DECISIÓN ESTADÍSTICA BAJO TÉCNICAS POSTERIOR-REGRET GAMMA-MINIMAX: APLICACIONES EN EL MERCADO DE SEGUROS

José María Pérez Sánchez

Departamento de Métodos Cuantitativos para la economía y la Empresa

Universidad de Granada

e-mail: josemag@ugr.es

Emilio Gómez Déniz

Departamento de Métodos Cuantitativos en Economía y Gestión

Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

e-mail: egomez@dmc.ulpgc.es

Francisco J. Vázquez-Polo

Departamento de Métodos Cuantitativos en Economía y Gestión

Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

e-mail: fvpolo@dmc.ulpgc.es

Resumen

En el cálculo de primas de seguros, el actuario usualmente desconoce el parámetro de riesgo de la cartera heterogénea de asegurados que pretende tarificar. En un contexto bayesiano, se supone que este parámetro de riesgo sigue cierta distribución estructura o distribución a *priori*. Sin embargo, la especificación de esta distribución a *priori* puede no ser siempre una labor inmediata, constituyendo uno de los puntos de mayores críticas a la metodología bayesiana estándar. En este trabajo supondremos que el actuario no es capaz de especificar una única distribución a *priori* y, en su lugar, se establecerá una familia de distribuciones pertenecientes a una clase Γ de distribuciones a *priori* plausibles, para hacer uso de la metodología posterior regret $\Gamma-$minimax en el cálculo de primas de seguros. Esta metodología permitirá obtener primas expresadas en la forma de una fórmula de credibilidad, que se obtendrán bajo pérdida cuadrática y los pares verosimilitud-distribución a *priori* siguientes: Gamma-Gamma, Poisson-Gamma, Binomial-Beta, y Binomial Negativa-Beta.

Palabras clave: Bayes, Posterior-Regret, prima, credibilidad.

Area temática: 7 (Métodos Cuantitativos).

1. Introducción.

En este trabajo haremos uso del criterio de decisión "Posterior-Regret" (Zen y DasGupta, 1993; Ríos *et al*., 1995; entre otros) para la fijación de primas de seguros. Se trata de calcular las primas Posterior Regret Γ-Minimax ayudándonos de la metodología bayesiana robusta.

Como es bien sabido, el análisis bayesiano robusto (global) asume que la densidad a priori pertenece a una familia Γ de densidades a priori plausibles, para a partir de aquí calcular el rango de variación de una magnitud a posteriori de interés. El resultado final es que el investigador (el actuario en nuestro caso) dispone de un conjunto de acciones bayes que puede dejar desorientado a un actuario poco entrenado, en el sentido de no saber decidir por cuál de las acciones bayes decantarse.

Las primas Posterior Regret Γ-Minimax, se calculará, bajo pérdida cuadrática, como el punto medio de las infinitas acciones bayes que se deducen de la aplicación de las técnicas bayesianas de robustez global.

El uso del análisis bayesiano estándar en teoría de la credibilidad (entendida ésta como el proceso de "experiencia rating"' utilizando modelos de decisión estadística bajo una función de pérdida determinada) ha sido considerado en una gran cantidad de trabajos y aplicaciones actuariales (Heilmann, 1989; Klugman, 1992, Goovaerts *et al*., 1990; entre otros).

En el cálculo de primas de seguros, el actuario usualmente desconoce el parámetro de riesgo de la cartera heterogénea de asegurados que pretende tarificar. En un contexto bayesiano, se supone que este parámetro de riesgo sigue cierta distribución estructura o distribución a *priori*. Sin embargo, la especificación de esta distribución a *priori* puede no ser siempre una labor inmediata, constituyendo uno de los puntos de mayores críticas a la metodología bayesiana estándar.

Respecto a este aspecto, recientemente Gómez y Vázquez-Polo (2003) y Gómez *et al*. (2000, 2002) han utilizado y construido técnicas del análisis bayesiano robusto para el análisis de la sensibilidad de las primas a la asignación de las funciones estructura. Básicamente, estos trabajos han probado que muchos de los principios habitualmente utilizados en la práctica actuarial se muestran ciertamente poco robustos frente a cambios en las densidades a priori.

La sección 2 repasa algunos conceptos básicos de principios de cálculo de primas, así como la prima de riesgo, colectiva y bayes. La sección 3 presenta el método de tarificación aquí considerado, las primas posterior regret Γ-minimax. La sección 4 permite conocer la expresión de estas primas para los pares de distribución considerados en este trabajo. En la sección 5, se presenta un ejemplo numérico que nos permite comparar las primas bayes con las primas posterior regret Γ-minimax. Por último, en la sección 6, se resumen las principales conclusiones del trabajo.

