Diseño de canales de servicio en grandes superficies con evaluación de costes. Aplicación a establecimientos de la Ribera de Navarra

- Javier Faulín Fajardo, Profesor Asociado del Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad Pública de Navarra (javier.faulin@unavarra.es) en Campus Arrosadía, 31006- Pamplona (Navarra).
- Francisco Javier Estévez Jiménez, Profesor de Enseñanza Secundaria del I.E.S. "Benjamín de Tudela" del Departamento de Educación y Cultura del Gobierno de Navarra (jestevej@pnte.cfnavarra.es) en Avenida Instituto s/n de 31500-Tudela (Navarra).

Tipo de contribución: Comunicación **Área:** Economía Industrial y de Servicios

1. INTRODUCCIÓN

La zona de atracción de un equipamiento comercial representa el área geográfica de donde proviene la población en la que se basa su cifra de ventas. Su extensión y límites no tiene por qué apoyarse en límites administrativos concretos y normalmente viene definida en función de criterios tales como: la naturaleza, tamaño y localización del centro comercial, posible disponibilidad de usos complementarios, la orientación y la calidad de los accesos, la distribución de la población, la proximidad de equipamientos comerciales competitivos, la existencia de barreras naturales y artificiales, etc.

Considerando lo anteriormente expuesto, se ha seleccionado una gran superficie, a la que denominaremos **Hipermercados Ribera**, cuya ubicación se halla en una población que es cabecera de comarca y la cual está integrada por veintidós municipios y también es cabecera regional al tener poblaciones de comarcas colindantes sobre las que ejerce su influencia, por lo que la población incluida en su área de atracción asciende aproximadamente a cien mil personas. La privilegiada situación de esta población, en el Valle medio del Ebro hace que sea el centro de mercado de la Ribera. Además es nudo donde convergen las comunicaciones en el denominado *eje del Ebro* (trayecto que une el Mediterráneo y el Cantábrico) y el *eje Madrid-Francia* (pasando por Soria y Pamplona).

Hipermercados Ribera dispone de las siguientes secciones: alimentación, droguería, productos lácteos, bazar, moda y confección, charcutería, pescadería, panadería, perfumería, electrodomésticos, disco-libro y joyería-relojería. También tiene una *galería comercial* con una oferta muy diversa.

2. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

La gran superficie seleccionada cuenta con 36 cajas registradoras, teniendo en cuenta que dos de ellas funcionan el viernes y sábado como cajas rápidas, facturando y cobrando a los clientes que no rebasan los diez artículos.

El problema que se plantea a la gran superficie consiste en determinar cuántas cajas registradoras, cada una de ellas manejadas por un empleado, son necesarias de lunes a sábado. En esta decisión hay que describir asimismo la planificación de cajeros por franjas horarias, teniendo en cuenta que el centro comercial se abre al público a las 10,00 horas y se cierra a las 22,00 horas.

La decisión del número de cajas a poner en funcionamiento, en cada momento, está originada por la existencia de costes. La gran superficie se enfrenta a la decisión de mejorar el servicio, reduciendo la longitud de la cola y haciendo esperar, en la misma, el menor tiempo posible a los clientes, o tener un peor servicio generando un malestar que pudiera ocasionar pérdidas de clientes. La mejora en el servicio podría suponer un incremento del número de cajas y consecuentemente del coste de salarios del personal o el coste de oportunidad de no atender otros servicios o trabajos si no estuvieran en las cajas registradoras.

Ante esta situación, **Hipermercados Ribera** busca una solución, entre varias opciones, que permita un adecuado equilibrio entre los dos intereses contrapuestos. Esta solución sería aquella que con el menor número de cajas se consiga un tiempo de espera y una longitud de cola razonables.

Habitualmente la gerencia planifica sobre la base de la experiencia y sobre la base de datos históricos de flujos medios de clientes y de tiempos medios de servicio, en cada uno de los días de la semana y en las diferentes franjas horarias. Nos parecen muy interesantes estas aproximaciones, pero consideramos que se deberían complementar con la aplicación de modelos matemáticos, basados en la Teoría de Colas (Eppen, Gould et al. (2000), Hillier y Liebermann (2002), Mathur y Solow (1996)) que permitan una mayor optimización de los recursos humanos y discurrir por una senda de menor incertidumbre. Precisamente esto último es el objeto de esta comunicación.

