RESULTADOS EN UN JUEGO DE DISTRIBUCIÓN DE AGUA OBTENIDA POR COLUSIÓN

SOTO TORRES M.D.
lolasoto@eco.uva.es

FERNÁNDEZ LECHÓN R.
ramonfer@eco.uva.es

UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

RESUMEN

Planteado un juego dinámico en tiempo discreto, tratamos de abordar el problema de la distribución de agua entre dos agricultores que se abastecen de una misma fuente, que no puede agotarse por razones medioambientales y se analizan los consumos que la programación dinámica proporciona a los jugadores al actuar en colusión.

Los consumos obtenidos son funciones de la cantidad de agua existente al inicio, de los aportes durante el horizonte temporal y de los objetivos de consumo que cada agricultor tiene durante los dos intervalos en que dividimos el periodo de riego y será necesario distribuirlos entre los dos jugadores.

Pueden considerarse distintas formas de distribución; en este trabajo se considera una en particular y, a partir de ella, se construye en nuevo juego estático donde las estrategias de los jugadores son los objetivos de consumo durante los intervalos en los que se divide el horizonte temporal y las funciones de pago se definen a partir de los valores que alcanzan los funcionales de los jugadores en el juego dinámico, siguiendo la distribución propuesta. El objetivo del trabajo es determinar si el juego estático así construido admite un equilibrio de Nash en estrategias puras.

Palabras clave: Juego dinámico en tiempo discreto, colusión, equilibrio de Nash.

1. INTRODUCCIÓN

El agua es un recurso natural escaso imprescindible para la vida y para la realización de numerosas actividades económicas, siendo la historia de la humanidad testigo de que su gestión ha sido el germen de innumerables conflictos.

Una de sus utilidades es en usos agrícolas, para el cultivo de productos en regadío con una rentabilidad normalmente superior a otras producciones alternativas. El 40% de la producción mundial de alimentos se obtiene mediante cultivos en regadío; en España el sector agrícola utiliza el 80% de los recursos hídricos totales, en Egipto se utiliza para la producción agrícola el 98% (ver Sumpsi et al. (1998)); sin embargo, otros países como Malta, utilizan todos sus recursos para el abastecimiento de la población.

Es evidente que la escasez de agua provoca situaciones de competencia entre usuarios, problemática en la que se ven envueltos colectivos o personas que necesitan de su abastecimiento, en zonas áridas de escasez real del recurso, para obtener sus producciones. Este trabajo analiza el problema de la distribución de agua entre dos agricultores o dos comunidades de regantes que se abastecen de una misma fuente, que no pueden agotar por razones medioambientales, planteando un juego dinámico en tiempo discreto siguiendo el procedimiento ya utilizado por Levhari et al. (1980), Kaitala et al. (1985), Jorgensen et al. (1990), Soto (1996) y Fernández et al. (1999) para resolver el problema de la distribución de un recurso escaso obteniendo una estrategia de equilibrio del juego.

La demanda del agua es función de las estaciones y el juego propuesto considera un horizonte temporal de una campaña de riego para la cual, cada agricultor, y para cada uno de los dos periodos en los que se divide el horizonte temporal del juego, desea obtener un consumo de agua, de modo que para toda la campaña de riego cada jugador tiene como objetivo minimizar las desviaciones, tomadas cuadráticas, de sus consumos periódicos reales respecto a sus necesidades.

Planteado el juego dinámico, siendo la cantidad de agua en la fuente la variable de estado del problema, que se incrementa por los aportes que llegan a la fuente y disminuye por los consumos de ambos jugadores, y supuesto conocido la cantidad de agua en el momento inicial, podemos obtener distintas estrategias de equilibrio. Nuestro análisis se centra en determinar qué consumos por periodo, proporciona una estrategia de equilibrio del juego dinámico, si los dos agricultores deciden actuar en colusión con objeto de aprovechar totalmente la disposición de agua que entre los dos pueden obtener.

Para obtener estos consumos hemos optado por utilizar programación dinámica, que nos garantiza consistencia fuerte en el tiempo la solución, propiedad que no tenemos garantizada si utilizamos el principio del mínimo. La solución obtenida genera unos consumos para la colusión y será necesario arbitrar un sistema de distribución entre los jugadores para obtener los consumos reales. Son varias las posibilidades que pueden considerarse, por ejemplo, no dar a cada agricultor un consumo inferior que el que podría obtener si sigue un equilibrio feedback de Nash (Fernández et al. (1999)).

En este trabajo, proponemos distribuir el agua obtenida por la colusión del siguiente modo: si la cantidad de agua obtenida permite cubrir las necesidades de ambos jugadores, el agua se distribuirá cubriendo esas necesidades; en caso contrario, se repartirá en partes iguales. Después de obtener los resultados comprobamos que esta distribución respeta las restricciones impuestas en el juego dinámico para cada uno de los jugadores.

Cualquier procedimiento de distribución proporciona una valoración de los funcionales de los dos jugadores y estos resultados, pueden ser considerados para construir y definir un nuevo juego.