2. Preliminares

Sea X_i, $i = 1,2,...,t$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con valores en $X \subset R$, que representan los riesgos en los últimos t períodos de observación. Considérese que la distribución de X_i, $f(x|\theta)$, depende de un parámetro de riesgo $\theta \in \Theta$, con distribución a priori $\pi(\theta)$.

Un principio de cálculo de prima actuarial es una función que asigna a un riesgo X una prima "justa" $P(\theta)$, denominada *prima de riesgo*. En la práctica esta prima se obtiene minimizando la pérdida esperada $E[\mathrm{L}(\mathrm{x},\mathrm{P})]$ (Heilmann, 1989), donde $L(x,P) = g(x)(h(x) - P)^2$ es una pérdida cuadrática ponderada. Se obtiene en este caso,

$$P(\theta) = \frac{E[g(x)h(x)]}{E[g(x)]}.$$

Aquí $g(x)$ y $h(x)$ son funciones bajo las que $E[\mathrm{L}(\mathrm{x},\mathrm{P})]$ existe.

En estadística actuarial es usual considerar que el parámetro de riesgo θ es

desconocido y aleatorio, con distribución a priori $\pi(\theta)$, luego la prima de riesgo se desconoce, y el problema ahora es estimar la misma.

Si no es posible obtener información anterior acerca del riesgo, el actuario calcula la *prima colectiva* (prima del colectivo de asegurados en la cartera), P_π, que se obtiene minimizando $E[\mathrm{L}(\mathrm{x},\mathrm{P}_\pi)]$. De esta forma,

$$P_\pi = \frac{E[g(P(\theta))h(P(\theta))]}{E[g(P(\theta))]}.$$

Finalmente, si dicha información es asequible el actuario toma una muestra **x** y la utiliza para estimar la *prima bayes*, P_π^x, obtenida minimizando la pérdida esperada a posteriori $E_{\pi^x}\left[\mathrm{L}\left(\mathrm{P}(\theta),\mathrm{P}_\pi^{\mathrm{x}}\right)\right]$, donde π^x es la distribución a *posteriori* de θ dada la información muestral **x**. Resulta en este caso,

$$P_{\pi^x} = \frac{E_{\pi^x}\left[g(P(\theta))h(P(\theta))\right]}{E_{\pi^x}\left[g(P(\theta))\right]}.$$

Utilizando distintas funciones $g(x)$ y $h(x)$, se obtienen distintos principios de cálculo de primas. Así, si $g(x)=1$ y $h(x)=\theta$ se obtiene el principio de prima neta.

3. Primas Posterior Regret Γ-Minimax (PPRGM)

Cuando se dispone de información a *priori* precisa sobre el parámetro desconocido a través de una distribución a priori π_i entonces es usual utilizar el principio bayes, mientras que cuando no es posible disponer de tal información entonces el principio minimax es el adecuado. Una posición intermedia consiste en adoptar el principio Γ-Minimax (Eichenauer *et al*., 1988), el cual puede describirse usando un subconjunto Γ del conjunto Π de todas las distribuciones a priori.

Paralelamente al principio Γ-Minimax, en este trabajo exploraremos la aplicación de la metodología Posterior Regret Γ-Minimax para la obtención de primas de seguros. Esta metodología se presentará más flexible, en el sentido de que las clases bajo las que se llevará a cabo el análisis necesitarán de menos especificaciones, y por tanto de menor conocimiento acerca de características del parámetro por parte del actuario.

Siguiendo la filosofía bayesiana, consideraremos el caso en el que sólo se es capaz de especificar una clase Γ de distribuciones a *priori* π, i.e. $\pi \in \Gamma$.

$$P_M \in \mathsf{P} \text{ es una PPRGM si } \inf_{P\in\mathsf{P}} \sup_{\pi\in\Gamma} r(\pi^x, P) = \sup_{\pi\in\Gamma} r(\pi^x, P_M),$$

donde $r(\pi^x, P) = \rho(\pi^x, P) - \rho(\pi^x, P_{\pi^x})$, siendo $\rho(\pi^x, P)$ la pérdida esperada a posteriori de P bajo π^x, y P el espacio de acciones.

Es sencillo obtener que, bajo pérdida cuadrática (i.e. $g(x)=1$ y $h(x)=\theta$) $r\left(\pi^x, P\right)=\left(P-P_{\pi^x}\right)^2$.

4. Cálculo de primas para distribuciones conjugadas

Como es obvio, cuando la variable aleatoria X representativa del riesgo corresponda a la cuantía de reclamaciones (de un seguro) ésta tendrá que ser de tipo continuo. Las distribuciones utilizadas en este caso suelen ser la normal (Heilmann, 1989; Klugman, 1992), log--normal (Hogg y Klugman, 1984; Sarabia *et al*., 2004), Pareto (DuMouchel y Olshen, 1974; Heilmann, 1989) y Gamma (o exponencial) (Freifelder, 1974; Eichenauer *et al*.,1988; Heilmann, 1989).

