ESTUDIO DE ALGUNOS PROCEDIMIENTOS HÍBRIDOS DE VOTACIÓN: GENERALIZACIÓN Y CONEXIONES*

(Comunicación)

Miguel Martínez Panero
Profesor Asociado del Departamento de Economía Aplicada (Matemáticas)
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Universidad de Valladolid
Avda. Valle de Esgueva 6, 47011 Valladolid
panero@eco.uva.es

1. Introducción

Algunas de las directrices de la moderna Teoría de la Elección Social deben su empuje inicial a dos de los pioneros de esta disciplina: Borda y Condorcet. Desde hace dos siglos largos, sus concepciones enfrentadas acerca de qué alternativa debería ser la ganadora en una votación han desatado una polémica[1] que, lejos de ser estéril, ha delimitado las hoy denominadas teorías del voto posicional y no posicional, respectivamente.

Ya en 1770 Jean-Charles de Borda denunció ante la Real Academia de Ciencias de París que el procedimiento de pluralidad, mediante el que se votaba a los nuevos miembros en los distintos cuerpos de la citada institución, incurría en un grave vicio, a saber: el de permitir que resultase ganador un candidato que fuera el menos deseado por la mayoría de los votantes. Borda (1770)[1784] detectó que este hecho se debía a que los electores, al emitir sus respectivos votos, sólo informaban del candidato más deseado por cada cual, descartando al resto en bloque, aun cuando la valía de los candidatos no votados en cada caso pudiera ser muy distinta. Para paliar este defecto, Borda propuso el método (que hoy lleva su nombre) por el que los votantes puntúan correlativamente a todos los candidatos de mayor a menor según su mérito, decidiendo la elección el candidato con mayor puntuación total.

* Este trabajo ha sido financiado parcialmente por los proyectos VA057/02 de la Junta de Castilla y León y BEC2001-2253 del Ministerio de Ciencia y Tecnología.
[1] Sobre los aspectos históricos de esta polémica, véanse Black (1958) y McLean – Urken (1995).

Desde entonces, el método de Borda gozó de cierto predicamento, y se instauró como procedimiento de votación en el Instituto Nacional de Francia (nombre que recibió la Real Academia de Ciencias tras el periodo revolucionario) hasta el advenimiento de Napoleón. Además, uno de los miembros de esta institución, el marqués de Condorcet, editó con comentarios propios la memoria de Borda en 1784, un año antes de que él mismo publicase su *magnum opus* sobre el tema de las votaciones (Condorcet, 1785).

Ahora bien, aunque es innegable que Condorcet reconoció el mérito de Borda en esta materia (no de otra manera se explica que hiciera publicar su memoria), su concepción sobre la misma es mucho más amplia que la puntual denuncia de Borda, y este último no se libró de sus críticas e ironía. Y es que, como Condorcet puso de manifiesto, la regla de puntuaciones propugnada por Borda para evitar los errores del método de pluralidad, tenía los suyos propios, y podía dar como ganador a un candidato que, a su vez, fuese derrotado por mayoría simple por alguno de sus oponentes en una confrontación entre ellos dos para el colectivo de votantes.

Para Condorcet era incontestable que el ganador en una votación debía vencer al resto de oponentes en duelos por parejas, y el método de Borda no se acogía a esta petición de principio[2]. No obstante, el sólido razonamiento de Condorcet se veía vulnerado en parte por un hecho igualmente aplastante: tal candidato ideal (denominado *ganador de Condorcet*) no tiene porqué existir, hecho del que Condorcet fue plenamente consciente, pero que no fue óbice para que variasen sus posiciones. Cabe así decir, a modo de resumen, que a la incontestabilidad[3] del enfoque de Condorcet se opone la decisividad del método de Borda, que siempre proporciona un ganador[4].

Ante planteamientos tan opuestos de raíz, nos hallamos ante “el desafío de combinar la regularidad del enfoque de Borda con el respeto al principio de Condorcet en un método

[2] A pesar de que, como puso de manifiesto Morales (1805), también las puntuaciones Borda derivan de comparaciones por pares entre los candidatos por parte de los agentes.

[3] Fishburn (1977) ha señalado que la incontestabilidad del ganador de Condorcet puede presentar alguna duda en ciertas situaciones, aunque ello no obsta para que, aun con ciertas reservas, acepte primacía del criterio de Condorcet. También nosotros, en los procedimientos híbridos tratados en el presente trabajo seguimos la misma línea.

[4] Conviene señalar así mismo que el ganador de Borda puede perder en confrontaciones por pares con alguno de sus oponentes por mayoría simple, pero no con todos ellos a la vez (véase, por ejemplo, Gärdenforhs (1973)). En otras palabras, un “perdedor de Condorcet” nunca podría ser ganador de Borda. Nurmi (1999, pp. 11 – 30) conjetura que esta exclusión del perdedor de Condorcet pudiera estar ya latente en el diseño del método de Borda.

unificado, [lo que constituye] un problema de larga tradición en la teoría de las elecciones", tal como señalan Young – Levenglick (1978). En la búsqueda de este compromiso se han propuesto diversas vías de aproximación entre ambos enfoques (véanse, por ejemplo, Fishburn (1977), Young (1977 y 1988), Van Newenhizen (1992), Truchon – Le Breton (1997), entre otros). La que presentamos en nuestro trabajo se basa en varios procedimientos indirectos o híbridos, así denominados por tratar de conciliar ambas perspectivas.

El plan del trabajo es el siguiente. En la sección 2, tras introducir las definiciones y notación pertinentes sobre las preferencias de los agentes, formalizamos los planteamientos de Borda y Condorcet y examinamos algunos ejemplos propuestos por los propios autores para avalar sus argumentos. A continuación, con criterio cronológico, exponemos los principales métodos híbridos que aparecen en la literatura. En la sección 3 se generalizan los procedimientos citados cuando los agentes, al comparar entre pares de alternativas, tienen en cuenta intensidades de preferencia (y no meramente qué alternativa es preferida a que otra). También aquí se introducen las definiciones y notación sobre las preferencias (graduales) mostradas por los agentes en este contexto y se plantean conexiones entre tal modalidad de preferencias y las taxativas o usuales, que tienen su correlato en los correspondientes métodos generalizados y clásicos que las tienen como soporte, respectivamente. En la sección final se aboga por la idoneidad de los procedimientos introducidos.

2. Principales métodos híbridos de votación

Tal como se ha comentado en el esquema del trabajo, se comienza formalizando las preferencias individuales de los agentes, así como los enfoques de Borda y Condorcet, a partir de los cuales generar los métodos híbridos que se exponen en la siguiente subsección.

