

“UNA INTRODUCCIÓN A LOS MÉTODOS MULTIVARIANTES EN CONTROL ESTADÍSTICO DE LA CALIDAD”

José Luis Alfaro Navarro

Profesor Asociado

Universidad de Castilla-La Mancha.

Facultad de Ciencias Económicas y

Empresariales.

Pza. Universidad, s/n

02071 Albacete

JoseLuis.Alfaro@uclm.es

Manuel Vargas Vargas

Profesor Titular de Universidad

Universidad de Castilla-La Mancha.

Facultad de Ciencias Sociales.

Avda. de los Alfares, 44

16071 Cuenca

Manuel.Vargas@uclm.es

Palabras Clave: Control estadístico de la calidad, Gráficos de control univariantes y multivariantes.

RESUMEN.

En esta comunicación se van a presentar algunos métodos de control de la calidad on-line, centrándonos en la vigilancia del proceso mediante gráficos de control. Dentro de éstos nos centraremos en las extensiones realizadas al caso multivariante, es decir, analizando la influencia de varias características de calidad al mismo tiempo.

Además de recoger estas técnicas vamos a exponer sus características técnicas, los problemas que presentan, así como las ventajas relativas de unas sobre otras. Por último, plantearemos los principales problemas que presentan desde un punto de vista práctico y las posibles soluciones dadas a esos problemas.

1. Introducción.

En los últimos años se ha producido un aumento de la preocupación en materia de calidad. El aumento de la competencia, debido a la apertura de fronteras que se está registrando, ha motivado que las empresas hayan recurrido, como medio para mejorar su competitividad, no tanto al ajuste de precios como a mejorar la calidad de los productos o servicios ofrecidos a sus clientes, cada vez más exigentes en este aspecto. Como producto de esta exigencia, se produce simultáneamente una mayor regulación, tanto a nivel nacional como internacional, de los requisitos mínimos de calidad en los productos y sus especificaciones.

En términos generales, la calidad de los productos va a estar relacionada con su capacidad para cumplir los requisitos y expectativas para las que han sido creados. En concreto, un consumidor percibirá un producto como de calidad si éste satisface las necesidades que el consumidor buscaba cubrir con la adquisición del mismo. Esta definición de calidad lleva aparejada el concepto de *control de calidad* de cada unidad producida, es decir, el control de la variabilidad tanto en los procesos de producción como en las unidades obtenidas. Ante la imposibilidad de controlar toda la producción, se ha generalizado el uso de un enfoque estadístico que, dados unos estándares de calidad, ayuden a detectar si las unidades producidas se ajustan a éstos o si existe alguna “anomalía” en el proceso.

Las técnicas estadísticas de control de la calidad se pueden dividir en dos grandes bloques. Por un lado, las que se conocen como técnicas de control on-line, o del proceso de producción; y por otro, las denominadas técnicas de control off-line o de diseño. En este trabajo nos centraremos en las técnicas de control on-line y, dentro de éstas, en los gráficos de control que, en función del número de variables o características de calidad que estemos analizando, se engloban en univariantes o multivariantes. La extensión, construcción y limitaciones de éstos últimos constituyen el objetivo principal de este trabajo.

2. Gráficos de control multivariantes.

En los procesos de producción actuales, para controlar la calidad de los productos es necesario vigilar más de una característica de calidad. Una primera posibilidad sería desarrollar métodos de control estadístico para cada una de las características, es decir, aplicar técnicas de control de calidad univariantes de forma independiente. Sin embargo, sería imposible controlar el efecto de las interacciones entre las diversas variables así como su variación a lo largo del tiempo; en términos estadísticos, se estaría obviando la información contenida en las covarianzas y su estabilidad.

Además, el uso concomitante de varios gráficos univariantes altera el nivel de confianza de los gráficos de control. Así, si analizamos dos variables independientes y distribuidas normalmente, la opción de representar gráficos individuales nos llevará a que la probabilidad de que exista una falsa alarma será $(1 - \alpha) \cdot (1 - \alpha)$, ya que ambas variables deben de exceder sus límites de control, y si usamos los límites situados a tres desviaciones típicas esta probabilidad sería $(0,0027) \cdot (0,0027) = 0,00000729$. Igualmente, la probabilidad de que el proceso se encuentre bajo control, es decir, las dos características estén bajo control es de $(0,9973)^2 = 0,9946$, modificando la estructura típica de los gráficos de control Shewhart.

Obviamente si el número de variables es mayor, el valor de esta probabilidad disminuirá aún más. En general, la probabilidad de cometer un error tipo I si analizamos “p” características de calidad será de $\alpha' = 1 - (1 - \alpha)^p$ y la probabilidad de que todas las medidas caigan dentro de los límites de control es de $(1 - \alpha)^p$.

