LAS FÓRMULAS DEL AGREGADO ELEMENTAL DE UN ÍNDICE DE PRECIOS DE CONSUMO DESDE EL ENFOQUE ECONÓMICO. UNA NUEVA PROPUESTA

Santiago Rodríguez Feijoó
Departamento de Métodos Cuantitativos en Economía y Gestión
Universidad de de Las Palmas de Gran Canaria
e-mail: srfeijoo@dmc.ulpgc.es

Alejandro Rodríguez Caro
Departamento de Métodos Cuantitativos en Economía y Gestión
Universidad de de Las Palmas de Gran Canaria
e-mail: arcaro@dmc.ulpgc.es

Carlos González Correa
Departamento de Métodos Cuantitativos en Economía y Gestión
Universidad de de Las Palmas de Gran Canaria
e-mail: cgoncor@canariastelecom.com

Resumen

El objetivo del trabajo es proponer una nueva fórmula para calcular los índices elementales de un Índice de Precios de Consumo. Para ello, en primer lugar, se demuestra que las fórmulas habitualmente utilizadas para este fin por las Agencias de Estadística no reflejan adecuadamente el comportamiento esperado del Consumidor. En segundo lugar, se demuestra que el índice elemental definido como la media armónica ponderada inversamente por los precios en el período base es, desde el punto de vista económico y axiomático, superior a cualquier otra fórmula usada habitualmente cuando sólo se dispone de información de precios y los mismos se refieren a bienes homogéneos.

Palabras clave: Teoría del Consumidor, Coste de la vida, Índice de Precios Elementales

Área temática: 7, Métodos Cuantitativos.

1. Introducción

El cálculo del Índice de Precios de Consumo (IPC) se realiza, al menos, en dos fases. En la primera se estiman los Índices de Precios Elementales (IPE). En la segunda y posteriores fases se combinan estos IPE, junto con información sobre la importancia del gasto, para obtener índices de precios para distintos niveles de agregación, hasta llegar al IPC general.

Como paso previo al cálculo del IPE y posteriormente del IPC, se define el conjunto de bienes y servicios que se consideran de consumo. Éstos se agrupan en estratos, denominados agregados elementales o estratos elementales, en función de su homogeneidad a la hora de satisfacer las necesidades del consumidor. Es decir, el estrato elemental lo forman todos los bienes cuyo consumo tiene una misma finalidad. En la actualidad la casi totalidad de Índices de Precios de Consumo utilizan la Clasificación del Consumo Individual por Finalidades (COICOP-Classification Of Individual COnsumption by Purpuse) para definir, tanto los bienes y servicios a considerar en un IPC, como los agregados elementales y sus distintos niveles de agregación.

La clasificación de los bienes y servicios de consumo en función del criterio de finalidad tiene implicaciones importantes a la hora de analizar el comportamiento del consumidor dentro de cada uno de los estratos elementales. Esto se debe a que el consumidor tiene una alta posibilidad de sustitución dentro del estrato elemental. Sin embargo, esta posibilidad disminuye y puede llegar a ser nula cuando los bienes y servicios satisfacen necesidades de naturaleza muy distinta. Por ejemplo, si se definiese el estrato elemental siguiendo la COICOP a 4 dígitos, un estrato elemental sería la Carne y otro los alquileres efectivos pagados por los inquilinos. Es evidente que el consumidor no propietario de vivienda tiene una alta posibilidad de sustitución entre los productos que conforman el agregado elemental de carnes para satisfacer sus necesidades nutricionales. De forma similar se puede razonar con los alquileres, dado que el consumidor para satisfacer sus necesidades de alquiler de vivienda tiene múltiples alternativas. Ahora bien, difícilmente se podría hablar de sustituibilidad entre los productos que se encuentran en el agregado elemental de carnes y los que se encuentran en el de alquiler.

Si lo que se quiere es calcular un IPE que refleje correctamente el comportamiento del consumidor, no se puede olvidar el carácter homogéneo descrito, máxime si, además, se parte de que las Agencias de Estadística sólo disponen de datos de precios para calcular los IPE.