En la definición del juego dinámico algunas de las variables consideradas son parámetros, como los aportes a la fuente durante el periodo de riego, las necesidades de consumo por parte de cada uno de los agricultores en los periodos en los que se divide la campaña de riego y la cantidad inicial de agua en la fuente, supuesto que ninguno de ellos tiene capacidad de negociación para modificar su límite de consumo impuesto para el mantenimiento de la fuente. Tanto los aportes como la cantidad de agua en la fuente al comienzo del desarrollo del juego, son parámetros sobre los que los agricultores no tienen capacidad de actuación, la naturaleza parece ser el agente responsable de sus valores. Sin embargo, sus deseos de consumo durante los periodos es una variable de decisión propia cuyos valores inciden sobre la valoración de los dos funcionales.

Nuestro objetivo es ahora, plantear un juego estático entre los dos agricultores. El espacio de estrategias de cada uno de los jugadores se corresponderá con un subconjunto de la recta real que recoja sus necesidades de consumo y las funciones de pago serán los valores que alcanzan los funcionales del juego dinámico para la distribución propuesta. El propósito es determinar si el nuevo juego admite equilibrio de Nash en estrategias puras.

El trabajo está dividido en secciones, en la segunda planteamos el juego dinámico entre los dos agricultores; la sección la tercera analiza la colusión y se determinan las regiones de validez de cada una de las estrategias obtenidas así como, el valor de los funcionales objetivo de cada jugador según el criterio establecido para el reparto del recurso. En la sección cuarta se plantea un nuevo juego y se analiza si admite un equilibrio de Nash no cooperativo.

2. PLANTEAMIENTO DEL JUEGO DINÁMICO.

Designemos por T el periodo temporal del juego durante el cual los dos agricultores, denotados por $P1$ y $P2$, comparten el agua de la fuente y por $x(t)$ el nivel de agua, medido en unidades apropiadas, existente en la fuente al comienzo del periodo t. El parámetro α indica el porcentaje máximo de consumo permitido por la Administración para cada agricultor en cada periodo en que se divide la campaña de riego. Cada agricultor dispondrá de un consumo máximo por periodo, que dependerá del nivel de agua en la fuente, esto es, podrá consumir $\alpha x(t)$ con $\alpha < \frac{1}{2}$; esta condición garantiza que la fuente no se agota y, por consiguiente, parte del agua puede dedicarse a otros usos. Sean u y v las necesidades de agua del agricultor $P1$ y $P2$ respectivamente en el periodo $(t, t+1]$ y $u(t)$ y $v(t)$ sus consumos reales durante el mismo periodo.

Cada agricultor pretende adecuar los consumos a sus necesidades reales y, por tanto, el problema a resolver para los jugadores $P1$ y $P2$ será respectivamente:

$$\underset{u(t)}{min}\ J_1(u(t),v(t)) = \frac{1}{2}\sum_{t=0}^{T-1}\left[u(t)-u\right]^2, \quad s.a: 0 \le u(t) \le \alpha x(t) \ ,$$

$$\underset{v(t)}{min}\ J_2(u(t),v(t)) = \frac{1}{2}\sum_{t=0}^{T-1}\left[v(t)-v\right]^2, \quad s.a: 0 \le v(t) \le \alpha x(t) \ .$$

Los consumos reales de los agricultores no pueden ser negativos y el nivel de agua en la fuente variará en cada periodo en función de los aportes a la fuente y de los consumos de los agricultores. La evolución del agua en la fuente satisface $x(t+1) = x(t) + g - u(t) - v(t)$, donde g es la cantidad de agua que se incorpora a la fuente en el periodo $(t, t+1]$, que suponemos constante y conocida por los agricultores, al igual que el nivel de agua al comienzo $x(0)$ y los parámetros α, u y v .

3. ANÁLISIS DE LA COLUSIÓN.

Si los jugadores pretenden aprovechar todo el agua que entre los dos pueden obtener de la fuente actuarán como un único jugador, y el problema a resolver será:

$$\underset{u(t)+v(t)}{min}\ \frac{1}{2}\sum_{t=0}^{T-1}\left[u(t)+v(t)-u-v\right]^2, \quad s.a: 0 \le u(t)+v(t) \le 2\alpha x(t) \ ,$$

conociendo que la evolución del agua en la fuente sigue la ecuación en diferencias $x(t+1) = x(t) + g - u(t) - v(t)$, con $x(0)$ dado.

Observemos, que la solución que nos debe proporcionar este planteamiento no tiene por qué coincidir con las que obtendría un jugador cooperativo, pues éste formularía un problema con un funcional objetivo combinación convexa de los funcionales objetivos de los dos jugadores, pero mantendría para el jugador cooperativo las mismas restricciones que cada agricultor tiene sobre su consumo.

Para resolver el problema planteado, dividimos el horizonte temporal en dos periodos y utilizamos programación dinámica para que la solución presente buenas propiedades; en este caso hemos de considerar la función de valor $W(t, x(t))$ en el instante t cuando la variable de estado vale $x(t)$ para $t = 0,1,2$ con $W(2, x(2)) = 0$ y resolver un primer problema:

$$W(1, x(1)) = \min_{u(1)+v(1)} \frac{1}{2}\left[u(1) + v(1) - u - v\right]^2 \; s.a: 0 \le u(1) + v(1) \le 2\alpha x(1) \; ,$$

cuya solución nos permite formular el siguiente problema para la primera etapa:

$$W(0, x(0)) = \min_{u(0)+(0)} \left\{ \frac{1}{2}\left[u(0) + v(0) - u - v\right]^2 + W(1, x(1)) \right\}, \; s.a: 0 \le u(0) + v(0) \le 2\alpha x(0),$$

que resuelto determina los consumos de la colusión.