También la región de control ha de modificarse en un ambiente multivariante. Si manejamos dos variables independientes e intentamos controlar la calidad mediante dos gráficos univariantes, la región de control tendría la siguiente forma:

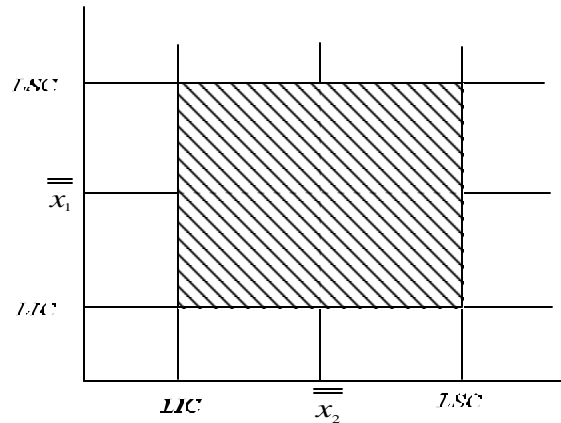


Figura 1: Región de control para dos variables analizadas individualmente.

Si todas las observaciones caen dentro de la región de control (cuadro rallado en la figura), formada por los límites de control para cada una de las variables analizadas, se consideraría que el proceso está bajo control; por contra, si alguna observación cae fuera de esa región, el proceso se consideraría fuera de control y habría que analizar sus causas.

Sin embargo, la representación de la región de control en los gráficos tipo Shewhart tiene forma de elipse, cuya inclinación depende de la correlación existente entre las variables. Si éstas son independientes, la región de control va a tener la forma:

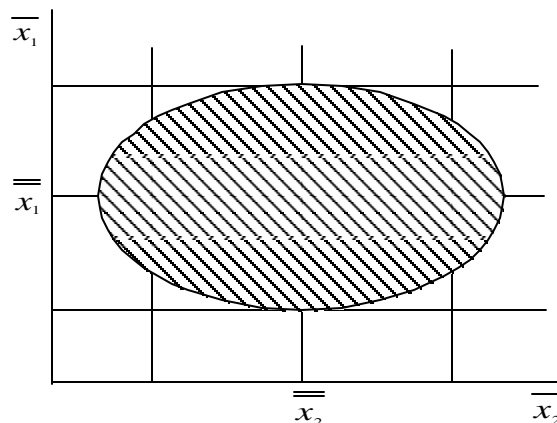


Figura 2: Región de control para dos variables independientes analizadas de forma conjunta.

Si comparamos esta región de control con la anterior, podemos observar que existen zonas

donde las observaciones están bajo control y que antes eran consideradas puntos fuera de control, así como zonas fuera de control que antes no eran detectadas.

Cuando las variables no son independientes, la forma de la elipse de control dependerá de la cuantía de la correlación y de su signo. Por ejemplo, para dos variables positivamente correlacionadas, la elipse de control será:

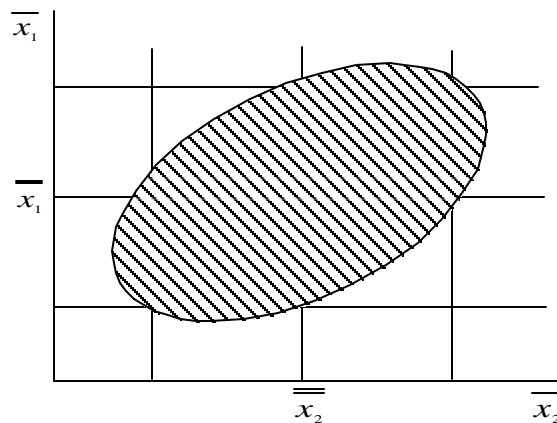


Figura 3: Región de control para dos variables no independientes analizadas de forma conjunta.

El uso de estas elipses de control presenta dos inconvenientes añadidos. El primero es que vamos a perder la secuencia temporal de las observaciones. El segundo está relacionado con el número de variables analizadas, que complica bastante la estructura de correlación y la obtención de la región de control. De ahí que en la mayoría de los métodos de control multivariantes se recurra a la construcción de un estadístico resumen junto a sus límites de control para poder determinar si el proceso se encuentra o no bajo control estadístico, siguiendo una metodología similar a la utilizada con los gráficos univariantes. Dentro de estas técnicas multivariantes cabe destacar, por su desarrollo y mayor uso, el gráfico de control T^2 de Hotelling.

