

COMPARACIÓN DE LAS METODOLOGÍAS LATENTE Y FUZZY PARA LA MEDICIÓN DE LA POBREZA MULTIDIMENSIONAL

Jesús Pérez Mayo

Departamento de Economía Aplicada y Organización de Empresas

Universidad de Extremadura

e-mail: jperez@unex.es

Resumen

Este trabajo presenta y compara dos métodos alternativos para la medición de la pobreza multidimensional. Esta cuestión ha cobrado gran importancia en los últimos años tanto en la literatura científica como en la política social. Recientemente, la política de la Unión Europea está teniendo en cuenta la lucha contra la pobreza y la exclusión social. Lógicamente, para el seguimiento y el diseño de dicha política es necesario disponer de un conjunto de indicadores. Para construir dicho conjunto proponemos la utilización del análisis de clases latentes y comparamos los resultados obtenidos con los derivados del “fuzzy set” approach para calcular la situación de pobreza de cada hogar, la tasa de pobreza española así como la tasa de pobreza para algunos grupos de la población.

Palabras clave: pobreza, modelo de clases latentes, fuzzy sets.

Area temática: Métodos cuantitativos.

1. Introducción

En los últimos años se ha producido una transformación del concepto de pobreza. Por ejemplo, según la definición de pobreza establecida por el Consejo Europeo en 1984, citada en EUROSTAT (2000) son pobres “*aquellas personas, familias o grupos cuyos recursos (materiales, culturales y sociales) son tan limitados que les hacen quedar excluidos del modo de vida mínimo aceptable en el estado miembro en que habiten*”.

En la cita anterior se establece una idea amplia de la pobreza relacionada con el nivel de vida de la persona o el hogar, más que la simple incapacidad de satisfacer las necesidades relativas a la subsistencia. En los países de la Unión Europea este cambio se ha traducido en un conjunto más amplio de indicadores oficiales de exclusión social (Atkinson y otros, 2002) así como en la inclusión de la política social como el elemento clave de la política europea para convertir a la economía europea en “la economía basada en el conocimiento más competitiva y dinámica del mundo capaz de un crecimiento económico sostenible con mejores trabajos y una cohesión social mayor”.

Tradicionalmente, en la mayoría de los estudios empíricos sobre pobreza, se ha tomado como indicador del nivel de vida la renta monetaria familiar ajustada mediante escalas de equivalencia al tamaño del hogar. Así se define como pobre el hogar cuya renta monetaria equivalente se sitúa bajo un umbral (llamado *línea o umbral de pobreza*) definido como el 50 o 60% de la renta media o mediana, según los estudios. Aunque este método presenta la ventaja de la facilidad de su construcción así como la posibilidad de comparar distintos períodos o territorios, la utilización de la renta posee ciertos inconvenientes enumerados a continuación, siguiendo a Martínez y Ruiz-Huerta (1999):

- a) la *longitud del período de referencia*.
- b) La *necesidad de incluir algunas variables no monetarias*.
- c) La *no inclusión de la riqueza*.
- d) La *difícil evaluación de las necesidades de los hogares* según sus características.
- e) El problema de la *subestimación* provocado por la ocultación voluntaria como por el olvido de algunos datos.

Una vez expuestos los problemas de los indicadores indirectos de la pobreza, cabe plantearse la medición directa. Otras ventajas de los indicadores directos son:

- a) Describen mejor a los calificados como pobres según el criterio de la renta. En este caso, se podría hablar de las condiciones de vida de la población pobre.
- b) Sin abandonar el criterio de la renta, permiten mejorar la identificación de los pobres.

c) Pueden usarse como un indicador alternativo para medir la pobreza. Como exponen Martínez y Ruiz-Huerta (2000), el apoyo teórico se halla en el enfoque del “nivel de vida” (Atkinson, 1989). Por tanto, la pobreza no se mide como una insuficiencia de los recursos, sino de los bienes y actividades comunes en una sociedad y momento concretos.

No obstante, no está libre esta metodología de inconvenientes. Dichos problemas se derivan del carácter multidimensional de los datos y de las variables no monetarias y se relacionan con la agregación de los indicadores así como la dificultad de combinar o sustituir los indicadores indirectos por los directos.

Los principales objetivos de este trabajo son: (i) la identificación de los hogares en situación de pobreza multidimensional, (ii) el cálculo de las tasas de pobreza mediante los dos métodos propuestos en este artículo y (iii) la comparación de dichos resultados determinando las concordancias y las divergencias.

La estructura del trabajo es la siguiente: en primer lugar, se hace una revisión de los principales problemas y cuestiones relativas a las medidas directas de la pobreza. En el segundo apartado, se muestran los métodos estadísticos propuestos para la medición de la pobreza multidimensional: el modelo de clases latentes y el “fuzzy set approach”. En la sección 3 se presentan y comparan los resultados para el análisis de la pobreza en España para el año 2000 tras comentar algunos aspectos metodológicos de las bases de datos utilizadas. Finalmente, en la sección 4 se presentan las principales conclusiones.

2. Las medidas directas de la pobreza y la exclusión

No cabe duda que la medición de la pobreza está fuertemente relacionada con el concepto elegido para identificar a los pobres o los excluidos. En este trabajo, como se puede comprobar en la cita inicial, usaremos una definición de pobreza muy similar a la teoría de las capacidades y funcionamientos de Sen (1992). Puesto que se determina un concepto directo de pobreza, es necesario utilizar un enfoque basado en indicadores directos de exclusión.

En primer lugar es preciso elegir los indicadores utilizados según depende de los objetivos de la investigación. Lógicamente, si se pretende analizar el nivel de vida general se necesita considerar más indicadores que si el objetivo es completar el indicador indirecto. De todas maneras, y sobre todo en el primer caso, no es fácil determinar qué y cuántos indicadores deben tenerse en cuenta para medir la privación. Existen dos líneas diferentes: por un lado, aquellos que buscan los elementos intrínsecos de la pobreza y, por el otro, los autores que consideran una visión más compleja y completa relacionada con el bienestar por lo que se

consideran cuestiones más relacionadas con el concepto de *exclusión social* que con el de *pobreza o privación*.

Una vez delimitada la cuestión anterior, se abre una nueva dicotomía: optar entre un estudio restringido a las necesidades (Mack y Lansley, 1985) o una investigación que incorpore un conjunto mayor de indicadores referidos al nivel de vida (Halleröd, 1994). En el primer caso, la información sobre los bienes no necesarios no se tiene en cuenta. La segunda línea citada, el enfoque del “estilo de vida”, evita la distinción entre necesidades y no necesidades al considerar más variables seleccionando indicadores relativos más al nivel de vida que a la privación para distintos componentes de las condiciones mínimas de vida. Es decir, se considera la pobreza o privación como bajo nivel de vida.