3. RECOLECCIÓN DE DATOS

El proceso de recolección de datos es una parte muy importante en estos estudios. Derivado de esta actividad de campo se consiguieron datos que los clasificamos de la siguiente manera:

- Tiempos de llegadas de clientes al sistema. Se obtienen por medición directa en las propias instalaciones en cada una de las franjas horarias y en diferentes semanas, siendo el tamaño de la muestra de 12 semanas (Octubre, Diciembre y Abril del año 2001). Con la finalidad de conseguir una mayor aproximación a la realidad, se escogieron semanas en las que hubiera mayor actividad, como el mes de diciembre en el que concurren las Fiestas de Navidad y otras en las que aquélla descendía, aunque no es posible recoger la totalidad de las casuísticas comerciales que se presentan en las grandes superficies.
- Tiempos de servicio. Proceden de unos documentos, denominados *estadísticas cajera*, facilitados por **Hipermercados Ribera**. En estas estadísticas se reflejan tres tiempos, el de facturación, el de cobro y tiempo de espera (otras incidencias que pudieran surgir que no tengan relación con los anteriores) que sumados indican el tiempo de servicio o tiempo que transcurre desde que se empieza a atender a un cliente hasta que sale del sistema. Los datos obtenidos, de los informes estadísticos, corresponden a todas las franjas horarias y en las mismas semanas y meses en que se tomaron las mediciones de los tiempos de llegadas.

Una vez que se tienen tabulados los tiempos de llegada y los de servicio, se procede a calcular el promedio de los tiempos correspondientes a la misma hora y día de las diferentes semanas

En virtud de lo anterior se puede afirmar que el resultado final será una semana modélica, que va a servir de punto de partida en las decisiones que se tomen en cada momento, sobre la planificación de la Sección de Cajas. Los resultados van a ser una buena referencia sobre las necesidades globales. Debe entenderse que los resultados del modelo pueden ser válidos en circunstancias de mercado normales, pero pueden existir semanas en las que los resultados no se ajusten a lal realidad porque determinados eventos (climatológicos, sociales, culturales, deportivos o de otra índole) alteren esa normalidad.

4. CÁLCULO DE PARÁMETROS

4.1. Parámetros.

A partir del tratamiento estadístico de los datos, y obtenido el tiempo promedio de servicio (**$1/\mu_{ij}$**) y el tiempo promedio de llegadas por minuto (**$1/\lambda_{ij}$**), determinaremos el tipo de distribución. Los referidos tiempos promedio quedan recogidos en la siguiente tabla:

	LUNES		**MARTES**		**MIÉRCOLES**		**JUEVES**		**VIERNES**		**SÁBADO**	
	$1/\lambda_{ij}$	$1/\mu_{ij}$	$1/\lambda_{ij}$	$1/\mu_{ij}$	$1/\lambda_{ij}$	$1/\mu_{ij}$	$1/\lambda_{ij}$	$1/\mu_{ij}$	$1/\lambda_{ij}$	$1/\mu_{ij}$	$1/\lambda_{ij}$	$1/\mu_{ij}$
10 a 11	1,83	1,20	1,12	0,78	1,16	0,44	1,25	0,62	0,91	0,48	1,73	0,60
11 a 12	1,61	0,34	1,45	0,37	1,72	0,27	1,73	0,30	1,90	0,30	2,00	0,32
12 a 13	1,82	0,39	2,14	0,30	2,69	0,28	2,28	0,38	2,26	0,21	3,00	0,29
13 a 14	2,12	0,43	2,31	0,34	2,68	0,51	2,80	0,27	3,34	0,36	3,66	0,28
14 a 15	1,88	0,28	2,16	0,29	2,43	0,34	2,36	0,29	2,62	0,45	3,19	0,32
15 a 16	1,44	0,30	1,96	1,16	2,65	0,38	2,17	0,33	2,16	0,40	2,83	0,42
16 a 17	2,15	1,56	2,32	0,93	3,12	0,91	2,39	0,55	2,61	1,14	3,12	0,45
17 a 18	2,36	0,37	2,27	0,37	3,51	0,29	2,71	0,41	2,58	0,53	3,18	0,55
18 a 19	3,00	0,28	2,90	0,58	3,76	0,24	3,24	0,33	2,65	0,23	4,13	0,22
19 a 20	3,24	0,23	3,53	0,26	3,45	0,25	3,33	0,32	3,80	0,22	4,54	0,28
20 a 21	2,84	0,23	3,11	0,50	2,67	0,24	2,40	0,27	3,76	0,27	3,92	0,19
21 a 22	2,16	0,25	2,69	0,19	2,52	0,16	2,32	0,18	3,38	0,23	3,13	0,14

Tabla 1. Tiempo promedio de llegadas ($1/\lambda_{ij}$) y de servicio ($1/\mu_{ij}$) por minuto

Las notaciones son las siguientes:

