

# UNA APROXIMACIÓN BAYESIANA PARA LA BÚSQUEDA DEL CONSENSO EN AHP-GDM\*

**Pilar Gargallo Valero**

Grupo Decisión Multicriterio Zaragoza  
Escuela U. Estudios Empresariales de Zaragoza.  
Universidad de Zaragoza  
e-mail: [pigarga@unizar.es](mailto:pigarga@unizar.es)

**José María Moreno Jiménez**

Grupo Decisión Multicriterio Zaragoza  
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales.  
Universidad de Zaragoza  
e-mail: [moreno@unizar.es](mailto:moreno@unizar.es)

**Manuel Salvador Figueras**

Grupo Decisión Multicriterio Zaragoza  
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales.  
Universidad de Zaragoza  
e-mail: [salvador@unizar.es](mailto:salvador@unizar.es)

## Resumen

En este trabajo se plantea una aproximación bayesiana para la búsqueda del consenso en un problema de decisión en grupo con el Proceso Analítico Jerárquico (AHP). Para ello, se define *la distribución de consenso del grupo* como aquella distribución del vector de prioridades que minimiza un promedio ponderado de las distancias de Kullback-Leibler a cada distribución a posteriori individual del vector de prioridades. En el trabajo se estudian las propiedades estadísticas de esta distribución y se proponen diversas formas de llevar a cabo el proceso de toma de decisiones conjunto. Finalmente, se analiza el grado de consenso resultante en el grupo.

**Palabras clave:** AHP, Decisión en Grupo, Priorización, Inferencia Bayesiana, Consenso.

**Área temática 7:** Métodos Cuantitativos

\* Este trabajo está parcialmente sufragado por el proyecto multidisciplinar del Gobierno de Aragón “Gobierno electrónico. Toma de decisiones complejas basadas en Internet: e-democracia y e-cognocracia” (ref. PM2004-052).

## 1. Introducción

Los cambios filosóficos (del reduccionismo mecanicista al holismo evolucionista), metodológicos (de la búsqueda de la verdad a la búsqueda del conocimiento) y tecnológicos (redes de comunicación) acaecidos en los últimos años en la conocida como sociedad del conocimiento, están llevando a la utilización de aproximaciones científicas más abiertas, flexibles y efectivas que las tradicionales (Moreno-Jiménez et al., 1999; 2001; Altuzarra y otros, 2005b). Estos nuevos enfoques deberán permitir la consideración de múltiples actores en la resolución de los problemas y, consecuentemente, la incorporación a los procesos decisionales de lo intangible y subjetivo asociado al factor humano.

Una de las aproximaciones que mejor responden a ese tipo de necesidades es el Proceso Analítico Jerárquico (AHP), propuesto por Saaty a mediados de los 70. Su capacidad de integrar lo muy pequeño con lo muy grande, lo individual con lo colectivo, lo objetivo con lo subjetivo, lo determinístico con lo estocástico, así como su poder de incorporar las visiones de la realidad de los múltiples actores implicados en la resolución del problema y sus interdependencias, la convierten en una de las herramientas más extendidas en nuestro días para llevar a cabo la resolución de problemas complejos en los que intervienen numerosos actores (Altuzarra y otros, 2005 b).

Suponiendo un escenario con múltiples actores y una jerarquía común para los mismos, los procedimientos tradicionalmente seguidos en decisión en grupo con AHP (AHP-GDM) son (Ramanatham and Ganesh, 1994; Forman and Peniwati, 1998): (i) la agregación de los juicios individuales (AIJ) y (ii) la agregación de las prioridades individuales (AIP).

En ambos procedimientos se supone implícitamente que todas las posturas son homogéneas y que no existen desacuerdos de entidad entre los decisores. Sin embargo, en la mayor parte de los procesos de decisión, esta hipótesis implícita es poco realista. En estos casos la decisión final del grupo se adopta tras un proceso negociador en el que todos los participantes buscan un consenso final que represente adecuadamente sus intereses individuales.

En nuestra opinión, dicho proceso debería considerar las inconsistencias de las ordenaciones propuestas con los juicios emitidos por los decisores, lo que proporcionaría un conocimiento adicional del proceso negociador seguido. A partir del estudio del mismo, se podrán deducir los puntos críticos y las oportunidades de decisión del mismo, aspecto éste de especial relevancia tanto en la revisión de juicios como en el establecimiento de los caminos de consenso entre los actores implicados en la resolución del problema (Moreno-Jiménez y otros, 2000).

En este trabajo se establece un procedimiento bayesiano que facilita la implementación práctica de la negociación. El procedimiento está basado en la identificación de las zonas de “acuerdo” y “desacuerdo” entre los actores participantes en la toma de decisiones, a partir de las matrices de comparaciones pareadas que reflejan sus preferencias. Para ello, se define la *distribución de consenso del grupo* como la distribución del vector de prioridades que minimiza un

promedio ponderado de las distancias de Kullback-Leibler a cada distribución a posteriori individual del vector de prioridades.

Dicha distribución proporciona una síntesis de las opiniones de los componentes del grupo estableciendo una dirección inicial a partir de la cual se puede llevar a cabo el proceso de negociación. Para ello se estudian las propiedades estadísticas de esta distribución y se proponen diversas formas de llevar a cabo el proceso decisional conjunto. Finalmente, se analiza el grado de consenso resultante en el grupo.

El trabajo se estructura como sigue: la Sección 2 revisa, brevemente, la decisión en grupo con AHP. En la Sección 3 se plantea el problema, se define la *distribución de consenso del grupo* analizando sus propiedades estadísticas y se propone un procedimiento de búsqueda sistemática de consenso entre los decisores. En la Sección 4 se especifica la metodología desarrollada en la Sección 3 para el modelo multiplicativo con errores logarítmico-normales y se aplica a un caso práctico ilustrativo. Finalmente, la Sección 5 concluye señalando los resultados más destacados del estudio.

## **2. DECISIÓN EN GRUPO EN AHP.**

El Proceso Analítico Jerárquico (AHP) es una técnica multicriterio discreta propuesta por Thomas L. Saaty (Saaty 1977, 1980), que permite la resolución de problemas de decisión altamente complejos en los que intervienen múltiples escenarios, criterios y actores. En ella se construye una escala de razón asociada a las prioridades de los diferentes elementos comparados, siguiendo una metodología consistente en cuatro fases: (i) *estructuración del problema* de decisión como una jerarquía que incorpora los criterios, subcriterios y atributos del problema así como sus alternativas; (ii) *valoración* de la jerarquía mediante comparaciones pareadas en las que los juicios emitidos pertenecen a la escala fundamental de Saaty (Saaty, 1980); (iii) *priorización* de los elementos de la jerarquía siguiendo métodos sistemáticos como el del autovector principal por la derecha (Saaty, 1980) o el criterio de la media geométrica por filas (Crawford y Williams, 1985) y (iv) *síntesis* de las prioridades globales mediante el principio de composición jerárquica para obtener las prioridades totales de las asignaturas comparadas. Además, y a diferencia de las otras técnicas multicriterio, AHP permite evaluar el grado de inconsistencia del decisor al emitir sus juicios utilizando las llamadas medidas de inconsistencia de las cuales las más utilizadas son la razón de consistencia (Saaty, 1980) y el índice de consistencia geométrico (Crawford y Williams, 1985; Aguarón y Moreno-Jiménez, 2003).

