EL ÍNDICE DE CONSISTENCIA GEOMÉTRICO PARA MATRICES INCOMPLETAS EN AHP

José María Moreno Jiménez

Grupo Decisión Multicriterio Zaragoza

Facultad de Económicas. Universidad de Zaragoza

e-mail: moreno@unizar.es

Alfredo Altuzarra Casas

Grupo Decisión Multicriterio Zaragoza

Facultad de Económicas. Universidad de Zaragoza

e-mail: altuzarr@unizar.es

Mª Teresa Escobar Urmeneta

Grupo Decisión Multicriterio Zaragoza

Facultad de Económicas. Universidad de Zaragoza

e-mail: mescobar@unizar.es

Resumen

Este trabajo analiza el estimador propuesto en Moreno-Jiménez, Aguarón y Escobar (2003) (Decisional Tools for Consensus Building in AHP-Group Decision Making) para evaluar la inconsistencia en matrices incompletas cuando se utiliza el método de la media geométrica por filas como procedimiento de priorización en el Proceso Analítico Jerárquico (AHP). En concreto, se estudia su comportamiento frente al número de juicios considerados y la incertidumbre de los mismos.

Palabras clave: Proceso Analítico Jerárquico (AHP), Matrices Incompletas, Media Geométrica por Filas, Índice de Consistencia Geométrico, Incertidumbre.

Área Temática: 7. Métodos Cuantitativos

1. INTRODUCCIÓN

Uno de los puntos débiles del Proceso Analítico Jerárquico (Saaty, 1980; Moreno, 2002) es la dificultad que presenta cuando se trabaja con problemas de gran tamaño, esto es, con problemas que presentan un número elevado de niveles en la jerarquía (por encima de cuatro), o un numero elevado de elementos en los diferentes niveles considerados. En estas situaciones, el número de comparaciones pareadas que deben efectuarse para incorporar las preferencias de los decisores, mediante la emisión de juicios medidos en la escala conocida como escala fundamental de Saaty (Saaty, 1980), es muy elevado y hace realmente tedioso el proceso de resolución.

Junto a esta “justificación tradicional”, en los últimos años se están considerando otra serie de aspectos, dentro del ámbito de la elección multicriterio discreta, que hacen especialmente atractivo y necesario el estudio del proceso analítico jerárquico cuando se trabaja con matrices incompletas, esto es, con matrices recíprocas de comparaciones pareadas en las que no son conocidos todos los elementos del bloque triangular superior. Algunos de estos “nuevos aspectos” son, entre otros, las cuestiones relativas a la toma de decisiones distribuidas espacialmente (Escobar y Moreno-Jiménez, 1997) y la toma de decisiones con múltiples actores (Moreno-Jiménez y otros, 2003).

En estas últimas situaciones es frecuente que sólo se disponga de información parcial sobre las entradas (juicios) de las matrices de comparaciones. En este sentido es conveniente que tanto los procedimientos de priorización utilizados como las medidas de consistencia asociadas a los mismos sean contempladas desde esta nueva perspectiva. Harker (1987) propone un procedimiento para obtener las prioridades asociadas a los elementos de una matriz de comparaciones pareadas cuando se utiliza como procedimiento de priorización el Método del Autovector Principal por la Derecha (eigenvector method). Para este procedimiento ofrece una medida de la consistencia *ad hoc* que se basa en el índice de consistencia de Saaty. La definición de consistencia propuesta por Harker para estas matrices es criticada por Takeda y Yu (1995) quienes proponen una definición más exigente.

Por su parte, Tone (1996) propone otro procedimiento para la obtención de las prioridades en matrices incompletas asociado al procedimiento de priorización del método de la Media Geométrica por Filas (row geometric mean method) así como una medida de la consistencia.

En Escobar y Moreno-Jiménez (1997) se proponen dos nuevos procedimientos, basados en la composición de conglomerados, que permiten obtener las prioridades de un conjunto grande de alternativas utilizando medidas relativas. Para ambos métodos se obtiene una medida de la inconsistencia utilizando una idea similar a la de Harker para matrices incompletas.

En lo que sigue, se analiza el comportamiento de la medida de inconsistencia propuesta en Moreno-Jiménez y otros (2003), el Índice de Consistencia Geométrico Parcial (ICGP), para el método de priorización de la media geométrica por filas (Saaty, 1980; Crawford y Williams, 1985) en matrices incompletas. El estudio de su comportamiento se efectúa desde dos puntos de vista: (i) analizando las propiedades estadísticas del índice a partir su estimación máximo verosímil y (ii) realizando un estudio de simulación en función del número de juicios emitidos.