λ_{ij} = tasa media de llegadas en el día i-ésimo y la hora j-ésima
μ_{ij} = tasa media de servicio en el día i-ésimo y la hora j-ésima
$1/\lambda_{ij}$ = tiempo promedio de llegadas en el día i-ésimo y la hora j-ésima
$1/\mu_{ij}$ = tiempo promedio de servicio en el día i-ésimo y la hora j-ésima

Antes de obtener las conclusiones derivadas de los anteriores resultados, nos parece interesante hacer una referencia a la distribución exponencial. De acuerdo con Eppen, Gould et al. (2000), esta distribución desempeña un papel importante en muchos modelos de fenómenos de espera, ya que representa razonablemente el proceso de servicio y de llegadas en multitud de situaciones. Se caracteriza por su asimetría, significando que no tiene la misma cantidad de valores por encima que por debajo de la media, distribuyéndose los mismos con una aproximación de 2/3 por debajo de la media y 1/3 por encima. En términos prácticos, podemos decir que la distribución exponencial modela mejor un sistema en el cual una gran proporción de tiempos, tanto de llegada como de servicio, son cortos y sólo algunos son más largos. Del mismo modo se caracteriza por tener una varianza grande.

Teniendo en cuenta los valores de la *Tabla 1* obtenemos los resultados siguientes:

	Media de $1/\lambda_j$	**$1/\lambda_j <$ media**	**$1/\lambda_j >$ media**
10 a 11	1,33	4	2
11 a 12	1,74	4	2
12 a 13	2,37	4	2
13 a 14	2,82	4	2
14 a 15	2,44	4	2
15 a 16	2,20	4	2
16 a 17	2,62	4	2
17 a 18	2,77	4	2
18 a 19	3,28	4	2
19 a 20	3,65	4	2
20 a 21	3,12	4	2
21 a 22	2,7	4	2

Tabla 2. Medias semanales por franja horaria y valores por encima y por debajo de la media.

	LUNES	**MARTES**	**MIÉRCOLES**	**JUEVES**	**VIERNES**	**SÁBADO**
Media de $1/\lambda_i$	2,20	2,33	2,70	2,42	2,66	3,20
$1/\lambda_i <$ media	8	8	8	8	8	8
$1/\lambda_i >$ media	4	4	4	4	4	4

Tabla 3. Medias por días y valores por encima y por debajo de la media.

	Media de $1/\mu_i$	$1/\mu_i$ < media	$1/\mu_i$ > media
10 a 11	0,69	4	2
11 a 12	0,32	4	2
12 a 13	0,31	4	2
13 a 14	0,37	4	2
14 a 15	0,33	4	2
15 a 16	0,50	5	1
16 a 17	0,93	4	2
17 a 18	0,42	4	2
18 a 19	0,31	4	2
19 a 20	0,26	4	2
20 a 21	0,28	5	1
21 a 22	0,19	4	2

Tabla 4. Medias por franjas horarias y valores por encima y por debajo de la media.

	LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES	SÁBADO
Media de μ_i	0,49	0,51	0,36	0,35	0,41	0,34
$1/\mu_i$ < media	10	8	8	8	8	8
$1/\mu_i$ > media	2	4	4	4	4	4

Tabla 5. Medias por días y valores por encima y por debajo de la media.

4.2. Discusión de los modelos elegidos.

Precisamente en las *Tablas 2* a *5* es donde se puede empezar a obtener las primeras conclusiones. Si observamos la *Tabla 2,* en su segunda columna tenemos las medias de los valores expresados en cada una de las franjas horarias de la *Tabla 1.* Si comparamos cada uno de estos valores, de cada franja horaria, con la media obtenida obtenemos los resultados de las columnas tres y cuatro de la *Tabla 2.* Estos resultados son significativos ya que en todas las franjas horarias existen más valores por debajo de la media (dos tercios) que por encima (un tercio). El mismo procedimiento se aplica a la *Tabla 4* en relación con la *Tabla 1* llegando a idénticas conclusiones. En lo que respecta a las franjas horarias, vemos que los tiempos tienen un comportamiento igual al descrito para el de la distribución exponencial, por lo que se intuye que estos resultados se pueden adaptar perfectamente a los de una distribución exponencial.

Veamos el comportamiento de los tiempos en cada uno de los días de la semana. Si observamos la *Tabla 3,* en su segunda fila tenemos las medias de los valores expresados en cada uno de los días de la *Tabla 1.* Si comparamos cada uno de estos valores, de cada, con la media obtenida obtenemos los resultados de las filas tres y cuatro de la *Tabla 3.* Estos resultados vuelven a ser significativos ya que en todas los días de la semana existen más valores por debajo de la media (dos tercios) que por encima (un tercio). El mismo procedimiento se aplica a la *Tabla 5* en relación con la *Tabla 1* llegando a idénticas conclusiones. Con relación a los días de la semana, vemos que los tiempos tienen un comportamiento igual al descrito para el de la distribución exponencial, por lo que se intuye que estos resultados se pueden adaptar perfectamente a los de una distribución exponencial.