3. Gráfico de control T^2 de Hotelling.

El gráfico T^2 de Hotelling se puede considerar como la extensión multivariante del gráfico de control Shewhart univariante. El estadístico T^2 es un escalar que combina información para la dispersión y media de las variables que estamos utilizando. Si asumimos una distribución normal multivariante y se conocen los verdaderos parámetros de la distribución, es decir, conocemos el vector de medias y la matriz de varianzas, el estadístico T^2 sigue una distribución chi-cuadrado. En el caso bivariante, este estadístico tendría la siguiente forma:

$$\chi_0^2 = \frac{n}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2} [\sigma_2^2 (\bar{x}_1 - \mu_1)^2 + \sigma_1^2 (\bar{x}_2 - \mu_2)^2 - 2 \sigma_{12} (\bar{x}_1 - \mu_1) (\bar{x}_2 - \mu_2)]$$

donde \bar{x}_1 y \bar{x}_2 son las medias muestrales de las respectivas variables, μ_1 y μ_2 sus medias poblacionales, σ_1 y σ_2 las desviaciones típicas y σ_{12} es la covarianza. Si estamos analizando más de dos variables, el estadístico chi-cuadrado toma la siguiente forma:

$$\chi_0^2 = n \cdot (\bar{x}_t - \mu)^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot (\bar{x}_t - \mu) \quad (3.1)$$

donde μ es el vector de medias, Σ es la matriz de varianzas y covarianzas y “n” es el tamaño muestral. El límite superior de control se va a situar para un nivel de significación dado por $\chi_{(\alpha, p)}^2$, y el límite inferior esta situado en cero, ya que el estadístico es no negativo.

Cuando los valores poblacionales no son conocidos, es necesaria su estimación, dando origen al gráfico T^2 de Hotelling. Con p variables y m muestras de tamaño n , la media y cuasivarianza muestral se calculan como:

$$\bar{x}_{jk} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ijk} \quad \begin{cases} j = 1, 2, \dots, p \\ k = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (3.2)$$

$$S_{jk}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_{ijk} - \bar{x}_{jk})^2 \quad \begin{cases} j = 1, 2, \dots, p \\ k = 1, 2, \dots, m \end{cases}$$

donde x_{ijk} es la i -ésima observación en la j -ésima característica de calidad en la muestra k . La cuasicovarianza entre dos características de calidad j y h se calcula para la muestra k como:

$$S_{jhk} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_{ijk} - \bar{x}_{jk})(x_{ihk} - \bar{x}_{hk}) \quad \begin{cases} k = 1, 2, \dots, m \\ j \neq h \end{cases} \quad (3.3)$$

Con las expresiones anteriores podemos determinar la media y varianza para las m muestras y para las variables a través de las expresiones:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{x}} &= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \bar{x}_{jk} \quad j = 1, 2, \dots, p \\ \bar{S}_j^2 &= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m S_{jk}^2 \quad j = 1, 2, \dots, p \\ \bar{S}_{jk} &= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m S_{jhk} \quad j \neq h \end{aligned} \quad (3.4)$$

Sustituyendo en la expresión (3.1), el estadístico T^2 queda:

$$T_t^2 = n \cdot (\bar{x}_t - \bar{\bar{x}})^T \cdot S^{-1} \cdot (\bar{x}_t - \bar{\bar{x}}) \quad (3.5)$$

Para datos agrupados, el estadístico T^2 sigue una distribución F de Snedecor, por lo que los límites de control bajo los supuestos usuales van a venir dados como:

$$\begin{aligned} LSC &= \frac{p(m-1)(n-1)}{mn-m-p+1} F_{\alpha, p, mn-m-p+1} \\ LIC &= 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Así podemos analizar si el proceso se encuentra bajo control mediante la representación de los valores T^2 junto a dicho límite de control. Cuando el valor T^2 para todas las muestras sea inferior al LSC, el proceso se considera bajo control y, en caso contrario, que existe una anomalía que nos lleva a una situación fuera de control.

Este gráfico, igual que el Shewhart univariante, es sensible a grandes cambios en los datos, aunque cuando las variaciones son de pequeña magnitud, esta técnica de control no es eficaz. Habría que recurrir a la extensión multivariante de otras técnicas de control desarrolladas para solucionar este mismo problema en el caso univariante.

4. Gráficos multivariantes de media móvil exponencialmente ponderada.

El gráfico de control T^2 de Hotelling sólo usa el vector de observaciones actuales. La alternativa EWMA para análisis multivariante, que denotaremos como gráficos MEWMA nos va a permitir considerar la serie completa de observaciones. Se recupera así la información contenida en la serie, pero se pierde la independencia entre observaciones.

A diferencia de los gráficos univariantes, la versión multivariante puede ser de dos tipos: de dirección invariante o de dirección específica. El ARL en los gráficos de dirección invariante va a venir determinado por la distancia existente entre el valor de la media y el valor objetivo, mientras que en el gráfico de dirección específica el ARL es una función de dicha distancia y de su signo.

El gráfico EWMA venía dado por :

$$z_i = \lambda \cdot \bar{x}_i + (1 - \lambda) \cdot z_{i-1} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m \quad (4.1)$$

donde λ es una constante que va a determinar el peso de las observaciones pasadas ($0 < \lambda \leq 1$) y \bar{x}_i es la media aritmética de la submuestra i -ésima. Análogamente, la extensión multivariante adopta la forma:

$$Z_t = \Lambda \cdot \bar{X}_t + (1 - \Lambda) \cdot Z_{t-1} \quad (4.2)$$

donde \bar{X}_t es el vector de las medias muestrales y Λ es una matriz diagonal formada por los valores lambda para las distintas variables $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$. Como valor inicial se considera $Z_0=0$.¹

Para controlar las variables, la información suministrada por los valores Z_t se resume en el estadístico:

$$T_t^2 = Z_t' \cdot \sum_{x_i}^{-1} \cdot Z_t \quad (4.3)$$

donde $\sum_{x_i}^{-1}$ es la matriz de varianzas y covarianzas de los valores MEWMA.