Realizado el proceso, la solución obtenida presenta cuatro posibilidades caracterizadas por los consumos para el primero de los periodos en los que se ha dividido el horizonte de planificación de riego, por los consumos para el segundo periodo y por las relaciones que tienen que verificar los parámetros para que esos consumos sean óptimos.

En un caso, los consumos de la colusión tanto en el primer periodo como en el segundo satisfacen $u(t) + v(t) = u + v$ luego, en ambos periodos se proporciona un consumo cuya suma coincide con la suma de los deseos de los dos agricultores en cada periodo. Si llamamos $x = \alpha x(0)$, la colusión obtiene estos consumos cuando

$$2x \ge \max \left\{ u + v, (1 + 2\alpha)(u + v) - 2\alpha g \right\}$$

relaciones que delimitan una región paramétrica que denotaremos por A.

En un segundo caso, los consumos de la colusión vienen determinados por las relaciones:

$$u(0) + v(0) = 2x \; , \; u(1) + v(1) = u + v \; ,$$

luego, en el primer periodo la colusión obtiene la suma de las cotas superiores de los consumos de los dos jugadores y en el segundo periodo la suma de las necesidades de consumo. Para la optimalidad de estos consumos, los parámetros tienen que satisfacer:

$$\frac{u + v - 2\alpha g}{1 - 2\alpha} \le 2x < u + v \; ,$$

condiciones que delimitan la región paramétrica B.

En un tercer caso, los consumos son $u(0)+v(0)=2x$, para el primer periodo, y $u(1)+v(1)=2\alpha x(1)$ para el segundo, por tanto, en ambos periodos la colusión obtiene la disponibilidad máxima que los agricultores tienen para sus consumos. Si en el primer periodo consumen $2x$, en el segundo periodo, la cantidad de agua que consumen será $u(1)+v(1)=2((1-2\alpha)x+\alpha g)$. En este caso, los parámetros tienen que satisfacer las relaciones,

$$2x < min\left\{\frac{u+v-2\alpha g}{1-2\alpha}, \frac{(1-2\alpha)(u+v)+4\alpha^2 g}{1+4\alpha^2-2\alpha}\right\},$$

que delimitan una región que representamos por C.

En el último caso, cuando los parámetros satisfacen,

$$\frac{(1-2\alpha)(u+v)+4\alpha^2 g}{(1+4\alpha^2-2\alpha)} \leq 2x < (1+2\alpha)(u+v)-2\alpha g ,$$

relaciones que conforman la región D; en el primer periodo los consumos vienen determinados por la expresión,

$$u(0)+v(0)=\frac{1}{1+4\alpha^2}\left[(u+v)(1-2\alpha)+4\alpha(x+\alpha g)\right],$$

que pertenece al intervalo $(0,2x)$ y en el segundo periodo $u(1)+v(1)=2\alpha x(1)$, suma de las cotas superiores de los consumos permitidos y si la cantidad de agua se utiliza totalmente en el primer periodo, entonces el consumo en el segundo es

$$u(1)+v(1)=2(x+\alpha g-\alpha\frac{(u+v)(1-2\alpha)+4\alpha(x+\alpha g)}{1+4\alpha^2}) .$$

Las relaciones entre los parámetros donde son óptimos los correspondientes consumos obtenidos establecen regiones de un plano, si de los cinco parámetros implicados tres se mantienen fijos. Supongamos que fijamos los parámetros α , cantidad de agua en la fuente en el momento inicial $x(0)$ y los aportes a la fuente g en cada uno de los periodos y mantenemos como variables los parámetros u y v , que son las únicas variables de decisión que tienen los dos agricultores antes del inicio del juego dinámico.

Bajo esta hipótesis y considerando el plano (u,v) , podemos obtener gráficamente las regiones del plano para las que las correspondientes soluciones son óptimas. Encontramos tres posibilidades dependiendo de que $g < 2x$, $g = 2x$ o $g > 2x$. Cuando $g > 2x$, las regiones A, B y C realizan una partición del primer cuadrante de este plano, que recogemos en la Figura 1, con $h_1 = 2x$ y $h_3 = 2\left[(1-2\alpha)x + \alpha g\right]$; si $g < 2x$, las regiones que determinan la partición del primer cuadrante son A, C y D (Figura 2), donde $h_2 = \frac{2}{1+2\alpha}(x + \alpha g)$ y $h_4 = \frac{1}{1-2\alpha}\left[2x(1+4\alpha^2 - 2\alpha) - 4\alpha^2 g\right]$.