El trabajo ha quedado estructurado como sigue: en la siguiente sección (§2) se revisan los conceptos de consistencia en AHP y los procedimientos propuestos en la literatura para trabajar con matrices incompletas. En la sección §3 se introduce el índice de consistencia geométrico para una matriz de juicios incompleta y se demuestran algunas propiedades estadísticas del mismo. En el apartado §4 se realiza un estudio de simulación en el que se observa el comportamiento de esta medida de consistencia dependiendo del número de juicios emitidos por el decisor frente al comportamiento de las medidas de consistencia propuestas por Harker (1987) y Tone (1996). Por último, la sección §5 destaca las conclusiones más importantes del trabajo.

2. ANTECEDENTES

2.1. Consistencia en AHP. El ICG.

El Proceso Analítico Jerárquico (AHP) es una técnica de decisión Multicriterio propuesta por T.L. Saaty (1977, 1980) que combina aspectos tangibles e intangibles para obtener, en una escala de razón, las prioridades asociadas con las alternativas del problema. Las características principales de este enfoque son la modelización del problema mediante una estructura jerárquica, la utilización de comparaciones pareadas para incorporar las preferencias del decisor, y la obtención de una escala de razón que es válida para la toma de decisiones complejas.

La metodología tradicional del Proceso Analítico Jerárquico consiste en tres etapas: modelización, valoración y priorización. Entre los métodos de obtención de las prioridades locales destacan el método del autovector principal por la derecha (EGVM) propuesto por Saaty (1980) en la versión original de AHP y el método de la media geométrica por filas (RGMM), cuya utilización se ha incrementado significativamente en los últimos tiempos (Crawford y Williams, 1985; Aguarón y Moreno-Jiménez, 2003; Aguarón et al., 2003).

Una de las ventajas del Proceso Analítico Jerárquico (AHP) es que permite medir la consistencia del decisor al emitir sus juicios. Se define la consistencia de una matriz de comparaciones pareadas $A = (a_{ij})$, $i,j = 1,\ldots,n$, como la transitividad cardinal entre los juicios, esto es, cuando $a_{ij}\ a_{ij} = a_{ij}\ \forall i,j,k$.

Saaty sugiere para el método AHP convencional (en el que se utiliza el método del autovector principal para obtener las prioridades), que la inconsistencia sea capturada por un único valor, $\lambda_{\max}-n$, que refleja la desviación de los juicios a_{ij} con respecto al cociente estimado entre las prioridades, w_i/w_j. La medida de la consistencia propuesta se denomina *Índice de Consistencia* (*CI*) y se define como:

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{(n-1)}$$

donde $\lambda_{\max}$ el valor propio máximo de A; $A = (a_{ij})$, $i,j = 1,\ldots,n$, es la matriz de comparaciones pareadas; y $w = (w_j)$, $j = 1,\ldots,n$, el correspondiente vector de prioridades obtenido aplicando el método EGVM.

Este Índice de Consistencia puede rescribirse expresándolo en términos de los errores $e_{ij} = a_{ij} \cdot \frac{w_j}{w_i}$ como:

$$CI = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} (e_{ij} - 1) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (e_{ij} - 1)$$

Como esta medida depende del orden de la matriz (n), Saaty propone la utilización de la *Razón de Consistencia* (CR) que se obtiene dividiendo CI por su valor esperado, calculado a partir de un gran número de matrices recíprocas positivas de orden n generadas aleatoriamente. Se considera que el vector de prioridades tiene una inconsistencia aceptable (Saaty, 1980, 1994) cuando el CR es menor del 10% (5% y 8% para $n = 3$ y $n = 4$ respectivamente).

Otra medida que permite evaluar la consistencia es el *Índice de Consistencia Geométrico* (GCI) (Crawford y Williams, 1985; Aguarón y Moreno-Jiménez, 2003) definido como:

$$GCI = \frac{2}{(n-1)(n-2)} \sum_{1 \le i < j \le n} \log^2 e_{ij} \quad \text{con} \quad e_{ij} = a_{ij} \cdot \frac{w_j}{w_i}$$

donde $A = (a_{ij})$, $i,j = 1,\ldots,n$, es la matriz de comparaciones pareadas; y $w = (w_j)$, $j = 1,\ldots,n$, el correspondiente vector de prioridades obtenido mediante el método RGMM.

Aguarón y Moreno-Jiménez (2003) han establecido los umbrales, dependiendo del orden de la matriz, que permiten una interpretación de la inconsistencia análoga a la del 10% para la Razón de Consistencia de Saaty. Estos valores son 0.31 para $n = 3$; 0.35 para $n = 4$ y 0.37 para $n > 4$.