2.1. Prerrequisitos teóricos

2.1.1. Definiciones y notación (preferencias usuales o taxativas)

Consideraremos un conjunto finito de alternativas (o candidatos) $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, con $n \geq 3$, y m agentes (electores o votantes), con $m \geq 3$. Se dirá que P es una relación de preferencia sobre X si P es una relación binaria asimétrica, esto es: si $x_i P x_j$, entonces no puede ocurrir $x_j P x_i$. La relación de indiferencia I asociada a una relación de preferencia P recoge la ausencia de preferencia: $x_i I x_j$ significa que ni $x_i P x_j$ ni $x_j P x_i$. Por fin, la relación de preferencia débil, $P \cup I$, contempla tanto la preferencia como la indiferencia: $x_i (P \cup I)\, x_j$ quiere decir que $x_i P x_j$ o $x_i I x_j$.

Sea P^k la relación de preferencia del agente k, $(k = 1,2,\ldots,m)$, sobre el conjunto de n alternativas X. A tal relación de preferencia se le puede asociar la matriz

$$\begin{pmatrix} r_{11}^k & r_{12}^k & \ldots & r_{1n}^k \\ r_{21}^k & r_{22}^k & \ldots & r_{2n}^k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{n1}^k & r_{n2}^k & \ldots & r_{nn}^k \end{pmatrix},$$

donde

$$r_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{si } x_i P^k x_j, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

2.1.2. Enfoque de Borda

En lo que sigue se supondrá que estas preferencias P^k son transitivas[5]. Aunque en el planteamiento inicial de Borda los agentes ordenaban las alternativas linealmente, nosotros contemplaremos el caso de órdenes débiles (también denominados preordenes completos), donde se admite que haya indiferencia entre alternativas distintas[6].

Desde un punto de vista formal, el método de Borda se puede enunciar como sigue. En primer lugar se consideran puntuaciones Borda individuales, asignadas por el agente k sobre la alternativa x_i, que vienen dadas por

$$r_k(x_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ x_i P^k x_j}}^{n} r_{ij}^k = \sum_{j=1}^{n} r_{ij}^k .$$

---

[5] En García Lapresta y Martínez Panero (2002) probamos que ésta es una hipótesis natural si se desea que las puntuaciones Borda individuales que se introducen a continuación sean coherentes.

[6] Existen varias formas de generalizar el planteamiento inicial de Borda (véanse especialmente Black (1958 y 1976) y Gärdenfohrs (1973)). La que nosotros seguimos aquí es la que en el contexto de Gärdenfors (1973, p. 19) se denomina función de Borda restringida.

Este contador individual refleja la idea de Borda (explicitada por Morales (1805)) de que a cada alternativa x_i el agente k le asigna como puntuación el número de alternativas que para él son peores. Otra expresión alternativa de este valor es la suma de los coeficientes de la fila *i*-ésima de la matriz de preferencia individual anterior[7]. Es interesante señalar que el posible rango de valores se encuentra entre los del conjunto $\{0,1,...,n-1\}$. El que se alcancen o no algunos de los valores superiores depende de la ausencia o presencia de indiferencia entre distintas alternativas, respectivamente.

Con estas puntuaciones individuales sobre cada alternativa se puede definir una colectiva como sigue:

$$r(x_i) = \sum_{k=1}^{m} r_k(x_i),$$

resultando ganadora(s) por el método de Borda la(s) alternativa(s) con mayor puntuación.

A continuación, como ejemplo de aplicación, exponemos el que el propio Borda (1770)[1884] presentó para justificar su método frente al de pluralidad.

Ejemplo 1

Supongamos que se realiza una elección entre 3 sujetos y que el número de electores sea 21. En el siguiente diagrama se presentan sus ordenaciones (lineales) sobre los candidatos.

6 votantes: $x_3 \quad x_2 \quad x_1$

7 votantes: $x_2 \quad x_3 \quad x_1$

7 votantes: $x_1 \quad x_3 \quad x_2$

1 votante: $x_1 \quad x_2 \quad x_3$.

[7] Siguiendo a Black (1958, pp. 62 y ss.), también puede definirse un contador de tipo Borda individual (al que se denomina extendido), como $r_k^{'}(x_i) = \sum_{j \neq i} (r_{ij}^k - r_{ji}^k)$ El propio Black (1976) prueba que los contadores de Borda clásico y el extendido difieren en una transformación lineal afín.

Borda argumenta que x_1 tiene la pluralidad de los votos ya que, si se votase mediante este procedimiento, sus 8 primeras posiciones le darían como vencedor frente a los 7 votos obtenidos por x_2 y los 6 de x_3. Ahora bien, según apunta Borda, x_1 no tiene a su favor la opinión de los electores, ya que es considerado como el peor por 13 de los 21 votantes.

Para computar entonces que candidato tiene a su favor la mayor "cantidad de opinión", aplicamos el método de puntuaciones. A continuación se detallan las matrices de preferencia de cada grupo de votantes:

$$\text{6 votantes}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix},\ \text{7 votantes}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix},\ \text{7 votantes}\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\ \text{1 votante}\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

con lo que las puntuaciones Borda (suma por filas de las matrices de preferencias ponderadas según el número de votantes) son:

$$r(x_1)=(7\cdot 2)+2=16; \quad r(x_2)=6+(7\cdot 2)+1=21; \quad r(x_3)=(6\cdot 2)+7+7=26,$$

y el ganador sería entonces x_3. De hecho, en este ejemplo, el método de Borda invierte el orden del proporcionado por el de pluralidad.

2.1.3. Principio de Condorcet

Con las mismas hipótesis sobre las preferencias individuales que en el caso anterior, consideremos la matriz agregada

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n}\\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn}\end{pmatrix}$$

obtenida como suma de las matrices de preferencia individuales, es decir, $r_{ij}=\sum_{k=1}^{m} r_{ij}^{k}$.

(Nótese que la suma de los coeficientes de la fila i-ésima de esta matriz es la puntuación Borda colectiva de la alternativa x_i, a saber: $r(x_i)=\sum_{j=1}^{m} r_{ij}$). Entonces diremos que la alternativa x_i es ganadora de Condorcet si y sólo si

$$r_{ij}-r_{ji}>0 \text{ siempre que } j\neq i.$$

La expresión anterior enuncia formalmente el denominado *principio* (o *criterio*) *de Condorcet*, ya que $r_{ij} - r_{ji} > 0$ equivale a $card\{k \mid x_i P^k x_j\} > card\{k \mid x_j P^k x_i\}$; es decir, que hay más agentes que prefieren x_i a x_j que viceversa, lo que expresa la idea de que la alternativa x_i derrota por mayoría simple a cada una de sus oponentes en la consideración del colectivo de agentes[8].