En este trabajo analizaremos distintos pares de distribuciones verosimilitud-a *priori*, como son Gamma-Gamma, Poisson-Gamma, Binomial-Beta y Binomial Negativa-Beta.

Supongamos que el actuario está seguro de que la distribución del parámetro de riesgo θ es la elegida, pero que es incapaz de especificar cuál es exactamente dentro de la familia de distribuciones elegida. Esto puede ocurrir debido a que no dispone de datos suficientes o porque existiendo éstos, no le son accesibles. De ahí que las clases bajo las que haremos el análisis son:

$\Gamma_1 = \left\{\pi(a,b) : a \in [a_1, a_2] \subset R^+\right\}$, b fijo.

$\Gamma_2 = \left\{\pi(a,b) : a \in [a_1, a_2] \subset R^+, b \in [b_1, b_2] \subset R^+\right\}$,

$\Gamma_3 = \left\{\pi(a,b) : \gamma_1 \le P_\pi \le \gamma_2\right\}$, b fijo,

donde a y b son los parámetros de la distribución a *priori*.

La clase Γ_3 es especialmente interesante desde el punto de vista de la aplicabilidad de los resultados. El actuario puede claramente introducir una clase como ésta en sus decisiones sobre la prima a cobrar, ya que un rango de posibles valores para la prima colectiva de una cartera dada es una información a *priori* de la que se dispone con facilidad.

4.1. El modelo Gamma-Gamma

En este modelo, se supone que la cuantía de las reclamaciones sigue una distribución gamma con parámetros $\theta > 0$ y $\nu > 0$, y que la distribución a *priori* es también una gamma con parámetros *a* y *b*. Un modelo verosimilitud-priori similar a éste puede encontrarse en Freifelder (1974), Eichenauer *et al*. (1988) y Heilmann (1989), entre otros.

Bajo el principio de prima neta y el modelo gamma-gamma obtenemos,

$$P(\theta) = \frac{\nu}{\theta},$$

$$P_{\pi} = \nu \frac{a}{b-1}, \tag{1}$$

$$P_{\pi^x} = \nu \frac{a + t\overline{x}}{b + t\nu - 1}, \tag{2}$$

como las primas de riesgo, colectiva y bayes, respectivamente.

Es interesante resaltar que que la prima bayes (2) se puede reescribir como

$$P_{\pi^x} = \nu \frac{a + t\overline{x}}{b + t\nu - 1} = \frac{t\nu}{b + t\nu - 1}\overline{\mathrm{x}} + \frac{\mathrm{b\,\text{-}\,1}}{b + t\nu - 1}\frac{a\nu}{b-1} = Z_t\overline{\mathrm{x}} + (1 - Z_t)P_{\pi}, \tag{3}$$

con

$$Z_t = \frac{t\nu}{b + t\nu - 1} = \frac{t}{t + \dfrac{E\left[V(X|\Theta)\right]}{V\left[E(X|\Theta)\right]}}.$$

Z_t recibe el nombre de factor de credibilidad, mientras que la expresión (3) se denomina fórmula de credibilidad, pues en ella la prima bayes aparece expresada como una suma ponderada de la información muestral y de la información a *priori* (expresada aquí como la prima del colectivo de asegurados en la cartera).

La siguiente proposición es consecuencia de aplicar la proposición 2.1 en Ríos *et al*. (1995).

Proposición 1. Bajo el modelo gamma-gamma anterior y el principio de prima neta se tiene:

$$P_M^{\Gamma_i} = \nu \frac{\alpha_i + t\overline{x}}{\beta_i + t\nu - 1}, \quad i = 1,2,3. \tag{4}$$

donde

$$\alpha_1 = \frac{a_1 + a_2}{2}, \qquad \beta_1 = b.$$

$$\alpha_2 = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + (a_1 + a_2)(t\nu - 1)}{b_1 + b_2 + 2(t\nu - 1)}, \qquad \beta_2 = \frac{2b_1 b_2 + (b_1 + b_2)(t\nu - 1)}{b_1 + b_2 + 2(t\nu - 1)}.$$

$$\alpha_3 = \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)(b - 1)}{2\nu}, \qquad \beta_3 = b.$$

Demostración.- Bajo las clases Γ_i, $i = 1,2$ es sencillo obtener, utilizando (2), que

$$\inf_{\pi \in \Gamma_1} P_{\pi^x} = \nu \frac{a_1 + t\overline{x}}{b + t\nu - 1}, \qquad \sup_{\pi \in \Gamma_1} P_{\pi^x} = \nu \frac{a_2 + t\overline{x}}{b + t\nu - 1}.$$

$$\inf_{\pi \in \Gamma_2} P_{\pi^x} = \nu \frac{a_1 + t\overline{x}}{b_2 + t\nu - 1}, \qquad \sup_{\pi \in \Gamma_2} P_{\pi^x} = \nu \frac{a_2 + t\overline{x}}{b_1 + t\nu - 1}.$$