Antes de realizar el proceso de la agregación de los indicadores, es preciso establecer una estructura de ponderaciones para cada uno de ellos dada su naturaleza diferente. Por ejemplo, ¿tienen la misma importancia “tener retrasos en el pago de hipotecas”, “poseer un microondas” y “tener problemas de luz en la vivienda”? Existe un gran número de propuestas de sistemas de ponderación desde el trabajo inicial de Townsend (1979).

La primera opción es determinar una ponderación igual para cada elemento. Aparece en algunos trabajos como Townsend (1979), Mack y Lansley (1985) o Mayer y Jencks (1989). Esta estructura de pesos puede justificarse, por un lado, por un intento de reducir al mínimo las interferencias de las decisiones del investigador sobre los resultados y, por otro, por la falta de información sobre la consideración como “necesarios” de los bienes o actividades. El inconveniente de seguir esta estrategia reside en la ausencia de discriminación entre algunos componentes que claramente tienen diferente importancia en la privación.

Alternativamente, se puede optar por la extracción de las ponderaciones a partir de las frecuencias. Por ejemplo, Halleröd (1994) concede más importancia a la ausencia de los bienes considerados necesarios por la mayoría de la población o Desai y Shah (1988), al construir su índice de privación, ponderan cada atributo por la proporción de individuos u hogares que los poseen en un valor mayor que el modal.

Otros trabajos realizados con el Panel de Hogares de la Unión Europea utilizan otras estructuras puesto que dicha base de datos no recoge las percepciones sociales sobre la necesidad de los bienes o actividades. Martínez y Ruiz-Huerta (1999, 2000) aplican a cada atributo una ponderación calculada como el cociente entre la proporción de la población donde la variable j no está ausente y la suma de las proporciones para cada indicador. Whelan *et al* (2001a y b) al igual que Muffels y Fouarge (2001), por otra parte, ponderan cada atributo por la proporción de hogares que posee el ítem. Éstos últimos justifican su elección en la

definición de privación de Runciman (1966) según la cual una persona se siente más pobre cuánto mejor vea a los demás.

La importancia de cada indicador se puede incluir también mediante distintas técnicas estadísticas multivariantes, como el análisis factorial (Nolan y Whelan, 1996; Layte *et al.*, 1999, 2000), el análisis de componentes principales (Ram, 1982 y Maasoumi y Nickelsburg, 1988), el análisis *cluster* (Hirschberg *et al.*, 1991) o el modelo de variables latentes (Gailly y Hausman, 1984).

Una vez tenida en cuenta la importancia relativa de cada ítem, es preciso combinar toda la información disponible para describir la situación. No existe un procedimiento estándar en la literatura y podemos encontrarnos desde una simple exposición de los indicadores por separado hasta la combinación de toda la información en un solo índice. Aunque, por un lado, la reunión de todos los atributos en un único índice ofrece la ventaja de resumir la complejidad del problema de una manera simple, tal agregación provoca una pérdida de información. Por ejemplo, Nolan y Whelan (1996), Layte *et al.* (1999, 2000), Martínez y Ruiz-Huerta (1999, 2000) y Whelan *et al.* (2001a y b) consideran diferentes dimensiones en el análisis de la pobreza, correspondientes cada una de ellas a distintos aspectos como las necesidades básicas, necesidades secundarias o condiciones de la vivienda.

El último paso es la identificación de la población pobre, es decir, la determinación del umbral de pobreza que permite dividir al conjunto de individuos. Mientras que algunos autores como Townsend (1979) definen la línea de pobreza como un valor de renta monetaria relacionado con los valores más bajos del índice multidimensional de pobreza, otros, como por ejemplo Martínez y Ruiz-Huerta (1999, 2000), Muffels y Fouarge (2001) o Tsakloglou y Papadopoulos (2002), utilizan sólo los indicadores sobre las condiciones de vida para identificar a la población pobre. No obstante, esta opción no está libre de arbitrariedad puesto que no existe un criterio consensuado en la literatura para establecer el umbral¹. Finalmente, otro grupo de autores combinan ambos criterios, renta y condiciones de vida, para determinar el grupo de exclusión. Así, son pobres o excluidos aquellos hogares o individuos identificados como tales mediante los dos criterios antes mencionados recibiendo el nombre de “pobres reales” (Halleröd, 1994) o “pobres consistentes” (Nolan y Whelan, 1996)

¹ Por ejemplo, Muffels y Fouarge toman la media nacional y Tsakloglou y Papadopoulos la quinta más baja de la distribución.

3. Metodología

3.1 Modelo de clases latentes

El modelo de clases latentes es un marco metodológico muy adecuado para el análisis de la pobreza multidimensional porque resuelve el problema de la agregación y la definición del umbral. A partir de la definición oficial de pobreza utilizada por la Comisión Europea, es lógico inferir que la noción de pobreza es una definición no observada directamente. Puesto que el modelo de variables latentes, es un método estadístico multivariante que mide una variable no observada a partir de la información recogida en un conjunto de variables observadas, se convierte en el más adecuado para realizar esta tarea. Además, dado que los indicadores disponibles son variables categóricas (en su mayoría dicotómicas), se hace necesaria la utilización del modelo de clases latentes, propuesto por Lazarsfeld (1950) y Henry y Lazarsfeld (1968). Finalmente, al asignar a cada individuo a una clase distinta según el nivel y el tipo de pobreza latente sufrida, se solventa el problema de la arbitrariedad al establecer el umbral de pobreza.

En el modelo de clases latentes, tanto las variables observadas como la variable latente se consideran variables categóricas con dos o más categorías, de manera que es necesario que la relación entre las variables manifiestas verifique dos hipótesis previas:

a) Relación simétrica: no existe una variable explicada por un conjunto de variables explicativas, sino que cada variable de la tabla de contingencia puede quedar explicada por y explicar el comportamiento de cualquier otra variable categórica de la tabla. En resumen, supone la ausencia de una variable categórica de interés que pretenda explicarse a través del resto de variables categóricas de la tabla.

b) Independencia local: supone que dentro de cada categoría de la variable latente, las variables observadas son estadísticamente independientes, es decir, que las variables de la tabla de contingencia son condicionadamente independientes dada una clase determinada de la clase latente.

Supongamos un conjunto de p variables categóricas, x_1, \dots, x_p , con un número de categorías I_1, \dots, I_p , respectivamente. Por otro lado, sea x_q una variable latente con un total de J clases. Las ecuaciones básicas del modelo de clases latentes son:

$$\pi_{i_1 \dots i_p} = \sum_{j=1}^J \pi_{i_1 \dots i_p j}, \quad [1]$$

donde

$$\pi_{i_1 \dots i_p j} = \pi_j \pi_{i_1 \dots i_p | j} = \pi_j \pi_{i_1 | j} \dots \pi_{i_p | j}. \quad [2]$$

Como vemos, se cumple la hipótesis de relación simétrica porque cada una de las variables consideradas depende sólo de la variable latente y, además, dentro de cada clase de ésta, las variables son estadísticamente independientes (hipótesis de independencia local).