2.2. Matrices de juicio incompletas en AHP

AHP requiere un total de $n(n-1)/2$ juicios a la hora de incorporar las preferencias del decisor entre n distintos elementos. En ocasiones este proceso puede ser muy costoso en cuanto al tiempo requerido, en otras, puede que el decisor no se encuentre cómodo al tener que comparar dos alternativas directamente, o también es posible que tenga dudas acerca de un determinado juicio. Para abordar estas situaciones, Harker (1987) y Tone (1996) han propuesto sendos procedimientos para la obtención del vector de prioridades a partir de matrices de comparaciones pareadas incompletas basados respectivamente en los métodos del autovector principal por la derecha y en el de la media geométrica por filas. Asimismo, dichos autores proponen medidas para evaluar la inconsistencia del decisor en la emisión de sus juicios.

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de comparaciones pareadas incompleta, cuyo grafo asociado es un grafo conectado y no completo. Para cada nodo i, se define P_i como el conjunto de nodos adyacentes a i, y N_i como el grado de i, esto es, el número de arcos conectados con i (número de juicios emitidos en la fila i de la matriz A). Como el grafo es conectado, para cada i, P_i es no vacío y $N_i \geq 1$. Se denota por N el número total de comparaciones realizadas en el triángulo superior de la matriz A, $C = \{(i,j), i<j, j \in P_i\}$, y por tanto, $N = \text{card}(C) = \frac{1}{2}\sum_i N_i$.

Harker (1987) propone obtener el vector w de prioridades resolviendo el siguiente problema de autovector:

$$Bw = \lambda_{\max}(B)w, \text{ con } \sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

donde $\lambda_{\max}(B)$ es el autovalor principal de $B(n\text{x}n)$ y B es la matriz construida como $B = (b_{ij})$ siendo:

$b_{ij} = a_{ij},\ i \neq j$	si a_{ij} ha sido emitido por el decisor
$b_{ij} = 0,\ i \neq j$	si a_{ij} no ha sido emitido por el decisor
$b_{ii} = n - N_i$	donde N_i es el número de juicios emitidos en la fila i de la matriz A (1 + nº 0's en la fila).

La condición que se debe verificar para poder aplicar el procedimiento anterior es que la matriz inicial A sea irreducible. Esto es equivalente a exigir que el grafo definido por la matriz A sea fuertemente conexo, que traducido al contexto de AHP, significa que debe existir una comparación directa o indirecta entre todo par de elementos.

Aunque la nueva matriz de comparaciones pareadas B no sea recíproca positiva, al igual que ocurre con matrices recíprocas positivas completas ($a_{ij}a_{ji} = 1$; $a_{ii} = 1$; $a_{ij} > 0$), se cumple que $\lambda_{\max}(B) \geq n$ (Harker, 1987). Este hecho permite medir la inconsistencia en matrices de comparaciones pareadas incompletas utilizando una expresión análoga a la propuesta inicial de AHP, esto es:

$$CI_H = CI(B) = \frac{\lambda_{\max}(B) - n}{n-1} \qquad (1)$$

La expresión anterior permite evaluar la consistencia en el sentido de Harker, quién propone que una matriz de comparaciones pareadas incompleta sea considerada consistente si y sólo si $a_{ij}a_{jk} = a_{ik}$ para todos los juicios tales que a_{ij}, a_{jk}, $a_{ik} > 0$; es decir, los juicios emitidos deben verificar la condición de consistencia. Takeda y Yu (1995) proponen una definición de consistencia más exigente que la anterior al observar que una matriz incompleta consistente no tendría porqué tener como valor propio máximo asociado, $\lambda_{\max}(B) = n$. Para estos autores una matriz de comparaciones pareadas incompleta es consistente si y sólo si los juicios emitidos conducen a un único vector de prioridades, esto es, si $CI(B) = 0$.

Para poder hacer comparaciones entre los Índices de Consistencia calculados a partir de la expresión (1), Forman (1990) calculó unos nuevos índices de consistencia aleatorios que dependen no sólo del tamaño de la matriz, sino también del número de juicios emitidos por el decisor.

Para obtener el vector de prioridades de una matriz incompleta utilizando un método basado en la media geométrica por filas, Tone (1996) propone resolver el siguiente sistema de ecuaciones en ($v_i = \log w_i$):

$$D\ v = c$$

donde $c = (c_i)$ con $c_i = \sum_{j \in P_i} \log a_{ij}$ y $D = (d_{ij})$ es la matriz de coeficientes formada de la siguiente manera:

$d_{ij} = -1,\ i \neq j$	si a_{ij} ha sido emitido por el decisor
$d_{ij} = 0,\ i \neq j$	si a_{ij} no ha sido emitido por el decisor
$d_{ii} = N_i$	donde N_i es el número de juicios emitidos en la fila i de la matriz A (nº de -1s en la fila).