Para la clase Γ_3 es necesario considerar primero que la condición de momento, utilizando (1), $\gamma_1 \le P_\pi \le \gamma_2$ es equivalente a $\frac{\gamma_1(b-1)}{\nu} \le a \le \frac{\gamma_2(b-1)}{\nu}$, luego

$$\inf_{\pi\in\Gamma_3} P_{\pi^x} = \nu \frac{\frac{\gamma_1(b-1)}{\nu} + t\overline{x}}{b + t\nu - 1}, \qquad \sup_{\pi\in\Gamma_3} P_{\pi^x} = \nu \frac{\frac{\gamma_2(b-1)}{\nu} + t\overline{x}}{b_1 + t\nu - 1}.$$

Ahora sólo es necesario utilizar el hecho de que la acción posterior regret es el punto medio del intervalo $\left[\inf_{\pi\in\Gamma_i} P_{\pi^x}, \sup_{\pi\in\Gamma_i} P_{\pi^x}\right], i = 1,2,3,$ para obtener el resultado deseado. ∇

4.2. El modelo Poisson-Gamma

En este modelo, se supone que la cuantía de las reclamaciones sigue una distribución poisson de parámetro $\theta > 0$, y que la distribución a *priori* es una gamma con parámetros a y b. Este modelo ha sido utilizado, entre muchos otros por Lemaire (1979, 1985), Holtan (1994) y Gómez et al. (2002).

Bajo el principio de prima neta y el modelo poisson-gamma obtenemos,

$$P(\theta) = \theta,$$

$$P_\pi = \frac{b}{a}, \tag{5}$$

$$P_{\pi^x} = \frac{b + t\overline{x}}{a + t}, \tag{6}$$

como las primas de riesgo, colectiva y bayes, respectivamente.

De igual forma que en el caso anterior, podemos expresar la prima bayes como una fórmula de credibilidad:

$$P_{\pi^x} = \frac{b + t\overline{x}}{a + t} = \frac{t}{a + t}\overline{\mathrm{x}} + \frac{\mathrm{a}}{a + t}\frac{b}{a} = Z_t\overline{\mathrm{x}} + (1 - Z_t)P_\pi,$$

con

$$Z_t = \frac{t}{a+t}.$$

Aplicando de nuevo el resultado de Ríos *et al*. (1995), obtenemos la siguiente proposición.

Proposición 2. Bajo el modelo poisson-gamma anterior y el principio de prima neta se tiene:

$$P_M^{\Gamma_i} = \nu \frac{\beta_i + t\bar{x}}{\alpha_i + t}, \; i = 1,2,3. \tag{7}$$

donde

$$\alpha_1 = \frac{2a_1a_2 + 2t(t-1) + t(a_1 + a_2)}{a_1 + a_2 + 2t}, \qquad \beta_1 = b.$$

$$\alpha_2 = \frac{2a_1a_2 + t(a_1 + a_2)}{a_1 + a_2 + 2t}, \qquad \beta_2 = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + t(b_1 + b_2)}{a_1 + a_2 + 2t}.$$

$$\alpha_3 = \frac{2b^2 + bt(\gamma_1 + \gamma_2)}{2t\gamma_1\gamma_2 + b(\gamma_1 + \gamma_2)}, \qquad \beta_3 = b.$$

Demostración.- La demostración es similar a la expuesta para la proposición 1, utilizando las expresiones (6) y (6). ∇

4.3. El modelo Binomial-Beta

La cuantía de las reclamaciones sigue una distribución binomial de parámetros *n* y $\theta > 0$, y la distribución a *priori* es una beta con parámetros *a* y *b*. Un modelo similar a éste puede verse en Heilmann (1989) , entre otros.

Bajo el principio de prima neta y el modelo binomial-beta obtenemos,

$$P(\theta) = n\theta,$$

$$P_{\pi} = n\frac{a}{a+b}, \tag{8}$$

$$P_{\pi^x} = n\frac{a+t\overline{x}}{a+b+tn}, \tag{9}$$

como las primas de riesgo, colectiva y bayes, respectivamente.

