca positiva $A = (a_{ij})$ con $i, j = 1, \ldots, p$, correspondiente a las comparaciones pareadas de $p$ elementos $N_i,\ i = 1, \ldots, p$, respecto a un nodo $N$ cualquiera de una jerarquía $\mathcal{H}$ con alternativas $A_k,\ k = 1, \ldots, n$, se denominan:

(7a) *intervalo recíproco de estabilidad relativa de* $a_r(N)$ para la ordenación parcial de las alternativas $A_k$ y $A_l$ $(k < l)$, al intervalo común $\left[1/\pi_r^{kl}(N), \pi_r^{kl}(N)\right]$ en el que pueden oscilar simultáneamente todas las variaciones relativas $t_{rj}(N),\ j = 1, \ldots, p,\ j \neq r$, sin que se produzca cambio de rango en la ordenación de las alternativas $A_k$ y $A_l$.

(7b) *índice de estabilidad global de* $a_r(N)$ para la ordenación parcial de las alternativas $A_k$ y $A_l$ $(k < l)$ al extremo superior $\pi_r^{kl}(N)$ del intervalo recíproco de estabilidad relativa de $a_r(N)$ para esas alternativas.

**Lema 6** *Sea $N$ un nodo cualquiera de la jerarquía $(N \notin \mathcal{A}(\mathcal{H}))$, $A = (a_{ij}),\ i, j = 1, \ldots, p$ la matriz de comparaciones pareadas obtenida al comparar sus $p$ descendientes $(N_i,\ i = 1, \ldots, p)$ y $A_k$, $A_l$ dos alternativas tales que $\omega(A_k) > \omega(A_l)$. Si se realizan modificaciones en los juicios $a_{ri},\ i = 1, \ldots, p$ para que se mantenga la ordenación relativa de estas dos alternativas debe verificarse:*

$$\sum_{i \neq r}^{p} \frac{1}{\tau_{ri}} \omega(N_i) \left[\Delta_{A_k A_l}^{G,N^c} + \omega^G(N) \Delta_{kl}^{N_i}\right] + \prod_{j \neq r} \tau_{rj} \omega(N_r) \left[\Delta_{kl}^{G,N^c} + \omega^G(N) \Delta_{kl}^{N_r}\right] \geq 0 \qquad (4)$$

**Teorema 4** *Sea $N$ un nodo cualquiera de la jerarquía $(N \notin \mathcal{A}(\mathcal{H}))$, $A = (a_{ij}),\ i, j = 1, \ldots, p$ la matriz de comparaciones pareadas obtenida al comparar sus $p$ descendientes $(N_i,\ i = 1, \ldots, p)$ y $A_k$, $A_l$ dos alternativas tales que $\omega(A_k) > \omega(A_l)$. Consideremos el problema de optimización binivel:*

$$\operatorname{Max} \tau_r$$

$$
\begin{aligned}
s.t. & \\
& \text{Min} \sum_{i \neq r}^{p} \frac{1}{\tau_{ri}} \omega(N_i) \left[ \Delta_{kl}^{G,N^c} + \omega^G(N) \Delta_{kl}^{N_i} \right] \\
+ & \prod_{j \neq r} \tau_{rj} \omega(N_r) \left[ \Delta_{kl}^{G,N^c} + \omega^G(N) \Delta_{kl}^{N_r} \right] \geq 0 \\
& \tau_{ri} \in [1/\tau_r, \tau_r]
\end{aligned}
$$

*El valor de la función objetivo en solución óptima, $\tau_r^*$, determina el intervalo de mayor amplitud, $[1/\tau_r^*, \tau_r^*]$, en el que pueden localizarse los valores $\tau_{ri}$ de forma que la alternativa $A_k$ siga siendo preferida a la alternativa $A_l$.*