Para un par de alternativas x_i, x_j, denotaremos por $mg(i,j) = r_{ij} - r_{ji}$ al *margen* de la alternativa x_i respecto de la alternativa x_j, o alternativamente, del par ordenado de alternativas (x_i, x_j). Obviamente, $mg(i,j) = -mg(j,i)$.

Está claro que de la definición anterior se sigue la unicidad del ganador de Condorcet supuesta su existencia. Pero, como ya se ha señalado, tal ganador de Condorcet puede no existir. El ejemplo clásico, conocido como terna de Condorcet, es una simplificación del propuesto por dicho autor.

Ejemplo 2

Considérense 3 agentes cuyas preferencias sobre 3 alternativas x_1, x_2, x_3 vienen dadas por

$$x_1 \, P^1 \, x_2 \, P^1 \, x_3$$
$$x_2 \, P^2 \, x_3 \, P^2 \, x_1$$
$$x_3 \, P^3 \, x_1 \, P^3 \, x_2.$$

Entonces, la matriz agregada, suma de las de preferencias individuales en el orden consignado, es

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

ocurriendo que, para cada i=1,2,3 existe $j \neq i$ tal que $mg(i,j) < 0$, por lo que no existe alternativa alguna que venza a sus oponentes al ser comparadas por parejas. De hecho, en este caso, la preferencia colectiva entre pares de alternativas definida a partir de la

[8] También mediante la matriz agregada se puede expresar la puntuación colectiva de Borda ajustada como

$$r'(x_i) = \sum_{j \neq i} (r_{ij} - r_{ji}),$$

que corresponde a suma de coeficientes de la fila *i*-ésima menos la suma de coeficientes de la columna *j*-ésima de dicha matriz.

mayoría simple es cíclica, pues 2 de cada 3 agentes prefieren en cada caso x_1 a x_2, x_2 a x_3, y ¡x_3 a x_1! Este ejemplo ilustra la denominada *paradoja del voto* o *efecto Condorcet*.

A continuación, mediante otro ejemplo, también debido a Condorcet (1785), se pone de manifiesto la discrepancia entre el enfoque de éste y el de Borda.

Ejemplo 3

Considérense una comisión de 30 votantes, donde existen dos coaliciones cuyas preferencias vienen dadas como sigue:

$$\text{19 votantes:} \quad x_1 \, P \, x_2 \, P \, x_3$$

$$\text{11 votantes:} \quad x_2 \, P' \, x_3 \, P' \, x_1.$$

La matriz agregada, suma de las de preferencias individuales resulta

$$19\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 11\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 19 & 19 \\ 11 & 0 & 30 \\ 11 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Así pues, las puntuaciones Borda colectivas son

$$r(x_1)=38, \quad r(x_2)=41, \quad r(x_3)=11,$$

y, por tanto, x_2 es la alternativa ganadora según el método de Borda. Ahora bien,

$$mg(1,2) = 19 - 11 > 0, \qquad mg(1,3) = 19 - 11 > 0,$$

por lo que x_1 es la alternativa ganadora de Condorcet.

Señalemos para concluir esta subsección que, pese a la discordancia manifiesta entre los enfoques posicional (Borda) y no posicional (Condorcet), Fishburn y Gehrlein (1976) probaron que el ganador de Condorcet nunca resultará el peor puntuado por el método de Borda.

2.2. Métodos híbridos clásicos

A continuación pasamos a exponer los métodos de los que trata el presente trabajo. Como ya hemos indicado, hemos seguido un criterio estrictamente cronológico.

2.2.1 Método de Nanson

Nanson (1883) propuso una regla de Borda iterada con eliminación, en la que en cada etapa se elimina(n) la(s) alternativas con peor puntuación, y se repite el cómputo de

Borda hasta que sólo quede una o un grupo de ellas empatadas. A continuación, mediante un sencillo argumento aritmético (véase Straffin (1980, p. 31)) se prueba que la regla de Nanson selecciona al ganador de Condorcet, si es que existe.

Supongamos que se aplica el método de Borda a *n* alternativas por parte de *m* agentes. Según se ha indicado, la suma de puntuaciones otorgadas por cada agente puede alcanzar como máximo el valor

$$1+2+\cdots+n=\frac{(n-1)n}{2}.$$

Por tanto, la suma total de puntos otorgados por el colectivo de votantes puede ser a lo sumo $m\frac{(n-1)n}{2}$, y al dividir esta puntuación entre el número de candidatos se obtiene la puntuación media $\frac{(n-1)m}{2}$. Ahora bien, de la definición de ganador de Condorcet se sigue que tal candidato, al derrotar a todos sus oponentes ($n-1$) por mayoría simple (más de $\frac{m}{2}$ veces), debe superar este umbral, luego algún otro candidato debe estar por debajo del mismo y ser eliminado. Así, el ganador de Condorcet permanecerá tras las sucesivas etapas del método de Nanson.

A la luz del argumento anterior, no hay inconveniente en eliminar en cada etapa no solamente al candidato peor puntuado, sino a todos cuantos su puntuación se encuentran por debajo de la media, tal como indica Fishburn (1977).

2.2.2. Método de Copeland. El híbrido de Niemi – Riker

Copeland (1951) propuso un contador que, para los *n* candidatos y *m* votantes considerados viene dado por

$$c(x_i)=\sum_{j\neq i} sgn(mg(i,j)),$$

donde r_{ij} son los coeficientes de la matriz agregada, y

$$sgn(x)=\begin{cases}1, & \text{si } x>0,\\ 0, & \text{si } x=0,\\ -1, & \text{si } x<0.\end{cases}$$

Como en el método de Borda, la mayor puntuación decide la votación, pero nótese que, a diferencia del método de Borda ajustado, que computa individualmente puntos a favor menos puntos en contra, el método de Copeland contabiliza colectivamente victorias menos derrotas. Por ello, si existe un ganador de Condorcet, x_i, lo es también mediante este procedimiento, ya que en dicho caso $sgn(mg(i, j)) = 1$ para cada $j \neq i$, siendo por tanto $c(x_i) = n - 1$. Recíprocamente, una alternativa con la máxima puntuación Copeland alcanzable, a saber, $n - 1$, es la ganadora de Condorcet.

El método de Copeland es susceptible de asignar empates a muchas alternativas a la vez, siendo así a veces poco decisivo. Pero su mayor punto débil es que un ganador de Copeland puede perder en confrontaciones por pares con el proporcionado por el método de Borda, como pusieron de manifiesto Niemi–Riker (1976)[1991]. El siguiente ejemplo, debido a Straffin (1980, p. 33) así lo prueba.