De nuevo, es posible obtener la fórmula de credibilidad a partir de la prima bayes,

$$P_{\pi^x} = n\frac{a+t\overline{x}}{a+b+tn} = \frac{tn}{a+b+tn}\overline{\mathrm{x}} + \frac{\mathrm{a+b}}{a+b+tn}\frac{an}{a+b} = Z_t\overline{\mathrm{x}} + (1-Z_t)P_{\pi},$$

con

$$Z_t = \frac{tn}{a+b+tn}.$$

Proposición 3. Bajo el modelo binomial-beta anterior y el principio de prima

neta se tiene:

$$P_M^{\Gamma_i} = n\frac{\alpha_i + t\overline{x}}{\alpha_i + \beta_i + tn}, \quad i = 1,2,3. \tag{10}$$

donde

$$\alpha_1 = \frac{(a_1^2 + a_2^2) + (a_1 + a_2)(b+tn)}{(a_1 + a_2) + 2(b+tn)}, \qquad \beta_1 = \frac{2a_1a_2 + b(a_1 + a_2) + 2btn - (a_1^2 + a_2^2)}{(a_1 + a_2) + 2(b+tn)}.$$

$$\alpha_2 = \frac{(a_1^2 + a_2^2) + (a_1b_1 + a_2b_2) + tn(a_1 + a_2)}{(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) + 2tn},$$

$$\beta_2 = \frac{2(a_1a_2 + b_1b_2 + a_1b_2 + a_2b_1) + tn(2a_2 - 2a_1 + 3b_2 - b_1) - (a_1^2 + a_2^2) - (a_1b_1 + a_2b_2)}{(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) + 2tn}.$$

$$\alpha_3 = \frac{\left(\gamma_1^2 + \gamma_2^2\right) + \left(\gamma_1 + \gamma_2\right)\left(b + tn + t\overline{x}\right)}{2\left(n - \gamma_1 - \gamma_2\right)^2 \left(b + tn\right)}, \qquad \beta_2 = \frac{\gamma_1 \gamma_2 + \left(\gamma_1 + \gamma_2\right)\left(b + tn\right)}{\left(n - \gamma_1 - \gamma_2\right)} + b^2 + tn\left(tn + 2b - 1\right) - \alpha.$$

Demostración.- Ahora, usaremos las expresiones (8) y (9) para demostrar estos coeficientes de igual forma que en la proposición 1. ∇

4.4. El modelo Binomial Negativa-Beta

La cuantía de las reclamaciones sigue una distribución binomial negativa de parámetros r y $\theta > 0$, y la distribución a *priori* es una beta con parámetros a y b. Heilmann (1989) también analiza este par de distribuciones.

Bajo el principio de prima neta y el modelo binomial negativa-beta obtenemos,

$$P(\theta) = r\frac{1-\theta}{\theta},$$

$$P_\pi = r\frac{b}{a-1}, \tag{11}$$

$$P_{\pi^x} = r\frac{b + t\overline{x}}{a + tr - 1}, \tag{12}$$

como las primas de riesgo, colectiva y bayes, respectivamente.

También para este par de distribuciones es posible obtener la fórmula de credibilidad:

$$P_{\pi^x} = r\frac{b + t\overline{x}}{a + tr - 1} = \frac{tr}{a + tr - 1}\overline{\mathrm{x}} + \frac{\mathrm{a}\ \text{-}1}{a + tr - 1}\frac{br}{a-1} = Z_t\overline{\mathrm{x}} + \left(1 - Z_t\right)P_\pi,$$

con

$$Z_t = \frac{tr}{a + tr - 1}.$$

Proposición 4. Bajo el modelo binomial negativa-beta anterior y el principio de prima neta se tiene:

$$P_M^{\Gamma_i} = r\frac{\beta_i + t\bar{x}}{\alpha_i + tr - 1},\ i = 1,2,3. \tag{13}$$

donde

$$\alpha_1 = \frac{2a_1a_2 - a_1 - a_2}{(a_1 + a_2) + 2tr - 2}, \qquad \beta_1 = b.$$

$$\alpha_2 = \frac{2a_1a_2 - a_1 - a_2}{(a_1 + a_2) + 2tr - 2}, \qquad \beta_2 = \frac{b_1(a_1 + tr - 1) + b_2(a_2 + tr - 1)}{(a_1 + a_2) + 2tr - 2}.$$

$$\alpha_3 = \frac{2b^2 + btr^2(\gamma_1 + \gamma_2)}{2\gamma_1\gamma_2 tr^3 + br(\gamma_1 + \gamma_2)}, \qquad \beta_3 = b.$$

Demostración.- Las expresiones (11) y (12) se utilizan para demostrar estos coeficientes de igual forma que en la proposición 1. ∇

Es interesante resaltar que todas las PPRGM obtenidas en las proposiciones anteriores son primas bayes (Watson, 1974).

5. Ilustración

En esta sección, desarrollaremos un sencillo ejemplo numérico con el fin de ilustrar el cálculo de las primas posterior regret Γ-minimax y compararlas con las primas bayesianas estándar, así como el cálculo de los rangos de variación de las mismas.