La flexibilidad y adaptabilidad de AHP han permitido su empleo en la toma de decisiones con múltiples actores. Moreno-Jiménez et al. (2002) distinguen tres situaciones diferentes al hablar de decisiones con múltiples actores: (i) Decisión en Grupo; (ii) Decisión Negociada y (iii) Decisión Sistémica. En el primer caso los individuos funcionan como un todo en la búsqueda de un fin común. En el segundo caso, cada individuo resuelve el problema por su cuenta y se buscan cuáles son las zonas de acuerdo y desacuerdo entre los actores. Por último, en el tercer caso, se permite que cada individuo actúe de manera independiente y se busca cómo poder integrar todas las posturas atendiendo al principio de tolerancia.

La literatura de AHP (Ramanatham y Ganesh, 1994; Forman y Peniwati, 1998) recoge dos formas diferentes de trabajar a la hora de abordar la decisión en grupo: (i) construir una matriz de comparaciones pareadas representativa del grupo a partir de los juicios individuales y, de ella, derivar las prioridades resultantes para el grupo y (ii) trabajar con los vectores de prioridades individuales y, a partir de los mismos, determinar un vector de prioridades para el grupo. En el primer caso (Moreno-Jiménez y otros, 2002) se distinguen, a su vez, tres métodos para determinar los juicios representativos del grupo en las matrices de comparaciones pareadas: (M-1) mediante debate y consenso entre los actores; (M-2) siguiendo un proceso de votación; (M-3) aplicando un proceso de agregación (habitualmente mediante la media geométrica) de los juicios individuales (AJI). Por su parte, cuando se trabaja con las prioridades, el método habitualmente empleado (M-4) es la agregación de las prioridades individuales (API) mediante algún mecanismo de síntesis (habitualmente la media geométrica ponderada).

Salvo que se logre un consenso entre los actores fruto de la discusión y el debate, cualquier método que sintetice la información individual en una información o medida colectiva, provocará cierto pesar, e incluso el rechazo de la solución resultante por parte de los individuos más distantes de la posición “intermedia” considerada. En este sentido, es necesario desarrollar procedimientos que faciliten el establecimiento de caminos de consenso que permitan llegar a un proceso de toma de decisiones lo más representativo posible.

Este tipo de procedimientos exige localizar qué actores y juicios son los responsables de la falta de consenso con el fin de dar pautas de actuación a la hora de buscar un mayor grado de consenso. Con el fin de dar respuesta a este tipo de cuestiones, a continuación se presenta un procedimiento estadístico bayesiano de búsqueda de caminos de consenso lo más amplios posibles, que permite localizar, además, qué grupos de consenso existen entre los decisores. Dicho procedimiento está basado en la construcción de una distribución a posteriori de consenso sobre el vector de prioridades del grupo que sintetiza las preferencias de los distintos decisores teniendo en cuenta la incertidumbre asociada al proceso de emisión de dichas preferencias. En este sentido, el método propuesto mejora a los métodos (M-3) y (M-4) que, tal y como Altuzarra y otros (2005a) demuestran, no reflejan adecuadamente dicha incertidumbre.

El procedimiento de búsqueda de consenso propuesto es, además, menos costoso que otros procedimientos propuestos en la literatura (Altuzarra y otros, 2005b; Gargallo y otros, 2005) lo cual le hace especialmente recomendable para procesos de toma de decisiones en grupo en los que el número de actores implicado sea muy grande.

### **3. METODOLOGIA ESTADISTICA**

#### **3.1. Planteamiento del problema**

Suponiendo un contexto local (un único criterio), sea  $D = \{D_1, \dots, D_r\}$   $r \geq 2$  un grupo de  $r$  decisores que emiten  $r$  matrices recíprocas de comparaciones pareadas  $\{R_{n \times n}^{(k)}; k=1, \dots, r\}$  correspondientes a la comparación, respecto al criterio considerado, de un

conjunto de  $n$  alternativas de decisión  $\{A_1, \dots, A_n\}$ , donde  $R_{n \times n}^{(k)} = (r_{ij}^{(k)})$  es una matriz cuadrada positiva que verifica que  $r_{ii}^{(k)} = 1$ ,  $r_{ji}^{(k)} = \frac{1}{r_{ij}^{(k)}} > 0$  para  $i, j = 1, \dots, n$ .

Los juicios  $r_{ij}^{(k)}$  representan la importancia relativa de la alternativa  $i$  frente a la alternativa  $j$  para el decisor  $D_k$ , conforme a la escala fundamental propuesta por Saaty (1980).

Sean  $\{\mathbf{v}^{(k)} = (v_1^{(k)}, \dots, v_n^{(k)})'; k = 1, \dots, r\}$  ( $v_1^{(k)} > 0, \dots, v_n^{(k)} > 0$ ) las prioridades (sin normalizar) de las alternativas para cada decisor  $D_k$ , y sean  $\{\mathbf{w}^{(k)} = (w_1^{(k)}, \dots, w_n^{(k)})'; k = 1, \dots, r\}$  sus valores normalizados a modo distributivo ( $\sum_{i=1}^n w_i^{(k)} = 1$ ), esto es,  $w_i^{(k)} = \frac{v_i^{(k)}}{\sum_{i=1}^n v_i^{(k)}}$  para  $i=1, \dots, n$ .

En este trabajo adoptamos una aproximación estadística bayesiana al problema, suponiendo, además, que cada decisor emite sus juicios independientemente del resto siguiendo un proceso que viene descrito por un modelo estadístico bayesiano de la forma:

$$g_k(\mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{w}^{(k)}) = f_k(\mathbf{r}^{(k)} | \mathbf{w}^{(k)}) \pi_k(\mathbf{w}^{(k)}), \quad k=1, \dots, r \quad (3.1)$$

donde  $\mathbf{r}^{(k)} = (r_{ij}^{(k)}; 1 \leq i < j \leq n)$  es el vector de juicios emitidos por el decisor  $D_k$ ,

$f_k(\mathbf{r}^{(k)} | \mathbf{w}^{(k)})$  es la función de verosimilitud del modelo y  $\pi_k(\mathbf{w}^{(k)})$  es la distribución a priori del vector de prioridades  $\mathbf{w}^{(k)}$ .