Se puede demostrar que el elemento (k,l) de la matriz \sum_{x_i} , es:

$$\sum_{x_i}(k, l) = \lambda_k \lambda_l \frac{[1 - (1 - \lambda_k)^i (1 - \lambda_l)^i]}{[\lambda_k + \lambda_l - \lambda_k \lambda_l]} \sigma_{k,l} \quad (4.4)$$

donde $\sigma_{k,l}$ es el elemento (k, l) de la matriz de varianzas y covarianzas de las variables analizadas.

Si todos los λ_t son iguales, la expresión anterior se puede simplificar:

$$\sum_{x_i} = \frac{\lambda}{2 - \lambda} [1 - (1 - \lambda)^{2i}] \Sigma \quad (4.5)$$

donde Σ es la matriz de varianzas y covarianzas de las variables iniciales.

Con grandes valores de “i”, el valor $[1 - (1 - \lambda)^{2i}]$ se aproxima a la unidad, por lo que, asintóticamente, la matriz de varianzas puede definirse como:

¹ En el caso unidimensional, se considera el valor objetivo como inicial. Sin embargo, en la extensión multivariante es necesario iniciar la serie MEWMA en cero.

$$\Sigma z_i = \frac{\lambda}{2 - \lambda} \Sigma \quad (4.6)$$

El gráfico MEWMA permite usar valores λ_i específicos para cada variable. Aquí es donde se diferencia un análisis direccional de uno sin dirección específica. Si se decide usar el mismo peso para todas las variables, el gráfico es de dirección invariante debido a que las causas de variación llevan igual peso en todas las variables. Sin embargo, si damos distinto peso a las variables, el gráfico se va a considerar de dirección específica y, en ese caso, una señal fuera de control puede ser atribuida a los valores específicos de aquella variable a la que hemos otorgado un peso mayor.

En Prabhu y Runger (1996) se demuestra, mediante el análisis de los valores del ARL para distintos cambios en la media del proceso, que este gráfico MEWMA es más rápido en su respuesta ante pequeños cambios en la media del proceso, lo que representa una gran ventaja respecto a otros modelos de control multivariantes. Por contra, va a ser menos efectivo que el gráfico T^2 de Hotelling en la detección de grandes cambios en el proceso. En este trabajo también se puede encontrar una guía para la selección del límite superior de control, que va a depender del cambio en la media que queramos detectar, del valor lambda seleccionado y del número de variables que estemos analizando. Estos valores del límite superior de control son determinados de tal forma que $ARL_0=200$. En la siguiente tabla recogemos algunos de los valores para ese límite de control:

Lambda	Número de variables			
	p=2	p=4	p=6	p=10
0,05	7,35	11,22	14,6	20,72
0,1	8,64	12,73	16,27	22,67
0,2	9,65	13,87	17,51	24,07
0,3	10,08	14,34	18,01	24,62
0,4	10,31	14,58	18,26	24,89

5. Ventajas comparativas y soluciones a los problemas prácticos.

Si comparamos las dos técnicas de control de calidad multivariantes antes descritas podemos llegar a la conclusión de que la aplicación de gráficos de control T^2 de Hotelling, igual que ocurría con los gráficos de control Shewhart univariantes, nos van a permitir detectar cambios en la media del proceso de cierta magnitud, si bien cambios inferiores a dos desviaciones típicas normalmente no van a ser detectados con estos gráficos de control. Esta diferencia en la detección de cambios de pequeña magnitud es debida fundamentalmente al uso o no de la información pasada del proceso ya que con los gráficos de control MEWMA la información pasada es recogida, otorgándole una ponderación (importancia) que depende del valor del parámetro λ seleccionado mientras que con el gráfico T^2 de Hotelling esta información no es tomada en cuenta.

También hay que tener en cuenta que en el gráfico de control T^2 de Hotelling no existe a priori manipulación en la información por lo que se pueden agregar ciertos controles en las propiedades del gráfico que nos permitan detectar la existencia de cierta tendencia en los datos. Por contra en el gráfico de control MEWMA existen una serie de manipulaciones en la información que van a hacer que ante la existencia de cierta tendencia tengamos que determinar si proviene de la información original o es consecuencia de la manipulación llevada a cabo para determinar los valores Z_i .

En la práctica hay que tener especial cuidado con el cumplimiento de las hipótesis de partida, ya que no hay que olvidar que de partida suponíamos que las observaciones iban a seguir una distribución normal o aproximadamente normal y además esas observaciones iban a ser independientes. La falta de cumplimiento de estas hipótesis constituye uno de los principales problemas que nos podemos encontrar cuando llevamos a cabo la aplicación práctica de estos métodos estadísticos de control de la calidad.