Para ello, consideraremos en el modelo gamma-gamma, una verosimilitud $G(\theta,1.5)$ y una distribución a *priori* $G(a,b)$. Para la clase Γ_1, supondremos que $a_1 = 1, a_2 = 4$ y $b = 3$. Para la clase $\Gamma_2, a_1 = 1, a_2 = 4, b_1 = 2, b_2 = 5,$ y para

$\Gamma_3, \gamma_1 = 1, \gamma_2 = 6$ y $b = 3$. Para calcular la prima Bayes, hemos escogido como distribución a *priori* estándar, $G(2,3)$. Para el resto de modelos, seguiremos suponiendo los mismos valores para $a_1, a_2, b_1, b, b_2, \gamma_1$ *y* γ_2, sabiendo que $n = 10$ para el par binomial-beta, y que $r = 1.5$ para el par binomial negativa-beta.

Las tablas 1, 2, 3 y 4 muestran las primas Bayes, las primas PRGM y los rangos de variación bajo el principio de prima neta cuando $t = 1,5,10$ y $\bar{x} = 0,1,2$ para los pares de distribuciones Gamma-Gamma, Poisson-Gamma, Binomial-Beta y Binomial Negativa-Beta, respectivamente.

Tabla 1. Primas Bayes, PRGM y rangos de variación. Gamma-Gamma

	t=1			*t*=5			*t*=10		
x	0	1	2	0	1	2	0	1	2
$\inf_{\pi\in\Gamma_1} P_{\pi^x}$	0.42	0.85	1.28	0.15	0.94	1.73	0.08	0.97	1.85
P_{π^x}	0.85	1.28	1.71	0.31	1.10	1.89	0.17	1.08	1.94
$P_M^{\Gamma_1}$	1.07	1.5	1.92	0.39	1.18	1.97	0.22	1.10	1.98
$\sup_{\pi\in\Gamma_1} P_{\pi^x}$	1.71	2.14	2.57	0.63	1.42	2.21	0.35	1.23	2.11
$\inf_{\pi\in\Gamma_2} P_{\pi^x}$	0.27	0.54	0.81	0.13	0.78	1.43	0.07	0.86	1.65
P_{π^x}	0.85	1.28	1.71	0.31	1.10	1.89	0.17	1.08	1.94
$P_M^{\Gamma_2}$	1.33	1.77	2.20	0.41	1.18	1.95	0.22	1.09	1.95
$\sup_{\pi\in\Gamma_2} P_{\pi^x}$	2.40	3	3.6	0.70	1.58	2.47	0.37	1.31	2.25
$\inf_{\pi\in\Gamma_3} P_{\pi^x}$	0.57	1	1.42	0.21	1	1.78	0.11	1	1.88
P_{π^x}	0.85	1.28	1.71	0.31	1.10	1.89	0.17	1.08	1.94
$P_M^{\Gamma_3}$	2	2.42	2.85	0.73	1.52	2.31	0.41	1.29	2.17
$\sup_{\pi\in\Gamma_3} P_{\pi^x}$	3.42	3.85	4.28	1.26	2.05	2.84	0.70	1.58	2.47

Tabla 2. Primas Bayes, PRGM y rangos de variación. Poisson-Gamma

	t=1			t=5			t=10		
x	0	1	2	0	1	2	0	1	2
$\inf_{\pi\in\Gamma_1} P_{\pi^x}$	0.6	0.8	1	0.33	0.88	1.44	0.21	0.93	1.64
P_{π^x}	1	1.33	1.67	0.43	1.14	1.85	0.25	1.08	1.91
$P_M^{\Gamma_1}$	1.05	1.4	1.75	0.41	1.11	1.80	0.24	1.05	1.86
$\sup_{\pi\in\Gamma_1} P_{\pi^x}$	1.5	2	2.5	0.5	1.33	2.16	0.27	1.18	2.09
$\inf_{\pi\in\Gamma_2} P_{\pi^x}$	0.4	0.6	0.8	0.22	0.77	1.33	0.14	0.85	1.57
P_{π^x}	1	1.33	1.67	0.43	1.14	1.85	0.25	1.08	1.91
$P_M^{\Gamma_2}$	1.45	1.8	2.15	0.53	1.22	1.91	0.30	1.11	1.92
$\sup_{\pi\in\Gamma_2} P_{\pi^x}$	2.5	3	3.5	0.83	1.66	2.5	0.45	1.36	2.27
$\inf_{\pi\in\Gamma_3} P_{\pi^x}$	0.75	1	1.25	0.37	1	1.62	0.23	1	1.77
P_{π^x}	1	1.33	1.67	0.43	1.14	1.85	0.25	1.08	1.91
$P_M^{\Gamma_3}$	1.37	1.83	2.30	0.46	1.23	1.99	0.26	1.20	1.98
$\sup_{\pi\in\Gamma_3} P_{\pi^x}$	2	2.66	3.33	0.54	1.45	2.36	0.28	1.24	2.19