El sistema de ecuaciones anterior también puede escribirse de la siguiente forma:

$$N_i \log w_i - \sum_{j \in P_i} \log w_j = \sum_{j \in P_i} \log a_{ij} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

Tone (1996) propone utilizar como medida de consistencia:

$$IC_T = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j\in P_i} a_{ij}\cdot w_j/w_i - N_i\right)}{\sum_{i=1}^{n} N_i} \qquad (2)$$

que es una media de las desviaciones de los juicios emitidos a_{ij} con respecto al cociente w_i/w_j. Se cumple que $IC_T \geq 0$ y $IC_T = 0$ si y sólo si $a_{ij} = w_i/w_j$ para todo par (i,j) correspondiente a un juicio emitido.

3. EL ÍNDICE DE CONSISTENCIA GEOMÉTRICO PARA MATRICES INCOMPLETAS

3.1. Definición

Como se ha comentado anteriormente, hay situaciones en las que resulta imposible emitir el total de los $n(n-1)/2$ juicios necesarios para completar una matriz de comparaciones pareadas. Esta existencia de matrices incompletas hace necesario revisar el concepto de consistencia de una matriz, y por tanto adaptar los índices de consistencia utilizados para matrices completas al caso de matrices incompletas.

En particular nos referiremos al Índice de Consistencia Geométrico (*ICG*), propuesto por Crawford y Williams (1985) y desarrollado por Aguarón y Moreno-Jiménez (2003) y que tal como se ha visto en el apartado 2.1 se define como:

$GCI = \frac{2}{(n-1)(n-2)}\sum_{1\leq i<j\leq n}\log^2 e_{ij}$ donde $e_{ij} = a_{ij}\cdot\frac{w_j}{w_i}$ es el error cometido al comparar la alternativa i-ésima con la alternativa j-ésima.

Este índice de consistencia está relacionado con la forma de obtener el vector de prioridades, mediante el procedimiento de la media geométrica por filas, que es equivalente a utilizar el método de mínimos cuadrados logarítmicos.

De forma análoga a lo hecho para otros índices, como se ha visto en la sección 2.2, es posible establecer un Índice de Consistencia Geométrico para matrices incompletas.

En Moreno-Jiménez, Aguarón y Escobar (2003) se sugiere la utilización de una adaptación del Índice de Consistencia Geométrico (ICG) propuesto por Aguarón y Moreno-Jiménez (2003), y que viene dado por la siguiente expresión:

$$GCI_C = \frac{1}{N-(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j \in P_i \\ i<j}} \log^2 e_{ij} \tag{3}$$

donde $e_{ij} = a_{ij} \cdot w_j / w_i$ y, recordando la notación introducida en la sección anterior, N representa el número total de comparaciones realizadas en el triángulo superior de la matriz A. Sabemos que $N = \frac{1}{2}\sum_i N_i$.

3.2. Propiedades Estadísticas

Dentro de los métodos de obtención de las prioridades en AHP, se pueden distinguir dos grandes grupos; los que calculan las prioridades por métodos determinísticos, y los que realizan suposiciones estocásticas acerca de los errores. En el caso del método de la media geométrica por filas, como coincide con la estimación mínimo cuadrática de los logaritmos, se pueden realizar suposiciones estadísticas referentes a los parámetros que van a ser estimados.

Así, se puede suponer que el error e_{ij} sigue una distribución Lognormal (0, s). Si se quiere calcular el estimador máximo verosímil de la varianza, se puede obtener fácilmente, aplicando la metodología clásica, que da como resultado:

$$\hat{s}^2_{MV} = \frac{S^2}{N}$$

siendo N el número de comparaciones efectuadas y $S^2 = \sum_{i<j} \log^2 e_{ij}$ la suma de los errores cuadráticos.

Como es bien sabido, este estimador de la varianza no es insesgado, por lo que se propone como estimador de la varianza:

$$\hat{s}^2 = \frac{S^2}{g.l.}$$

donde g.l. son los grados de libertad, es decir, el número de observaciones menos el número de parámetros linealmente independientes.