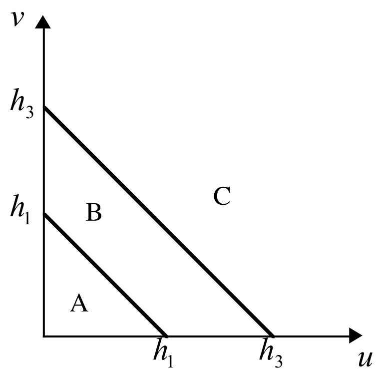

Figura 1: $g > 2x$

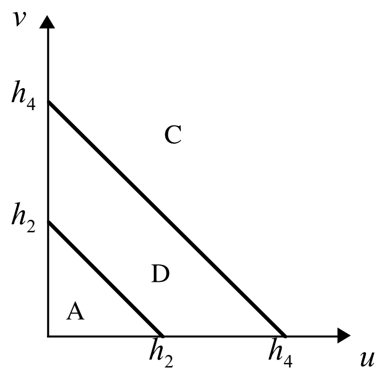

Figura 2: $g < 2x$

La gráfica cuando $g = 2x$, puede obtenerse fácilmente desde las dos anteriores al eliminar la región central, siendo solamente, en este caso, activas las regiones A y D, que también intervienen en los otras dos situaciones.

Un problema asociado a la colusión es la distribución, en nuestro caso, del agua obtenido por ella. Supongamos que los consumos que la colusión obtiene se reparten siguiendo el siguiente criterio: si la solución propuesta en cualquier periodo es $u + v$, entonces, el jugador $P1$ puede utilizar u y el jugador $P2$ puede utilizar v ; si el consumo óptimo no permite obtener $u + v$, entonces el consumo conseguido por la colusión se reparte en partes iguales para los dos jugadores, independientemente de que las cantidades deseadas por ambos sean diferentes o no.

Este criterio lleva implícito que cada jugador se encuentra dentro de los límites impuestos por la restricción del juego dinámico y, por tanto, es una solución posible para cada uno de los periodos en los que hemos dividido el horizonte temporal. Si evaluamos los valores de los funcionales de los jugadores, en el juego dinámico para estos consumos, podemos establecer una correspondencia entre regiones y valores que alcanzan los funcionales. Así pues, hemos de estudiar el comportamiento de estos funcionales en las regiones.

En la región A los dos jugadores, en ambos periodos, obtienen tanta agua como desean y sus desviaciones son nulas $J_1(u,v) = 0$ y $J_2(u,v) = 0$.

En la región B, tenemos

$$J_1(u,v) = \frac{(x-u)^2}{2}, \quad J_2(u,v) = \frac{(x-v)^2}{2},$$

funciones convexas que admiten un mínimo en $u = x$ y $v = x$ respectivamente, donde las funciones se anulan. El punto (x,x) , donde ambos jugadores minimizan sus pagos, pertenece a la frontera común que la región B tiene con la región A.

En la región C la función de pago para el primer jugador es,

$$J_1(u,v) = \frac{(x-u)^2}{2} + \frac{((1-2\alpha)x + \alpha g - u)^2}{2},$$

función convexa que admite un mínimo en $u_m = x + \frac{\alpha}{2}(g-2x)$, siendo entonces el pago $\frac{\alpha^2}{4}(g-2x)^2$. Si $g > 2x$, tenemos $x < u_m < x + \alpha(g-2x) = \frac{1}{2}h_3$ y, por tanto, $(u_m,0)$ es un punto que está en la región A si $\alpha(g-2x) \le 2x$ y en la B en caso contrario. Si $g < 2x$, entonces $u_m > \frac{1}{2}h_2$ y ahora $(u_m,0)$ está en la región A si $\alpha\,\frac{2\alpha-3}{1+2\alpha}(g-2x) \le 2x$ y en la D en caso contrario.

En la región C la función de pago para el segundo cultivador es,

$$J_2(u,v) = \frac{(x-v)^2}{2} + \frac{((1-2\alpha)x + \alpha g - v)^2}{2},$$

verificando las mismas propiedades.

Las funciones de pago de los jugadores son discontinuas en la frontera entre las regiones C y B; sin embargo, son continuas en la frontera entre las regiones C y D que pasamos a analizar.

En la región D, para el primer jugador, encontramos que su función de pago es

$$J_1(u,v) = \frac{1}{2}\left[(\tfrac{1}{2}f(u,v,x,g) - u)^2 + (x + \alpha g - u - \alpha f(u,v,x,g))^2\right],$$

y para el segundo,

$$J_2(u,v) = \frac{1}{2}\left[(\tfrac{1}{2}f(u,v,x,g) - v)^2 + (x + \alpha g - v - \alpha f(u,v,x,g))^2\right],$$

siendo $f(u,v,x,g) = \frac{(u+v)(1-2\alpha)+4\alpha(x+\alpha g)}{1+4\alpha^2}$. La función $J_1(u,v)$, análogos resultados pueden establecerse para la función $J_2(u,v)$, es convexa y admite un mínimo en $(u,v) = (\frac{x+\alpha g}{1+2\alpha}, \frac{x+\alpha g}{1+2\alpha})$ que pertenece a la frontera de las regiones A y D cuando $g < 2x$ alcanzando en él la función $J_1(u,v)$ un valor nulo; también, fijado v, la función alcanza un mínimo sobre la recta

$$u = \frac{(1-2\alpha)^2 v + 4(1+2\alpha)(x+\alpha g)}{20\alpha^2 + 12\alpha + 5},$$

cuya ordenada en el origen crece si v lo hace. En la frontera común que esta región tiene con la región A las funciones no son continuas.