**Teorema 5** *Sea $N$ un nodo cualquiera de la jerarquía ($N \notin \mathcal{A}(\mathcal{H})$), $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, \ldots, p$ la matriz de comparaciones pareadas obtenida al comparar sus $p$ descendientes ($N_i$, $i = 1, \ldots, p$) y $A_k$, $A_l$ dos alternativas tales que $\omega(A_k) > \omega(A_l)$. Consideremos el problema de optimización:*

$$
\begin{aligned}
\text{Min}\, t & = \text{Max}_{i \neq r} \{ \text{Max} \{ t_{ri}, t_{ri}^{-1} \} \} \\
s.t. & \\
& \sum_{i \neq r}^{p} \frac{1}{t_{ri}^{1/p}} \omega(N_i) \left[ \Delta_{kl}^{G,N^c} + \omega^G(N) \Delta_{kl}^{N_i} \right] \\
+ & \prod_{j \neq r} t_{rj}^{1/p} \omega(N_r) \left[ \Delta_{kl}^{G,N^c} + \omega^G(N) \Delta_{kl}^{N_r} \right] \geq 0 \\
& t_{rs} \geq 0
\end{aligned}
$$

*El valor de la función objetivo en solución óptima, $t^*$, determina el intervalo de mayor amplitud, $[1/t^*, t^*]$, en el que pueden localizarse las variaciones relativas $t_{ri}$ para que la alternativa $A_k$ siga siendo preferida a la alternativa $A_l$.*

Nota 4. El problema de optimización anterior tiene solución si y solo si existe algún término $\Delta_{kl}^{G,N^c} + \omega^G(N) \Delta_{kl}^{N_i}$ negativo (asignado a la correspondiente variable $t_{ri}$ un valor lo suficientemente alto se consigue que el sumatorio sea menor o igual que cero). Si todos estos términos son positivos quiere decir que la alternativa $A_k$ domina a $A_l$ y no es posible que ocurra un cambio de rango, por lo que el problema no tiene solución. En tales casos consideraremos que $t^* = \infty$.

**Definición 8** Dada una matriz recíproca positiva $A = (a_{ij})$ con $i, j = 1, \ldots, p$, correspondiente a las comparaciones pareadas de $p$ elementos $N_i$, $i = 1, \ldots, p$, respecto a un nodo $N$ cualquiera de una jerarquía $\mathcal{H}$ con alternativas $A_k$, $k = 1, \ldots, n$, se denominan:

(8a) el *intervalo recíproco de estabilidad global de* $a_r(N)$ para un problema $P.\alpha$, al intervalo común $\left[1/\alpha_r^G(N), \alpha_r^G(N)\right]$ en el que pueden oscilar simultáneamente todas las variaciones relativas $t_{rj}(N)$, $j = 1, \ldots, p$, $j \neq r$, sin que se produzca cambio de rango en la mejor alternativa del problema.

(8b) *índice de estabilidad global de* $a_r(N)$ para un problema $P.\alpha$ como el extremo superior, $\alpha_r^G(N)$, del intervalo recíproco de estabilidad global de $a_r(N)$ para ese problema.

(8c) *Elemento o Fila más Crítico o Inestable* de la matriz de juicios de un nodo $N$ en un problema $P.\alpha$, a aquella fila con menor índice de estabilidad global.

**Definición 9** Dada una matriz recíproca positiva $A = (a_{ij})$ con $i, j = 1, \ldots, p$, correspondiente a las comparaciones pareadas de $p$ elementos $N_i$, $i = 1, \ldots, p$, respecto a un nodo $N$ cualquiera de una jerarquía $\mathcal{H}$ con alternativas $A_k$, $k = 1, \ldots, n$, se denominan:

(9a) el *intervalo recíproco de estabilidad global de* $a_r(N)$ para un problema $P.\gamma$, al intervalo común $\left[1/\gamma_r^G(N), \gamma_r^G(N)\right]$ en el que pueden oscilar simultáneamente todas las variaciones relativas $t_{rj}(N)$, $j = 1, \ldots, p$, $j \neq r$, sin que se produzca cambio de rango en la ordenación de todas las alternativas del problema.

(9b) *índice de estabilidad global de* $a_r(N)$ para un problema $P.\gamma$ como el extremo superior, $\gamma_r^G(N)$, del intervalo recíproco de estabilidad global de $a_r(N)$ para ese problema.

(9c) *Elemento o Fila más Crítico o Inestable* de la matriz de juicios de un nodo $N$ en un problema $P.\gamma$, a aquella fila con menor índice de estabilidad global.