Ejemplo 4

Considérese un grupo de 9 votantes que tienen las siguientes ordenaciones (lineales) sobre 5 alternativas:

$$\begin{aligned}
&\text{1 votante: } x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \\
&\text{4 votantes: } x_3 \quad x_4 \quad x_2 \quad x_5 \quad x_1 \\
&\text{1 votante: } x_5 \quad x_1 \quad x_4 \quad x_2 \quad x_3 \\
&\text{3 votantes: } x_5 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_4 \quad x_3 .
\end{aligned}$$

La matriz agregada en el presente caso se calcula como

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 0 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 4 & 0 & 5 \\ 8 & 4 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Las puntuaciones Borda de cada alternativa se obtienen sumando los coeficientes de la matriz agregada por filas:

$$r(x_1)=16, \quad r(x_2)=18, \quad r(x_3)=18, \quad r(x_4)=18, \quad r(x_5)=20;$$

resultando ganadora por el método de Borda la alternativa x_5.

Por otro lado, las puntuaciones Copeland resultan ser

$$c(x_1)=1+1+1-1=2\,, \quad c(x_2)=-1+1-1+1=0\,, \quad c(x_3)=-1-1+1+1=0\,,$$

$$c(x_4)=-1+1-1+1=0\,, \quad c(x_5)=1-1-1-1=-2\,;$$

Observemos ahora, en primer lugar, que no existe ganador de Condorcet (ninguna alternativa alcanza una puntuación Copeland 4). Entonces, como mal menor, se proclama ganador de Copeland x_1, ¡pero éste es el peor candidato para el colectivo de votantes según el método de Borda! Y no sólo esto, además el ganador de Copeland, x_1, pierde al enfrentarse con el de Borda, x_5, ¡por 8 votos contra 1!

La posibilidad de este hecho hace que Niemi – Riker [1976](1991) moderen su optimismo inicial acerca del método de Copeland. Debido a estas reservas Straffin (1980, p. 33 – 34), siguiendo a los citados autores, plantea un método híbrido definido como sigue: selecciónese el ganador de Copeland, a menos que éste sea derrotado por el ganador de Borda, en cuyo caso éste último será el ganador.

Obviamente, la salvedad anterior no puede ocurrir sino en ausencia de un ganador de Condorcet. El híbrido de Niemi–Riker es así plenamente Condorcet eficiente: selecciona al ganador de Condorcet si existe (pues también será ganador de Copeland y derrotará al de Borda por definición). Y si no existe ganador de Condorcet, el híbrido de Niemi – Riker seleccionará al ganador de Borda en el caso de que este venza al de Copeland.

2.2.3. El híbrido de Black

Black (1958, pp 46 – 66), tras analizar los enfoques de Borda y Condorcet, diseñó un procedimiento híbrido de votación con un criterio lexicográfico, a saber: elíjase el ganador de Condorcet, caso de existir; en caso contrario elíjase al ganador de Borda. Señala el autor, en el mismo lugar, la ventaja que supone el hecho de que mediante una misma matriz (la que nosotros hemos denominado matriz agregada) se puedan realizar los cómputos relativos al criterio de Condorcet y a las puntuaciones Borda.

2.2.4. Método de Kemeny

El matemático John Kemeny, conocido por ser uno de los padres del lenguaje de programación *Basic*, propuso un método de votación que, según Young (1986, 1988 y 1995), se encuentra ya, aunque de forma un tanto vaga, en los escritos dejados por Condorcet[9].

Para simplificar la exposición de Kemeny (1959), supondremos inicialmente que las preferencias $P^k, k = 1,...,m$ mediante las cuales *m* votantes comparan *n* alternativas son órdenes lineales. Con tales órdenes como datos, Kemeny se preguntó cómo encontrar un orden P también lineal sobre las alternativas que mejor los aproximase en media[10]. Kemeny propuso entonces un concepto de métrica en el espacio de tales ordenaciones definida como sigue: la distancia entre P y P^k viene dada por el número de pares de alternativas en cuya ordenación difieren P y P^k. Así, la ordenación P que minimice la suma de distancias a $P^k, (k = 1,...,m)$, sería la buscada[11].

Según señala Truchon (mimeo), la noción de distancia anterior puede modificarse ligeramente para permitir el hecho de que los agentes se manifiesten sobre las alternativas mediante órdenes débiles, aunque manteniendo que la ordenación de Kemeny buscada sea lineal. Formalmente, para el mismo cuadro de alternativas y votantes, sean un orden lineal P y órdenes débiles $P^k, k = 1,...,m$. Para cada par de alternativas x_i, x_j defínase

$$d_{ij}(P, P^k) = \begin{cases} 1, & \text{si } x_i P x_j \text{ y } x_j (P^k \cup I^k) x_i, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Entonces la distancia de Kemeny entre P y P^k vendrá dada por

$$d(P, P^k) = \sum_{i \neq j} d_{ij}(P, P^k),$$

y la regla de Kemeny en este sentido buscaría el orden lineal P que minimiza la suma de las distancias a los órdenes débiles $P^k, (k = 1,...,m)$.

---

[9] Más recientemente, Nurmi (1999) expone varios métodos prácticos concebidos por Condorcet para evitar el problema de falta de decisividad que supone la presencia de ciclos en la preferencia colectiva. El denominado "método de máximo acuerdo" es, de hecho, una formulación alternativa del método de Kemeny.

[10] Kemeny(1959), según confesión propia, extrapoló así al campo de la toma de decisiones argumentos usados, por ejemplo, en el tratamiento de datos estadísticos.

Es interesante ahora señalar que, siguiendo a Saari – Merlin (2000), es posible enunciar la regla de Kemeny de forma más compacta, en términos de la matriz agregada y los márgenes introducidos en la sección anterior. Así, para cara orden lineal P de los candidatos, considérense todos los pares de alternativas tales que $x_i P x_j$ y el par (x_i, x_j) tiene margen negativo (que se puede entender como desavenencia con el agregado en lo referente a ese par de alternativas) y súmense tales márgenes. El valor total, cambiado de signo, es la distancia de Kemeny de P a las ordenaciones de los agentes. Formalmente, si P^k es un orden débil y P un orden lineal,

$$d(P, P^k) = \sum_{mg(i,j)<0} -mg(i, j).$$

El orden lineal P que proporcione una menor distancia de Kemeny, o en otras palabras, cuya suma de márgenes negativos sea mayor, será el ranking proporcionado por la regla de Kemeny.

Ejemplo 5

Consideremos 50 votantes que han de decidir sobre 4 alternativas cuyas preferencias (lineales) vienen dadas como sigue:

$$\begin{aligned} &21 \text{ votantes: } x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \\ &12 \text{ votantes: } x_3 \quad x_4 \quad x_2 \quad x_1 \\ &5 \text{ votantes: } x_4 \quad x_3 \quad x_1 \quad x_2 \\ &12 \text{ votantes: } x_2 \quad x_4 \quad x_1 \quad x_3. \end{aligned}$$

La matriz agregada resulta

$$21\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 12\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + 12\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 26 & 33 & 21 \\ 24 & 0 & 33 & 33 \\ 17 & 17 & 0 & 33 \\ 29 & 17 & 17 & 0 \end{bmatrix}.$$

[11] En realidad, según hace notar Young (1995), Kemeny (1959) propuso el doble del número de discordancias, pero con ello las métricas son equivalentes.