4. EL JUEGO ESTÁTICO CONTINUO

Podemos, ahora, plantear un nuevo juego siendo el espacio de estrategias del primer jugador el conjunto de posibles valores de la variable de decisión u, que supondremos es un intervalo $U \subset \Re^{++}$; análogamente, para el segundo jugador, supondremos que su espacio de estrategias es un intervalo $V \subset \Re^{++}$ y, por tanto, el espacio de estrategias del juego será $U \times V$. La función de pago del primer jugador es $J_1(u,v)$ y la del segundo $J_2(u,v)$ siguiendo las definiciones establecidas en la sección previa.

Por tanto, si $g > 2x$ los pagos de los jugadores vienen determinados por las funciones,

$$J_1(u,v) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \le u + v \le 2x \\ \frac{1}{2}(x-u)^2 & si \quad 2x < u + v < 2((1-2\alpha)x + \alpha g) \\ \frac{(x-u)^2}{2} + \frac{((1-2\alpha)x + \alpha g - u)^2}{2} & si \quad 2((1-2\alpha)x + \alpha g) \le u + v \end{cases}$$

$$J_2(u,v) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \le u+v \le 2x \\ \frac{1}{2}(x-v)^2 & si \quad 2x < u+v < 2((1-2\alpha)x+\alpha g) \\ \frac{(x-v)^2}{2} + \frac{((1-2\alpha)x+\alpha g-v)^2}{2} & si \quad 2((1-2\alpha)x+\alpha g) \le u+v \end{cases}$$

que no son funciones continuas.

Si $g \le 2x$, los pagos de los jugadores que tampoco son funciones continuas son,

$$J_1(u,v) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \le u+v \le \frac{2(x+\alpha g)}{1+2\alpha} \\ f_1(u,v,x,g) & si \quad \frac{2(x+\alpha g)}{1+2\alpha} < u+v < 2x + \frac{4\alpha^2(2x-g)}{1-2\alpha} \\ \frac{(x-u)^2}{2} + \frac{((1-2\alpha)x+\alpha g-u)^2}{2} & si \quad 2x + \frac{4\alpha^2(2x-g)}{1-2\alpha} \le u+v \end{cases}$$

$$J_2(u,v) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \le u+v \le \frac{2(x+\alpha g)}{1+2\alpha} \\ f_2(u,v,x,g) & si \quad \frac{2(x+\alpha g)}{1+2\alpha} < u+v < 2x + \frac{4\alpha^2(2x-g)}{1-2\alpha} \\ \frac{(x-v)^2}{2} + \frac{((1-2\alpha)x+\alpha g-v)^2}{2} & si \quad 2x + \frac{4\alpha^2(2x-g)}{1-2\alpha} \le u+v \end{cases}$$

donde

$$f_1(u,v,x,g) = (\tfrac{1}{2}f(u,v,x,g)-u)^2 + (x+\alpha g-u-\alpha f(u,v,x,g))^2$$

$$f_2(u,v,x,g) = (\tfrac{1}{2}f(u,v,x,g)-v)^2 + (x+\alpha g-v-\alpha f(u,v,x,g))^2 \quad .$$

Tenemos un nuevo juego entre los dos jugadores, de suma no nula, en el que pretendemos encontrar un equilibrio de Nash, no cooperativo, en estrategias puras para sus necesidades de consumo, esto es, tratamos de encontrar un par de estrategias $(u^*,v^*) \in U \times V$ tal que

$$J_1(u^*,v^*) \le J_1(u,v^*), \quad J_2(u^*,v^*) \le J_2(u^*,v) \quad ,$$

para todo $(u,v) \in U \times V$.

Ahora bien, como las funciones de pago de los jugadores no satisfacen las propiedades que garantizan el equilibrio para cualquier espacio de estrategias del juego, sea acotado o no (ver Friedman (1989, págs. 25, 39)), no tenemos asegurado que el juego propuesto admita equilibrio de Nash y para determinar si tal estrategia de equilibrio existe, necesitamos analizar el comportamiento de las funciones de pago dependiendo del espacio de estrategias de cada jugador.

Supongamos que la relación entre las aportaciones a la fuente por periodo y la cantidad de agua inicial que puede consumirse entre los dos jugadores es $g > 2x$. El equilibrio de Nash, que siempre existe, depende del espacio de estrategias del juego y tenemos:

- Si $U \times V = (0,\infty)\times(0,\infty)$, ambos jugadores pueden seleccionar estrategias de modo que sus elecciones pertenezcan a la región A, donde ambos consiguen una pérdida nula. Luego, cualquier estrategia (u^*,v^*) que verifique $0 < u^* + v^* \leq 2x$ es un equilibrio de Nash, al satisfacerse,

  $$J_1(u^*,v^*) = 0 \leq J_1(u,v^*), \quad J_2(u^*,v^*) = 0 \leq J_2(u^*,v) \ ,$$

  para todo $u > 0, v > 0$.