De acuerdo con lo anteriormente expuesto, estaríamos en condiciones de afirmar que tanto los tiempos de servicio como los de llegadas se podrían ajustar a una distribución exponencial constituyendo un modelo de colas tipo M/M/s.

Teniendo en cuenta que el tiempo de servicio es susceptible de desglose en tres subtiempos (facturación, cobro y tiempo de espera), también se podría modelar de acuerdo a una distribución Erlang de parámetro de forma tres y así constituir un modelo $M/E_3/s$, entendida como suma de distribuciones exponenciales en cada uno de los subtiempos.

Para justificar la bondad del ajuste al modelo M/M/s o al $M/E_3/s$, se ha hecho una verificación con el programa QTS, proveniente del libro de Gross y Harris (1998).

Como consecuencia de los resultados obtenidos se concluye que cualquiera de los dos modelos anteriores puede ser válido, aunque se ha escogido el modelo M/M/s por entender que es el que mejor se ajusta a la realidad de las grandes superficies, a diferencia de otros sistemas, como el de centrales telefónicas o servicios de urgencias de hospitales, en los que los tiempos de servicio se ajustan mejor a una distribución Erlang. (Zeynep A., Harker, O. y Patrick T. (2001))

5. ESTUDIO DE COSTES

De acuerdo con Hillier y Liebermann (2002), el coste total, por hora, viene definido por la siguiente fórmula:

$$CT = sC_S + C_w L \tag{1}$$

Siendo

- CT = Coste total por hora
- s = nº de cajeras/os
- C_s = coste por hora de tener un/a cajero/a disponible
- C_w = costo por hora de tener a una persona esperando en el sistema

Hay que tener en consideración que C_w es un costo muy difuso y de difícil estimación. En virtud de ello se ha calculado teniendo en cuenta datos indirectos, facilitados por **Hipermercados Ribera**, y estimaciones subjetivas. Los datos son los siguientes:

Margen Medio: 11 %

	LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES	SÁBADO
Compra media	36,06	41,91	47,92	53,91	80,96	92,98
Precio de coste	32,48	37,76	43,17	48,57	72,93	83,76
Margen	3,58	4,15	4,75	5,34	8,03	9,22

Tabla 6. Márgenes medios en cada uno de los días de la semana, expresados en €.

C_s = Coste de nómina de un cajero/a, incluyendo seguridad social

$$\boxed{C_s = 8{,}41 \text{ € / hora}}$$

	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado
%coste de oportunidad	10	15	15	20	25	30

Tabla 7. Costes de oportunidad en cada uno de los días de la semana.

Se ha considerado que el coste de espera de un cliente puede derivar, si está demasiado tiempo esperando debido a un número escaso de cajas, a la pérdida del mismo. Si esto ocurre, la valoración del coste quedaría cuantificada en la pérdida del margen medio establecido para ese día de la semana y el coste de oportunidad (posibilidad de realizar otras tareas, el cajero o la cajera) que aumenta progresivamente a lo largo de la semana ya que la actividad, en todas las secciones, también se va incrementando. Teniendo en cuenta los anteriores criterios, el coste de espera sería el siguiente:

	C_w					
	LUNES	**MARTES**	**MIÉRCOLES**	**JUEVES**	**VIERNES**	**SÁBADO**
Margen	3,58	4,15	4,75	5,34	8,02	9,21
C. de oportunidad	0,84	1,26	1,26	1,68	2,10	2,52
Total	4,42	5,41	6,01	7,02	10,12	11,73

Tabla 8. Costes de espera en cada uno de los días de la semana.

6. APLICACIÓN DEL MODELO Y RESULTADOS

6.1. Decisiones respecto al número de servidores.

Basándonos en el estudio de costes y la aplicación del modelo M/M/s con hojas de cálculo según Eppen et al. (2000), se obtiene un número óptimo de servidores cuya asignación es la siguiente:

	LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES	SÁBADO
10 a 11	2	2	4	3	3	5
11 a 12	6	5	8	8	9	9
12 a 13	6	9	12	8	14	14
13 a 14	7	9	7	13	12	17
14 a 15	8	9	9	10	8	13
15 a 16	6	3	9	9	8	9
16 a 17	2	4	5	6	4	10
17 a 18	8	8	15	9	7	8
18 a 19	13	7	19	12	15	23
19 a 20	17	16	17	13	21	20
20 a 21	15	8	14	11	17	25
21 a 22	11	17	19	16	18	28

Tabla 9. Necesidades de Cajas en cada franja horaria dentro de cada día de la semana.