Aplicando el Teorema de Bayes las inferencias acerca de los vectores de prioridades  $\mathbf{w}^{(k)}$  se realizarían a partir de la distribución a posteriori que vendrá dada por la expresión:

$$\pi_k(\mathbf{w}^{(k)} | \mathbf{r}^{(k)}) = \frac{g_k(\mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{w}^{(k)})}{\int g_k(\mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{w}^{(k)}) d\mathbf{w}^{(k)}}; \quad k=1, \dots, r \quad (3.2)$$

### 3.2. Distribución a posteriori de consenso

Sean  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)'$  y  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)'$  los vectores de prioridades sin normalizar y normalizadas de las alternativas para el grupo, respectivamente.

Sean  $\{\alpha_k; k=1, \dots, r\}$  ( $\alpha_1 > 0, \dots, \alpha_r > 0; \sum_{k=1}^r \alpha_k = 1$ ) un conjunto de pesos que ponderan la importancia de cada uno de los decisores  $D_1, \dots, D_r$  en el proceso de toma de decisiones conjunta.

**Definición 1**

Definimos la *distribución de consenso del grupo* como la distribución del vector de prioridades ( $\mathbf{w}$ ) siguiente:

$$\pi_{\text{consenso}}(\mathbf{w}) \propto \prod_{k=1}^r [\pi_k(\mathbf{w} | \mathbf{r}^{(k)})]^{\alpha_k} \quad (3.3)$$

donde  $\mathbf{r} = (\mathbf{r}^{(1)}, \dots, \mathbf{r}^{(r)})'$  es el vector de juicios emitidos por todos los decisores.  $\square$

La siguiente proposición demuestra que la distribución de consenso está bien definida

**Proposición 1**

Si las distribuciones a posteriori  $\{\pi_k(\mathbf{w}^{(k)} | \mathbf{r}^{(k)}); k=1, \dots, r\}$  son propias y su soporte es el simplex  $n$ -dimensional  $S_n = \left\{ \mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)' : w_i \geq 0; i = 1, \dots, n; \sum_{i=1}^n w_i = 1 \right\}$ ,

entonces la distribución de consenso es propia.

**Demostración**

Bastará demostrar que es una función de densidad. En primer lugar, es no negativa, al serlo las densidades a posteriori  $\{\pi_k(\mathbf{w}^{(k)} | \mathbf{r}^{(k)}); k=1, \dots, r\}$ . Además es una densidad propia (véase Corolario 9.26 de Davidson, 1994) ya que

$$\int \prod_{k=1}^r [\pi_k(\mathbf{w} | \mathbf{r}^{(k)})]^{\alpha_k} d\mathbf{w} \leq \prod_{k=1}^r \left( \int \pi_k(\mathbf{w} | \mathbf{r}^{(k)}) d\mathbf{w} \right)^{\alpha_k} \leq 1 \square$$

La distribución de consenso es una distribución de síntesis de los vectores de prioridades óptima en el sentido siguiente.

**Definición 2**

Sean  $\{\pi_k(\mathbf{w}); k=1, \dots, r\}$  un conjunto de distribuciones de probabilidad sobre  $\mathbf{w}$

Sea  $\pi(\mathbf{w})$  una distribución de probabilidad sobre  $\mathbf{w}$ .

Definimos la *distancia de Kullback-Leibler media de  $\pi$  al conjunto  $\{\pi_k(\mathbf{w}); k=1, \dots, r\}$*  como la media ponderada dada por:

$$D(\pi) = \sum_{k=1}^r \alpha_k \text{KL}(\pi, \pi_k) \quad (3.4)$$

donde:

$$\text{KL}(\pi, \pi_k) = \int \log \left( \frac{\pi(\mathbf{w})}{\pi_k(\mathbf{w})} \right) d\mathbf{w}$$

es la distancia de Kullback-Leibler de  $\pi$  a  $\pi_k$ .

### Teorema 1

La distribución de consenso  $\pi_{\text{consenso}}$  definida en (3.3) minimiza  $D(\pi)$ .

### Demostración

Basta tener en cuenta que si  $\pi(\mathbf{w})$  es una distribución de probabilidad sobre  $\mathbf{w}$  cualquiera, se tiene que:

$$\begin{aligned} D(\pi) &= \sum_{k=1}^r \int \log \left( \frac{[\pi(\mathbf{w})]^{\alpha_k}}{[\pi_k(\mathbf{w})]^{\alpha_k}} \right) \pi(\mathbf{w}) d\mathbf{w} = \int \log \left( \frac{\prod_{k=1}^r [\pi(\mathbf{w})]^{\alpha_k}}{\prod_{k=1}^r [\pi_k(\mathbf{w})]^{\alpha_k}} \right) \pi(\mathbf{w}) d\mathbf{w} = \\ &= \text{KL} \left( \pi, \prod_{k=1}^r [\pi_k]^{\alpha_k} \right) = \text{KL}(\pi, \pi_{\text{consenso}}) + \text{Cte} \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde  $\text{Cte} = -\log \left( \int \prod_{k=1}^r [\pi_k(\mathbf{w})]^{\alpha_k} d\mathbf{w} \right)$ . Se sigue de (3.5) que

$$\text{Min}_{\pi} D(\pi) = \text{Min}_{\pi} \text{KL}(\pi, \pi_{\text{consenso}}) = \text{KL}(\pi_{\text{consenso}}, \pi_{\text{consenso}})$$

y de aquí la tesis del Teorema. □

### 3.3. Búsqueda del consenso

Una vez estudiada la forma de sintetizar las opiniones emitidas por el conjunto de decisores de  $\mathbf{D}$  en esta subsección se propone un procedimiento de evaluación y búsqueda sistemática del consenso en dicho conjunto.