  En este caso, al existir multiplicidad de equilibrios y supuesto que los jugadores no cooperan entre sí para determinar el equilibrio a elegir, es posible que los jugadores seleccionen valores de u^* y v^* que les lleve a obtener pérdidas no esperadas. Existe, sin embargo, una estrategia de seguridad para ambos jugadores y es seleccionar unas necesidades de consumo en una cuantía x , o un valor inferior, en este caso, el jugador que se desvía puede incrementar sus pérdidas.

- Si $U \times V = [2x,\infty)\times(0,\infty)$ tenemos varias posibilidades dependiendo de la distancia entre las rectas que determinan la frontera de la región B con las regiones A y C.

  Si $x \leq 2\alpha(g-2x)$, el punto $(2x,x)$ pertenece a la región B y la estrategia de equilibrio de Nash, no cooperativa, es $(u^*,v^*) = (2x,x)$ pues encontramos,

  $$J_1(2x,x) = \frac{1}{2}x^2 \leq J_1(u,x), \quad J_2(2x,x) = 0 \leq J_2(2x,v) \ ,$$

  para todo $u \geq 2x, v > 0$.

Gráficamente podemos observar este resultado. Las figuras 3 y 4 muestran respectivamente el comportamiento de $J_1(u,x)$ y $J_2(2x,v)$ con $u \geq 2x$ para $x = 5$, $\alpha = \frac{1}{4}$ y $g = 30$ que son valores que verifican las condiciones.

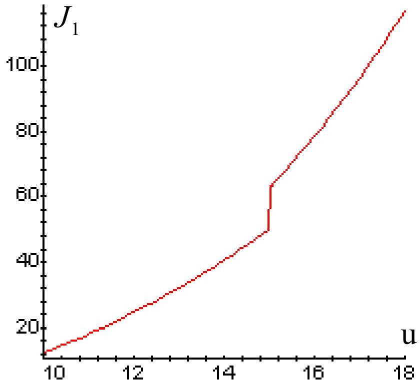

Figura 3: $J_1(u,x), u \geq 2x$

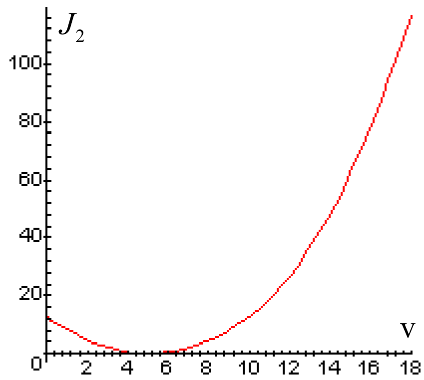

Figura 4: $J_2(2x,v), v > 0$

Si $2\alpha(g-2x) < x$, el punto $(2x,x)$ pertenece a la región C y el segundo jugador, ya que el primero sólo puede seleccionar $u^* = 2x$, puede conseguir que su resultado sea diferente pues su elección le permite lograr que la estrategia conjunta pertenezca a la región B o a la C.

Su estrategia, por tanto, será seleccionada dependiendo de si la relación

$$(u - v)^2 < \frac{\alpha^2}{4}(g-2x)^2 ,$$

es cierta o no. Si existen valores de v verificando la relación anterior, también verifican

$$x - \frac{\sqrt{2}}{2}\alpha(g-2x) < v < 2\alpha(g-2x) ,$$

y para que sea cierto se ha de verificar $2\alpha(g-2x) < x < (2 + \frac{\sqrt{2}}{2})\alpha(g-2x)$, con lo que elegirá $v^* = 2\alpha(g-2x) \in B$; si no es cierta la relación entonces elegirá $v^* = v_m$, donde $v_m = x + \frac{\alpha}{2}(g-2x)$.

En las figuras 5 y 6 se muestra el comportamiento de $J_2(2x,v)$, la primera para los valores $x = 8$, $\alpha = \frac{1}{4}$ y $g = 30$ que verifican la última relación y el mínimo se alcanza en $v^* = 2\alpha(g-2x) = 7$; la Figura 6 se ha tomado $x = 10$, $\alpha = \frac{1}{4}$ y $g = 30$ y el mínimo se alcanza en $v^* = v_m$.

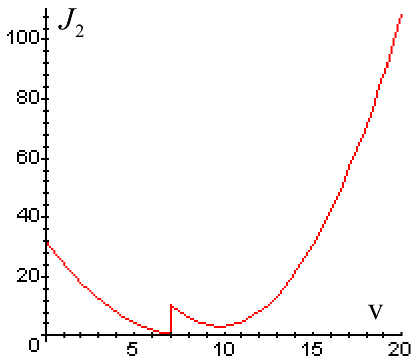

Figura 5: $J_2(2x, v)$

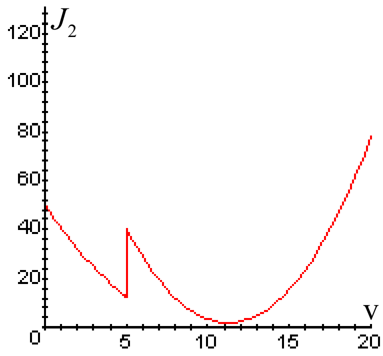

Figura 6: $J_2(2x, v)$

Análogo resultado obtendremos si los jugadores intercambian su conjunto de estrategias, esto es, $U \times V = (0, \infty) \times [2x, \infty)$.