Para el caso de trabajar con matrices completas el valor de $N = n(n\text{-}1)/2$ y el número de parámetros independientes es n-1, con lo cual las expresiones anteriores quedan de la siguiente forma:

$$\hat{s}^2_{MV} = \frac{2}{n(n-1)} S^2 \qquad \hat{s}^2 = \frac{S^2}{[n(n-1)/2]-(n-1)} = \frac{2}{(n-1)(n-2)} S^2 = ICG$$

Por lo tanto, el índice de consistencia geométrico adoptado se puede ver como un estimador insesgado de la varianza de los errores; de esta forma cuanto menor sea la variabilidad de la distribución de los errores, menor es el índice de consistencia, y, a su vez, mayor es la consistencia del decisor a la hora de emitir sus juicios.

Además, se cumple que:

$$\frac{\hat{s}^2}{s^2 / g.l.} = \sum_{i<j} \frac{\log^2 e_{ij}}{s^2} \approx c^2_{(n-1)(n-2)/2}$$

con lo cual este estadístico se podrá utilizar para calcular intervalos de confianza para la varianza del error.

Este planteamiento estadístico se puede replicar para el caso de trabajar con matrices incompletas puesto que, en el modelo planteado, la única diferencia existente corresponde al número de juicio emitidos, mientras que el cálculo de las prioridades se realiza de la misma forma, es decir, estimándolas por mínimos cuadrados logarítmicos.

De esta forma, cuando se trabaja únicamente con N juicios, siendo $N < n(n\text{-}1)/2$, el estimador insesgado de la varianza sigue siendo el mismo y sólo varían los grados de libertad, y por lo tanto, el índice de consistencia geométrico propuesto para matrices incompletas (GCI_C) tendrá el mismo sentido que el propuesto para matrices completas.

Así, el GCI_C sigue siendo un estimador insesgado de la varianza:

$$GCI_C = \frac{1}{N-(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j \in P_i \\ i<j}} \log^2 e_{ij}$$

Además, también se cumple que:

$$\frac{\hat{s}^2}{\sigma^2 \big/ g.l.} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j \in P_i \\ i<j}} \frac{\log^2 e_{ij}}{\sigma^2} \approx \chi^2_{N-(n-1)}$$

y el nuevo índice de consistencia para matrices incompletas tiene, a su vez, un sentido estadístico, igual que ocurría en el caso de tener la matriz de juicios completa.

Para terminar este apartado se incluyen a continuación las expresiones alternativas de las medidas de consistencia propuestas por Harker y por Tone para matrices incompletas cuando éstas se expresan en términos de los errores cometidos por el decisor.

La expresión alternativa del índice de consistencia de Harker (1987) viene dada por:

$$CI_H = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \in P_i} (e_{ij} - 1)$$

y la expresión para la medida de consistencia propuesta por Tone (1996) es la siguiente:

$$CI_T = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \in P_i} (e_{ij} - 1)$$

Al ser expresadas de esta forma se observa que el término en el que se suman los errores coincide para ambas medidas y éstas difieren en la constante que multiplica al sumatorio. En el caso de la expresión propuesta por Harker depende del número de elementos comparados (n) mientras que en la de Tone depende del número de juicios emitidos (N). Ambas expresiones coinciden en el caso de que se hayan emitido todos los juicios ($N = n(n\text{-}1)$).

Si los vectores de prioridades obtenidos por ambos métodos fueran idénticos y por tanto los errores también, el índice propuesto por Harker sería menor que el propuesto por Tone. Por otra parte, si en la matriz incompleta se añadiera un nuevo juicio totalmente consistente con el vector de prioridades anterior (y por tanto, que no lo modificase), la medida de Harker permanecería invariante, mientras que la de Tone disminuiría su valor.

Recordando la expresión del índice de consistencia geométrico para matrices incompletas utilizado en este artículo:

$$GCI_C = \frac{1}{N-(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j \in P_i \\ i<j}} \log^2 e_{ij}$$

se observa que el término que multiplica al sumatorio sí que depende del número de juicios emitidos.

4. COMPORTAMIENTO DEL INDICE DE CONSISTENCIA GEOMÉTRICO

El estudio realizado pretende comparar los diferentes índices de consistencia que se han propuesto en la literatura de AHP para el caso de matrices incompletas. Dichos índices, introducidos en secciones anteriores, son: el índice de consistencia de Harker (CI_H – ver expresión 1), el de Tone (CI_T – ver expresión 2) y el de Aguarón y Moreno (GCI_C – ver expresión 3).

