El problema de las sobrecargas en el mercado de seguros

J.M. Pérez Sánchez
Dpto. de Economía Aplicada. Universidad de Granada.
Facultad de Ciencias Económicas. Campus de Cartuja.
e-mail: josema@empresariales.ulpgc.es

E. Gómez Déniz
Dpto. de Métodos Cuantitativos. Universidad de Las Palmas de G.C.
Facultad de Ciencias Económicas. Campus de Tafira.
e-mail: emilio@empresariales.ulpgc.es

F.J. Vázquez Polo
Dpto. de Métodos Cuantitativos. Universidad de Las Palmas de G.C.
Facultad de Ciencias Económicas. Campus de Tafira.
e-mail: polo@empresariales.ulpgc.es

El problema de las sobrecargas en el mercado de seguros

1 Introducción

La metodología del sistema de tarificación Bonus–Malus fue introducida en Europa en la década de los 60, siguiendo los trabajos de Bühlmann (1967, 1969); entre otros. En 1958 se empezó a aplicar en Francia, para ir extendiéndose poco a poco a casi todo el resto de Europa.

El diseño de un sistema Bonus–Malus depende de la regulación existente en cada país. Si la tarifa la impone el gobierno y cada compañía aseguradora ha de adoptarla, no existen razones comerciales para igualar el riesgo a la prima haciendo uso de toda la información relevante disponible. Las autoridades pueden decidir, por razones socioeconómicas, por ejemplo, excluir de la estructura de tarifas un determinado factor de riesgo. También, el gobierno puede corregir los desequilibrios de un sistema basado únicamente en información a priori utilizando un factor malus, que penaliza a las reclamaciones fuertemente.

El sistema Bonus–Malus es un método de tarificación en el que los asegurados se agrupan en clases según el número de reclamaciones que hayan realizado hasta el período actual. Por lo tanto, se calculan las primas de seguro aplicables para cada póliza individual, ajustadas por una cantidad que depende de la experiencia pasada de cada asegurado, penalizando a los contratantes de pólizas en caso de reclamaciones mediante subidas en la prima que éstos deben de pagar. Han sido numerosos los estudios realizados sobre este método de tarificación, entre los que destacan De Pril, (1978), Lemaire (1979), (1985), (1988), (1998), Tremblay (1992), Coene et al. (1996), Shengwang y Whitmore (1999), Walhin y Paris (1999) y Frangos y Vrontos (2001).

Sin embargo, en muchas ocasiones, las penalizaciones de los sistemas de tarificación Bonus–Malus son excesivas comparadas con otros métodos de tarificación. Esto puede acarrear serios problemas de competitividad y, consecuentemente, de equilibrio financiero a la compañía aseguradora.

Este capítulo pretende ser un análisis introductorio a una metodología, propuesta por Lemaire (1979), que busca la disminución de las sobrecargas sin que ello perjudique la balanza comercial y financiera de la empresa. Para ello, seguiremos haremos uso de la metodología bayesiana aplicada a los SBM.

El problema aparece en el momento en que no somos capaces de distinguir entre los asegurados de un mismo grupo, por lo que la compañía aseguradora no podrá conocer quiénes tienen una frecuencia de reclamaciones menor. Analizaremos un método de reducción de estas sobrecargas en el que utilizaremos funciones de utilidad exponenciales.

Este artículo está estructurado como sigue. En la sección 2 expondremos el método de disminución de sobrecargas propuesto por Lemaire (1979), mientras que en la sección 3 propondremos un nuevo método de reducción que mejora sensiblemente los resultados obtenidos en la sección anterior. Esto se comprobará mediante ilustraciones prácticas con ambas metodologías en la sección 4.

2 Un modelo para el análisis de las sobrecargas

Supondremos, como es usual en estadística actuarial, que el número de reclamaciones de cada póliza sigue una distribución de Poisson

$$\mathcal{P}_k(\theta) = \frac{e^{-\theta}\theta^k}{k!}, \qquad \text{con } \theta > 0,$$

y con una función estructura Gamma

$$\pi_0(\theta) = \frac{b^a}{\Gamma(a)}\theta^{a-1}e^{-\theta b}, \qquad \text{con } a > 0, b > 0.$$

Es fácil comprobar que la distribución del número de reclamaciones para toda la cartera, independientemente del parámetro de riesgo θ, seguirá una Binomial negativa de la forma

$$p_k = \int \mathcal{P}_k(\theta)\pi_0(\theta)d\theta = \left(\begin{array}{c} k+a-1 \\ k \end{array} \right) \left(\frac{b}{1+b}\right)^a \left(\frac{1}{1+b}\right)^k .$$

Vamos a suponer que cada riesgo ha sido observado durante t años, por lo que $k_l (l = 1, ..., t)$ es el número de reclamaciones acontecidas en el año l. Todas las k_l serán realizaciones de las variables aleatorias K_l, que se suponen independientes y equidistribuidas. A cada conjunto de observaciones $(k_1, ..., k_t)$ se le asociará una prima $\mathcal{P}_{t+1} = \mathcal{P}_{t+1}(k_1, ..., k_t)$.