**Teorema 6** *Sea una jerarquía* $\mathcal{H}$ *con alternativas* $A_l$, $l = 1, \ldots, n$, *tales que* $\omega(A_1) \geq \ldots \geq \omega(A_n)$. *Dado un nodo* $N$ *cualquiera de la jerarquía, el intervalo recíproco de estabilidad global de* $a_r(N)$ *de* $N$ *para un problema* $P.\alpha$ *viene determinado por* $\left[1/\alpha_r^G(N), \alpha_r^G(N)\right]$ *donde* $\alpha_r^G(N) = \min_{l>1} t_l^*$ *y* $t_l^*$ *es la solución óptima del problema*

$$\begin{aligned}
\text{Min}\, t &= \underset{i\neq r}{\text{Max}}\{\text{Max}\{t_{ri}, t_{ri}^{-1}\}\} \\
\textit{s.t.} & \\
& \sum_{i\neq r}^{p} \frac{1}{t_{ri}^{1/p}} \omega(N_i) \left[\Delta_{1l}^{G,N^c} + \omega^G(N)\Delta_{1l}^{N_i}\right] \\
+ & \prod_{j\neq r} t_{rj}^{1/p} \omega(N_r) \left[\Delta_{1l}^{G,N^c} + \omega^G(N)\Delta_{1l}^{N_r}\right] \geq 0 \\
& t_{rs} \geq 0
\end{aligned}$$

**Teorema 7** *Sea una jerarquía $\mathcal{H}$ con alternativas $A_l$, $l = 1, \ldots, n$, tales que $\omega(A_1) \geq \ldots \geq \omega(A_n)$. Dado un nodo $N$ cualquiera de la jerarquía, el intervalo recíproco de estabilidad global de $a_r(N)$ de $N$ para un problema $P.\gamma$ viene determinado por $\left[1/\gamma_r^G(N), \gamma_r^G(N)\right]$ donde $\gamma_r^G(N) = \min_{l>1} t_l^*$ y $t_l^*$ es la solución óptima del problema*

$$\begin{aligned}
\text{Min}\, t &= \underset{i \neq r}{\text{Max}}\{\text{Max}\{t_{ri}, t_{ri}^{-1}\}\} \\
s.t. & \\
& \sum_{i \neq r}^{p} \frac{1}{t_{ri}^{1/p}} \omega(N_i) \left[\Delta_{l-1l}^{G,N^c} + \omega^G(N) \Delta_{l-1l}^{N_i}\right] \\
+ & \prod_{j \neq r} t_{rj}^{1/p} \omega(N_r) \left[\Delta_{l-l}^{G,N^c} + \omega^G(N) \Delta_{l-1l}^{N_r}\right] \geq 0 \\
& t_{rs} \geq 0
\end{aligned}$$

# 5 Intervalos de estabilidad global para los juicios de una matriz

**Definición 10** Dada una matriz recíproca positiva $A = (a_{ij})$ con $i, j = 1, \ldots, n$, correspondiente a las comparaciones pareadas de $p$ elementos $N_i$, $i = 1, \ldots, p$, respecto a un nodo $N$ cualquiera de una jerarquía $\mathcal{H}$ con alternativas $A_k$, $k = 1, \ldots, n$, se denominan:

(10a) el *intervalo recíproco de estabilidad global de $N$* para un problema $P.\alpha$, al intervalo común $\left[1/\alpha^G, \alpha^G\right]$ en el que pueden oscilar las variaciones relativas de todos los juicios de la matriz $A$ sin que se produzca cambio de rango en la mejor alternativa del problema.

(10b) *índice de estabilidad global del nodo $N$* para un problema $P.\alpha$ como el extremo superior, $\alpha^G$, del intervalo global de estabilidad de $N$ para ese problema.

(10c) *Nodo más Crítico de una Jerarquía* para un problema $P.\alpha$ a aquel nodo de la jerarquía con menor índice de estabilidad global.

**Definición 11** En las mismas condiciones de antes se definen:

(11a) el *intervalo recíproco de estabilidad global de los juicios de $N$* para un problema $P.\gamma$, al intervalo común $\left[1/\gamma^G, \gamma^G\right]$ en el que pueden oscilar las variaciones relativas de todos los juicios de la matriz $A$ sin que se produzca cambio de rango en la ordenación de las alternativas.