Aquí, $\pi_{i_1 \dots i_p j}$ representa la probabilidad de estar en la celda (i_1, \dots, i_p, j) de la distribución conjunta x_1, \dots, x_p, x_q . Además, π_j es la probabilidad de pertenecer a la clase latente j y $\pi_{i_1 \dots i_p | j}$ es la probabilidad de tener un patrón de respuesta concreta dado $x_q=j$. El resto de los parámetros π son probabilidades condicionadas.

Por tanto, los parámetros del modelo de clases latentes son las probabilidades condicionadas y las probabilidades de las clases latentes, que estarán sometidas a las siguientes restricciones:

$$\sum_{i_1=1}^{I_1} \pi_{i_1 | j} = \dots = \sum_{i_p=1}^{I_p} \pi_{i_p | j} = \mathbf{1}, \quad [3]$$

$$\text{y } \sum_{j=1}^J \pi_j = \mathbf{1}.$$

El modelo de clases latentes se estima mediante el algoritmo EM (Dempster, Laird y Rubin, 1977). Dicho algoritmo es un procedimiento iterativo de estimación que consta de dos pasos. En el paso E(speranza) se calculan todos los valores esperados dados los valores observados y los “actuales” parámetros del modelo. En el paso M(aximización), se maximiza la función de verosimilitud de todos los datos a partir de los valores esperados calculados en el paso anterior. Esto implica el cálculo de estimaciones actualizadas de los parámetros del modelo como si no faltaran datos. Las iteraciones continúan hasta que se alcanza la convergencia.

Así, finalmente, podemos obtener las estimaciones máximo-verosímiles

$$\hat{\pi}_{i_1 | j}, \dots, \hat{\pi}_{i_p | j} \text{ y } \hat{\pi}_j; \quad [4]$$

a partir de las que es posible calcular las probabilidades

$$\hat{\pi}_{i_1 \dots i_p j} \text{ y } \hat{\pi}_{i_1 \dots i_p} = \sum_{j=1}^J \hat{\pi}_{i_1 \dots i_p j}. \quad [5]$$

El siguiente paso en el análisis es asignar cada individuo a las diferentes clases de la variable latente x_q . Para ello se calcula la probabilidad condicionada de que un individuo que se sitúe en las categorías (i_1, \dots, i_p) de las variables manifiestas x_1, \dots, x_p , pertenezca a la clase j de la variable x_q de la siguiente manera:

$$\hat{\pi}_{j|i_1 \dots i_p} = \frac{\hat{\pi}_{i_1 \dots i_p j}}{\sum_{j=1}^J \hat{\pi}_{i_1 \dots i_p j}}. \quad [6]$$

Se utilizan diversas medidas para la calidad del ajuste de este tipo de modelos. Las más comunes son el valor del contraste χ^2 de Pearson y el contraste de la razón de verosimilitud L^2 que comparan las frecuencias observadas con las esperadas.

$$\chi^2 = \sum_r \frac{(O_r - E_r)^2}{E_r} \quad [7]$$

$$L^2 = \sum_r O_r \ln \frac{O_r}{E_r} \quad [8]$$

donde r es la combinación de respuestas, O_r las frecuencias observadas y E_r las esperadas. Ambos contrastes siguen asintóticamente una distribución χ^2 donde los grados de libertad vienen dados por el número de celdas menos el número de parámetros loglineales independientes. No obstante, cuando el tamaño muestral es muy elevado puede ocurrir que se rechace el modelo como muestra Hagenaars (1990:56-58). Este autor proporciona además algunas pautas para elegir el mejor modelo. En primer lugar, la teoría debería jugar el papel más importante a la hora de seleccionar el modelo. Asimismo, el principio de parquedad debe guiar el procedimiento de selección. Así, *ceteris paribus*, es mejor un modelo con menos parámetros (menos complejo) que otro con más parámetros (más complejo).

Otra medida, como recogen Bartholomew, Steele y otros (2002), compara el ajuste del modelo que considera una variable latente con j clases con el modelo de independencia. En consecuencia, el valor $\%L^2$ indica el grado de asociación explicado por la variable latente.

$$\%L^2 = \frac{L_0^2 - L_q^2}{L_0^2} \quad [9]$$

Asimismo, en Bartholomew y Leung (2002) se sugiere una nueva medida para contrastar la calidad del ajuste. Proponen analizar los márgenes para dos y tres variables calculando el estadístico ji-cuadrado de cada combinación de variables. Dicho estudio puede proporcionar información sobre el ajuste general del modelo.

Finalmente, en un contexto de clases latentes, una vez se han identificado las clases, como cada hogar se asigna a la clase latente más probable dado cada patrón de respuesta, es importante considerar la probabilidad de una mala clasificación para todos los individuos.

$$E = \sum_{i_1=1}^{I_1} \cdots \sum_{i_p=1}^{I_p} \pi_{i_1 \dots i_p} \varepsilon_{i_1 \dots i_p} \quad [10]$$

donde $\varepsilon_{i_1 \dots i_p}$ es la probabilidad individual de una mala clasificación.

3.2 The fuzzy set approach

Esta teoría aplicada al problema que estudiamos intenta definir un índice de pobreza a partir de una función de un conjunto de indicadores. En su trabajo inicial, Zadeh (1965) expuso que existen algunos conjuntos que no tienen unos criterios de pertenencia muy precisos de manera que es difícil determinar qué elementos pertenecen a ellos y cuáles no.

Cerioli y Zani (1990) aplicaron por primera vez estas técnicas a la medición de la pobreza. Este método ha sido aplicado y desarrollado además por Dagum et al. (1992), Cheli et al. (1994), Chiappero Martinetti (1994, 2000) y Dagum y Costa (2003), entre otros. Según estos últimos, mediante la aplicación del fuzzy set approach se puede medir el nivel relativo de pobreza de cada individuo, estimar el índice medio de pobreza de la población así como la pobreza relativa correspondiente a cada indicador.

Supongamos un conjunto X y un elemento x de dicho conjunto. Un subconjunto borroso A de X vendrá caracterizado por una función de pertenencia $\mu_A(x)$ que asigna un número real en el intervalo $[0,1]$ a cada elemento del conjunto X y mide el grado de pertenencia al conjunto borroso. A diferencia de los conjuntos tradicionales, donde $\mu_A(x)$ toma los valores extremos 0 y 1 según pertenezca o no el elemento al conjunto, si A es un conjunto borroso, la función $\mu_A(x)$ toma el valor 0 si x no pertenece al conjunto borroso, 1 si pertenece totalmente y un valor entre 0 y 1 si pertenece parcialmente.