Tabla 3. Primas Bayes, PRGM y rangos de variación. Binomial-Beta

	t=1			t=5			t=10		
x	0	1	2	0	1	2	0	1	2
$\inf_{\pi\in\Gamma_1} P_{\pi^x}$	0.59	1.17	1.76	0.17	1.05	1.93	0.09	1.03	1.96
P_{π^x}	1.33	2	2.66	0.36	1.27	2.18	0.19	1.14	2.09
$P_M^{\Gamma_1}$	1.72	2.37	3.02	0.45	1.35	2.26	0.24	1.18	2.13
$\sup_{\pi\in\Gamma_1} P_{\pi^x}$	2.85	3.57	4.28	0.74	1.66	2.59	0.38	1.34	2.30
$\inf_{\pi\in\Gamma_2} P_{\pi^x}$	0.52	1.05	1.58	0.17	1.01	1.86	0.09	1.01	1.92
P_{π^x}	1.33	2	2.66	0.36	1.27	2.18	0.19	1.14	2.09
$P_M^{\Gamma_2}$	1.80	2.45	3.09	0.46	1.35	2.25	0.24	1.18	2.12
$\sup_{\pi\in\Gamma_2} P_{\pi^x}$	3.07	3.84	4.61	0.75	1.70	2.64	0.39	1.36	2.33
$\inf_{\pi\in\Gamma_3} P_{\pi^x}$	0.22	0.88	1.55	0.06	0.97	1.87	0.03	0.98	1.93
P_{π^x}	1.33	2	2.66	0.36	1.27	2.18	0.19	1.14	2.09
$P_M^{\Gamma_3}$	0.86	1.57	2.27	0.21	1.14	2.06	0.11	1.07	2.03
$\sup_{\pi\in\Gamma_3} P_{\pi^x}$	1.5	2.25	3	0.37	1.31	2.25	0.19	1.16	2.13

Tabla 4. Primas Bayes, PRGM y rangos de variación. Binomial Negativa-Beta

	t=1			*t*=5			*t*=10		
x	0	1	2	0	1	2	0	1	2
$\inf_{\pi\in\Gamma_1} P_{\pi^x}$	1	1.33	1.66	0.43	1.14	1.85	0.25	1.08	1.91
P_{π^x}	1.8	2.4	3	0.53	1.41	2.29	0.28	1.22	2.15
$P_M^{\Gamma_1}$	2	2.66	3.33	0.51	1.37	2.23	0.27	1.19	2.11
$\sup_{\pi\in\Gamma_1} P_{\pi^x}$	3	4	5	0.6	1.6	2.6	0.3	1.3	2.3
$\inf_{\pi\in\Gamma_2} P_{\pi^x}$	0.66	1	1.33	0.28	1	1.71	0.16	1	1.83
P_{π^x}	1.8	2.4	3	0.53	1.41	2.29	0.28	1.22	2.15
$P_M^{\Gamma_2}$	2.83	3.5	4.16	0.64	1.5	2.35	0.33	1.25	2.16
$\sup_{\pi\in\Gamma_2} P_{\pi^x}$	5	6	7	1	2	3	0.5	1.5	2.5
$\inf_{\pi\in\Gamma_3} P_{\pi^x}$	1.28	1.71	2.14	0.47	1.26	2.05	0.26	1.14	2.03
P_{π^x}	1.8	2.4	3	0.53	1.41	2.29	0.28	1.22	2.15
$P_M^{\Gamma_3}$	1.87	2.49	3.11	0.52	1.39	2.27	0.28	1.21	2.14
$\sup_{\pi\in\Gamma_3} P_{\pi^x}$	2.45	3.27	4.09	0.57	1.53	2.49	0.29	1.27	2.25

Observando las tablas, podemos concluir, en general, que se obtienen resultados bastante robustos. Los rangos de variación de las primas no son muy elevados.

Además, observamos que P_{π^x} y $P_M^{\Gamma_i}$, $i = 1,2,3$ caen dentro del intervalo $\inf_{\pi\in\Gamma_3} P_{\pi^x}$, $\sup_{\pi\in\Gamma_2} P_{\pi^x}$, $i = 1,2,3$ y $P_{\pi^x} > P_M^{\Gamma_i}$, $i = 1,2,3$.

Para la tabla 1, podemos afirmar que las PPRGM son más conservadoras que las primas Bayes debido a que siempre son superiores a las segundas.

Eichenauer *et al*. (1988), señalando el hecho de que las acciones bayes son demasiado arriesgadas, mientras que las acciones minimax resultan demasiado conservadoras, propone utilizar el criterio Γ-minimax, que es un método cuyas primas resultantes se sitúan entre las de los dos anteriores.