Para el estudio de simulación se ha tomado como base la matriz de comparaciones pareadas correspondiente al problema clásico descrito en Saaty y Kearns (1985), Saaty y Vargas (1994) y Saaty (1996). Se trata de una matriz 8x8 (ver Tabla 1) en la que se comparan los ocho criterios considerados para la elección de una casa. Dichos criterios son: C1- Tamaño de la casa; C2- Distancia al bus; C3- Vecinos; C4- Antigüedad de la casa; C5- Tamaño del patio; C6- Modernidad; C7- Condiciones generales; C8-Financiación

Tabla 1. Matriz de comparaciones pareadas (Saaty y Kearns, 1985)

I / J	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
C1	1	5	3	7	6	6	1/3	1/4
C2	1/5	1	1/3	5	3	3	1/5	1/7
C3	1/3	3	1	6	3	4	6	1/5
C4	1/7	1/5	1/6	1	1/3	1/4	1/7	1/8
C5	1/6	1/3	1/3	3	1	1/2	1/5	1/6
C6	1/6	1/3	1/4	4	2	1	1/5	1/6
C7	3	5	1/6	7	5	5	1	1/2
C8	4	7	5	8	6	6	2	1

Los vectores de prioridades obtenidos aplicando los métodos EGV y RGM a dicha matriz de comparaciones pareadas, así como sus correspondientes medidas de consistencias asociadas, CI, CR y GCI, se muestran en la Tabla 2. Con el objeto de completar la información se ha incluido también en esta tabla el índice de consistencia de Tone (CI_T) para el caso particular en el que se hayan emitido todos los juicios.

Tabla 2. Vectores de prioridades y medidas de consistencia para la matriz completa

	EGV	**RGM**
C1	0.173	0.175
C2	0.054	0.063
C3	0.188	0.149
C4	0.018	0.019
C5	0.031	0.036
C6	0.036	0.042
C7	0.167	0.167
C8	0.333	0.350
	CI = 0.238 RC = 0.170	GCI = 0.529 CI_T = 0.228

El número mínimo de juicios necesarios para poder obtener las prioridades es igual a n-1, siempre que el grafo asociado sea conectado. Una forma de seleccionar estos n-1 primeros juicios es tomar todas las comparaciones que hacen referencia a una alternativa dada: se fija i0 (i0=1,...,n) y se seleccionan los juicios (i0,j),(j,i0) con j≠i0.

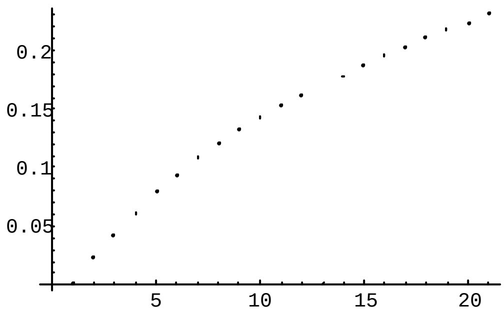
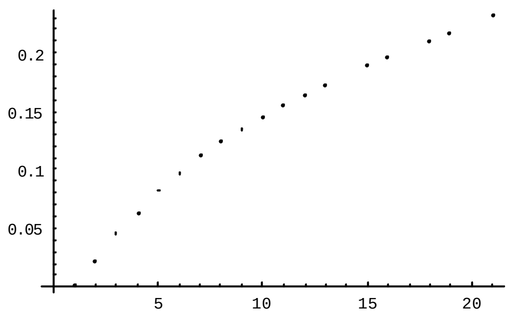
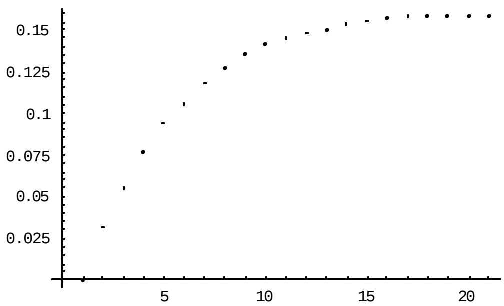
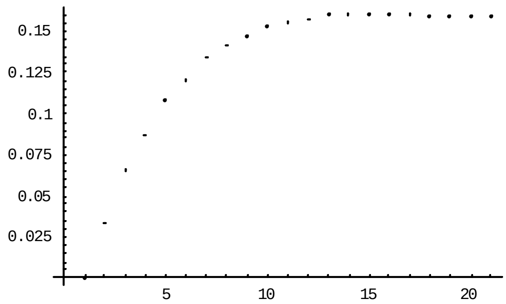
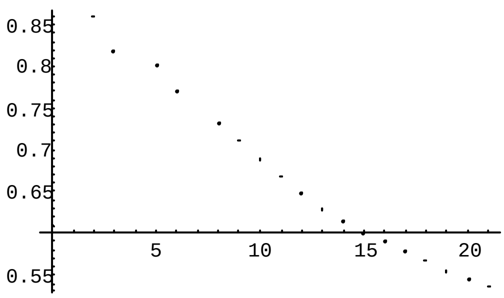
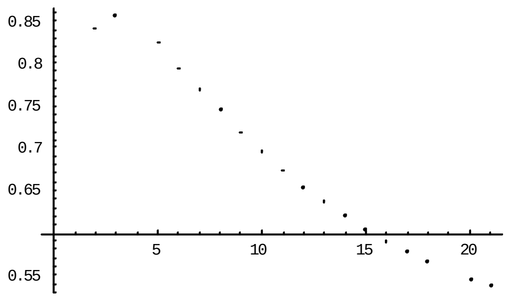
Para la matriz considerada existen 8 posibles conjuntos de juicios iniciales (cada uno de 7 elementos) seleccionados de la forma descrita (uno para cada uno de los elementos comparados en la matriz). Partiendo de cada uno de estos 8 conjuntos se han realizado 1000 repeticiones de un proceso iterativo en el que en cada iteración se añade un nuevo juicio, elegido aleatoriamente entre las comparaciones de la matriz no seleccionadas previamente. Llamando N al número de juicios emitidos, en la primera iteración del proceso N es igual a n-1 = 7 y este número se va incrementando hasta que se completa toda la matriz, esto es, cuando $N = n(n-1)/2 = 28$.