A continuación haremos la siguiente descripción de la notación a utilizar:

s_{ij} = nº de cajeros necesarios en el día i-ésimo y en la hora j-ésima

i	1	2	3	4	5	6
día	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
hora	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22

Consideramos oportuno las siguientes representaciones gráficas de los resultados obtenidos en la *Tabla 9*, al permitir una visión general del problema que se plantea y la obtención de las primeras conclusiones:

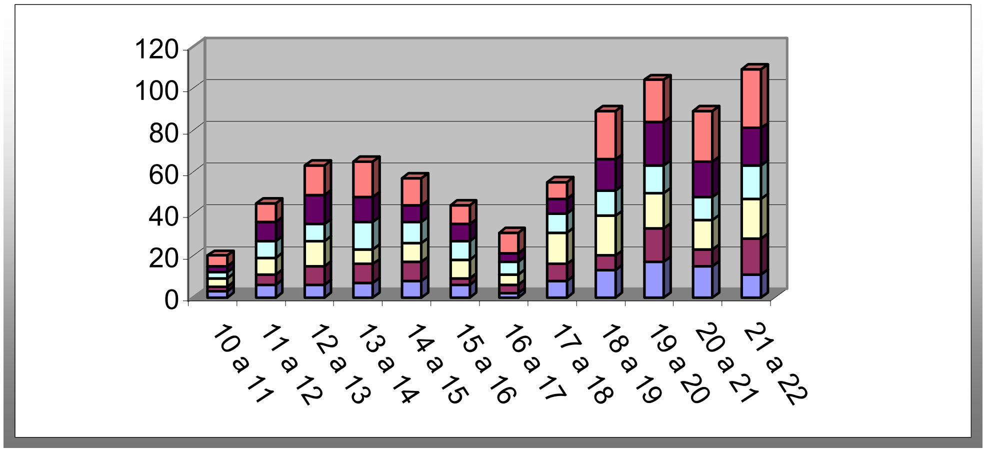

Gráfico 1. Superposición de las necesidades de cajas de los días de la semana

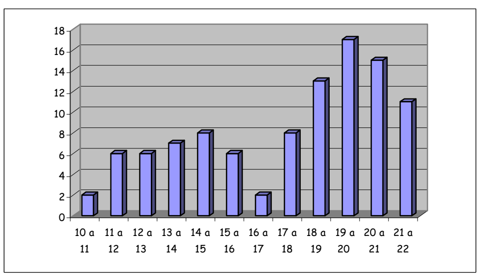

Gráfico 2. Necesidades de cajas para el lunes

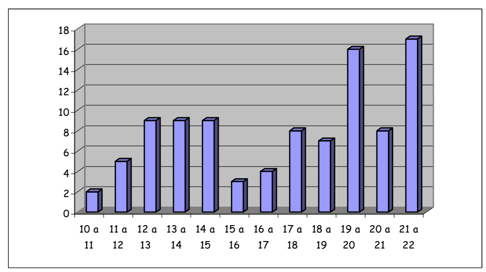

Gráfico 5. Necesidades de cajas para el martes

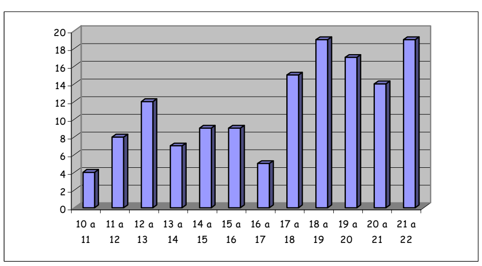

Gráfico 3. Necesidades de cajas para el miércoles

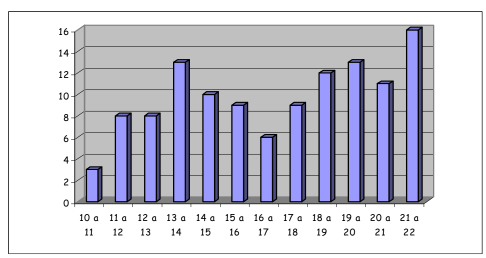

Gráfico 6. Necesidades de cajas para el jueves

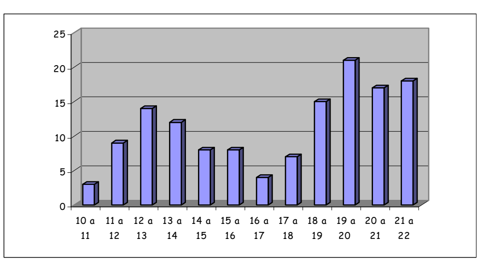

Gráfico 4. Necesidades de cajas para el viernes

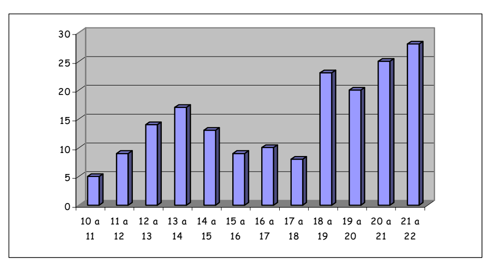

Gráfico 7. Necesidades de cajas para el sábado

6.2. Representación y análisis gráfico.

A partir de los datos de la *Tabla 9*, se construyen los *Gráficos 1* a *7*.