Para ello se necesita una medida del grado de compatibilidad de las opiniones emitidas por un decisor con el consenso representado por la distribución de consenso ( $\pi_{\text{consenso}}$ ). Para tal fin introducimos las siguientes definiciones:

#### Definición 3

Sea  $D_k$  un decisor de  $\mathbf{D}$  y sea  $\mathbf{r}_{\text{obs}}^{(k)}$  el vector de juicios emitidos por dicho decisor. Sea  $\pi$  una distribución de probabilidad sobre  $\mathbf{w}$ . Se denomina *nivel de compatibilidad del decisor  $D_k$  con la distribución  $\pi$*  al *pvalor predictivo* dado por:

$$\text{Compatibilidad } (D_k; \pi) = P[h^{(k)}(\mathbf{r}^{(k)}) \leq h^{(k)}(\mathbf{r}_{\text{obs}}^{(k)})] \quad (3.6)$$

donde:

$$h^{(k)}(\mathbf{r}^{(k)}) = \int f_k(\mathbf{r}^{(k)} | \mathbf{w}) \pi(\mathbf{w}) d\mathbf{w} \quad (3.7)$$

es la distribución predictiva a priori del vector de juicios  $\mathbf{r}^{(k)}$  tomando como distribución a priori de  $\mathbf{w}^{(k)}$  la distribución  $\pi$ .  $\square$

El nivel de compatibilidad (3.6) es, por lo tanto, un pvalor predictivo bayesiano que mide la bondad de ajuste de las opiniones  $\mathbf{r}_{\text{obs}}^{(k)}$  emitidas por el decisor  $D_k$  con el modelo estadístico bayesiano:  $g_{k,\pi}(\mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{w}^{(k)}) = f_k(\mathbf{r}^{(k)} | \mathbf{w}^{(k)}) \pi(\mathbf{w}^{(k)})$ ,  $k=1, \dots, r$ .

#### Definición 4

Diremos que un decisor  $D_k$  es *compatible con el consenso descrito por una distribución  $\pi$  para un nivel de tolerancia  $\tau$*  ( $0 < \tau < 1$ ) si verifica que

$$\text{Compatibilidad } (D_k; \pi) \geq 1 - \tau \quad (3.8)$$

Utilizando esta definición, se propone el siguiente algoritmo para calcular, de forma aproximada, el subconjunto máximo de decisores de  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{D}_{\text{consenso}}$ , para el que es posible alcanzar un consenso con un nivel de tolerancia dado  $\tau$

#### Algoritmo

**Paso 0.** Se establece el nivel de tolerancia  $\tau$ . Se hace  $\mathbf{D}^{(0)} = \mathbf{D}$  y se pone  $it = 1$  (número de iteraciones).

**Paso 1.** Se calcula  $\pi^{(it)} = \pi_{\text{consenso}}$  dada por (3.3) tomando como conjunto de decisores  $\mathbf{D}^{(it-1)}$

**Paso 2.** Se calcula decisor  $D_{\min} \in \mathbf{D}^{(it-1)}$  con un nivel de compatibilidad mínimo, es decir, tal que:

$$\text{Compatibilidad } (D_{\min}; \pi^{(it)}) = \min\{\text{Compatibilidad } (D_k; \pi^{(it)}): D_k \in \mathbf{D}^{(it-1)}\}$$

**Paso 3.** Si  $\text{Compatibilidad } (D_{\min}; \pi^{(it)}) \geq 1 - \tau$  se para el algoritmo y se toma  $\mathbf{D}_{\text{consenso}} = \mathbf{D}^{(it)}$  y  $\pi_{\text{consenso}} = \pi^{(it)}$ . En caso contrario tomar  $\mathbf{D}^{(it)} = \mathbf{D}^{(it-1)} - \{D_{\min}\}$ , hacer  $it = it + 1$  e ir al Paso 1.  $\square$

Como consecuencia de este algoritmo el conjunto de decisores quedaría dividido en dos grupos: el de decisores compatibles con el consenso descrito por  $\pi_{\text{consenso}}$  y el que no lo es. A partir de la distribución  $\pi_{\text{consenso}}$  se puede realizar inferencias acerca del

vector de prioridades  $\mathbf{w}$ . En particular, se podrían obtener las distribuciones a posteriori de las estructuras de preferencia y/o de la distribución de la alternativa más preferida,  $A_{(1)}$ , que podrían utilizarse para iniciar caminos de negociación entre los decisores del problema. Así mismo, y con el fin de alcanzar un consenso más amplio se podrían realizar estudios de sensibilidad respecto a  $\tau$  analizando cómo cambian las inferencias respecto a  $\mathbf{w}$  así como el conjunto  $\mathbf{D}_{\text{consenso}}$ .

#### 4. BUSQUEDA DEL CONSENSO CON MODELOS MULTIPLICATIVOS CON ERRORES LOGARÍTMICO-NORMALES

En esta sección se aplica la metodología descrita en la sección anterior al caso particular en el que los modelos estadísticos bayesianos (3.1) utilizados por cada decisor vienen dados por los modelos multiplicativos con errores logarítmico-normales, ampliamente utilizados en la literatura de AHP (Ramsay, 1977; Genest y Rivest, 1994; Alho y Kangas, 1997; Laininen y Hämäläinen, 2003, entre otros), dados por las expresiones:

$$r_{ij}^{(k)} = \frac{w_i^{(k)}}{w_j^{(k)}} e_{ij}^{(k)}, \quad i = 1, \dots, n-1; j = i+1, \dots, n; k = 1, \dots, r \quad (4.1)$$

Tomando logaritmos se llega a un modelo de regresión con errores normales dado por las ecuaciones:

$$y_{ij}^{(k)} = \mu_i^{(k)} - \mu_j^{(k)} + \varepsilon_{ij}^{(k)}; \quad i=1, \dots, n-1; j=i+1, \dots, n; k=1, \dots, r \quad (4.2)$$

donde  $y_{ij}^{(k)} = \log(r_{ij}^{(k)})$ ,  $\mu_i^{(k)} = \log(w_i^{(k)})$  y  $\varepsilon_{ij}^{(k)} \sim N(0, \sigma^{(k)2})$  son independientes para  $k=1, \dots, r$ . Además, y con el fin de evitar problemas de identificabilidad, se ha tomado  $\mu_n = 0$ , es decir se toma la alternativa  $A_n$  como alternativa de referencia.

Como distribución a prior sobre  $\boldsymbol{\mu}^{(k)} = (\mu_1^{(k)}, \dots, \mu_{n-1}^{(k)})'$  tomamos la distribución no informativa habitual.

Sea  $\mathbf{y}^{(k)} = (y_{12}^{(k)}, y_{13}^{(k)}, \dots, y_{n-1n}^{(k)})'$  el vector de juicios emitidos por el decisor  $D_k$ ,  $k=1, \dots, r$  y sea  $J = \frac{n(n-1)}{2}$  el número de juicios emitidos por él. Sea  $\mathbf{X} = (x_{ij})$  matriz  $J \times (n-1)$  de forma que si la  $i$ -ésima componente de los vectores  $\{\mathbf{y}^{(k)}; k=1, \dots, r\}$  corresponde a la comparación entre las alternativas  $A_j$  y  $A_\ell$  con  $1 \leq j < \ell < n$  entonces  $x_{ij} = 1$ ,  $x_{i\ell} = -1$  y  $x_{is} = 0$  para  $s \neq j, \ell$  y si corresponde a una comparación entre las alternativas  $A_j$ ,  $1 \leq j < n$  y  $A_n$  entonces  $x_{ij} = 1$  y  $x_{is} = 0$  para  $s \neq j$ .