En el problema que nos ocupa, la medición de la pobreza multidimensional, el subconjunto A estaría formado por los individuos pobres. Además, supondremos un conjunto $X = [X_1, \dots, X_m]$ de indicadores del nivel de vida. Por tanto,

$$\mu_{X_j}(i), 0 \leq \mu_{X_j}(i) \leq 1 \quad [11]$$

representa el grado de pertenencia del individuo i relativo al indicador X_j . En el caso de variables dicotómicas, como los indicadores oficiales de condiciones de vida, la función de pertenencia $\mu_{X_j}(i)$ toma los siguientes valores:

$$\mu_{X_j}(i) = \begin{cases} 1, & \text{if deprived in indicator } X_j \\ 0, & \text{if non deprived in indicator } X_j \end{cases} \quad [12]$$

Como el objetivo del análisis es obtener un índice de pobreza, el siguiente paso consiste en la agregación de los valores anteriores para determinar la función $\mu_A(i)$ de pertenencia del individuo i al subconjunto A. Por tanto, refleja el nivel de pobreza del individuo como una función ponderada de los m indicadores. Es decir, expresa un concepto relativo de pobreza.

Por tanto,

$$\mu_A(i) = \sum_{j=1}^m \mu_{X_j}(i) w_j \quad [13]$$

donde w_j es el peso del indicador X_j . Esta ponderación indica la intensidad de la privación para el indicador. Cerioli y Zani (1990) y Cheli y Lemmi (1995) han optado por una definición basada en las frecuencias como

$$w_j = \frac{\ln\left(\frac{1}{F(D_j)}\right)}{\sum_{j=1}^m \ln\left(\frac{1}{F(D_j)}\right)} = \frac{\ln(F(D_j))}{\sum_{j=1}^m \ln(F(D_j))} \quad [13]$$

donde $F(D_j)$ es la proporción de individuos pobres para el indicador X_j . Es una función inversa del grado de pobreza de la población según el indicador X_j . Por tanto, cuando menor sea la proporción de individuos en privación para un atributo, mayor será la importancia relativa de dicho atributo, porque los individuos pobres para ese atributo se sentirán más excluidos cuanto más extendido esté el atributo del que carecen. Por ejemplo, puesto que “tener agua corriente en el hogar” es un atributo más extendido en la mayoría de los países desarrollados que “tener un lavavajillas”, aquellos individuos sin agua corriente en su hogar tendrán una mayor sensación de pobreza.

Finalmente, el grado o tasa de pobreza de la población se calcula como la media ponderada de las funciones individuales de pertenencia al conjunto borroso $\mu_A(i)$ como

$$\mu_A = \frac{\sum_{i=1}^n \mu(i) g_i}{\sum_{i=1}^n g_i} \quad [14]$$

donde g_i indica el factor de elevación de la observación muestral i para la población total.

4. Una aplicación al caso español: Comparación y análisis de los resultados

El análisis empírico que presentamos se basa en los datos del Panel de Hogares de la Unión Europea para España en el año 2000. En concreto, hemos elegido la muestra ampliada

para dicho año y al tomar el hogar como unidad de análisis, nuestra muestra está formada por 15614 observaciones.

Es una encuesta longitudinal comenzada en 1994 para todos los países miembros de la Unión Europea. El objetivo perseguido por EUROSTAT al crear este panel era la comparabilidad de los datos y los resultados entre los distintos países miembros. Para lograrla, se armonizaron el máximo posible los cuestionarios, la recogida de los datos, la codificación y las ponderaciones.

Su gran ventaja reside en su carácter temporal. Al extenderse a lo largo del tiempo es posible observar, por ejemplo, los efectos producidos por la movilidad de la renta o los procesos de empobrecimiento. Además, al ser un panel, esto es, la información se refiere a las mismas unidades muestrales, se pueden determinar las trayectorias seguidas por cada uno (Hills, 1998a y 1998b) o la persistencia o transitoriedad en los estados como en los estudios de Stevens (1994 y 1999), Cantó (1996, 1998, 2000 y 2002), Fouarge y Muffels (2000) o Devicienti (2001).

Además, se diseñó para recoger información detallada sobre la renta de cada miembro del hogar así como otros aspectos importantes relativos a las características materiales y demográficas de los hogares. Este contenido hace que sea preferible a la Encuesta de Presupuestos Familiares para realizar estudios de condiciones de vida. La razón es la inclusión de algunas variables válidas para analizar la pobreza e incluso la exclusión social.

A pesar de las ventajas citadas arriba, esta base de datos presenta algunos inconvenientes. No aparece ninguna información sobre el gasto de consumo del hogar, y, por tanto, no se puede completar la descripción obtenida mediante la renta y las condiciones de vida. Por ejemplo, si se conocieran los patrones de consumo, se podría eliminar la influencia de la estructura de preferencias sobre las respuestas a algunas preguntas sobre la capacidad económica.

Asimismo, la información sobre la situación económica y las condiciones de vida sólo se refiere a la capacidad de adquirir o realizar respectivamente el bien o la actividad y no mide cuántas veces se adquiere o realiza.

Siguiendo a Martínez y Ruiz-Huerta (1999, 2000), no se han considerado algunos aspectos como la salud, las relaciones sociales o la situación laboral. Respecto al grado de desagregación del análisis, algunos autores como Layte et al. (1999) o Whelan et al. (2001a, b) consideran la situación financiera del hogar y las posesión de bienes duraderos, llamándolas “necesidades básicas” y “necesidades secundarias”. Además, dentro de las condiciones de la vivienda diferencian entre, por un lado, la calidad del entorno

(contaminación, ruido, vandalismo o crimen) y, por el otro, la calidad de la vivienda (luz o espacio inadecuados, goteras, suelos y marcos de ventanas podridos o con humedades así como la dotación del hogar). Sin embargo, algunos estudios previos (Pérez-Mayo, 2003 o Navarro y Ayala, 2003) han mostrado que los aspectos del entorno parecen no discriminar entre los hogares en España. Por tanto, no se han considerado dichos indicadores.

Por otro lado, Martínez y Ruiz-Huerta (1999, 2000) establecieron una dimensión adicional relacionada con el estilo de vida combinando algunas variables pertenecientes a la situación financiera y la posesión de bienes duraderos.

En este trabajo, un análisis exploratorio previo ha mostrado que las variables relativas a la pobreza o privación podrían agruparse en tres dimensiones: necesidades básicas, condiciones de la vivienda y las necesidades secundarias o estilo de vida. Dentro de cada una de estas dimensiones se recogen los siguientes indicadores:

- “Necesidades básicas”: incluye no permitirse una calefacción adecuada, comprar prendas de vestir nuevas, comer carne o pescado cada dos días, invitar a los amigos o la familia a cenar o una copa, retrasarse en los pagos ordinariosⁱⁱ y tener un coche y teléfono. Respecto a las dos últimas variables, se supone que un hogar es pobre si no puede permitirse la posesión de dichos bienes.