Si observamos el *Gráfico 1* en el que se reflejan el número de cajas semanal en cada una de las horas, podemos extraer las siguientes conclusiones:

- Las franjas horarias en las que se necesitan más cajas debido a un mayor flujo de clientes, están entre las 12-14 horas y las 18-22 horas.
- Se generan horas-valle, debido a un menor flujo de clientela, entre las 16-17 horas.

Si examinamos los *Gráficos 2 a 7* específicos de cada uno de los días de la semana, en los que se evidencian el número de cajas en cada una de las horas, sacamos las siguientes conclusiones:

- Los días de menor concurrencia de clientes son el lunes y el jueves.
- Los días de mayor flujo de clientes son los miércoles (mitad de semana), viernes y sábado (fin de semana). Es preciso destacar que entre las 18 y las 22 horas del sábado se concentra la mayor afluencia de clientes, del día y de la semana.

6.3. Restricciones al problema y política de personal.

Una vez que se ha determinado el número de servidores para cada uno de los días de la semana y en cada una de las franjas horarias, de acuerdo con lo indicado en la *Tabla 9*, es preciso cuantificar el óptimo de personal para cubrir las necesidades de toda la semana. La solución a este problema se va a conseguir mediante la formulación de un modelo matemático determinístico descrito mediante programación lineal

6.3.1. Identificación de las variables de decisión y datos del problema.

Las variables de decisión y datos son los siguientes:

$x_{ij} =$ nº de cajeros que inician un turno en el día i-ésimo y en la hora j-ésima

$i = 1, 2, 3, ..., 6$

$j = 1, 2, 3, ..., 12$

ξ_{ij} = cajeros que se encuentran de turno, pero no tienen actividad de caja el día *i-ésimo* en la hora *j-ésima*)

i	1	2	3	4	5	6
día	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
hora	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22

6.3.2. Identificación de la función objetivo.

Para el objeto de este estudio la función objetivo queda planteada como la *minimización del número de servidores que van a atender las necesidades de las cajas en cada uno de los días de la semana*. La expresión de la función-objetivo quedaría de la siguiente manera:

$$\min \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \tag{2}$$

6.3.3. Identificación de las restricciones.

Nos encontramos con una restricción, de carácter interno y otra, de carácter externo, que viene impuesta por la propia legislación laboral, las cuales no podemos obviarlas ya que el resultado se alejaría de la realidad. Las restricciones son las siguientes:

- **Externa**: *jornada media semanal de 40 horas*.
- **Interna**: *turnos de ocho horas seguidas*.
- **Otras**:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \geq s_{ij} \tag{3}$$

Los programas lineales aparecen descritos en las formulaciones (*4.a) – (4.f)*.

6.3.4. Planteamiento del problema.

Al plantear las anteriores funciones-objetivo y restricciones, se reducen las variables a cinco ya que cada cajero va a desarrollar su trabajo como máximo cinco días a la semana al suponer ocho horas no interrumpidas de dedicación. Otro aspecto destacable es que los turnos entrarán a las diez de la mañana y a las catorce horas ya que a partir de esta hora, si entraran a desarrollar su trabajo, no cumplirían con sus ocho horas de dedicación.

Lunes

$$\begin{aligned}
&\min x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}\\
&x_{11}\geq 2\\
&x_{11}+x_{12}\geq 6\\
&x_{11}+x_{12}+x_{13}\geq 6\\
&x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}\geq 7\\
&x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}\geq 8\\
&x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}\geq 13\\
&x_{13}+x_{14}+x_{15}\geq 17\\
&x_{14}+x_{15}\geq 15\\
&x_{15}\geq 11
\end{aligned}\tag{4.a}$$

Martes

$$\begin{aligned}
&\min x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}\\
&x_{21}\geq 2\\
&x_{21}+x_{22}\geq 5\\
&x_{21}+x_{22}+x_{23}\geq 9\\
&x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}\geq 9\\
&x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}\geq 9\\
&x_{23}+x_{24}+x_{25}\geq 16\\
&x_{24}+x_{25}\geq 8\\
&x_{25}\geq 17
\end{aligned}\tag{4.b}$$