La distribución a *posteriori* de θ es

$$\pi_0(\theta|k_1, ..., k_t) = \frac{f(k_1, ..., k_t|\theta)\pi_0(\theta)}{\displaystyle\int_0^\infty f(k_1, ..., k_t|\theta)\pi_0(\theta)d\theta},$$

siendo $f(k_1, ..., k_t|\theta)$ la verosimilitud. Además, como ya sabemos, podemos definir un SBM mediante el ratio

$$100\frac{\displaystyle\int_0^\infty \theta\pi_0(\theta|k_1, ..., k_t)d\theta}{\displaystyle\int_0^\infty \theta\pi_0(\theta)d\theta}.$$

La distribución a *posteriori* es una Gamma de parámetros $a' = a+k$ y $b' = b+l$, con $k = \sum_{i=1}^t k_l$, por lo que la prima calculada con el ratio anterior queda

$$100\frac{a+k}{b+l}\frac{b}{a}.$$

El análisis lo realizaremos maximizando la utilidad esperada de la operación de aseguramiento, tomando en consideración la función de utilidad exponencial

$$u(x) = \frac{1}{c}(1 - e^{-cx}), \quad c > 0.$$

Esta función posee una serie de propiedades muy deseables para la compañía aseguradora; ver, por ejemplo, Gerber (1974), Straub (1992), Tremblay (1992), Lemaire y Zi (1994) y Lemaire (1979, 1985, 1995). Si utilizamos esta expresión, la prima final queda

$$\mathcal{P}_{t+1}(k_1, ..., k_t) = A \cdot \frac{a+k}{c}\left|\ln\left(1 - \frac{e^c - 1}{t+b}\right)\right|, \tag{1}$$

donde A es la constante de ajuste del SBM y c la constante que fijará la sobreprima final de seguridad (mide la aversión al riesgo de la compañía).

Para analizar el siguiente modelo, que trata de paliar las sobrecargas, empezaremos aclarando algunas notaciones importantes:

1. N_k = frecuencia absoluta de reclamaciones del grupo k.

2. $N = \sum_{k=0}^{m} N_k$.

3. m es el máximo valor que puede tener k.

4. $\overline{\theta}$ =Media de reclamaciones.

Lemaire (1979) propuso, para la disminución de las sobrecargas, el siguiente modelo. Trataremos de maximizar la función

$$Z = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{m} N_k \int_0^\infty \frac{1}{c} [1 - e^{-c(\theta - \mathcal{P}_{t+1}(k_1,...,k_t))}] \pi(\theta|k) d\theta,$$

sujeto a la restricción

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{m} N_k \mathcal{P}_{t+1}(k_1, ..., k_t) = \overline{\theta},$$

donde $\overline{\theta}$ es la media de reclamaciones.

La función Lagrangiana resultante es

$$\Psi = \frac{1}{c} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{m} N_k \int_0^\infty e^{-c(\theta - \mathcal{P}_{t+1}(k_1,...,k_t))} \pi(\theta|k) d\theta - \alpha \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{m} N_k \mathcal{P}_{t+1}(k_1, ..., k_t) - \overline{\theta} \right).$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathcal{P}_{t+1}(k_1,...,k_t)} = 0 \rightarrow \frac{1}{N} N_k \int_0^\infty e^{c\mathcal{P}_{t+1}(k_1,...,k_t)} e^{-c\theta} \pi(\theta|k) d\theta = \frac{\alpha}{N} N_k \qquad k = 0, ..., m.$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} = 0 \rightarrow \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{m} N_k \mathcal{P}_{t+1}(k_1, ..., k_t) = \overline{\theta}.$$

Ahora, denotamos $\mathcal{M}_k(x) = \int_0^\infty e^{x\theta} \pi(\theta|k) d\theta$ a la función generatriz de momentos de la distribución a *posteriori* de θ, por lo que podemos expresar esta última ecuación de la forma

$$e^{c\mathcal{P}_{t+1}(k_1,...,k_t)} \mathcal{M}_k(-c) = \alpha, \qquad k = 0, ..., m,$$

o lo que es lo mismo

$$\mathcal{P}_{t+1}(k_1, ..., k_t) = \frac{1}{c} \ln \alpha - \frac{1}{c} \ln \mathcal{M}_k(-c) \qquad k = 0, ..., m.$$