A continuación se consignan únicamente los márgenes positivos proporcionados por dicha matriz:

$$mg(1,2) = 26 - 24 = 2; \quad mg(2,3) = 33 - 17 = 16;$$

$$mg(3,4) = 33 - 17 = 16; \quad mg(4,1) = 29 - 21 = 8;$$

$$mg(1,3) = 33 - 17 = 16; \quad mg(2,4) = 33 - 17 = 16.$$

(Nótese que no existe en este ejemplo ganador de Condorcet). Ahora, de la ordenación $x_2 \quad x_1 \quad x_3 \quad x_4$, los pares que tienen márgenes negativos son (x_2, x_1), con $mg(1,2) = -2$ y (x_1, x_4), con $mg(1,4) = -8$. La distancia de Kemeny será, pues, 10. Sin embargo, de la ordenación $x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4$, únicamente el par ($x_1$, x_4) tiene margen negativo ($mg(1,4) = -8$), con lo que este orden rebaja la distancia de Kemeny. Es fácil confirmar que cualquier otra ordenación tendrá márgenes negativos con valor –16 o menores, por lo que $x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4$ es la ordenación proporcionada por la regla de Kemeny.

Se observa que, en general, el cómputo de método de Kemeny es prolijo (en principio habría que hacer cálculos sobre $n!$ posibles ordenaciones), aunque Saari – Merlin (2000) dan pautas de simplificación del mismo.

No es evidente que el elemento situado en primer lugar del ranking proporcinado por la regla de Kemeny sea el ganador de Condorcet, caso de existir. Young – Levenglick (1978) prueban no sólo este hecho, sino también que la regla de Kemeny es la única con la propiedad anterior que es también neutral y consistente. Habida cuenta de que, como señalan los autores, la consistencia (también denominada *reinforcement* por los anglosajones) es propiedad característica de la regla de Borda[12], la regla de Kemeny se puede entender como una especie de híbrido axiomático, podríamos decir, redescubierto por Young – Levenglick (1978) al imponer estos autores a una regla de votación propiedades deseables de los enfoques posicional y no posicional.

Hay que indicar que también otro matemático, Charles Lutwitdge Dodgson, formuló una regla que elegía al candidato "más cercano" (en un cierto sentido que no trataremos aquí) al ganador de Condorcet. El que el método de Dodgson (1876) y otros trabajos de

[12] En forma simplificada, esta propiedad expresa el hecho de que si dos cuerpos electorales prefieren cada cual una alternativa x_i a otra x_j, entonces la combinación de ambos (bajo la misma regla de votación) también.

tema electoral fueran recuperados por Black (1958, pp. 189 – 238) tanto tiempo después de ser desarrollados, tal vez se deba a que la faceta literaria de Dodgson (bajo el alias de Lewis Carroll) oscureció su labor en el campo de la toma de decisiones. Recientemente Ratliff (2001), de quien se ha tomado el anterior ejemplo de aplicación de la regla de Kemeny, ha señalado las conexiones entre ésta y la de Dodgson.

3. Generalización a partir de preferencias graduales

Hasta ahora, los procedimientos de votación introducidos (y por tanto las preferencias individuales de los agentes en que se basan) únicamente tienen en cuenta qué alternativas son preferidas respecto de las otras, y en cada caso el rango de puntuaciones son discretos. Ahora bien, parece una transición natural y enriquecedora del sentido del voto manifestado que los agentes puedan señalar numéricamente la magnitud en que prefieren unas alternativas a otras[13], valorando sus intensidades de preferencia entre 0 y 1. Esto es posible, si se consideran relaciones binarias graduales o difusas. Por tal motivo, a continuación se introducen algunos prerrequisitos necesarios para considerar las reglas anteriores bajo esta nueva perspectiva. Con tales datos propondremos también generalizaciones del método de Borda, del principio de Condorcet, de los contadores de Copeland y de la distancia de Kemeny. Con estos elementos es posible rediseñar los procedimientos híbridos introducidos en la sección anterior, dotándoles de mayor versatilidad y decisividad. No se distinguirán notacionalmente los casos generalizados de sus correspondientes patrones clásicos.

3.1. Prerrequisitos teóricos

3.1.1. Definiciones y notación (preferencias graduales o difusas).

Se considerará también aquí un conjunto finito de alternativas, $X = \{x_1, ..., x_n\}$, sobre el que cada uno de los *m* agentes muestra sus preferencias, a través de una relación binaria difusa R^k sobre *X*, $k=1,...,m$. Con $r_{ij}^k = m_R(x_i, x_j) \in [0,1]$ se indica el nivel de intensidad con el que el agente *k* prefiere la opción x_i a la x_j, mayor cuanto más cerca esté de 1.

Por motivos de normalización, en una relación binaria difusa se considera unitaria para cada agente toda la capacidad de preferir entre cada par de alternativas. También, que cuanto mayor sea la intensidad r_{ij} con la que x_i es preferida a x_j, menor será la intensidad r_{ji} con la que x_j es preferida a x_i. Estos aspectos se contemplan en el *axioma de reciprocidad*, que establece que $r_{ij} + r_{ji} = 1$ para cualesquiera $i, j \in \{1,...,n\}$, y que se asumirá en lo que sigue.

Considerada la relación binaria difusa recíproca R^k del agente k sobre las alternativas, puede construirse la matriz de intensidades de preferencia

$$\begin{pmatrix} r_{11}^k & r_{12}^k & \dots & r_{1n}^k \\ r_{21}^k & r_{22}^k & \dots & r_{2n}^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1}^k & r_{n2}^k & \dots & r_{nn}^k \end{pmatrix},$$

donde los coeficientes simétricos respecto de la diagonal principal suman 1.

Así mismo, para cada agente $k \in \{1,...,m\}$, la relación de preferencia difusa recíproca R^k induce una relación de preferencia ordinaria definida por

$$x_i \succ_k x_j \Leftrightarrow r_{ij}^k > 0.5,$$

para cualquier par de alternativas x_i, x_j.

3.1.2. Método de Borda generalizado[14]

Para cada agente $k \in \{1,...,m\}$, se desea construir un nuevo contador que evalúe cada alternativa teniendo en cuenta intensidades de preferencia. En el caso discreto el valor dado por el contador era el número de las alternativas peores que la considerada para una cierta relación de preferencia ordinaria P^k. Ahora, análogamente, este papel lo juega la relación de preferencia ordinaria $\succ_k$ inducida por la relación binaria difusa recíproca R^k. Así, el contador individual introducido sumará las intensidades de

---

[13] Esta idea ya aparece en forma embrionaria en Morales (1797 y 1805) y en el comentario de Condorcet a la Memoria de Borda (1770)[1784].