De lo estudiado en este trabajo, y en particular de lo comentado en las líneas anteriores, no tenemos argumentos para concluir que las acciones posterior regret Γ-minimax se encuentren entre unas y otras, aunque sí que en ocasiones, y bajo ciertas clases, resultan más o menos conservadoras que las primas bayes. Además, el cálculo de las PPRGM es evidente que resulta muchísimo más sencillo que el cálculo de primas Γ-minimax.

6. Conclusiones finales

En este trabajo se han combinado las herramientas del análisis bayesiano estándar y de robustez global para obtener primas bajo el criterio de selección posterior regret Γ-minimax. El mecanismo del que se deducen PPRGM es sencillo de aplicar y genera, en el caso de que las primas bayes estándar puedan ser escritas como fórmulas de credibilidad, de nuevo expresiones de la misma naturaleza.

Esta técnica presenta dos ventajas que merecen ser tenidas en cuenta. Por un lado, su aplicación se presenta más flexible que la utilizada en Eichenauer *et al*. (1988) para obtener primas de credibilidad. Por otro lado, aparece como un mecanismo de decisión más preciso para un actuario poco entrenado, y que utilice las técnicas de robustez global, que generan un rango de primas entre las que el actuario (y la metodología) no especifica cuál es la adecuada.

Evidentemente las ideas expuestas aquí son susceptibles de ser aplicadas a otros principios de cálculo de primas, así como a otros pares de verosimilitudes-priori (Heilmann, 1988).

Bibliografía.

1. DuMouchel, W.H. y Olshen, R. (1974). *On the distribution of claim cost*. Credibility. Theory and Applications. Academic Press, New York.

2. Eichenauer, J.; Lehn, J. y Rettig, S. (1988). *A gamma--minimax result in credibility theory*. Insurance: Mathematics \& Economics, **7**, 49-57.

3. Freifelder, L. (1974). *Statistical Decision Theory and Credibility Theory Procedures*. Credibility. Theory and Applications. Academic Press, New York.

4. Gómez, E. y Vázquez-Polo, F.J. (2003). *Robustness in Bayesian models for bonus-malus systems*. Intelligent and Other Computational Techniques in Insurance: Theory and Applications. A.F. Shapiro and L.C. Jain (editors), London: World Scientific. 435-463.

5. Gómez, E; Hernández, A. y Vázquez-Polo, F.J. (2000). *Robust Bayesian Premium Principles in Actuarial Science*. Journal of the Royal Statistical Society (The Statistician, Series D), **49**, 2, 241-252.

6. Gómez, E; Pérez, J.M., Hernández, A. y Vázquez-Polo, F.J. (2002). *Measuring sensitivity in a bonus-malus system*. Insurance: Mathematics and Economics, **31**, 1, 105-113.

7. Goovaerts, M.J., Kaas, R., Van Heerwaarden, A.E. y Bauwelinckx, T. (1990). Effective actuarial methods. Amsterdam: North--Holland.

8. Heilmann, W. (1989). *Decision theoretic foundations of crediblity theory*. Insurance: Mathematics and Economics, **6**, 145-149.

9. Hogg, R. y Klugman, S. (1984). *Loss Distributions*. John Wiley & Sons. New York.

10. Holtan, J. (1994). *Bonus made easy*. Astin Bulletin, **24**, 1, 61-74.

11. Klugman, S.A. (1992). *Bayesian statistics in actuarial science: with emphasis in credibility*. Boston: Kluwer.

12. Lemaire, J. (1979). *How to define a bonus-malus system with an exponential utility function*. Astin Bulletin, **10**, 1, 274-282.

13. Lemaire, J (1985). *Automobile Insurance (Actuarial models)*. Kluwer-Nijhoff Publishing. Boston/Dordrecht/Lancaster.

14. Ntzoufras, I. y Dellaportas, P. (2002). *Bayesian modelling of outstanding liabilities incorporating claim count uncertainty*. North American Actuarial Journal, **6**, 1, 113-136.

15. Ríos, D.; Ruggeri, F. y Vidakovic, B. (1995). *Some result on posterior regret* Γ*-minimax estimation*. Statistics & Decisions, **13**, 315-331.

16. Sarabia, J.M.; Castillo, E.; Gómez, E. y Vázquez-Polo, F. (2004). *A class of conjugate priors for log-normal claims based on conditional specification*. Journal of Risk and Insurance. (por aparecer).

17. Watson, S. (1974). *On Bayesian inference with incompletely specified prior distributions*. Biometrika, **61**, 1, 193-196.

18. Zen, M.M. y DasGupta, A. (1993). *Estimating a binomial parameter: is robust Bayes real Bayes?*. Statistics & Decisions, **11**, 37-60.