- “Condiciones de la vivienda”: entre ellas, consideramos la carencia de una cocina separada, baño o ducha, la presencia de inodoro en el interior de la vivienda, la ausencia de agua corriente, la escasez de espacio y la ausencia de goteras y humedades. Estas variables solo expresan la ausencia o presencia de dichos problemas, no la capacidad de evitarlos.

- “Necesidades secundarias o estilo de vida”: Entre las variables incluidas en esta dimensión, aparecen no poder permitirse una semana de vacaciones pagadas o reemplazar parcialmente el mobiliario así como la posesión de una TV en color, un VCR, un microondas o un lavavajillas.

Para determinar la pobreza en cada indicador, seguimos el criterio de ausencia o carencia forzosa (Mack y Lansley, 1985). En consecuencia sólo se considera la privación en un indicador si la carencia se debe a una falta de recursos. Esta información sólo aparece en el PHOGUE para la posesión de los bienes duraderos y la capacidad de realizar algunas actividades. Tampoco es posible utilizar el enfoque consensuado puesto que no se recoge la información sobre la visión de un bien o una necesidad como necesarios por parte de la sociedad.

En primer lugar, se realizará un análisis parcial para cada dimensión y después combinaremos la información obtenida para determinar un índice conjunto de pobreza multidimensional.

Finalmente, al comparar ambos métodos es preciso considerar que el resultado del modelo de clases latentes es una variable categórica, mientras que el fuzzy set approach proporciona una variable métrica. Podríamos decir que, con el primer método, respondemos a la pregunta “¿es pobre este hogar o individuo?” y con el segundo a la cuestión “¿cuál es el grado de pobreza de este hogar?”. No obstante, en este trabajo intentaremos establecer un valor de pobreza fuzzy que diferencie los más pobres del resto, puesto que el propósito principal de la medición de la pobreza es la identificación de la población pobre. Para ello, utilizaremos distintas líneas de pobreza propuestas en la literatura para índices métricos de pobreza multidimensional como las de Muffels y Fouarge (2001) o la de Tsakloglou y Papadopoulos (2002).

4.1 Pobreza multidimensional latente

En un trabajo anterior (Pérez-Mayo, en prensa), se utiliza un modelo de clases latentes para estimar la proporción de hogares pobres en la población española en cada una de las dimensiones antes citadas.

Por razones de espacio, sólo comentamos las principales características de las estimaciones para las diferentes dimensiones con el objeto de ilustrar mejor las conclusiones sobre el indicador agregado.

En la tabla 1, aparecen las proporciones de las clases para cada uno de los estudios parciales donde las categorías aparecen ordenadas de mayor a menor nivel de pobreza. En lo que respecta a las necesidades básicas, son satisfechas por la mayoría de la población, puesto que únicamente una parte muy pequeña de la población experimenta una situación en la que las únicas necesidades solventadas son comer carne o pescado cada dos días y tener teléfono.

En el otro extremo, se encuentra un numeroso grupo de hogares que satisface todas sus necesidades. No obstante, no se les debería llamar hogares ricos, sino hogares “no pobres”. Sólo se mide si se cumple o no la necesidad, no el grado de satisfacción. Finalmente, se presenta un grupo intermedio cuya diferencia con el anterior es la incapacidad de tener una calefacción adecuada.

Tabla 1. Pobreza multidimensional latente

| Variables | % | |
|---------------------|---|------|
| Necesidades básicas | 1 | 4.1 |
| | 2 | 10.9 |
| | 3 | 85.0 |
| Vivienda | 1 | 0.8 |
| | 2 | 8.7 |
| | 3 | 90.5 |
| Estilo de vida | 1 | 10.8 |
| | 2 | 4.2 |
| | 3 | 32.0 |
| | 4 | 53 |

Fuente: Elaboración propia.

En segundo lugar, en lo que respecta a las condiciones de la vivienda, debemos comentar que la gran mayoría de los hogares reside en un hogar sin los problemas considerados en esta dimensión, resultado esperado dados los antecedentes en trabajos anteriores.

Por último, la dimensión aparentemente más confusa por el mayor número de categorías y el mayor reparto de los porcentajes es la relativa a las necesidades secundarias. Estos hechos se deben a la particular naturaleza de esta dimensión: recoger aquellos aspectos más relacionados con el estilo de vida. De todas maneras, las clases 1 y 4 reflejan las situaciones extremas: mientras que los hogares pertenecientes a la categoría 4 pueden hacer frente a todas las necesidades, los presentes en la clase 1 sólo se pueden permitir un televisor en color. Las clases 2 y 3 reflejan una situación intermedia y no se pueden ordenar según su nivel de privación, ya que la primera se relaciona con una incapacidad de renovar parcialmente el mobiliario o tener una semana de vacaciones pagadas y la última con los bienes duraderos.

Una vez realizados los análisis parciales, el siguiente paso es combinar los resultados anteriores y medir la pobreza multidimensional agregada o combinada. Por tanto, tendremos tres variables indicadores, necesidades básicas, condiciones de la vivienda y necesidades secundarias con tres, tres y cuatro categorías respectivamente.

Tabla 2. Modelos latentes para la pobreza multidimensional agregada

| Modelo | L^2 | Df | $\%L^2$ | E |
|---------------|-----------|------|---------|--------|
| Independencia | 3685.9811 | 28 | 0.0000 | 0.0000 |
| Dos clases | 66.3994 | 20 | 0.9819 | 0.0647 |
| Tres clases | 36.8250 | 12 | 0.9900 | 0.1429 |
| Cuatro clases | 13.1819 | 4 | 0.9964 | 0.2126 |

Fuente: Elaboración propia.

Los resultados de la tabla anterior permiten afirmar que es posible dividir a la población en dos grupos según su nivel de pobreza multidimensional agregada. A pesar de que el ajuste del modelo de dos clases parece no ser bueno, se debe al elevado tamaño muestral, puesto que para las frecuencias relativas el ajuste es muy bueno. Otras medidas que apoyan la elección del modelo de dos clasesⁱⁱⁱ son, por ejemplo, el $\%L^2$ que para el modelo de dos clases presenta un valor cercano a uno o los contrastes χ^2 para los márgenes de dos o más indicadores que muestran un buen ajuste. Finalmente, puesto que la disminución del L^2 causado al pasar de dos a tres clases es muy pequeña comparado con el consiguiente incremento en el error de clasificación, decidimos considerar sólo dos clases en la población.

Tabla 3. Probabilidades latentes y condicionadas para la pobreza multidimensional agregada

| Variables | Clases | | |
|---------------------|--------|--------|--------|
| | 1 | 2 | |
| Necesidades básicas | 1 | 0.1934 | 0.0039 |
| | 2 | 0.5052 | 0.0153 |
| | 3 | 0.3015 | 0.9808 |
| Vivienda | 1 | 0.0380 | 0.0015 |
| | 2 | 0.1604 | 0.0584 |
| | 3 | 0.8017 | 0.9401 |
| Estilo de vida | 1 | 0.4079 | 0.0288 |
| | 2 | 0.0414 | 0.0395 |
| | 3 | 0.5348 | 0.2800 |
| | 4 | 0.0160 | 0.6517 |
| Clase latente | | 0.1986 | 0.8014 |

Fuente: Elaboración propia.