Las ecuaciones (4.2) del modelo se podrán poner en forma matricial como

$$\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{X}\boldsymbol{\mu}^{(k)} + \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}; k=1, \dots, r \quad (4.3)$$

$$\text{con } \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} = (\varepsilon_{12}^{(k)}, \varepsilon_{13}^{(k)}, \dots, \varepsilon_{n-1n}^{(k)})' \sim N_J(\mathbf{0}_J, \sigma^{(k)2} \mathbf{I}_J).$$

Las distribuciones a posteriori de  $\{\boldsymbol{\mu}^{(k)}; k=1, \dots, r\}$  vendrán dadas por

$$\boldsymbol{\mu}^{(k)} | \mathbf{y}^{(k)} \sim N_{n-1}(\hat{\boldsymbol{\mu}}^{(k)}, \sigma^{(k)2} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}) \quad (4.4)$$

$$\text{donde } \hat{\boldsymbol{\mu}}^{(k)} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}'\mathbf{y}^{(k)}).$$

#### 4.1. Distribución de consenso

Dado que los cálculos resultan más sencillos y exactos, el cálculo de la distribución de consenso se realizaría sobre el vector de log-prioridades  $\boldsymbol{\mu} = \log(\mathbf{v})$  utilizando como datos  $\mathbf{y} = \log(\mathbf{r}) = (\mathbf{y}^{(1)'}, \dots, \mathbf{y}^{(n)'})'$  el vector  $r \times J \times 1$  que contiene los logaritmos de los juicios emitidos por los decisores. Realizando cálculos estándar la distribución de consenso (3.3) vendrá dada por:

$$\boldsymbol{\mu} | \mathbf{y} \sim N_{n-1}(\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\text{consenso}}, \sigma_{\text{consenso}}^2 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}) \quad (4.5)$$

$$\text{donde } \hat{\boldsymbol{\mu}}_{\text{consenso}} = \frac{\sum_{k=1}^r \frac{\alpha_k}{\sigma^{(k)2}} \hat{\boldsymbol{\mu}}^{(k)}}{\sum_{k=1}^r \frac{\alpha_k}{\sigma^{(k)2}}} \text{ y } \sigma_{\text{consenso}}^2 = \frac{1}{\sum_{k=1}^r \frac{\alpha_k}{\sigma^{(k)2}}}.$$

La media a posteriori de la distribución de consenso del parámetro  $\boldsymbol{\mu}$  es, por lo tanto,  $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\text{consenso}}$  que, como demuestran Altuzarra y otros (2005a) tiene un mejor comportamiento en términos del error cuadrático medio de estimación que los estimadores de  $\boldsymbol{\mu}$  aplicando los procedimientos de agregación de juicios y agregación de prioridades tradicionalmente propuestos en la literatura.

Utilizando esta distribución se sigue que la distribución predictiva (3.7) es:

$$\mathbf{y}^{(k)} | \text{consenso} \sim N_J(\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\text{consenso}}, \sigma^{2(k)} \mathbf{I}_J + \sigma_{\text{consenso}}^2 \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}') \quad (4.6)$$

y el nivel de compatibilidad (3.6) vendrá dado por:  $\text{Compatibilidad}(D_k; \pi_{\text{consenso}}) =$

$$P\left[\chi_J^2 \geq (\mathbf{y}_{\text{obs}}^{(k)} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\text{consenso}})' (\sigma^{2(k)} \mathbf{I}_J + \sigma_{\text{consenso}}^2 \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}')^{-1} (\mathbf{y}_{\text{obs}}^{(k)} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\text{consenso}})\right] \quad (4.7)$$

$$\text{donde } \mathbf{y}_{\text{obs}}^{(k)} = \log(\mathbf{r}_{\text{obs}}^{(k)}).$$

#### 4.2 Ejemplo ilustrativo

Con el fin de ilustrar la metodología propuesta, a continuación se analizan los datos de una encuesta realizada a 81 alumnos de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad de Zaragoza con el fin de conocer sus opiniones acerca del referéndum recientemente celebrado en España sobre la Constitución Europea. En una de las preguntas se les hizo comparar las 3 alternativas siguientes sobre el sentido de su voto

A: Aceptar el tratado propuesto por el que se establece una Constitución para Europa

B: Rechazar este tratado por el que se establece una Constitución para Europa

C: Volver a convocar otro referéndum más adelante, que sea vinculante.

Se tiene, por lo tanto, que  $r = 81$  y  $n = 3$  por lo que el número de comparaciones pareadas emitidas por cada decisor fue  $N = 3$ . Los pesos asignados a cada decisor fueron iguales a  $1/81$ .

Para analizar las preferencias de los decisores se utilizó un modelo multiplicativo con errores log-normales donde, con el fin de evitar comportamientos degenerados, los parámetros de consistencia  $\sigma^{2(k)}$  fueron estimados mediante la media ponderada:

$$\hat{\sigma}^{2(k)} = \frac{(\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\mu}}^{(k)})'(\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\mu}}^{(k)}) + \sigma^2(e_{\max}, \alpha)}{2}$$

donde  $\sigma^2(e_{\max}, \alpha)$  es tal que

$$P \left[ \frac{1}{1 + \frac{e_{\max}}{100}} \leq \varepsilon_{ij} \leq 1 + \frac{e_{\max}}{100} \right] = 1 - \alpha \text{ para } \varepsilon_{ij} \sim \text{LN}(0, \sigma^2(e_{\max}, \alpha)) \quad (4.8)$$

buscando fijar, con un nivel de confianza del  $100(1-\alpha)\%$  la magnitud del error máximo del modelo multiplicativo (4.1). Finalmente, y dado que el proceso de analizar la compatibilidad de un decisor con el modelo (4.6) se realiza simultáneamente  $r$  veces, se ha tomado una tolerancia de la forma  $\tau = \sqrt[r]{\tau_{\text{global}}}$  siguiendo una aproximación tipo Bonferroni al problema donde  $\alpha$  se asemejaría al nivel de tolerancia global.

En las Figuras 1 a 5 se muestran los resultados obtenidos al aplicar el algoritmo de búsqueda del consenso con  $e_{\max} = 200$ ,  $\alpha = 0.05$  y niveles de tolerancia desde  $\tau = 0.95$  a  $\tau = 0.99$  (incrementos de 0.01). Así en la Figura 1 se muestra la evolución del *grado de cualificación* del consenso (% de individuos que llegan al consenso) según el nivel de tolerancia exigido. Se observa un alto grado de consenso que oscila desde un 69.13%, alcanzado para el menor nivel de tolerancia, hasta un 100% para el mayor nivel de tolerancia.