Miércoles

$$\begin{aligned}
&\min x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}\\
&x_{31}\geq 4\\
&x_{31}+x_{32}\geq 8\\
&x_{31}+x_{32}+x_{33}\geq 12\\
&x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}\geq 7\\
&x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}\geq 15\\
&x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}\geq 19\\
&x_{33}+x_{34}+x_{35}\geq 17\\
&x_{34}+x_{35}\geq 14\\
&x_{35}\geq 19
\end{aligned}\tag{4.c}$$

Jueves

$$\begin{aligned}
&\min x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}+x_{45}\\
&x_{41}\geq 3\\
&x_{41}+x_{42}\geq 8\\
&x_{41}+x_{42}+x_{43}\geq 8\\
&x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}\geq 13\\
&x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}+x_{45}\geq 10\\
&x_{42}+x_{43}+x_{44}+x_{45}\geq 12\\
&x_{43}+x_{44}+x_{45}\geq 13\\
&x_{44}+x_{45}\geq 11\\
&x_{45}\geq 16
\end{aligned}\tag{4.d}$$

Viernes

$$\begin{aligned}
&\min x_{51}+x_{52}+x_{53}+x_{54}+x_{55}\\
&x_{51}\geq 3\\
&x_{51}+x_{52}\geq 9\\
&x_{51}+x_{52}+x_{53}\geq 14\\
&x_{51}+x_{52}+x_{53}+x_{54}\geq 12\\
&x_{51}+x_{52}+x_{53}+x_{54}+x_{55}\geq 8\\
&x_{52}+x_{53}+x_{54}+x_{55}\geq 15\\
&x_{53}+x_{54}+x_{55}\geq 21\\
&x_{54}+x_{55}\geq 17\\
&x_{55}\geq 18
\end{aligned}\tag{4.e}$$

Sábado

$$\begin{aligned}
&\min x_{61}+x_{62}+x_{63}+x_{64}+x_{65}\\
&x_{61}\geq 5\\
&x_{61}+x_{62}\geq 9\\
&x_{61}+x_{62}+x_{63}\geq 14\\
&x_{61}+x_{62}+x_{63}+x_{64}\geq 17\\
&x_{61}+x_{62}+x_{63}+x_{64}+x_{65}\geq 13\\
&x_{62}+x_{63}+x_{64}+x_{65}\geq 23\\
&x_{63}+x_{64}+x_{65}\geq 20\\
&x_{64}+x_{65}\geq 25\\
&x_{65}\geq 28
\end{aligned}\tag{4.f}$$

6.4. *Resultados y comentarios.*

Mediante la aplicación informática LINDO se han resuelto los programas lineales comprendidos en las formulaciones *(4.a)* a *(4.f)*. Los $\boldsymbol{x_{ij}}$ y los $\boldsymbol{\xi_{ij}}$, (cajeros que se encuentran de turno, pero no tienen actividad de caja el día *i-ésimo* en la hora *j-ésima*) quedan reflejados en la siguiente tabla:

	LUNES		MARTES		MIÉRCOLES		JUEVES		VIERNES		SÁBADO	
	x_{1j}	ξ_{1j}	x_{2j}	ξ_{2j}	x_{3j}	ξ_{3j}	x_{4j}	ξ_{4j}	x_{5j}	ξ_{5j}	x_{6j}	ξ_{6j}
10 a 11	2	-	5	2	4	-	3	-	3	-	5	-
11 a 12	4	-	-	-	4	-	5	-	6	-	4	-
12 a 13	-	-	4	-	4	-	-	-	5	-	5	-
13 a 14	1	-	-	-	-	5	5	-	-	2	3	-
14 a 15	16	15	17	17	19	22	16	19	18	24	28	32
15 a 16	-	17	-	23	-	22	-	20	-	24	-	36
16 a 17	-	21	-	22	-	26	-	23	-	28	-	35
17 a 18	-	15	-	18	-	16	-	20	-	25	-	37
18 a 19	-	8	-	14	-	12	-	14	-	14	-	17
19 a 20	-	-	-	5	-	6	-	8	-	2	-	16
20 a 21	-	2	-	9	-	5	-	10	-	1	-	6
21 a 22	-	5		-	-	-	-	-	-	-	-	-
	23		26		31		29		32		45	

Tabla 10 . Número de cajeros que inician un turno (x_{ij}) y excedentes (ξ_{ij}) en el día i-ésimo y en la hora j-ésima.

Tenemos la siguiente expresión: $$\sum_{i=1}^{6} x_{ij} = s_i \qquad (5)$$

Si la aplicamos a los datos de la *Tabla 10*, obtenemos el número de cajeros (S_i) necesarios para atender las necesidades de cada uno de los días de la semana.