El objetivo de análisis en este trabajo es la fórmula a usar para obtener el IPE, con las limitaciones que hemos comentado y que son las habituales para cualquier Agencia de Estadística encargada de elaborar el IPC. La elección de la fórmula para el IPE no ha sido muy estudiada en la literatura, siendo las fórmulas más utilizadas la propuesta por Carli en 1764 y por Dutot en 1738 [Referencia extraída de OIT (2003), capítulo 20, páginas 12-13]. Sin embargo, Fisher (1922) ya había recomendado no usar la fórmula de Carli debido al sesgo al alza que introducía [Fisher (1922), páginas 29-30]. A lo largo del siglo XX distintos autores siguieron buscando la fórmula ideal ampliando los posibles enfoques con los que abordar el tema: el enfoque de Divisia, el enfoque estocástico, el enfoque económico y el enfoque axiomático. El resumen final de los estudios realizados se puede concretar en la recomendación que en 1996 se presentó a la Advisory Commission To The Study The Consumer Price Index mediante el informe final titulado "Toward a More Accurate Measure of The Cost of Living”. Este informe, también conocido como informe Boskin, propone el uso de una media geométrica de los índices de precios del estrato elemental como la fórmula más idónea para el IPE, fórmula atribuida a Jevons en 1983 [Referencia extraída de OIT (2003), capítulo 20, páginas 12-13]. OIT (2003) analiza las distintas alternativas para calcular el IPE y también concluye que, desde distintos enfoques, la fórmula de Jevons, aun no siendo la ideal, es la que más se aproxima desde todos los enfoques posibles.

Sin embargo, Rodríguez, González y Rodríguez (2005) demuestran que tanto la fórmula de Jevons, como la de Carli y la de Dutot son incongruentes con la Teoría del Consumidor y proponen una nueva fórmula que, cuando los bienes que representan al agregado elemental son homogéneos, se muestra superior desde el punto de vista axiomático a la de Jevóns y, por tanto, a las de Carli y Dutot.

En este trabajo se aborda el estudio de la elección de la fórmula para el IPE desde el enfoque económico con la finalidad de comparar, también desde este enfoque, la validez de la fórmula propuesta por Rodríguez, González y Rodríguez (2005). Para ello, en el epígrafe siguiente, se presentan los aspectos más destacados para la elaboración del IPE. En el punto tercero, se analiza el comportamiento del consumidor y sus consecuencias a partir de tres funciones de utilidad habitualmente utilizadas en la literatura relacionada con el IPC. En el epígrafe 4, se derivan los índices de precios para cada una de las funciones de utilidad y se relacionan con las fórmulas propuestas por Dutot, Carli, Jevons y Rodríguez, González y Rodríguez (2005). En el epígrafe 5 se resumen las principales conclusiones.

2. Algunos aspectos fundamentales en la elaboración de un IPE

El IPE es el índice de precios de un agregado elemental. Para su cálculo únicamente se dispone de la información de los precios para los dos instantes de tiempo en comparación. En teoría se debieran conocer todos los precios de los productos consumidos en ambos instantes de tiempo. Sin embargo, en la práctica lo que se hace es estimar el IPE mediante los datos procedentes de una encuesta que se repite en los dos instantes de tiempo considerados y que se realiza en los puntos de venta de los productos (establecimientos), no a los consumidores.