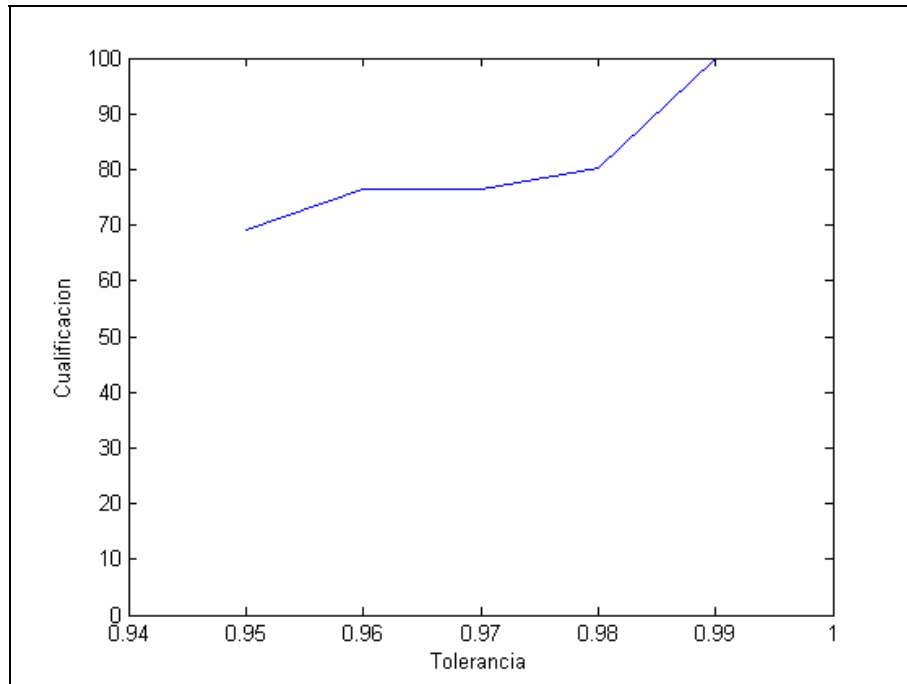


Figura 1: Cualificación del consenso

El tipo de consenso que se propone según el nivel de tolerancia admitido se muestra en las Figuras 2 a 5. Utilizando un diagrama en forma triangular (simplex), en la Figura 2 se muestran las prioridades normalizadas para cada individuo,  $\{\hat{\mathbf{w}}^{(k)}; k=1, \dots, r\}$  en dos colores y la distribución de consenso (representada por un círculo) del grupo,  $\hat{\mathbf{w}}_{\text{consenso}}$ , obtenidas, respectivamente, a partir de los estimadores  $\{\hat{\boldsymbol{\mu}}^{(k)}; k=1, \dots, r\}$  y  $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\text{consenso}}$ . Los dos colores reflejan los decisores compatibles con el consenso (azul) de los que no lo están (rojo). Se observa que son los decisores situados en las posiciones más extremas del gráfico (en torno a sus vértices) los que se descuelgan primero del consenso general.