En concreto y vista la tabla 2, podemos afirmar que aproximadamente un 20% de los hogares españoles son pobres según este concepto que extiende la noción tradicionalmente utilizada de pobreza. Puesto que en los resultados para las condiciones de la vivienda se esperaba que la categoría de no privación fuera la mayor, se observa que las probabilidades condicionadas son muy similares para ambas clases. Se observa que la clase 1 (mayor pobreza) incluye los hogares que tienen mayor probabilidad de ser pobres para las necesidades básicas así como las secundarias. En este último caso, además es probable que no

puedan satisfacer las necesidades relacionadas con los bienes duraderos aunque cumplan las relativas al mobiliario y las vacaciones.

Es decir, el índice obtenido mide un concepto de pobreza que supera el marco de las necesidades básicas al incluir algunas cuestiones relacionadas con el estilo de vida.

4.2 Pobreza multidimensional fuzzy

En este caso, se aplica la metodología mostrada en el apartado 3.2 al conjunto de indicadores presentes en ECHP para medir la pobreza y la exclusión social. En la tabla 4 se observan los valores medios de los índices de pobreza para cada dimensión y el agregado así como las tasas de pobreza tras aplicar distintos umbrales^{iv} a los índices anteriores.

Tabla 4. Índices y tasas de pobreza multidimensional fuzzy

| | | Tasas de pobreza (%) | |
|---------------------|--------|----------------------|----------------|
| | Índice | L ₁ | L ₂ |
| Necesidades básicas | 0.1428 | 45.8 | 15.0 |
| Vivienda | 0.0801 | 26.7 | 32.3 |
| Estilo de vida | 0.2569 | 37.4 | 37.4 |
| Agregada | 0.1547 | 21.0 | 28.7 |

Fuente: Elaboración propia.

Se observa que el nivel de pobreza multidimensional en la sociedad española no es muy elevado con una mayor importancia de la dimensión relativa al estilo de vida. Asimismo, puede comprobarse que el grado de pobreza causado por las condiciones de la vivienda es muy reducido y cercano al valor correspondiente a la situación de “no pobreza”. A simple vista, parece destacar el elevado valor de la tasa de pobreza para las necesidades básicas usando la quinta más alta. Llama incluso más la atención si se compara con el valor medio del índice y la tasa de pobreza en función de la media. La razón de esta aparente incongruencia reside en la asimetría de la distribución del grado de pobreza básica fuzzy: mientras que la media es 0.1428, la mediana es 0 y coinciden la quinta más alta y la anterior^v. En consecuencia, creemos que la segunda línea de pobreza propuesta es más adecuada porque mejora el índice para las necesidades básicas y además establece unos valores muy parecidos para el resto de las dimensiones y el agregado. Según este criterio, se estima una tasa de casi 30% de los hogares pobres en España para el año 2000.

Por otro lado, el análisis de las correlaciones entre los índices muestra que el índice de pobreza multidimensional depende en gran medida de los índices para las necesidades, tanto básicas como secundarias.

Tabla 5. Correlaciones entre los índices fuzzy de pobreza multidimensional

| | Agregada | Necesidades básicas | Vivienda | Estilo de vida |
|----------------|----------|---------------------|----------|----------------|
| Agregada | 1 | 0.827 | 0.503 | 0.908 |
| Nec. Básicas | 0.827 | 1 | 0.240 | 0.641 |
| Vivienda | 0.503 | 0.240 | 1 | 0.221 |
| Estilo de vida | 0.908 | 0.641 | 0.221 | 1 |

Fuente: Elaboración propia.

Se observa, además, para el índice de condiciones de la vivienda una baja relación con el resto de los índices, debido a sus bajos valores. Así, un hogar con un bajo nivel de pobreza fuzzy para la vivienda puede tener altos o bajos índices para las necesidades básicas o secundarias, es decir, no existe una pauta definida.

4.3 Comparación de ambos enfoques

Recordemos que el objeto de este trabajo no es únicamente mostrar los resultados de aplicar dos métodos alternativos, sino su análisis y comparación intentando responder esta cuestión: ¿hasta qué punto coinciden los distintos métodos en la identificación de la población pobre? Para ello, recogemos en la siguiente tabla las proporciones de hogares pobres en la población según ambos métodos.

Tabla 7. Tasas de pobreza multidimensional por métodos latente y fuzzy

| | Latente y fuzzy ₁ | Latente y fuzzy ₂ |
|---------------------|------------------------------|------------------------------|
| Necesidades básicas | 0.0411 | 0.0411 |
| Vivienda | 0.0081 | 0.0081 |
| Estilo de vida | 0.1076 | 0.1076 |
| Agregada | 0.1418 | 0.1632 |

Fuente: Elaboración propia.

Se observa que las tasas son muy similares a las obtenidas para la pobreza latente en cada una de las dimensiones. Por tanto, es posible afirmar que existe un alto grado de solapamiento entre ambos métodos. Esta conclusión, la fuerte relación en la identificación

según el enfoque fuzzy y el latente, se refuerza con la revisión de los estadísticos tradicionales de dependencia para variables categóricas: el estadístico ji-cuadrado de Pearson o la V de Cramer. Por ejemplo, los valores de este último son siempre mayores a 0.7, excepto en el caso de las condiciones de la vivienda. Sin embargo, incluso en este caso es superior a 0.5.

Por otro lado, si se aplica el índice de similaridad^{vi} propuesto por Dagum y Costa (2003) de nuevo se manifiesta la coincidencia entre la identificación según cualquier criterio al comparar los resultados generales. Sin embargo, a la hora de analizar la similaridad de la identificación en cada una de las dimensiones, se observa una gran disparidad. Este resultado aparentemente contradictorio con las conclusiones obtenidas a partir de los estadísticos de dependencia se comprende mejor si se recalcula el índice de similaridad como la proporción de hogares no pobres según un criterio que están en la misma situación según el otro. En este caso, los valores de los índices son mayores al 80% en cada una de las dimensiones.

En consecuencia, los índices de similaridad iniciales se deben a la mayor desagregación de la pobreza multidimensional latente. Recordemos que entre la categoría más pobre y la menos privada existe, al menos, otra categoría que, generalmente, recoge a aquellos hogares que pueden satisfacer las necesidades mínimas, pero no llegan a satisfacerlas todas. Por tanto, el modelo de clases latentes permite identificar mejor a los hogares pobres así como los distintos grados de pobreza existentes en la población.