- Si $U \times V = [2(x+\alpha(g-2x)), \infty) \times (0, \infty)$, el resultado de la selección de los jugadores siempre se encontrará en la región C. El segundo jugador siempre elegirá la estrategia donde su función de pérdidas alcanza el mínimo y el primer jugador aquella estrategia que le desvíe lo mínimo del valor donde su pago se hace mínimo. Por tanto, el equilibrio de Nash, en este caso, es $(u^*, v^*) = (2(x+\alpha(g-2x)), v_m)$. Tenemos,

$$J_1(2(x+\alpha(g-2x)), v_m) \leq J_1(u, v_m)$$

$$J_2(2(x+\alpha(g-2x)), v_m) = \tfrac{\alpha^2}{4}(g-2x)^2 \leq J_2(2(x+\alpha(g-2x)), v)$$

para todo $u \geq 2(x+\alpha(g-2x)),\ v > 0$.

Análogo resultado encontramos, si los jugadores intercambian su conjunto de estrategias.

- Si $U \times V = [2x, \infty) \times [2x, \infty)$ cualquier selección de los jugadores pertenecerá a la región B o C, no existiendo posibilidad, por parte de ningún jugador, de seleccionar la estrategia que minimiza sus pérdidas en la región C. Ambos, jugadores, por tanto, ante cualquier actuación del otro jugador, seleccionarán sus valores mínimos dentro de sus posibilidades de elección. Análogo resultado se encuentra si el espacio de estrategias del juego es, $U \times V = [2(x+\alpha(g-2x)),\infty) \times [2(x+\alpha(g-2x)),\infty)$, donde la selección recae en la región C o bien, $U \times V = [2(x+\alpha(g-2x)),\infty) \times [2x,\infty)$, que también las selecciones corresponden a la región C.

Supongamos ahora que la relación entre las aportaciones a la fuente en cada periodo y el consumo máximo permitido en el primer periodo para los dos jugadores, satisface $g < 2x$. De nuevo, podemos considerar distintos espacios de estrategias del juego.

- Si $U \times V = (0,\infty) \times (0,\infty)$, la selección de los dos jugadores puede recaer en la región A donde los dos obtienen un pago nulo, luego, cualquier estrategia posible (u^*, v^*) que verifique $0 < u^* + v^* \leq 2\frac{x+\alpha g}{1+2\alpha}$ es equilibrio de Nash pues satisface:

  $$J_1(u^*, v^*) = 0 \leq J_1(u, v^*), \quad J_2(u^*, v^*) = 0 \leq J_2(u^*, v),$$

  para todo $u > 0,\ v > 0$.

  También ahora, debido a la multiplicidad de equilibrios y puesto que los jugadores no cooperan para elegir el equilibrio, es posible que los jugadores seleccionen valores de u^* y v^* que les lleve a obtener pérdidas no esperadas. La estrategia de seguridad para cada jugador, en este caso, es seleccionar unas necesidades inferiores o iguales a $\frac{x+\alpha g}{1+2\alpha}$.

- Si $U \times V = \left[\frac{2(x+\alpha g)}{1+2\alpha},\infty\right) \times (0,\infty)$ cualquier elección por parte de los jugadores recaerá en la región D o en la C. El primer jugador minimizará sus pérdidas si

  $$u^* = \frac{2(x+\alpha g)}{1+2\alpha},$$

  y el segundo jugador seleccionará:

$$v^* = \frac{(1-2\alpha)^2 u^* + 4(1+2\alpha)(x+\alpha g)}{20\alpha^2 + 12\alpha + 5},$$

teniendo en cuenta el valor de u^*.

En las figuras 7 y 8 representamos $J_1(u, v^*)$ y $J_2(u^*, v)$ para $u \geq \frac{2(x+\alpha g)}{1+2\alpha}$ y $v > 0$, con $x = 5$, $\alpha = \frac{1}{4}$ y $g = 5$.

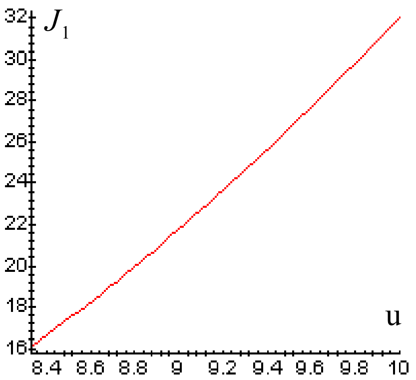

Figura 7: $J_1(u, v^*),\ u \geq \frac{2(x+\alpha g)}{1+2\alpha}$

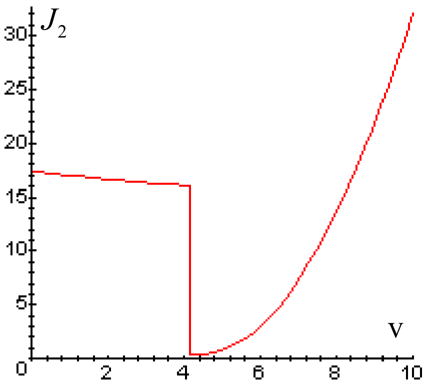

Figura 8: $J_2(u^*, v),\ v > 0$

- Si $U \times V = \left[2x + \frac{4\alpha^2(2x+g)}{1-2\alpha}, \infty\right) \times (0, \infty)$ cualquier selección de los jugadores proporcionará unas pérdidas determinadas por la región C.