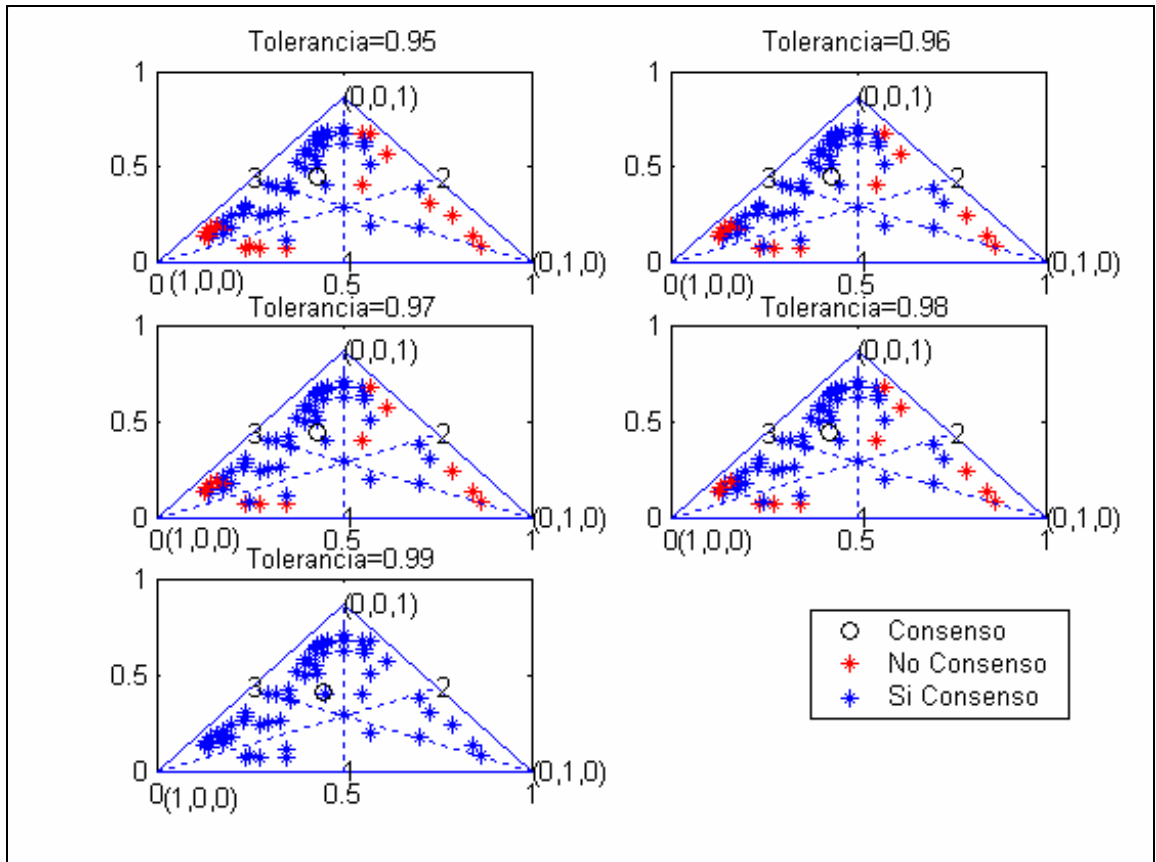
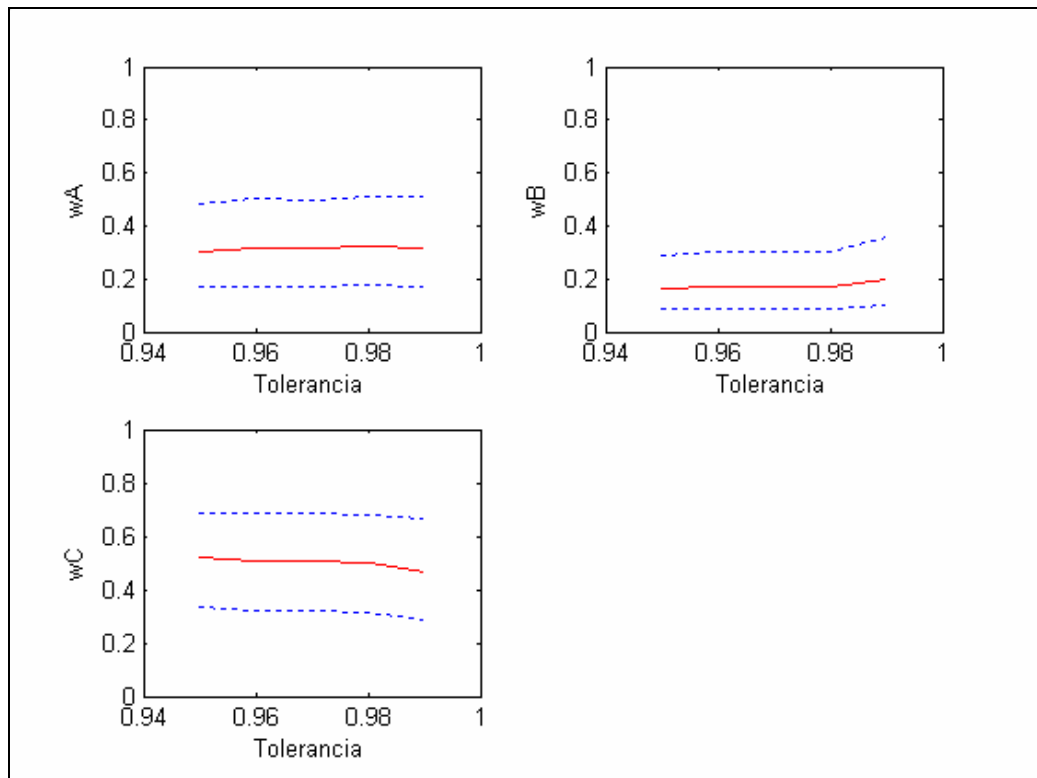
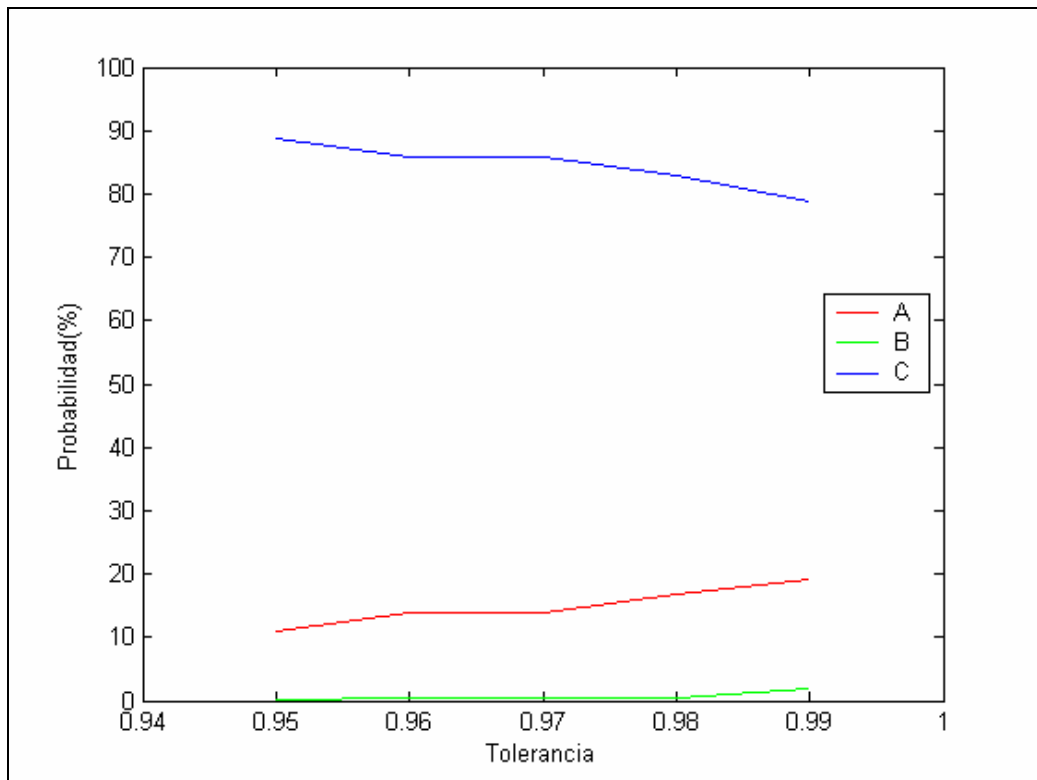


Figura 2: Diagramas Triangulares

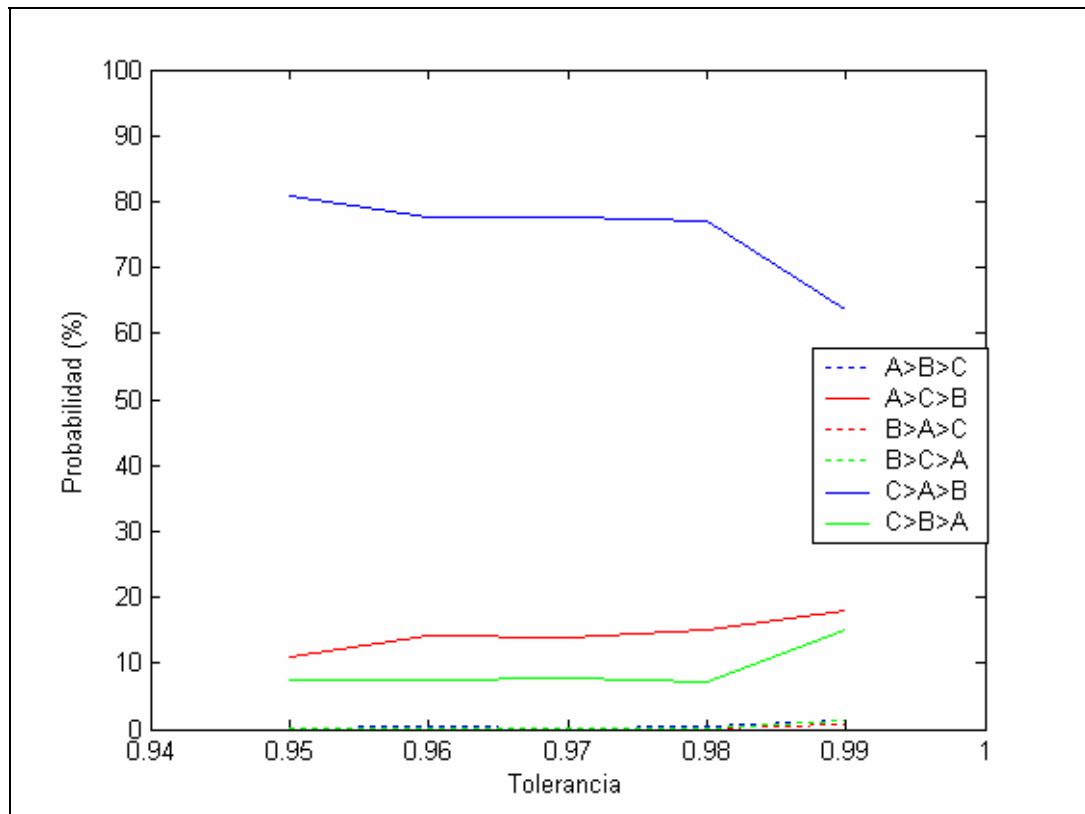
Finalmente, en las Figuras 3 a 5 se muestra la evolución de las prioridades de consenso estimadas y sus intervalos de credibilidad del 95%, las distribuciones a posteriori sobre la alternativa más preferida y sobre las estructuras de preferencia, respectivamente. Se observa que, cuanto menor es la tolerancia más claramente aparecen la alternativa C y el ranking  $C > A > B$  como propuestas de consenso al conjunto de decisores del problema