Por tanto, el plan de muestreo de esta encuesta tiene que definir para cada agregado elemental: a) cuáles son los establecimientos que van a formar parte de la muestra, b) cuales son los productos sobre los que se recogen precios. Los criterios para seleccionar a los establecimientos son varios, pero todos ellos están orientados a alcanzar el mayor nivel posible de representatividad de los hábitos de consumo de la población. Los criterios para seleccionar los productos que se van a muestrear son fundamentalmente dos: o bien se seleccionan productos fijos que representan al estrato (este es el caso del IPE español), o bien se realiza un muestreo aleatorio simple dentro de los productos que conforman el estrato elemental. El usar una alternativa o la otra tiene consecuencias importantes. La selección de artículos fijos se fundamenta en su capacidad de representación. Es decir, son los que con más frecuencia consume la población. Si se usa esta alternativa para representar los productos de un estrato, de forma indirecta se está asumiendo que todos los productos de estrato tienen, en precios, una tendencia común. Si la decisión es realizar un muestreo aleatorio simple dentro de los productos que contiene el estrato, no se realiza dicha asunción, pero nos podemos encontrar con que los precios medidos no son representativos de los hábitos de consumo de la población. Dado que la característica fundamental de un IPC es que mida el cambio que se produce en los precios de un conjunto de bienes y servicios que sean representativos de los hábitos de consumo, la alternativa basada en el muestreo aleatorio simple puede arrojar resultados poco realistas. Por ejemplo, siguiendo con la definición de estrato elemental, dada en la introducción, un muestreo aleatorio simple podría llevarnos a utilizar los precios de la carne de camello, caballo y jabalí para calcular el IPE del estrato elemental carne. Es evidente que es este caso, este índice no representaría los hábitos de consumo de las poblaciones occidentales.

Otra característica importante asociada a la decisión de cómo seleccionar los productos a muestrear es la naturaleza homogénea/heterogénea del conjunto de precios finales. Si se utiliza la representación del estrato elemental mediante productos fijos, los precios se corresponderán con productos muy homogéneos. Incluso en el caso español, que se identifica estrato con producto, estos son completamente homogéneos ya que todos los precios de un estrato elemental se refieren a un mismo producto. Si el estrato elemental se representa mediante una muestra aleatoria simple de productos, el nivel de heterogeneidad de los productos puede ser alto y la comparabilidad espacial de los precios muy baja. Cuanto mayor sea el nivel de heterogeneidad de los bienes, se hace más difícil la interpretación económica del IPE.

Si los bienes son homogéneos, no tendría sentido considerar dentro del estrato elemental el nivel producto y podríamos interpretar que cada precio se corresponde con un establecimiento. En la práctica, para un instante de tiempo se podría disponer de varios precios para un mismo establecimiento, debido a que realmente no se miden los precios en dos instantes de tiempo, sino para dos períodos de tiempo. Por ejemplo, lo más habitual es que los IPC se calculen para períodos mensuales, con lo cual en un mes se pueden realizar distintas mediciones en un mismo establecimiento para un determinado estrato. Si entendemos que las circunstancias del consumidor son distintas cada vez que pretende satisfacer una determinada necesidad, el identificar cada precio como procedente de un establecimiento distinto se ajusta a la realidad del consumidor y facilita la interpretación económica del IPE.

3. Estudio de las principales funciones de utilidad del consumidor utilizadas en el ámbito del IPC y su idoneidad en al ámbito del estrato elemental

El enfoque económico de los números índices parte de la Teoría del Consumidor y del trabajo de Konus [Konus (1939)]. En un mercado con k productos, el consumidor se enfrenta a la decisión de que cantidad consume de cada uno de ellos. Dependiendo de la combinación de productos consumidos, el consumidor alcanzará un determinado nivel de satisfacción. Ello implica que, de alguna forma, el consumidor tiene unas preferencias a la hora de consumir que se determinan en función de la ordenación realizada por la utilidad que cada combinación de productos le produce. Esta ordenación se formaliza en la función de utilidad del consumidor, que no es más que una función definida en el conjunto de las cantidades de los productos de consumo disponibles en el mercado con imagen en el conjunto de los números reales. Es decir, si en el mercado hay k productos y denotamos por q_i a la cantidad del artículo $i=\{1,2,\ldots,k\}$, la función de utilidad del consumidor es una función en la cual para cualquier vector $Q=\{q_1,q_2,\ldots,q_k\}$ nos da el valor de la utilidad que alcanza el consumidor al consumir esa combinación de cantidades.