Ha sido analizado por distintos autores la influencia de la falta de cumplimiento de estas hipótesis en el resultado final, llegando a la conclusión de que los modelos van a ser robustos ante

el incumplimiento de la hipótesis de normalidad, salvo que estemos situado en un caso extremo. Aunque el efecto de la no independencia, es decir, de la existencia de cierta relación ya sea entre las variables (correlación cruzada) o entre las observaciones (autocorrelación) sobre los resultados finales si que habrá que tenerlo en cuenta. La correlación cruzada existente entre las variables que estamos analizando va a ser recogida mediante la matriz de varianzas y covarianzas que va a ser utilizada por la mayoría de técnicas de control multivariantes como un elemento del cálculo, hay que tener en cuenta que si desarrollamos un análisis univariante de cada una de las características de calidad esta correlación no va a ser recogida. Sin embargo, la autocorrelación existente no va a ser recogida directamente y habrá que recurrir a un análisis complementario a estos gráficos de control que nos permita detectar si existe o no esta autocorrelación y si es que existe intentar eliminarla. La principal consecuencia del incumplimiento de esta hipótesis consiste en un aumento del número de falsas alarmas dadas por el gráfico. Además hay que tener en cuenta que el incumplimiento de esta hipótesis es algo bastante común en la práctica ya que normalmente entre las observaciones va a existir cierto grado de relación.

Para intentar reducir el efecto negativo de esa autocorrelación han sido (y están siendo) aplicados al control de calidad distintos métodos que intentan recoger la existencia de esta autocorrelación, aunque de estas técnicas la más desarrollada consiste en la aplicación de modelos de series temporales. En este sentido el comportamiento de los gráficos de control MEWMA va a ser mejor que el gráfico de control T^2 de Hotelling ya que el cálculo de los valores EWMA se puede considerar como un proceso autorregresivo que tiende a disminuir, e incluso eliminar, el efecto que la correlación en las observaciones (autocorrelación) tiene sobre el gráfico de control.

Otra alternativa al uso de gráficos de control MEWMA en la detección de pequeños cambios en la media del proceso consiste en aplicar la extensión multivariante de los gráficos de control CUSUM. Si bien el comportamiento de los gráficos MEWMA ante la falta de cumplimiento de la hipótesis de independencia es más robusto que el de los gráficos MCUSUM.

6. Aplicación práctica.

Para ilustrar la construcción y uso de las técnicas de control estadístico de la calidad expuestas en esta comunicación nos vamos a centrar en el análisis de la concentración de dos aminoácidos, Lysina y Arginina, en el zumo de frutas. Para ello hemos utilizado 18 muestras formadas por cuatro observaciones cada una cuyos resultados se exponen en la tabla siguiente:

Muestra	Lysina (X_1)				Arginina (X_2)			
1	0,48	0,47	0,42	0,35	5,81	5,25	4,98	4,79
2	0,43	0,40	0,35	0,34	4,92	5,61	4,54	3,82
3	0,27	0,39	0,37	0,26	3,42	3,60	3,39	2,72
4	0,24	0,20	0,26	0,52	3,13	2,15	2,89	5,53
5	0,42	0,45	0,47	0,44	5,07	5,46	5,79	2,52
6	0,48	0,49	0,37	0,36	5,14	4,77	4,35	4,01
7	0,46	0,34	0,34	0,31	4,26	3,46	4,13	3,70
8	0,40	0,30	0,50	0,30	3,18	3,57	3,31	3,13
9	0,33	0,32	0,30	0,26	3,10	3,84	3,75	3,34
10	0,43	0,50	0,51	0,43	5,84	4,61	6,19	5,44
11	0,38	0,50	0,40	0,43	5,22	5,19	4,68	4,99
12	0,41	0,45	0,36	0,40	5,33	5,42	4,83	4,34
13	0,36	0,30	0,38	0,42	4,41	4,14	3,91	3,90
14	0,31	0,32	0,32	0,23	3,56	4,18	3,05	3,13
15	0,24	0,36	0,35	0,39	2,85	4,31	4,62	4,51
16	0,41	0,33	0,43	0,31	4,12	3,60	4,11	3,70
17	0,36	0,27	0,29	0,30	3,64	3,25	2,91	3,64
18	0,41	0,45	0,36	0,34	2,68	4,26	4,00	3,97

donde la primera observación de la primera muestra sería el par (0,48 ; 5,81), la segunda observación (0,47 ; 5,25), la primera de la segunda muestra (0,43 ; 4,92) y así sucesivamente.