(11b) *índice de estabilidad global del nodo $N$* para un problema $P.\gamma$ como el extremo superior, $\gamma^G$, del intervalo global de estabilidad de $N$ para ese problema.

(11c) *Nodo más Crítico de una Jerarquía* para un problema *P.gammaa* a aquel nodo de la jerarquía con menor índice de estabilidad global.

**Lema 7** *Sea $N$ un nodo cualquiera de la jerarquía ($N \notin \mathcal{A}(\mathcal{H})$), $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, \ldots, p$ la matriz de comparaciones pareadas obtenida al comparar sus $p$ descendientes ($N_i$, $i = 1, \ldots, p$) y $A_k$, $A_l$ dos alternativas tales que $\omega(A_k) > \omega(A_l)$. Si se realizan modificaciones en todos los juicios de la matriz $A$, para que se mantenga la ordenación relativa de estas dos alternativas debe verificarse:*

$$\sum_{i=1}^{p} \prod_{j \neq i} t_{ij}^{1/p} \omega(N_i) \left[\Delta_{kl}^{G,N^c} + \omega^G(N) \Delta_{kl}^{N_i}\right] \geq 0 \tag{5}$$

Haciendo $x_{ij} = t_{ij}^{1/p}$ y $A_i = \omega(N_i) \left[\Delta_{kl}^{G,N^c} + \omega^G(N) \Delta_{kl}^{N_i}\right]$ la expresión obtenida anteriormente se convierte en

$$\sum_{i=1}^{p} A_i \prod_{j=1}^{p} x_{ij} \geq 0$$

con $x_{ij} x_{ji} = 1$, donde $\sum_i A_i > 0$ (recordemos que para $t_{ij} = 1$, las alternativas mantienen sus prioridades).

Nos interesa determinar un intervalo $[\alpha^{-1}, \alpha]$ tal que si $x_{ij} \in [\alpha^{-1}, \alpha]$ la desigualdad se cumpla. En particular nos interesa el intervalo de mayor amplitud ($\alpha$ máximo).

Haciendo la transformación $y_i = \log x_i$ obtenemos la expresión:

$$F(y) = \sum A_i e^{\sum_{j=1}^{p} y_{ij}} \geq 0 \tag{6}$$

donde $y_{ij} + y_{ji} = 0$.

Al igual que ocurría en el caso de una fila de la matriz, nos interesa determinar la máxima bola (norma $L_\infty$) centrada en el origen que verifique la desigualdad (6).

**Teorema 8** *Sea el problema de optimización*

$$\begin{aligned}
\text{Min}\, a &= \text{Max}\{|y_i|,\ i = 1, \ldots, q\} \\
s.t. & \\
& \sum_{i=1}^{p} A_i e^{\sum_{j=1}^{p} y_{ij}} \leq 0 \\
& y_{ij} + y_{ji} = 0
\end{aligned}$$

*El valor de la función objetivo en solución óptima, $a^*$, determina el radio de la máxima bola centrada en el origen que cumple la condición (**??**).*

**Teorema 9** *Sea $N$ un nodo cualquiera de la jerarquía ($N \notin \mathcal{A}(\mathcal{H})$), $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, \ldots, p$ la matriz de comparaciones pareadas obtenida al comparar sus $p$ descendientes ($N_i$, $i = 1, \ldots, p$) y $A_k$, $A_l$ dos alternativas tales que $\omega(A_k) > \omega(A_l)$. Consideremos el problema de optimización:*

$$\begin{aligned}
\text{Min}\, t &= \text{Max}\{t_{ij}, i, j = 1, \ldots, p; i \neq j\} \\
s.t. & \\
& \sum_{i=1}^{p} \prod_{j \neq i} t_{ij}^{1/p} \omega(N_i) \left[\Delta_{kl}^{G,N^c} + \omega^G(N) \Delta_{kl}^{N_i}\right] \geq 0 \\
& t_{ij} t_{ji} = 1 \\
& t_{rs} \geq 0
\end{aligned}$$

*El valor de la función objetivo en solución óptima, $t^*$, determina el intervalo de mayor amplitud, $[1/t^*, t^*]$, en el que pueden localizarse las variaciones relativas de todos los juicios de $A$ de forma que la alternativa $A_k$ siga siendo preferida a la alternativa $A_l$.*

Nota 5. Los comentarios realizados sobre la factibilidad del problema en el caso de una fila siguen siendo válidos en esta situación.