[14] Seguimos el tratamiento que aparece en García Lapresta – Martínez Panero (2002). Hacemos notar que también Marchant (1996 y 2000), de forma similar, ha diseñado una variante gradual del método de Borda, aunque, en su caso, a partir de planteamientos de toma de decisiones multicriterio.

preferencia entre la alternativa considerada y las que son peores según $\succ_k$. De esta forma, el agente k asigna a la alternativa x_i el valor

$$r_k(x_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ x_i \succ_k x_j}}^{n} r_{ij}^k = \sum_{\substack{j=1 \\ r_{ij}^k > 0.5}}^{n} r_{ij}^k,$$

lo que corresponde a sumar los coeficientes mayores que 0.5 de la fila i de la matriz de intensidades de preferencia del agente[15].

De nuevo, con estos contadores individuales se construye uno colectivo:

$$r(x_i) = \sum_{k=1}^{m} r_k(x_i),$$

y resultará(n) elegida(s) la(s) alternativa(s) con mayor puntuación.

Hemos de señalar que mientras el contador de Borda discreto otorga puntuaciones individuales en el conjunto $\{0, 1, ..., n-1\}$, el contador Borda gradual toma valores en el intervalo $[0, n-1]$, con todos los valores intermedios posibles.

3.1.3. Principio de Condorcet generalizado

Con las mismas hipótesis sobre las preferencias individuales que en el caso anterior y teniendo en cuenta análogas consideraciones, definimos ahora la matriz agregada generalizada,

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix},$$

coeficiente a coeficiente, como una suma condicionada de las matrices de preferencia individuales, a saber, $r_{ij} = \sum_{\substack{k=1 \\ x_i \succ_k x_j}}^{m} r_{ij}^k = \sum_{\substack{k=1 \\ r_{ij}^k > 0.5}}^{m} r_{ij}^k$ (se asume que un sumatorio indexado en el

---

[15] Al generalizar el método de Borda en este sentido, puede pensarse, por analogía con el caso discreto, que la transitividad de $\succ_k$ garantizaría unos contadores Borda individuales coherentes. Sin embargo, en García Lapresta – Martínez Panero (2002) probamos que esta propiedad no es suficiente, y enunciamos una condición de transitividad difusa que sí asegura la consistencia interna del método propuesto, a saber, la denominada transitividad max-max débil difusa, que se caracteriza por el hecho de que $(r_{ij}^k > 0.5 \;\text{ y }\; r_{jl}^k > 0.5) \Rightarrow r_{il}^k \geq \max(r_{ij}^k, r_{jl}^k)$.

conjunto vacío es nulo). Entonces diremos que la alternativa x_i es ganadora de Condorcet si y sólo si

$$r_{ij} - r_{ji} > 0 \text{ siempre que } j \neq i.$$

De nuevo, en las anteriores definiciones no hay más que una traslación de sus homólogas clásicas al caso gradual. Así, mientras que en el caso clásico se cotejaban el número de agentes para el que la alternativa x_i era preferida (según P^k) a la x_j y viceversa, ahora se sopesan las intensidades con que la alternativa x_i es preferida a la x_j conforme a la relación de preferencia inducida $\succ_k$ de cada agente. En otras palabras, se puede definir también una *mayoría simple generalizada* en virtud de la cual la alternativa x_i vence a la alternativa x_j cuando

$$\sum_{\substack{k=1 \\ x_i \succ_k x_j}}^{m} r_{ij}^k > \sum_{\substack{k=1 \\ x_j \succ_k x_i}}^{m} r_{ji}^k,$$

y entonces el ganador de Condorcet generalizado (también único por definición) sería la alternativa x_i que derrota por mayoría simple generalizada a cada una de sus oponentes en la consideración del colectivo de agentes. La definición (y notación) de margen generalizado entre dos alternativas se mantiene en este contexto, pero ahora puede tomar valores no enteros.

Es conveniente señalar que también la suma de los coeficientes de la fila *i*-ésima de la matriz agregada generalizada coincide con la puntuación Borda colectiva generalizada de la alternativa x_i, a saber: $r_k(x_i) = \sum_{j=1}^{n} r_{ij}^k$.

3.1.4. Regla de Copeland generalizada

El contador de Copeland para la alternativa x_i toma la misma expresión que en el caso discreto,

$$c(x_i) = \sum_{j \neq i} sgn(mg(i, j)),$$

pero ahora los cálculos de los márgenes se hacen a partir de la matriz agregada generalizada. También aquí el método de Copeland contabiliza victorias menos derrotas, de acuerdo ahora con la regla de mayoría simple generalizada que hemos considerado para el colectivo de agentes. Por ello, si existe un ganador de Condorcet, x_i, lo es también mediante este procedimiento, ya que en dicho caso $sgn(mg(i, j)) > 0$ para cada $j \neq i$, siendo por tanto $c(x_i) = n - 1$, y recíprocamente.

3.1.5 Regla de Kemeny generalizada

Seguimos también aquí el tratamiento de Saari – Merlin (2000) para enunciar esta propuesta de regla generalizada de Kemeny. Utilizamos ahora la matriz agregada generalizada y los márgenes generalizados introducidos, y mantenemos el que la ordenación buscada sea un orden lineal P de los candidatos. Así pues, tómense todos los pares de alternativas tales que $x_i P x_j$, tienen margen generalizado negativo (esto debe entenderse ahora como desavenencia entre la ordenación P y la mayoría simple generalizada) y súmense tales márgenes. El valor total, cambiado de signo, es la distancia generalizada de Kemeny de P a las preferencias (difusas) de los agentes. El orden lineal que proporcione una menor distancia generalizada será el ranking proporcionado por la regla de Kemeny en este contexto.

3.2. Métodos híbridos generalizados. Conexiones

Como ya hemos señalado, es posible ahora rediseñar los procedimientos híbridos clásicos mediante sus componentes generalizados. Así, al regla generalizada de Nanson sería un método de Borda generalizado con eliminación, el híbrido generalizado de Black conjugaría el criterio de Condorcet generalizado y la regla de Borda generalizada, etc.

Se pondrá ahora de manifiesto mediante algunos ejemplos cómo el precio de pedir a los agentes una información más detallada sobre las alternativas (mediante intensidades de preferencia que sirvan como datos de entrada para los métodos híbridos generalizados) queda recompensado con una mayor decisividad en la elección y un sentido del voto más fiel a sus verdaderos deseos que si se hubieran manifestado mediante preferencias usuales o taxativas que son la base de los métodos híbridos clásicos.