Multiplicando la ecuación anterior por N_k, sumando todos los valores de k y dividiendo todo por N, nos queda

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{m} N_k \mathcal{P}_{t+1}(k_1, ..., k_t) = \frac{1}{N} \frac{1}{c} \sum_{k=0}^{m} N_k \ln \alpha - \frac{1}{N} \frac{1}{c} \sum_{k=0}^{m} N_k \ln \mathcal{M}_k(-c),$$

por lo que

$$\frac{1}{c} \ln \alpha = \overline{\theta} + \frac{1}{Nc} \sum_{k=0}^{m} N_k \ln \mathcal{M}_k(-c).$$

De esta forma, la prima final queda

$$\mathcal{P}_{t+1}(k_1, ..., k_t) = \overline{\theta} + \frac{1}{c} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{m} N_i \ln \mathcal{M}_i(-c) - \ln \mathcal{M}_k(-c) \right]. \tag{2}$$

3 Un modelo alternativo para el problema de las sobrecargas

Para mejorar el modelo propuesto en la sección anterior, debemos maximizar

$$Z = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{m} N_k \int_0^\infty \frac{1}{c} [1 - e^{-c(\theta - \mathcal{P}_{t+1}(k_1,...,k_t))}] \pi(\theta|k) d\theta,$$

sujeto a la restricción

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{m} N_k \mathcal{P}_{t+1}(k_1,...,k_t) = \mathcal{P}^*_{\pi_0},$$

donde $\mathcal{P}^*_{\pi_0}$ es la prima colectiva. Obsérvese que la única diferencia con el modelo anterior consiste en intercambiar el término independiente de la restricción por la prima colectiva. Esto parece más lógico, si tenemos en cuenta que la prima del colectivo para el principio de utilidad exponencial es distinta que la utilizada para el principio de equivalencia, que en este caso sería $\overline{\theta} = E_{\pi_0}(\theta)$. Luego, en definitiva se trata de utilizar el mismo procedimiento de cálculo de prima para la prima Bayes y la prima colectiva, como parece lógico.

La función Lagrangiana resultante es

$$\Psi = \frac{1}{c}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{m} N_k \int_0^{\infty} e^{-c(\theta-\mathcal{P}_{t+1}(k_1,...,k_t))}\pi(\theta|k)d\theta - \alpha\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{m} N_k\mathcal{P}_{t+1}(k_1,...,k_t) - \mathcal{P}^*_{\pi_0}\right),$$

por lo que las derivadas parciales quedan

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\mathcal{P}_{t+1}(k_1,...,k_t)} = 0 \to \frac{1}{N}N_k\int_0^{\infty} e^{c\mathcal{P}_{t+1}(k_1,...,k_t)}e^{-c\theta}\pi(\theta|k)d\theta = \frac{\alpha}{N}N_k \qquad k=0,...,m.$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha} = 0 \to \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{m} N_k\mathcal{P}_{t+1}(k_1,...,k_t) = \mathcal{P}^*_{\pi_0}.$$

Si procedemos de igual forma que en apartado anterior, la prima final queda

$$\mathcal{P}_{t+1}(k_1,...,k_t) = \mathcal{P}^*_{\pi_0} + \frac{1}{c}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{m} N_i \ln\mathcal{M}_i(-c) - \ln\mathcal{M}_k(-c)\right], \tag{3}$$

donde $\mathcal{P}^*_{\pi_0} = \frac{b}{c}\ln\left[\frac{a}{a-e^c+1}\right]$.

4 Ilustración numérica

La tabla 1 nos muestra los datos extraidos de un ejemplo de Lemaire (1979) correspondiente a una compañía aseguradora de Bélgica, mientras que la tabla 2 nos muestra cómo estos datos se ajustan bien a una distribución binomial negativa según el test de la χ^2. La media y la varianza muestrales son, respectivamente, 0.1011 y 0.1074. Además, si aplicamos el método de estimación de los momentos, los parámetros de la distribución estructura son $a = 1.6049$ y $b = 15.8778$.