**Teorema 10** *Sea una jerarquía $\mathcal{H}$ con alternativas $A_l$, $l = 1, \ldots, n$, tales que $\omega(A_1) \geq \ldots \geq \omega(A_n)$. Dado un nodo $N$ cualquiera de la jerarquía, el intervalo recíproco de estabilidad global de $N$ para un problema $P.\alpha$ viene determinado por $\left[1/\alpha^G(N), \alpha^G(N)\right]$ donde $\alpha^G(N) = \min_{l>1} t_l^*$ y $t_l^*$ es la solución óptima del problema*

$$\text{Min}\, t = \text{Max}\{t_{ij}, i, j = 1, \ldots, p; i \neq j\}$$

$$
\begin{aligned}
s.t. \quad & \\
& \sum_{i=1}^{p} \prod_{j \neq i} t_{ij}^{1/p} \omega(N_i) \left[ \Delta_{1l}^{G,N^c} + \omega^G(N) \Delta_{1l}^{N_i} \right] \geq 0 \\
& t_{ij} t_{ji} = 1 \\
& t_{rs} \geq 0
\end{aligned}
$$

**Teorema 11** *Sea una jerarquía $\mathcal{H}$ con alternativas $A_l$, $l = 1, \ldots, n$, tales que $\omega(A_1) \geq \ldots \geq \omega(A_n)$. Dado un nodo $N$ cualquiera de la jerarquía, el intervalo recíproco de estabilidad global de $N$ para un problema P.$\gamma$ viene determinado por $\left[1/\gamma^G(N), \gamma^G(N)\right]$ donde $\gamma^G(N) = \min_{l>1} t_l^*$ y $t_l^*$ es la solución óptima del problema*

$$
\begin{aligned}
\text{Min}\, t \quad &= \quad \text{Max}\{t_{ij}, i, j = 1, \ldots, p; i \neq j\} \\
s.t. \quad & \\
& \sum_{i=1}^{p} \prod_{j \neq i} t_{ij}^{1/p} \omega(N_i) \left[ \Delta_{l-1,l}^{G,N^c} + \omega^G(N) \Delta_{l-1,l}^{N_i} \right] \geq 0 \\
& t_{ij} t_{ji} = 1 \\
& t_{rs} \geq 0
\end{aligned}
$$

# 6 Conclusiones

Centrándonos en el Análisis de Sensibilidad (estabilidad) de las ordenaciones obtenidas al aplicar el Proceso Analítico Jerárquico, el trabajo determina los intervalos de estabilidad globales de un juicio en dos ámbitos diferentes (problemas tipo $\alpha$ y $\gamma$), esto es, se calcula el intervalo en el que puede oscilar un juicio de una matriz cualquiera de la jerarquía sin que se produzca cambio de rango en la selección de la mejor alternativa (problema tipo $\alpha$) ni cambio de rango en la ordenación de todas las alternativas (problema tipo $\gamma$).

Los intervalos de estabilidad, obtenidos utilizando el método de la media geométrica por filas como procedimiento de priorización, permiten, bajo el paradigma de la racionalidad procedimental multicriterio, detectar hechos diferenciados o regularidades y fijar caminos de consenso que favorezcan el proceso negociador entre los actores implicados en la toma de decisiones. Esta filosofía negociadora está siendo especialmente recomendada en la resolución de problemas complejos en los que intervienen múltiples escenarios, actores y criterios.

# Referencias


[1] Aguarón, J.; Moreno-Jiménez, J.M. (2000a): Local Stability Intervals in the Analytic Hierarchy Process, *European Journal of Operational Research*, 125 (1), 114-133.

[2] Aguarón, J.; Escobar, M.T.; Moreno-Jiménez, J.M. (2001): Consistency Stability Intervals for a Judgement in AHP Decision Support Systems, *European Journal of Operational Research*, in evaluation.

[3] Saaty T. L. (1980) *Multicriteria Decision Making: The Analytic Hierarchy Process.* McGraw-Hill. New York.