En cada iteración se tiene una matriz incompleta con N juicios emitidos para la que se calculan los correspondientes vectores de prioridades aplicando los procedimientos de Harker y Tone, así como las tres medidas de consistencia consideradas en el estudio: el Índice de Consistencia de Harker (CI_H), el Índice de Consistencia de Tone (CI_T) y el Índice de Consistencia Geométrico (GCI_C). En total se han considerado 1.000 x 8 x 21 = 168.000 matrices diferentes.

Para cada uno de los 21 valores de *N* y cada una de las 8 alternativas de referencia que determinan el conjunto inicial de juicios se han obtenido los valores medios (para las 1.000 simulaciones) de las tres medidas de consistencia, así como sus desviaciones típicas.

Se ha observado que los valores de inicio (los 7 primeros juicios seleccionados dependiendo de la alternativa de referencia escogida) no tienen influencia en el resultado final, puesto que los valores de las medias tienden a estabilizarse. Si existe alguna pequeña diferencia, es solamente para valores pequeños de *N*.

A continuación se muestran gráficamente los valores medios para algunas de las simulaciones realizadas (alternativas de referencia tercera y séptima).

	Alternativa Referencia = C3	**Alternativa Referencia = C7**
CI_H		
CI_T		
GCI_C		

En la siguiente tabla (Tabla 3) se muestran para algunos valores de *N* los datos de las medias y desviaciones típicas cuando la alternativa de referencia utilizada para seleccionar los juicios iniciales es la tercera.

Tabla 3. Valores medios y desviaciones típicas de CI_H, CI_T y GCI_C para distintos valores de *N* y tomando como alternativa de referencia C3.

	CI_H		CI_T		GCI_C	
N	**Media**	**Desviación**	**Media**	**Desviación**	**Media**	**Desviación**
7	0	0	0	0	0	0
8	0.022	0.040	0.032	0.072	0.859	1.183
9	0.042	0.049	0.054	0.082	0.819	0.745
10	0.061	0.054	0.076	0.086	0.813	0.557
11	0.079	0.055	0.093	0.085	0.802	0.430
12	0.093	0.054	0.106	0.080	0.771	0.343
13	0.108	0.052	0.118	0.076	0.754	0.277
16	0.143	0.044	0.141	0.059	0.688	0.135
19	0.170	0.035	0.150	0.043	0.628	0.085
22	0.196	0.027	0.157	0.031	0.590	0.055
25	0.218	0.018	0.158	0.020	0.555	0.037
27	0.231	0.010	0.158	0.011	0.536	0.020

De los gráficos y la tabla anterior se observa que el CI_H va aumentando siempre con el número de comparaciones realizadas (*N*) mientras que el CI_T va aumentando hasta estabilizarse en torno a un valor constante. A diferencia de los anteriores, el GCI_C fluctúa inicialmente para después ir descendiendo progresivamente hasta el GCI de la matriz completa.

Los valores de CI_H y de CI_T son próximos entre sí, siendo los de CI_H menores que los de CI_T para valores de *N* pequeños mientras que dicho orden se invierte para valores de *N* grandes. Los valores de GCI_C son mayores que los de los otros dos índices pero la expresión utilizada es diferente de las anteriores.