Ejemplo 6

A continuación se detallan las preferencias graduales de 3 agentes por tres alternativas, y se obtiene la matriz agregada generalizada mediante su suma condicionada en el sentido detallado en 3.1.3, que denotamos por $\oplus$.

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.8 & 0.9 \\ 0.2 & 0.5 & 0.8 \\ 0.1 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.2 \\ 0.8 & 0.5 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 & 0.5 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.6 & 0.9 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1.4 & 0.9 \\ 0.8 & 0 & 1.4 \\ 1.2 & 0.9 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si cada elector tuviese que manifestar sus preferencias de la forma usual, cabe pensar en que, al comparar dos candidatos, votarían a favor de aquél por el que tuviesen una intensidad de preferencia mayor, y puesto que por reciprocidad suman 1, mayor que 0.5. En otras palabras, elector k cambiaría su correspondiente relación de preferencia gradual R^k por la relación de preferencia ordinaria inducida $\succ_k$. Así, cada valor mayor que 0.5 en las matrices de intensidades de preferencia individuales pasa a ser 1 en el caso taxativo, y cada valor menor o igual que 0.5 pasa a valer 0. En nuestro ejemplo, las matrices de preferencia individuales y la agregada (ahora mediante suma usual) resultarían ser

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Obsérvese que, de actuar así, se obtendría la terna de Condorcet que aparecía en el *Ejemplo 2*. Si se aplicase el método clásico de Black, no habría ganador de Condorcet y habría también un triple empate de puntuaciones Borda. Así mismo, las puntuaciones Copeland serían todas nulas. Nos encontraríamos, por tanto, en un punto muerto.

De otro lado, si se tienen en cuenta las intensidades de preferencia y aplicamos el método generalizado de Black, se observa a partir de la matriz agregada generalizada que tampoco hay ganador de Condorcet, ya que, para cada i=1,2,3 existe $j \neq i$ tal que $mg(i, j) < 0$. Sin embargo, ahora las puntuaciones de Borda sí discriminan:

$$r(x_1)=2.3; \quad r(x_2)=2.2; \quad r(x_3)=2.1,$$

y quedaría elegido el candidato de mayor puntuación, x_1.

Ejemplo 7

Retomemos el *Ejemplo 3* que, recordemos, fue propuesto por el marqués de Condorcet, y supongamos que los 19 primeros votantes tienen la misma ordenación de preferencias, pero de forma muy tibia (intensidades de preferencia 0.55), mientras que los otros 11 también mantienen la misma jerarquía de alternativas, estos de forma casi absoluta (intensidades de preferencia 0.95), viniendo el resto de intensidades de preferencia dadas por reciprocidad. Se consignan a continuación las matrices de preferencia individuales de los agentes y la agregada. En lo que sigue, si n es un número natural y M una matriz, convendremos en denotar $n \bullet M = M \oplus \overbrace{\cdots}^{n \text{ veces}} \oplus M$. Entonces, la situación anterior queda reflejada así:

$$\left(19 \bullet \begin{bmatrix} 0.5 & 0.55 & 0.55 \\ 0.45 & 0.5 & 0.55 \\ 0.45 & 0.45 & 0.5 \end{bmatrix} \right) \oplus \left(11 \bullet \begin{bmatrix} 0.5 & 0.05 & 0.05 \\ 0.95 & 0.5 & 0.95 \\ 0.95 & 0.05 & 0.5 \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 10.45 & 10.45 \\ 10.45 & 0 & 20.9 \\ 10.45 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si los agentes tuvieran que pronunciarse de forma estricta sobre los pares de alternativas, sustituyendo en su baremo interno las preferencias graduales R^k por las correspondientes $\succ_k$, estos se manifestarían como en el *Ejemplo 3*,

$$19 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 11 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 19 & 19 \\ 11 & 0 & 30 \\ 11 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde se puso de manifiesto que existía un ganador de Condorcet, x_1, distinto del proporcionado por la regla de Borda, x_2. Por tanto, tanto la regla híbrida de Black, como el método de Copeland, como la regla híbrida de Niemi y Riker darían como ganador a x_1.

Sin embargo, si observamos la situación desde la nueva perspectiva, donde salen a la luz los matices de las preferencias que en el caso clásico no son observables, se tendría que no hay ganador de Condorcet generalizado (no existe candidato i tal que para cada $j \neq i$ cumpla $mg(i, j) > 0$). En cuanto a las puntuaciones Copeland generalizadas, estas resultan ser

$$c(x_1) = sgn(10.45 - 10.45) + sgn(10.45 - 10.45) = 0,$$

$$c(x_2) = sgn(10.45 - 10.45) + sgn(20.9 - 0) = 1,$$

$$c(x_1) = sgn(10.45 - 10.45) + sgn(0 - 20.9) = -1,$$

por lo que x_2 resulta ganador de Copeland generalizado. Y también ganador de Borda generalizado, ya que es la alternativa que obtiene mayor puntuación:

$$r(x_1)=20.9; \quad r(x_2)=30.35; \quad r(x_3)=10.45.$$

Luego a la vista de estos resultados se observa que, si se procede mediante los métodos generalizados de Black, Copeland y Niemi – Riker, la alternativa ganadora debería ser x_2, frente a la x_1 seleccionada mediante los correspondientes procedimientos clásicos.

Los dos ejemplos anteriores dan buena muestra de que la casuística del paso del enfoque taxativo al gradual es variada. Además de los casos expuestos y de forma análoga, se podrían exhibir situaciones donde no existiese ganador de Condorcet en el caso taxativo y sí en el gradual, o que cambiase al pasar de un caso a otro, con las correspondientes repercusiones para los procedimientos híbridos reseñados. Así por ejemplo, en este último supuesto, la regla de Nanson usual elegiría en su último descarte al ganador de Condorcet clásico, mientras que la regla de Nanson generalizada elegiría al ganador de Condorcet generalizado, distinto del anterior.

4. Consideraciones finales

Amartya Sen, Premio Nobel de Economía de 1998, comenzó su discurso de recepción del citado premio con una sentencia atribuida a varios autores, pero tal vez fruto del acervo popular, que afirma que "un camello es un caballo diseñado por un comité". Esta dura crítica a las deficiencias de las decisiones colectivas es rebatida por Sen (1998)[2000], quien defiende que acaso un camello no sea tan mala elección a partir de las opiniones de los miembros del comité, pues si bien es menos veloz que un caballo, es útil, armonioso, y bien coordinado para recorrer largas distancias sin alimento ni agua. Puestos en lo peor, argumenta Sen, tal comité pudiera llegar a aglutinar sus deseos en algo tan incongruente como un unicornio: es eso lo que debiera evitarse.