7. CONCLUSIONES FINALES

Este estudio no pretende determinar las necesidades de personal para todas las secciones de **Hipermercados Ribera**, sino solamente las de la sección de Cajas. Sin embargo, aunque sólo sea por razones de economía organizativa y administrativa, si que aspira a la optimización del número de contratos a realizar y la ocupación efectiva, del personal, durante la jornada para la que ha sido contratado. Por ello, nos vemos obligados a realizar una inmersión en la actividad de otras secciones. De acuerdo con los resultados de la *Tabla 10*, y teniendo solamente en cuenta la Sección de Cajas, se realiza la siguiente propuesta de contratación de personal quedando cubiertas el 100 % de las necesidades de esta Sección:

LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES	SÁBADO	S_i	JORNADA
●	—	—	—	→		23	40 horas
	●	—	—	—	→	3	40 horas
		●	—	—	→	3	32 horas
		●—●		●	→	2	24 horas
				●	→	1	16 horas
					●→	36	8 horas
23	26	31	29	32	45	68	

Tabla 11. Propuesta de número de contratos a realizar con su jornada semanal en horas.

Una premisa fundamental para poder garantizar el éxito de esta propuesta es que se establezca una política de polivalencia del personal, es decir que se forme al personal de todas las secciones, en el manejo de las cajas y en todos los aspectos relacionados con el cobro.

Se ha comentado acerca de la existencia de excedentes (ξ_{ij}) los cuales quedan reflejados en la *Tabla 10*. Como se puede observar, a ciertas horas hay un número de cajeros que no tienen actividad de caja y por lo tanto están ociosos, lo cual constituiría una pérdida que debe absorberse, por ello durante esas horas podrían dedicarse a tareas propias de otras secciones. Precisamente a esto se hace referencia cuando se comentaba lo de la *inmersión en la actividad de otras secciones*.

No disponemos de información acerca de las necesidades de personal en otras secciones, ya que esto supera el objeto de la presente comunicación, pero los indicios nos hacen barajar la hipótesis de que se podrían ampliar a cuarenta horas la jornada de seis de los contratos, a tiempo parcial, recogidos en la *Tabla 11* y, una vez conocidas las necesidades de personal en otras Secciones, valorar cuántos y en cuántas horas, de los otros treinta y seis contratos, es posible ampliar la jornada. En estos casos la dedicación derivada de la ampliación de jornada, revertiría en Secciones diferentes a la de Cajas.

De acuerdo con lo anterior se concluye que los contratos a realizar, sin tener en cuenta la totalidad de las necesidades de **Hipermercados Ribera**, quedan recogido de la siguiente forma:

LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES	SÁBADO
23	32	32	32	32	45

S_i	JORNADA
32	40 horas
36	8 horas
68	

Tabla 12. Necesidades de contratación ajustadas

AGRADECIMIENTOS

Queremos expresar nuestro agradecimiento y reconocer su importante contribución a las siguientes personas y entidades:

- ✓ Gerente y personal de la Sección de Cajas de **Hipermercados Ribera** por su pacientes explicaciones, la entrega de los datos y facilitar la realización de las mediciones en las mejores condiciones.
- ✓ Alumnado del I.E.S. "Benjamín de Tudela" por su participación en la recogida de los datos.

BIBLIOGRAFÍA

Eppen G.D., Gould F.J., Schmidt C.P., Moore, J.H. y Weatherford, L.R.. (2000). *Investigación de Operaciones en la Ciencia Administrativa*. Prentice Hall.

Gross, D. y Harris, C.M. (1998). *Fundamentals of Queueing Theory*. Ed. John Wiley.

Hillier, F. S. y Liebermann, G. (2002). *Introducción a la Investigación de Operaciones*. McGraw-Hill.

Mathur, K. y Solow, D. (1996). *Investigación de operaciones, el arte de la toma de decisiones*. Prentice Hall.

Ríos, S. (1995). *Modelización*. Alianza Universidad.

Van Dijk, N.M. (2000). "On Hybrid Combination of Queueing and Simulation". *Proceedings of the 2000 Winter Simulation Conference*. Joines, J.A., Barton, R.R., Kang, K. and Fishwick, P.A. eds. Orlando (Florida).

Whitt, W. (1999). "Predicting Queueing Delays". *Management Science*, Vol. 45, Nº 6, pp. 870-888.

Zeynep A., Harker, O. and Patrick T. (2001) "Modeling a Phone Center: Analysis of a Multichannel, Multiresource Processor Shared Loss System". *Management Science*, Vol. 47, Nº 2, pp. 324–336.