En cuanto a la variabilidad de los valores medios también se observa un comportamiento diferente para los índices de Harker y Tone con respecto al GCI_C. En los primeros, la desviación típica crece inicialmente con *N* para disminuir su valor posteriormente, siendo con $N = 10$ u 11 las situaciones en las que se produce una mayor variabilidad. Sin embargo, para el GCI_C el valor de la desviación típica disminuye siempre con el número de juicios emitidos.

5. CONCLUSIONES

En ocasiones se dispone de información parcial sobre los juicios de las matrices de comparaciones pareadas, y por tanto, es de interés el estudio de procedimientos de obtención de prioridades como de las correspondientes medidas de consistencia para matrices de comparaciones pareadas incompletas.

En este sentido, el presente trabajo ha estudiado el índice de consistencia geométrico para matrices incompletas propuesto por Moreno-Jiménez, Aguarón y Escobar (2003) demostrando que es un estimador insesgado de la varianza de los errores cuando éstos siguen una distribución lognormal. Además se ha realizado un estudio del comportamiento de dicha medida según el número de juicios emitidos por el decisor y frente a las medidas de consistencia para matrices incompletas propuestas por Harker y Tone, observando que su comportamiento es sensiblemente distinto.

Entre las futuras líneas de investigación se pretende ampliar el estudio del comportamiento del GCI para matrices incompletas considerando distintos tamaños de matrices, matrices generadas de forma aleatoria, así como otras formas de seleccionar los *n*-1 primeros juicios.

BIBLIOGRAFÍA

1. Aguarón, J.; Escobar, M.T.; Moreno-Jiménez, J.M. (2003): Consistency Stability Intervals for a Judgement in AHP Decision Support Systems. *European Journal of Operational Research*, 145, 382–393.

2. Aguarón, J.; Moreno-Jiménez, J.M. (2003): The Geometric Consistency Index: Approximated Thresholds. *European Journal of Operational Research*, 147, 137–145.

3. Crawford, G.; Williams, C. (1985): A note on the analysis of subjective judgement matrices, *Journal of Mathematical Psychology*, **29**, 387–405.

4. Escobar, M.T.; Moreno-Jiménez, J.M. (1997): Problemas de Gran Tamaño en el Proceso Analítico Jerárquico. *Estudios de Economía Aplicada*, 8, 25–40.

5. Forman, E.H. (1990): Random Indices for Incomplete Pairwise Comparison Matrices. *European Journal of Operational Research* 48 (1), 153–155.

6. Harker, P.T. (1987): The Incomplete Pairwise Comparisons in the Analytic Hierarchy Process. *Mathematical Modelling*, 9, 837–848.

7. Moreno-Jiménez, J.M. (2002): El Proceso Analítico Jerárquico. Fundamentos. Metodología y Aplicaciones. En Caballero, R. y Fernández, G.M. Toma de decisiones con criterios múltiples. *RECT@ Revista Electrónica de Comunicaciones y Trabajos de ASEPUMA*, Serie Monografías nº 1, 21-53.

8. Moreno-Jiménez, J.M.; Aguarón, J.; Escobar, M.T. (2003): Decisional Tools for Consensus Building in AHP-Group Decision Making. En evaluación en *Group Decision and Negotiation*.

9. Saaty, T.L. (1977): A Scaling Method for Priorities in Hierarchical Structures, *Journal of Mathematical Psychology*, **15** (3), 234–281.

10. Saaty, T.L. (1980): *Multicriteria Decision Making: The Analytic Hierarchy Process*. Mc Graw-Hill, New York. (2ª impresión 1990, RSW Pub. Pittsburgh)

11. Saaty, T.L. (1994): *The Fundamentals of Decision Making and Priority Theory with the Analytic Hierarchy Process*. RSW Publications, **VI**, AHP Series.

12. Saaty, T.L. (1996): *Decision Making with Dependence and Feedback: The Analytic Network Process.* RSW Publications, Pittsburgh, PA.

13. Saaty, T.L.; Kearns, K. P. (1985): *Analytical Planning.* Pergamon Press, New York.

14. Saaty, T.L.; Vargas, L.G. (1994): *Decision Making in Economic, Political, Social and Technological Environment with the Analytic Hierarchy Process.* RSW Publications, Pittsburgh, PA.

15. Takeda, E.; Yu, P.L. (1995): Assessing priority weights from subsets of pairwise comparisons in multiple criteria optimization problems. *European Journal of Operational Research*, 86, 315–331.

16. Tone, K. (1996): Two technical notes on the AHP based on the Geometric Mean Method. *Proceedings of ISAHP'96*, 375–381.