Vamos a empezar analizando el gráfico de control T^2 de Hotelling. Para la construcción del gráfico habrá que calcular, dentro de cada submuestra, las dos medias, las dos cuasi-varianzas y la cuasi-covarianza muestral, tal como se recoge en la tabla siguiente. A partir de tales estadísticos, se calculan las medias para las 18 observaciones, expresadas en la última fila de la tabla. Con estos datos, aplicando sucesivamente la fórmula dada en (3.5), se obtienen los valores del estadístico T^2 de Hotelling, que se recogen en la última columna de la siguiente tabla:

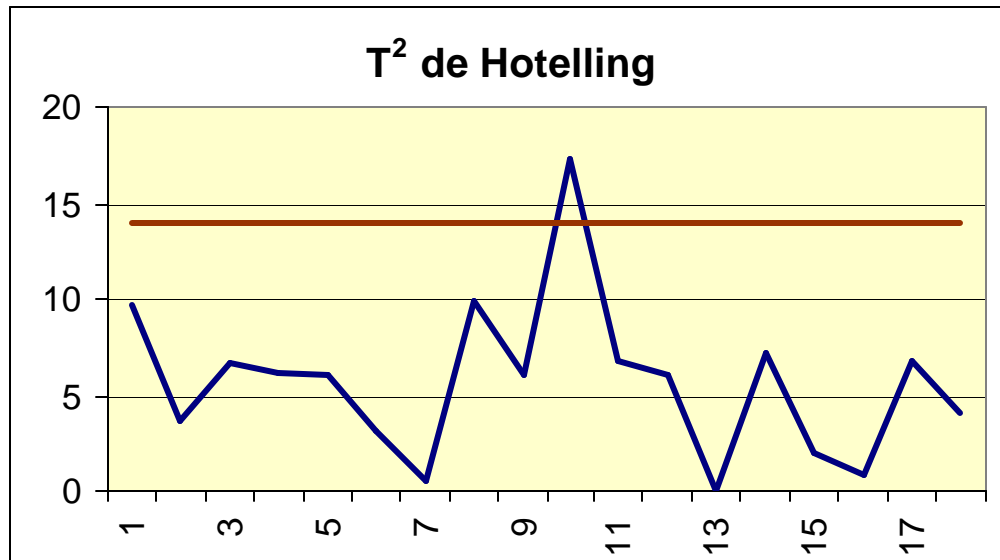
Muestra	Medias		Cuasivarianzas		Cuasicovarianzas	T^2
	\bar{X}_{1k}	\bar{X}_{2k}	S_{1k}^2	S_{2k}^2	S_{12k}	
1	0,430	5,207	0,004	0,197	0,023	9,699
2	0,380	4,722	0,002	0,558	0,023	3,609
3	0,322	3,282	0,005	0,149	0,018	6,634
4	0,305	3,425	0,021	2,143	0,209	6,201
5	0,445	4,710	0,000	2,218	0,011	5,997
6	0,425	4,567	0,005	0,242	0,031	3,159
7	0,362	3,887	0,004	0,139	0,017	0,627
8	0,375	3,297	0,009	0,039	-0,003	9,872
9	0,302	3,507	0,001	0,121	0,000	5,989
10	0,467	5,520	0,002	0,462	-0,003	17,361
11	0,427	5,020	0,003	0,062	0,004	6,743
12	0,405	4,980	0,001	0,249	0,011	6,107
13	0,365	4,090	0,003	0,058	-0,006	0,068
14	0,295	3,480	0,002	0,268	0,010	7,143
15	0,335	4,072	0,004	0,681	0,051	1,966
16	0,370	3,882	0,004	0,074	0,015	0,837
17	0,305	3,360	0,002	0,124	0,008	6,734
18	0,390	3,727	0,003	0,505	-0,003	4,124
Medias	0,373	4,152	0,004	0,461	0,023	

Para la construcción del límite de control, aplicando la fórmula (3.9) y con un nivel de confianza del 0,0054 se obtiene el valor:

$$LSC = \frac{2(3)(17)}{72-18-2+1} F_{[2,(53)]0,005} = (2,1509)(6,4951) = 13,970$$

donde el cuantil de la distribución se halla por interpolación lineal.

La representación del gráfico de control T^2 se recoge en la figura siguiente:



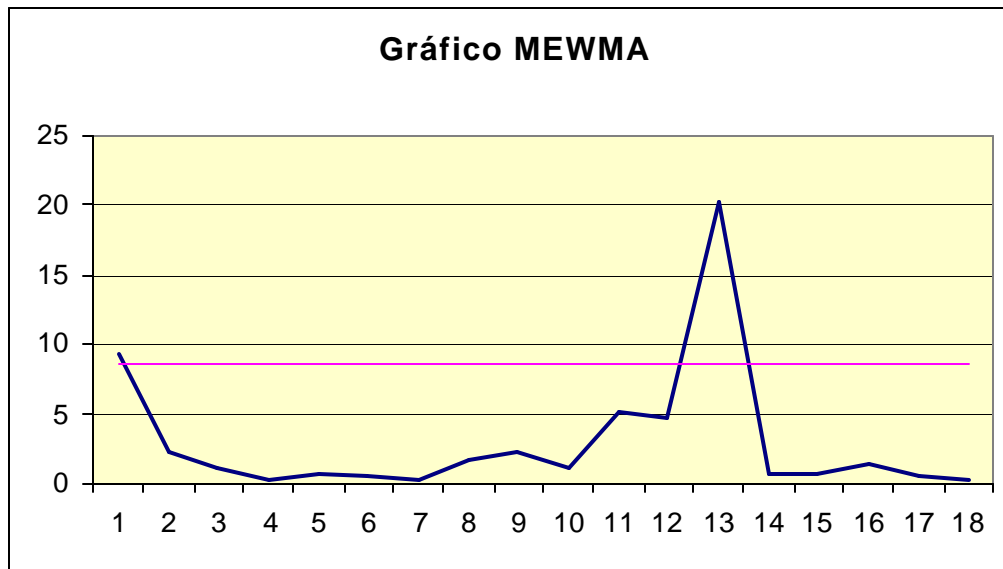
Como se aprecia, existe un punto fuera de la región de control, el correspondiente a la décima muestra ($T^2_{10} = 17,361$). Por tanto, se debe concluir que dicha muestra está fuera de control, existiendo alguna causa asignable para tal variación.

Para construir el gráfico MEWMA habrá que determinar los valores EWMA correspondientes a cada una de las variables. Para ello vamos a utilizar la información en desviaciones respecto a la media. Estos valores EWMA van a depender del valor que utilicemos como parámetro lambda, en este caso 0,1 para las dos variables. Estos valores EWMA se obtienen mediante la aplicación sucesiva de la ecuación (4.2), teniendo en cuenta que $Z_0=0$. Una vez obtenidos estos valores EWMA se construye el estadístico T^2 que utilizaremos para decidir si el proceso está o no bajo control estadístico; este valor se obtiene aplicando sucesivamente la ecuación

(4.3) y consiste en la obtención de T^2 mediante el uso de los valores EWMA calculados y la matriz de varianzas y covarianzas de éstos, como se recoge en la siguiente tabla:

Muestra	Medias		Observaciones en desviaciones respecto a la media		Valores EWMA		T^2
	\bar{X}_{1k}	\bar{X}_{2k}	X_{1h}	X_{2h}	Z_{1h}	Z_{2h}	
1	0,430	5,208	0,057	1,055	0,006	0,106	9,272
2	0,380	4,722	0,007	0,570	0,007	0,152	2,298
3	0,322	3,282	-0,050	-0,869	0,001	0,050	1,057
4	0,305	3,425	-0,068	-0,727	-0,005	-0,028	0,310
5	0,445	4,710	0,072	0,558	0,003	0,031	0,678
6	0,425	4,567	0,052	0,415	0,008	0,069	0,527
7	0,362	3,887	-0,010	-0,265	0,007	0,036	0,301
8	0,375	3,297	0,002	-0,855	0,007	-0,053	1,722
9	0,302	3,507	-0,070	-0,645	-0,001	-0,112	2,336
10	0,467	5,520	0,095	1,367	0,009	0,036	1,108
11	0,427	5,020	0,055	0,867	0,014	0,119	5,169
12	0,405	4,980	0,032	0,827	0,016	0,190	4,584
13	0,365	4,090	-0,008	-0,062	0,014	0,165	20,280
14	0,295	3,480	-0,078	-0,672	0,006	0,081	0,578
15	0,335	4,072	-0,038	-0,079	0,002	0,065	0,597
16	0,370	3,882	-0,003	-0,269	0,002	0,031	1,459
17	0,305	3,360	-0,068	-0,792	-0,005	-0,051	0,451
18	0,390	3,727	0,017	-0,425	-0,002	-0,088	0,359

Teniendo en cuenta que el límite de control, dado el valor de lambda seleccionado y el número de variables que intervienen en el análisis, va a estar situado en 8,64, el gráfico de control MEWMA va a tener la siguiente forma:

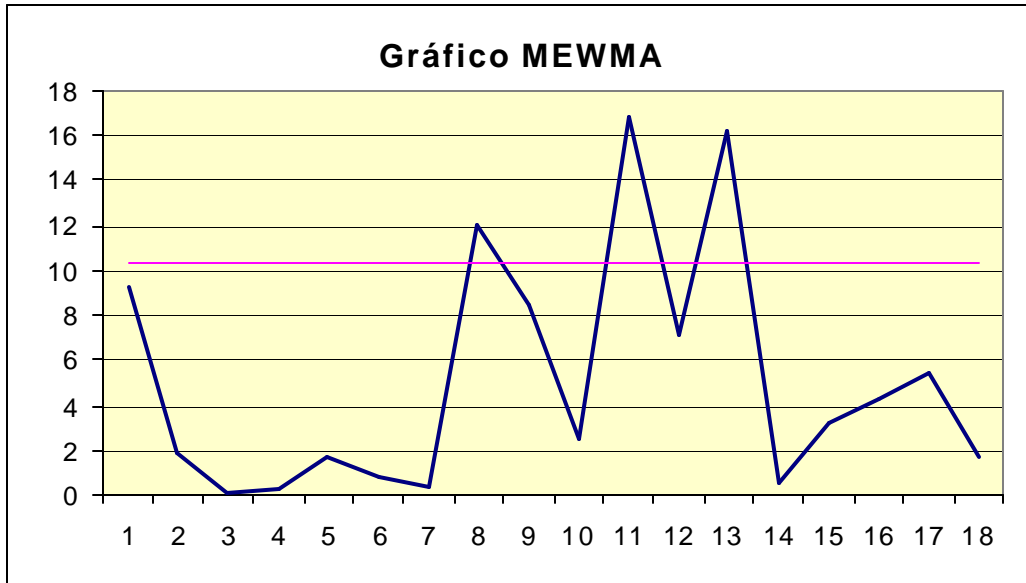


Como se puede observar, tenemos dos observaciones situadas fuera de control, en este caso la observación número 1 y la observación número 13. La primera, no detectada con el gráfico T^2 , puede ser debida a la ubicación de los límites de control en dicho gráfico, ya que en la determinación de ese primer valor no va a intervenir ninguna observación pasada, principal diferencia entre estos dos métodos de control de la calidad. En la segunda observación situada fuera de control se puede observar cómo se va acumulando la información pasada, dado que en el gráfico T^2 de Hotelling existen una serie de observaciones cercanas que toman valores elevados, y ocasionan la señal del gráfico MEWMA en la observación número 13.

El efecto de esta acumulación se puede observar más claramente si damos una mayor ponderación a la información actual, utilizando un valor lambda de 0,4, cuyos resultados serían los siguientes:

Muestra	Medias		Observaciones en desviaciones respecto a la media		Valores EWMA		T ²
	\bar{X}_{1h}	\bar{X}_{2h}	X _{1h}	X _{2h}	Z _{1h}	Z _{2h}	
1	0,430	5,208	0,057	1,055	0,025	0,422	9,272
2	0,380	4,722	0,007	0,570	0,019	0,481	1,909
3	0,322	3,282	-0,050	-0,869	-0,007	-0,059	0,098
4	0,305	3,425	-0,068	-0,727	-0,029	-0,326	0,244
5	0,445	4,710	0,072	0,558	0,013	0,027	1,740
6	0,425	4,567	0,052	0,415	0,030	0,183	0,779
7	0,362	3,887	-0,010	-0,265	0,016	0,004	0,397
8	0,375	3,297	0,002	-0,855	0,010	-0,340	12,038
9	0,302	3,507	-0,070	-0,645	-0,020	-0,462	8,499
10	0,467	5,520	0,095	1,367	0,028	0,270	2,497
11	0,427	5,020	0,055	0,867	0,040	0,509	16,856
12	0,405	4,980	0,032	0,827	0,039	0,637	7,112
13	0,365	4,090	-0,008	-0,062	0,022	0,357	16,214
14	0,295	3,480	-0,078	-0,672	-0,016	-0,055	0,580
15	0,335	4,072	-0,038	-0,079	-0,023	-0,065	3,274
16	0,370	3,882	-0,003	-0,269	-0,013	-0,147	4,292
17	0,305	3,360	-0,068	-0,792	-0,033	-0,405	5,476
18	0,390	3,727	0,017	-0,425	-0,011	-0,413	1,669

Si representamos esta información teniendo en cuenta que el límite de control va a estar situado en 10,31, tendremos el siguiente gráfico:



En este caso se puede ver como existe un mayor número de observaciones situadas fuera de control y además esta situación aparece antes que en el caso anterior, debido a la mayor ponderación que otorgamos a la información actual.

Con este ejemplo se puede observar como con el gráfico T^2 de Hotelling vamos a poder determinar observaciones anormalmente grandes mientras que el gráfico de control MEWMA nos va a permitir detectar cambios de menor magnitud. Este hecho hace aconsejable su utilización simultánea, resaltando la complementariedad y el carácter no excluyente de ambos.

6. Bibliografia.

FUCHS, C.; KENETT, R. S. (1998): *Multivariate Quality Control*. New York, Marcel Dekker.

LOWRY, C. A. ; WOODALL, W. H. ; CHAMP, C. W. ; RIGDON, S. E (1992): “A Multivariate Exponentially Weighted Moving Average Control Chart”. *Technometrics* 34.

MASON, R.L. ; CHOU, Y. ; YOUNG, J.C. (2001): “Applying Hotelling’s T^2 Statistic to Batch Processes”, *Journal of Quality Technology* 33, pp: 466 -479.

MONTGOMERY, D.C. (2001): *Introduction to Statistical Quality Control (4th ed.)*. New York, John Wiley.

RUNGER, G. C. ; PRABHU, S. S. (1996): “A Markov Chain Model for the Multivariate Exponentially Weighted Moving Averages Control Chart”. *Journal of American Statistical Association* 91, pp : 1701 - 1706.

RYAN, T.P. (2000): *Statistical Methods for Quality Improvement*. New York, John Wiley.