En nuestro trabajo hemos pretendido que la amalgama de diversos procedimientos de votación, cada uno válido por derecho propio, pero con divergencias radicales en cuanto a su carácter posicional (enfoque de Borda) o no posicional (enfoque de Condorcet), dé como resultado un proceso de toma de decisiones consistente y, por tanto, una alternativa ganadora justificada.

En la exposición de los métodos híbridos que hemos denominado clásicos hemos tenido en cuenta todas las alternativas, si bien únicamente en el sentido de cuántas de ellas eran deseadas por los agentes frente a otras a través de sus preferencias individuales ordinarias. Así, aunque se tiene un rango discreto de valoración de las alternativas en cada caso, pudiera ocurrir que la ausencia de una información más detallada por parte de los agentes se tradujera en falta de decisividad de las reglas diseñadas, o en que la representatividad del ganador acaso quedara en entredicho.

Por el contrario, en los procedimientos híbridos definidos teniendo en cuenta intensidades de preferencia por parte de los agentes (además de cuántas alternativas son deseadas frente a otras, ahora también interesa por cuánto son deseadas), la decisividad se incrementa respecto a la de sus patrones clásicos, debido a la gama más amplia de datos, de espectro continuo, de donde provienen las valoraciones finales por parte del colectivo de agentes. Paralelamente, pensamos, la elección final es más representativa de los deseos de dicho colectivo, toda vez que los agentes han podido matizar sus preferencias y, de esta forma, los datos con los que operan los métodos híbridos que hemos denominado generalizados han sido tenidos en cuenta por nimios que pudieran parecer.

Biblliografía

Black, D. (1958): *The Theory of Committees and Elections*, Cambridge University Press, Cambridge.

Black, D. (1976): “Partial justification of the Borda Count”, *Public Choice* 28, pp. 1 – 16.

Borda, J-C. de [1770](1884): “Memoire sur les elections au scrutin”, *Historie de l’Academie Royale des Sciences*, París. [Se reproduce, en inglés, en McLean – Urken (1995, pp. 81 – 89)].

Condorcet, Marqués de (1785): *Essai sur l’Application de l’Analyse à la Probabilité des Décisions rendues à la Pluralité des Voix*, L’Imprimierie Royale, París. [Se reproducen fragmentos escogidos, en inglés, en McLean – Urken (1995, pp. 91 – 112)].

Copeland, A.H. (1951): “A ‘reasonable’ social welfare function”, *University of Michigan Seminar on Applications of Mathematics to the Social Sciences*, University of Muchigan, Ann Arbor.

Dodgson, C.L. (1876): “A method of taking votes on more than two issues”, véase Black (1958, pp. 224 – 234). [También se reproduce en McLean – Arnold B. Urken (1995, pp. 288 –297)].

Fishburn, P.C. – Gehrlein, W.V. (1976): “Borda’s rule, positional voting, and Condorcet’s simple majority principle”, *Public Choice* 28, pp. 79 – 88.

Fishburn, P.C. (1977): “Condorcet social choice functions”, *SIAM Journal on Applied Mathematics* 33, pp. 469 – 489.

García Lapresta, J.L. – Martínez Panero, M. (2002): “A fuzzy Borda Count in multi-person decisión making”, en T. Trzaskalik y J. Michnik (eds.): *Multiple Objective and Goal Programming. Recent Developments*, Advances in Soft Computing, Springer Verlag, Berlín, pp. 46 – 60.

Gärdenfohrs, P. (1973): “Positionalist voting functions”, *Theory and Decision* 4, pp. 1 – 24.

Kemeny, J. (1959): “Mathematics without numbers”, *Daedalus* 88, pp. 571 – 591.

McLean, I. – Urken, A.B. (1995): *Classics of Social Choice*, The University of Michigan Press, Ann Arbor.

Marchant, T. (1996): “Valued relations aggregation with the Borda method”, *Journal of Multicriteria Decision Analysis* 5, pp. 127 – 132.

Marchant, T. (2000): “Does the Borda Rule provide more than a ranking?”, *Social Choice and Welfare* 17, pp. 381 – 391.

Morales (1797): *Memoria Matemática sobre el Cálculo de Opinion en las Elecciones*, Imprenta Real, Madrid.

Morales (1805): *Apéndice a la Memoria Matemática sobre el Cálculo de Opinion en las Elecciones*, Imprenta de Sancha, Madrid.

Nanson, E.J. (1883): “Methods of election”, *Transactions and Proceedings of Royal Society of Victoria* 19, pp. 197 – 240. [Se reproduce en McLean – Urken (1995, pp. 321 – 359)].

Niemi, R. G. – Riker, W.H. [1976] (1991): “La elección de los sistemas de votación”, en Colomer, J.M. (ed.), *Lecturas de Economía Política Positiva*, Instituto de Estudios Fiscales, Madrid.

Nurmi, H. (1999): *Voting Paradoxes and How to Deal with Them*, Springer Verlag, Berlín.

Saari, D. G. – Merlin, V.R. (2000): “A geometric examination of Kemeny’s rule”, *Social Choice and Welfare* 17, pp. 403 – 438.

Sen, A. [1998](2000): “La posibilidad de la elección social”, *Revista BCV* 14, pp. 9 – 60. Disponible en www.bcv.org.ve/publica/rbcv/rbcv100b.pdf.

Straffin Jr, P.D. (1980): *Topics in the Theory of Voting*, Birkhäuser, Boston.

Ratliff, T.C. (2001): “A comparison of Dodgson’s method and Kemeny’s rule”, *Social Choice and Welfare* 18, 79 – 89.

Truchon, M. (mimeo): “An extensión of Condorcet criterion and Kemeny orders”.

Truchon, M. – Le Breton, M. (1997): “A Borda measure for social choice functions”, *Mathematical Social Sciences* 34, pp. 249 – 272.

Young, H.P. (1977): “Extending Condorcet’s rule”, *Journal of Economic Theory* 16, pp. 335 – 353.

Young, H.P. (1986): “Optimal ranking and choice from pairwise comparisons”, en B. Grofman y G. Owen (eds): *Information Pooling and Group Decision Making*, JAI Press, Greenwich, CT, pp. 113 – 122.

Young, H.P. (1988): “Condorcet´s theory of voting”, *American Political Science Review* 82, pp. 1231 – 1244.

Young, H.P. (1995): “Optimal voting rules”, *Journal of Economic Perspectives* 9, pp. 51 – 64.

Young, H.P. - Levenglick, A. (1978): “A consistent extension of Condorcet’s election principle”, *SIAM Journal on Applied Mathematics* 35, pp. 285 – 300.

Van Newenhizen, J. (1992): “The Borda Method is most likely to respect the Condorcet principle”, *Economic Theory* 2, pp. 69 – 83.