**Figura 3: Prioridades de consenso de cada alternativa**  
(Línea continua: mediana a posteriori; líneas discontinuas: cuantiles 2.5 y 97.5)



**Figura 4: Consenso a posteriori sobre la alternativa más preferida**



**Figura 5: Consenso a posteriori sobre las estructuras de preferencia**

## 5. Conclusiones

En este trabajo se ha planteado una aproximación bayesiana para la búsqueda del consenso en un problema de decisión en grupo con el Proceso Analítico Jerárquico (AHP). Para ello, se ha definido la distribución de consenso del grupo para el vector de prioridades, como aquella que minimiza un promedio ponderado de las distancias de Kullback-Leibler a cada distribución a posteriori individual del vector de prioridades a la de consenso. A partir de dicha distribución se ha propuesto un algoritmo de búsqueda sistemática del mayor nivel de consenso posible con el fin de facilitar posteriores procesos de negociación y debate. La metodología se ha aplicado a modelos multiplicativos con errores logarítmico-normales y se ha ilustrado mediante su aplicación a un caso práctico.

Se está trabajando actualmente en mejorar el algoritmo de búsqueda de consenso utilizando estrategias de búsqueda más generales. Así mismo se planea extender la metodología a modelos más generales que el aquí estudiado prestando particular atención a la estimación de parámetros de ruido como, por ejemplo, el nivel de consistencia de cada decisor. Así mismo, se están construyendo procedimientos de visualización de los caminos de consenso (Turón y otros, 2005) planteados con el fin de facilitar los procesos de toma de decisión. Finalmente queda pendiente evaluar la influencia que cada decisor ejerce así como su aprendizaje en el proceso de negociación y toma de decisiones del grupo.

## Referencias:

- Aguarón, J.; Moreno-Jiménez, J.M. (2003): The Geometric Consistency Index. Approximated Thresholds. *European Journal of Operational Research* **147**(1), 137-145.
- Alho, J.M.; Kangas, J. (1997): Analyzing Uncertainties in Experts' Opinions of Forest Plan Performance. *Forest Science* **43**, 521–528.
- Altuzarra, A.; Moreno-Jiménez, J.M.; Salvador, M. (2005a): A Bayesian Priorization of AHP-Group Decision Making. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad de Zaragoza (en evaluación).
- Altuzarra, A.; Moreno-Jiménez, J.M.; Salvador, M. (2005b): Group Decision Making with AHP: A Bayesian Approach. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad de Zaragoza (en evaluación).
- Crawford, G.; Williams, C. (1985): A Note on the Analysis of Subjective Judgment Matrices. *Journal of Mathematical Psychology* **29**, 387–405.
- Davidson, J. (1994): *Stochastic Limit Theory*. Oxford University Press.
- Forman, E.; Peniwati, K. (1998): Aggregating individual judgments and priorities with the Analytic Hierarchy Process. *European Journal of Operational Research* **108**, 165–169.
- Gargallo, P.; Moreno-Jiménez, J.M.; Salvador, M. (2005): A Bayesian Approach based on mixtures for AHP-Group Decision Making. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad de Zaragoza (en evaluación).
- Genest, C.; Rivest, L.P. (1994): A Statistical Look at Saaty's Method of Estimating Pairwise Preferences Expressed on a Ratio Scale. *Journal of Mathematical Psychology* **38**, 477-496.
- Laininen, P.; Hämäläinen, R.P. (2003), Analyzing AHP-matrices by regression, *European Journal of Operation Research*, **148**, p.514-524.
- Moreno-Jiménez, J.M.; Aguarón, J.; Escobar, M.T.; Turón, A. (1999): The Multicriteria Procedural Rationality on Sisdema. *European Journal of Operational Research* **119**(2), 388–403.
- Moreno-Jiménez, J.M.; Aguarón, J.; Escobar, M.T. (2001): Metodología científica en valoración y selección ambiental. *Pesquisa Operacional* **21**, 3-18.
- Moreno-Jiménez, J.M.; Aguarón, J.; Escobar, M.T. (2002): Decisional Tools for Consensus Building in AHP-Group Decision Making. *12th. Mini Euro Conference*. Bruselas (Bélgica).
- Moreno-Jiménez, J.M.; Aguarón, J.; Escobar, M.T.; Jiménez, J. (2000): Búsqueda del consenso en el Proceso Analítico Jerárquico. *XIV Anales de Economía Aplicada*. Oviedo (CD). ISBN: 84-699-2357-9.

- Ramanathan, R. and Ganesh, L.S. (1994): Group Preference Aggregation Methods employed in AHP: An Evaluation and Intrinsic Process for Deriving Members' Weightages. *European Journal of Operational Research* **79**, 249–265.
- Ramsay, J.O. (1977): Maximum likelihood estimation in multidimensional scaling. *Psychometrika* **42**, 241-266.
- Saaty, T.L. (1977): A Scaling Method for Priorities in Hierarchical Structures. *Journal of Mathematical Psychology* **15/3**, 234-281.
- Saaty, T.L. (1980), *Multicriteria Decision Making: The Analytic Hierarchy Process*. Mc Graw-Hill, 1980. New York. 2ª impresión 1990, RSW Pub. Pittsburgh).
- Turón, A.; Moreno-Jiménez, J.M. y Salvador, M. (2005): Visualización de las preferencias en votaciones. Visualización gráfica de su importancia. XIX Reunión de ASEPELT. Badajoz, Junio 2005.