  El segundo jugador, que tiene posibilidades de considerar su valor mínimo independientemente de la elección del otro jugador, elegirá v_m y el primer jugador el valor que le desvíe en menor medida de u_m. La estrategia de equilibrio será:

$$(u^*, v^*) = \left(2x + \frac{4\alpha^2(2x-g)}{1-2\alpha}, v_m\right).$$

  Análogos resultados obtendríamos si los jugadores intercambian su espacio de estrategias.

- Si $U \times V = \left[\frac{2(x+\alpha g)}{1+2\alpha}, \infty\right) \times \left[\frac{2(x+\alpha g)}{1+2\alpha}, \infty\right)$ o bien,

$$U \times V = \left[2x + \frac{4\alpha^2(2x-g)}{1-2\alpha}, \infty\right) \times \left[2x + \frac{4\alpha^2(2x-g)}{1-2\alpha}, \infty\right),$$

$$U \times V = \left[2x + \frac{4\alpha^2(2x-g)}{1-2\alpha}, \infty\right) \times \left[\frac{2(x+\alpha g)}{1+2\alpha}, \infty\right),$$

también ahora en todos los casos, la estrategia de equilibrio (u^*, v^*) corresponde, para ambos jugadores, a los valores de selección menores.

El estudio del caso donde $g = 2x$ no aporta ningún nuevo resultado.

6.- CONCLUSIONES

La gestión de agua compartida para usos agrícolas puede presentar distintas soluciones, en este trabajo hemos analizado una de estas posibilidades suponiendo que dos usuarios constituyen una colusión para el aprovechamiento total del recurso que entre ambos disponen, lo que incide en la cantidad de agua disponible para otros usos.

La solución propuesta, que depende de las variables de decisión de los usuarios, se utiliza para construir un nuevo juego en el que los pagos son funciones de $\Re^2$ en $\Re$.

El trabajo prueba que el nuevo juego admite equilibrio de Nash no cooperativo debido a que las funciones de pago, definidas en distintas particiones del primer cuadrante, son funciones convexas en cada una de las regiones en las que están definidas, aunque no lo son en todo $\Re^2$ y no son continuas en su dominio de definición. Este equilibrio proporciona información a los usuarios para determinar sus posibles necesidades de consumo.

El trabajo abre nuevas vías de análisis, unas directamente relacionadas con él como son estudiar en el juego dinámico otros equilibrios, mantener la colusión con otra distribución del aguan conseguida, analizar, en cada caso, nuevos equilibrios del juego continuo o discreto si las elecciones de los jugadores se suponen tienen esta característica y eliminar el comportamiento determinista de las variables g y x , supuesto que se ha considerado en el trabajo y que, sin embargo, parece ser una cuestión propia de la actuación de la naturaleza.

Todos los resultados han sido obtenidos mediante Maple V.

7. BIBLIOGRAFÍA

Aguilera Klink, F. (1993): "El problema de la planificación hidrológica. Una perspectiva diferente", *Revista de Economía Aplicada*, Vol. I, núm. 2, págs. 209-216.

Basard, T. y Olsder, G.J. (1995): *Dynamic Noncooperative Game Theory*. San Diego. Academic Press.

FAO (Organización de las Naciones Unidas para la Agricultura y la Alimentación) (1994): *Necesidades y abastecimiento de agua de los sistemas de riego. Manejo del agua de riego*. Manual de campo, núm. 6. Roma. FAO.

Fernández, R. y Macarro, M.J. (1999): "Estrategias de equilibrio feedback en un juego de distribución de agua para regadío". *Anales de Economía Aplicada*, Vol. XIII.

Friedman, J.W. (1989): *Game Theory with Applications to Economics*. New York. Oxford University Press.

Gibbons, R. (1992): *A Primer in Game Theory*. London. Harvester Wheatsheaf.

Jorgensen, S. y Sorger, G. (1990): "Feedback Nash Equilibria in a Problem of Optimal Fishery Management", *Journal of Optimization Theory and Appications*, Vol. 64, núm. 2, págs. 293-310.

Kaitala, V., Hamalainen, R.P. y Ruusunen, J. (1985): "On The Analysis of Equilibria and Bargaining in a Fishery Game", en *Optimal Theory and Economic Analysis 2*. (G. Feichtinger Ed.). Amsterdam. North-Holland, págs. 593-606.

Levhari D. y Mirman L.J. (1980): "The Great Fish War: An Example Using a Dynamic Cournot-Nash Solution", *The Bell Journal of Economics*, págs. 322-334.

Ley 29/1985, de 2 de Agosto, de Aguas. (1993): *Legislación sobre Aguas*. Madrid. Civitas.

Soto Torres, M.D. (1996): "Distribución de Agua para Regadíos", *5º Congreso de Economía Regional de Castilla y León*, págs. 82-96.

Sumpsi Viñas, J.M., Garrido Colmenero, A. y otros (1998): *Economía y Política de Gestión del Agua en la Agricultura*. Madrid. Mundi-Prensa.