Llama la atención este último hecho, la consideración de los niveles de pobreza en la población, porque es el principal motivo aducido en la literatura para apoyar la aplicación del fuzzy set approach. Sin embargo, a pesar de considerar inicialmente en dicha metodología la pobreza como un fenómeno gradual, en su aplicación práctica no considera distintos grados de pobreza, sino sólo una dicotomía pobre - no pobre. Como el resultado final es una variable métrica que no permite la identificación de la población pobre como objeto de las políticas sociales (principal objetivo de los estudios sobre medición de la pobreza), es necesario determinar un umbral para diferenciar y medir a los individuos u hogares pobres. Finalmente, el uso de cualquier línea plantea el problema de la arbitrariedad ampliamente conocido y estudiado en el análisis tradicional de la pobreza. Este problema parece solventarse o al menos paliarse con la aplicación del modelo de clases latentes, por lo que proponemos la utilización de este último.

5. Conclusiones

El análisis tradicional de la pobreza mediante una única variable, renta o gasto, se ha visto confrontado en los últimos años con distintas propuestas de pobreza multidimensional, principalmente los trabajos de la escuela francesa de exclusión social (Lenoir, 1974) y la teoría de las capacidades y funcionamientos de Sen (1992).

Estas propuestas han sido recogidas en el contexto europeo por la Comisión Europea de manera que ha comenzado a recoger un conjunto de indicadores sociales sobre la pobreza y la exclusión social en una base de datos (European Community Household Panel) especialmente desarrollada para estudiar estos fenómenos con una comparabilidad espacial (entre países) y temporal (entre años).

Puesto que no existe una metodología consensuada entre los autores para analizar toda la información sobre la pobreza, en este trabajo comparamos los resultados obtenidos tras la aplicación de dos de los métodos propuestos: los fuzzy sets y el modelo de clases latentes.

Dado que los datos analizados son indicadores categóricos y se persigue como resultado la identificación del grupo de individuos u hogares pobres, nuestro trabajo ha mostrado que es preferible el uso del modelo de clases latentes frente al fuzzy set approach. El primer método es una herramienta del análisis estadístico multivariante de datos especialmente indicado para situaciones con variables categóricas observadas y no observadas. Además, permite la inclusión del modelo dentro de los modelos dinámicos de variables latentes (Vermunt, 1997) por lo que se hace posible el análisis de la persistencia o movilidad de los individuos en la pobreza, estudio muy importante para la política económica.

Por el contrario, creemos que el fuzzy set approach es aconsejable si se consideran dentro de los indicadores alguna variable métrica. Asimismo, si el propósito del estudio no es la identificación de la población pobre, sino la determinación del nivel de pobreza en la población, sería apropiado utilizar este método.

Para concluir, los resultados obtenidos en nuestro trabajo ponen de manifiesto que, con cualquier método, alrededor de un 20% de los hogares españoles están en situación de pobreza. Además, esta situación de pobreza se debe sobre todo a la insatisfacción de un conjunto de necesidades básicas y otras relacionadas con el estilo de vida. Finalmente, las condiciones de la vivienda, al ser muy minoritaria la privación en este aspecto, parecen tener poca influencia sobre el estado general de pobreza.

Referencias

1. Atkinson, A.B. (1989): *Poverty and social security*, Harvester Wheatsheaf, Londres.
2. Atkinson, A.B, Cantillon, B., Marlier, E. y Nolan, B. (2002): *Social Indicators: The EU and Social Inclusion*, Oxford University Press, Oxford.
3. Bartholomew, D.J., Steele, F., Moustaki, I. y Galbraith, J.I. (2002): *The Analysis and Interpretation of Multivariate Data for Social Scientists*, Chapman and Hall, Boca Raton.
4. Bartholomew, D.J. y Leung, S.O. (1987): "A goodness-of-fit test for sparse 2p contingency tables", *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 55(1) 1-15.
5. Cantó, O. (2000): "Income mobility in Spain: How much is there?", *Review of Income and Wealth*, 46(1), 85-101.
6. Cantó, O. (2002): "Climbing out of poverty, falling back in: low incomes' stability in Spain". *Applied Economics*, 34, 1903-1916.
7. Cerioli, A. y Zani, S. (1990): "A Fuzzy Approach to the Measurement of Poverty", En: C. Dagum y M. Zenga (Eds.), *Income and Wealth Distribution, Inequality and Poverty*, Springer-Verlag, Berlín, 272-284.
8. Cheli, B., Ghellini, A., Lemmi, A. y Panuzzi, N. (1994): "Measuring Poverty in the Countries in Transition via the TFR method: the Case of Poland in 1990-1991", *Statistics in Transition*, 1(5)585-636.
9. Cheli, B. y Lemmi, A. (1995): "A Totally Fuzzy and Relative Approach to the Multidimensional Analysis of Poverty", *Economic Notes by Monte dei Paschi di Siena*, 24(1)115-134.
10. Chiappero Martinetti, E. (1994): "A New Approach to Evaluation of Well-Being and Poverty by Fuzzy Set Theory", *Giornale degli economisti e annali di economia*, 53 367-388.
11. Chiappero Martinetti, E. (2000): "A Multidimensional Assessment of Well-Being Based on SEN's Functioning Approach", *Giornale degli economisti e annali di economia*, 53 367-388.
12. Dagum, C., Gambassi, R., Lemmi, A. (1992): *New Approaches to Measurement of Poverty. Poverty Measurement for Economies in Transition in Eastern European Countries*, Polish Statistical Association and Central Statistical Office, Warsaw, 201-225.
13. Dagum, C. y Costa, M. (2004): "Analysis and Measurement of Poverty. Univariate and Multivariate Approaches and their Policy Implications", En: C. Dagum y G. Ferrari (Eds.), *Household Behaviour, Equivalence Scales, Welfare and Poverty*, Physica-Verlag, Heidelberg y New York, 221-271.
14. Dempster, A.P., Laird, N.M., Rubin, D.B. (1977): "Maximum likelihood estimation from incomplete data via the EM algorithm", *Journal of the Royal Statistical Society B* 39, 1-38.
15. Desai, M. y Shah, A. (1988): "An econometric approach to the measurement of poverty", *Oxford Economic Papers*, 40(3), 505-522.