Table 1: Distribución de los asegurados en clases

	k						
t	0	1	2	3	4	5	6
0	10000						
1	9059	877	58	6	0	0	0
2	8297	1472	197	31	2	1	0
3	7584	1947	381	73	12	2	1
4	6991	2238	600	130	29	8	4

Table 2: Distribución observada

Número de reclamaciones	Frequencias absolutas	
	Observados	Ajustados
0	96978	96895.5
1	9240	9222.5
2	704	711.7
3	43	50.7
4	0	0
Más de 4	0	0
Total	106974	106974

En la figura 1 podemos observar, después de tres años, $t = 3$, la distribución a *posteriori* de la frecuencia de reclamaciones de dos grupos de asegurados. La distribución de la izquierda se corresponde con el grupo de asegurados situados en $k = 0$ (asegurados *buenos*), mientras que la

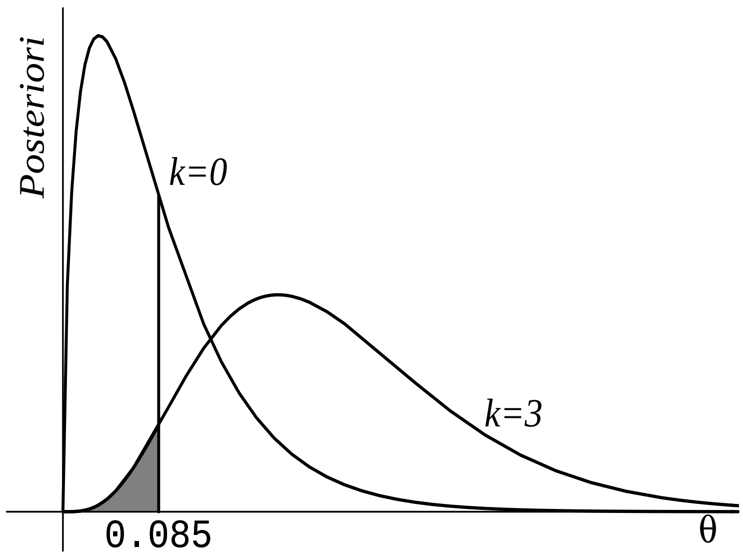

Figure 1: Distribuciones a *posteriori* para la frecuencia de reclamaciones

derecha se refiere al grupo $k = 3$ (asegurados *malos*). La zona sombreada nos indica el área en el que ambas distribuciones se solapan produciéndose sobrecargas en grupos de asegurados que pagan más y, sin embargo, tienen una frecuencia de reclamaciones incluso menor que la media, 0.085, de los asegurados *buenos*. Además, este problema aumenta a medida que incrementa el número de reclamaciones, ya que el incremento indebido de las primas es más acentuado en aquellas que tienen mayor número de reclamaciones.

Para elegir el valor de c nos basaremos en la prima inicial que queda con tal elección. Si escogemos $c = 0.4$, valor utilizado en principio por Lemaire (1979), la prima inicial es de $P_1 = 0.1262$, que es un valor razonable debido a que la media es 0.1011, por lo que estaríamos considerando una carga de seguridad de alrededor del 25%. Además, este valor de c cumple la condición de concavidad de la función ($c > 0$). De esta forma, si calculamos las primas de la expresión (1), obtenemos la tabla 3, en la que se muestran las primas calculadas para todos los grupos durante los cuatro años. Como podemos observar, un asegurado que en el período 2 tiene 0 reclamaciones paga 86.66 u.m., mientras que si, en el siguiente período, realiza una reclamación pasará a pagar 136.17 u.m.

Basándonos en los datos de la tabla 3 y en la figura 1 podemos observar cómo, en el período

Table 3: Primas a cobrar según SBM

		k					
t	0	1	2	3	4	5	6
0	100						
1	93.99	152.55	211.11	269.67			
2	86.66	143.90	199.14	254.38	309.62	364.86	
3	83.99	136.17	188.45	240.72	293.00	345.28	397.55
4	79.62	129.23	178.85	228.50	278.07	327.68	377.30

tercero, los asegurados pertenecientes al grupo 3 pagan aproximadamente 2.86 veces más que los del grupo $k = 0$, aún cuando la frecuencia de reclamaciones real de muchos de ellos es menor que la media del grupo $k = 0$. Este subgrupo de asegurados (zona sombreada en la figura) están penalizados indebidamente ya que pagan casi el triple de su media de reclamaciones. Ademas, el problema aumenta debido a que la compañía aseguradora no puede distinguir exactamente qué asegurados del grupo pertenecen al subgrupo penalizado.

Si calculamos las primas con la expresión (2), las nuevas primas quedan ilustradas en la tabla 4. Podemos observar cómo se ha producido un gran incremento de las primas en la zona de los asegurados *malos*, mientras que las primas que se cobran a los asegurados *buenos* disminuyen ligeramente. Esto, no proporciona ningún tipo de mejora en el problema que tratamos; es más, amplía la sobrecarga que intentamos disminuir.

Table 4: Primas según Lemaire para $c = 0.4$

		k					
t	0	1	2	3	4	5	6
0	100						
1	92.82	163.86	234.9	305.95			
2	86.76	153.89	221.01	288.13	355.26	422.38	
3	80.97	144.58	208.19	271.8	335.42	399.03	462.64
4	75.77	136.223	196.67	257.12	317.58	378.03	438.48

Para arreglar esto, Lemaire propone un aumento desmesurado de c, que pasa a ser $c = 11.5$, y cuyas primas están reflejadas en la tabla 5. De esta forma, observamos que sí se consigue una mejora notable, mediante un pequeño aumento en la zona de los asegurados *buenos* y una disminución más pronunciada en la zona de los asegurados *malos*. Se ha conseguido disminuir la diferencia entre la media y la prima que pagan el grupo de asegurados situado en la zona sombreada.

Table 5: Primas según Lemaire para $c = 11.5$

		k					
t	0	1	2	3	4	5	6
0	100						
1	95.48	140.17	184.62	229.55			
2	91.58	134.28	177.02	219.74	262.45	305.17	
3	87.73	128.68	169.63	210.48	251.43	292.38	333.23
4	84.26	123.52	162.79	202.05	241.32	280.58	319.84

Si calculamos las primas con la expresión (3), obtendremos las primas contenidas en la tabla 6. Hemos conseguido otro conjunto de primas que, sujetas a la restricción presupuestaria, mejoran la situación inicial, y sin embargo, comparadas con las contenidas en la tabla 5, no aumentan tanto la cantidad que ha de satisfacer el grupo de los asegurados *buenos*, y la disminución que se produce en la zona de los asegurados *malos* no es tan pronunciada. Además, estas primas han sido calculadas sin variar el valor de c.

Table 6: Primas según método propuesto para $c = 0.4$

		k					
t	0	1	2	3	4	5	6
0	100						
1	94.25	151.13	208.01	264.89			
2	89.40	143.14	196.88	250.62	304.36	358.11	
3	84.76	135.69	186.62	237.55	288.48	339.41	390.347
4	80.60	129	177.40	225.80	274.20	322.6	371

Bibliografía

Bühlmann, H. (1967). Experience rating and credibility. *Astin Bulletin, IV–III, 199–207.*

Bühlmann, H. (1969). Experience rating and credibility. *Astin Bulletin, V–III, 157–165.*

Coene, G. y Doray, L. (1996). A financially balanced Bonus–Malus system. *Astin Bulletin, 26, 107–116.*

De Pril, N. (1978). The Efficiency of a Bonus–Malus System. *Astin Bulletin, 10, 1, 59–72.*

Frangos, N. y Vrontos, S. (2001). Design of optimal Bonus–Malus systems with a frequency and severity component on an individual basis in automobile insurance. *Astin Bulletin, 31, 1, 1–22.*

Gerber, H. (1974). On additive premium calculation principles. *Astin Bulletin, 7, 215–222.*

Lemaire, J. (1979). How to define a Bonus–Malus system with an exponential utility function. *Astin Bulletin, 10, 274–282.*

Lemaire, J. (1985). *Automobile Insurance (Actuarial Models). Kluwer–Nijhoff Publishing. Boston/Dordrecht/Lancaster.*

Lemaire, J. (1988). Construction of the new Belgian motor third party tariff structure. *Astin Bulletin, 18, 1, 99–112.*

Lemaire, J. (1995). *Bonus–Malus Systems in Automobile Insurance. Kluwer Academic Publishers. Boston/Dordrecht/Londres.*

Lemaire, J. (1998). Bonus–Malus system: The European and Asian approach to merit–rating. (With discussion by Krupa Subramanian, ”Bonus–Malus system in a competitive environment”. *North American Actuarial Journal, 2, 1, 1–22.*

Lemaire, J. y Zi, H. (1994). A comparative analysis of 30 Bonus–Malus systems. *Astin Bulletin, 24, 2, 287–310.*

Shengwang, Y.W. y Whitmore, G.A. (1999). Accounting for individual over–dispersion in a Bonus–Malus automobile insurance system. *Astin Bulletin, 29, 2, 327–337.*

Straub, E. (1992). Non life-insurance mathematics. Spriger–Verlag. *Association of Swiss Actuaries. Academic Publisher.*

Tremblay, L. (1992). Using the Poisson inverse Gaussian in Bonus–Malus systems. *Astin Bulletin, 22, 1, 97–106.*

Walhin, J.F. y Paris, J. (1999). Using mixed Poisson processes in connection with Bonus–Malus Systems. *Astin Bulletin, 29, 1, 81–99.*