16. Devicienti, F. (2001): Poverty persistence in Britain: a multivariate analysis using the BHPS, 1991-1997. ISER Working Paper 2001-02, Colchester, Universidad de Essex.
17. EUROSTAT, (2000): *European social statistics. Income, poverty and social exclusion*. Luxemburgo.
18. Fouarge, D. y Muffels, R. (2000): Persistent poverty in the Netherlands, Germany and the UK. A model-based approach using panel data for the 1990s, European Panel Analysis Group Working Paper nº 15, Colchester, Universidad de Essex.
19. Gailly, B. y Hausman, P. (1984): “Desavantages relatifs a une Mesure Objective de la Pauvete”, En: G. Sarpellon (ed.), *Understanding poverty*, Instituto internazionale J. Maritain, Milán.
20. Hageaars, J.A. (1990): *Categorical longitudinal data. Log-linear Panel, Trend, and Cohort Analysis*, Sage Publications, Londres.
21. Halleröd, B. (1994): A new approach to the direct consensual measurement of poverty. Social Policy Research Centre Discussion Paper no 50, New South Wales University.
22. Hills J. (1998a): “Does income mobility mean that we do not need to worry about poverty?”, En: A.B. Atkinson y J. Hills (Eds.), *Exclusion, employment and opportunity*, CASE paper no 4, CASE - London School of Economics, Londres.
23. Hills, J. (1998b): “What do we mean by reducing lifetime inequality and increasing mobility?”, in *Persistent poverty and lifetime inequality: the evidence*, CASE report no 5, CASE-London School of Economics, Londres.
24. Hirschberg, J.G., Maasoumi, E. y Slottje, J. (1991): “Cluster analysis for measuring welfare and quality of life across countries”, *Journal of Econometrics*, 50, 131-150.
25. Layte, R., Maître, B. Nolan, B. y Whelan, C.T. (1999): Income deprivation and economic strain. European Panel Analysis Group Working Paper nº 5, Colchester, Universidad de Essex.
26. Layte, R., Maître, B. Nolan, B. y Whelan, C.T. (2001): “Explaining levels of deprivation in the European Union”, *Acta Sociologica*, 44(2), 105-122.
27. Lazarsfeld, P.F. (1950): “The logical and mathematical foundation of latent structure analysis”, En: S.A. Stouffer, (Ed.), *Measurement and prediction*, Princeton University Press, Princeton, 362-472.
28. Lazarsfeld, P.F. y Henry, N.W. (1968): *Latent structure analysis*, Houghton Mifflin, Boston
29. Lenoir, R. (1974): *Les Exclus: Un Français sur Dix*, Editions du Seuil, Paris.
30. Maasoumi, E. y Nickelsburg, G. (1988): “Multivariate measures of well-being and an analysis of inequality in the Michigan data”, *Journal of Business and Economic Statistics*, 6, 327-334.
31. Mack, J. y Lansley, S. (1985): *Poor Britain*, Allen and Urwin, Londres.
32. Martínez, R. y Ruiz-Huerta, J. (1999): “Algunas reflexiones sobre la medición de la pobreza. Una aplicación al caso español”, En: J.M. Maravall (Ed.), *Dimensiones de la desigualdad. III*

- Simposio sobre igualdad y distribución de la renta y la riqueza*, Fundación Argenteria y Visor Editorial, Madrid, vol. 1, 367-428.
33. Martínez, R. y Ruiz-Huerta, J. (2000): Income, multiple deprivation and poverty: an empirical analysis using Spanish data. 26a IARIW General Conference. Cracovia
 34. Mayer, S.E. y Jencks, C. (1989): "Poverty and the distribution of material resources", *Journal of Human Resources*, 21, 88-113.
 35. Muffels, R. y Fouarge, D. (2001): Do European welfare regimes matter in explaining social exclusion? Dynamic analyses of the relationship between income poverty and deprivation: a comparative perspective. ESPE Conference. Atenas.
 36. Navarro, C. y Ayala, L. (2003): La exclusión en vivienda en España: una aproximación a través de índices multidimensionales de privación. X Encuentro de Economía Pública. Universidad de La Laguna .
 37. Nolan, B. y Whelan, C.T. (1996): *Resources, deprivation and poverty*, Clarendon Press, Oxford.
 38. Pérez-Mayo, J. (2003): *Modelos dinámicos de variables latentes aplicados a la construcción de indicadores económicos y sociales*, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura.
 39. Pérez-Mayo, J. (2005): "Identifying deprivation profiles in Spain: a new approach", *Applied Economics*, en prensa.
 40. Raftery, A.E. (1986): "Choosing models for cross-classifications", *American Sociological Review*, 51 145-146.
 41. Ram, R. (1982): "Composite indices of physical quality of life, basic needs fulfilment and income. A principal component representation", *Journal of Development Economics*, 11, 227-247.
 42. Runciman, W.G. (1966): *Relative deprivation and social justice*, Routledge and Kegan Paul, Londres.
 43. Sen, A.K. (1992): *Inequality reexamined*. Harvard University Press, Cambridge.
 44. Stevens, A.H. (1994): "Persistence in poverty and welfare: the dynamics of poverty spells: updating Bane and Ellwood", *American Economic Review (Papers and Proceedings)*, 84, 34-37.
 45. Stevens, A.H. (1999): "Climbing out of poverty, falling back in: measuring the persistence of poverty over multiple spells", *Journal of Human Resources*, 3, 557-588.
 46. Townsend, P. (1979): *Poverty in the United Kingdom*, Penguin Books, Harmondsworth.
 47. Tsakloglou, P. y Papadopoulos, F. (2002): "Poverty, material deprivation and multidimensional disadvantage during four life stages: Evidence from ECHP", En: M. Barnes, C. Heady, S. Middleton, J. Millar, F. Papadopoulos, G. Room y P. Tsakloglou (Eds.), *Poverty and Social Exclusion in Europe*, Edward Elgar Publishing, Londres.

48. Vermunt, J.K. (1997): *Log-linear Models for Event Histories*, Sage Publications, Londres.
49. Whelan, C.T., Layte, R. y Maître, B. (2002a): “Multiple deprivation and persistent poverty in the European Union”, *Journal of Applied Social Science Studies*, 122, 31-54.
50. Whelan, C.T., Layte, R. y Maître, B., (2002b): “Persistent deprivation in the European Union”, *European Sociological Review*, 17(4), 357-372.
51. Zadeh, L.A. (1965): “Fuzzy Sets”, *Information and Control*, 8 338-353.

ⁱ Por ejemplo, Muffels y Fouarge toman la media nacional y Tsakloglou y Papadopoulos la quinta más baja de la distribución.

ⁱⁱ Suponemos que un hogar se retrasa en los pagos ordinarios si lo hace en al menos uno de los siguientes pagos: alquiler de la vivienda, hipoteca, suministros y otros pagos relativos a préstamos.

ⁱⁱⁱ Esta conclusión se confirma incluso si se utiliza una medida distinta para la bondad del ajuste como el contraste BIC (Raftery, 1986).

^{iv} Las respectivas líneas de pobreza son la quinta más alta (L_1) y el 150% de la media (L_2). Como los índices toman valores en el intervalo $[0,1]$, representando 0 la “no pobreza” y 1 el mayor nivel de pobreza, si se eligiera la quinta más baja o el 50% de la media (umbrales más usuales) se sobreestimaría el nivel de pobreza multidimensional.

^v Si se observan los datos de la distribución, se produce un salto desde el valor 0 al 0.1853 (percentiles 60 y 80).

^{vi} El índice $SIM(P_L, P_F)$ es la proporción de hogares pobres según un criterio fuzzy que también son pobres según el criterio latente.