El objetivo del consumidor será maximizar su nivel de utilidad, sujeto a una restricción presupuestaria. Si denotamos por $U=U(q_1,q_2,\ldots,q_k)$ a la función de utilidad y por Y a la restricción presupuestaria, la resolución de la maximización condicionada a Y, nos permite obtener las funciones de demanda ordinarias, que, dado un vector de precios $P=\{p_1,p_2,\ldots,p_k\}$, miden las cantidades que deben ser consumidas para alcanzar el máximo nivel de utilidad posible para cada presupuesto. Sustituyendo las funciones de demanda ordinarias en la función de utilidad se obtiene la función de utilidad indirecta, que mide el nivel de utilidad máximo que el consumidor puede alcanzar dado un determinado presupuesto y un vector de precios. Por último, despejando Y de la función de utilidad indirecta se obtiene la función de costes C(P,U), que, dado un conjunto de precios, mide el gasto mínimo en que debe incurrir el consumidor para alcanzar un determinado nivel de utilidad. Dado un vector de precios en el instante base, P_0, y el vector de precios en el instante actual, P_t, el índice del coste de la vida [Konus (1939)] o índice de precios se define como el cociente entre las funciones de costes asociadas a cada uno de los vectores de precios y a una misma utilidad. Es decir,

$$I(P_1,P_0,U)=\frac{C(P_1,U)}{C(P_0,U)} \qquad [1]$$

Las principales funciones de utilidad que han sido utilizadas en el contexto de los IPC son las conocidas en la literatura por preferencias tipo Leontief y preferencias tipo Cobb-Douglas, provenientes ambas de la Teoría de la Producción. Además, en este trabajo se propone el uso de una función de utilidad tipo Bergson, debido a las propiedades que cumple y que se señalarán a lo largo del trabajo. La característica común a las tres es que presentan una elasticidad renta igual a la unidad. Esto significa que el incremento de un 1% en la renta modifica la cantidad consumida de cada uno de los productos en el mismo porcentaje. Para simplificar las expresiones, en lo que sigue se consideran únicamente dos productos. Por tanto, los vectores de precios y cantidades se reducen a $P=\{p_1,p_2\}$ y $Q=\{q_1,q_2\}$ y la restricción presupuestaria es $Y=p_1q_1+p_2q_2$.

3.1. Las preferencias tipo Leontief como función de preferencias para el cálculo del IPC y su idoneidad en el ámbito del estrato elemental

La función de preferencias tipo Leontief se define mediante la función U de la forma que se indica en [2], siendo a_1 y a_2 dos constantes positivas, cuya relación mide las preferencias entre los productos y los establecimientos.

$$U = \min\{a_1 q_1, a_2 q_2\} \qquad [2]$$

Analizando esta función, se deduce que cualquier unidad adicional de un único producto no implica ninguna mejora en el nivel de utilidad. Para que se produzca ésta es necesario que se incrementen ambas cantidades. En consecuencia, la utilización de las preferencias tipo Leontief supone que los productos son complementarios. Es más, el uso de una función de utilidad del tipo [2] establece una relación fija entre las cantidades consumidas de ambos productos en la proporción que determinan las constantes a_i. Es decir, se cumple que $a_1 q_1 = a_2 q_2$. Desde el punto de vista gráfico, en un eje cartesiano formado por las cantidades de ambos productos, las funciones de utilidad tienen forma de L con el vértice hacia el origen de coordenadas. En consecuencia, incrementar la cantidad consumida de uno de los dos productos no permitirá alcanzar un mayor nivel de utilidad. Para ello habría que incrementar ambos bienes y en la proporción que establecen las a_i.

Teniendo en cuenta que optimización de [2] equivale al cumplimiento de $a_1 q_1 = a_2 q_2$, e incorporando la ecuación que representa la restricción presupuestaria, se obtiene un sistema de ecuaciones del cual es inmediato obtener las funciones de demanda ordinarias que se muestran en [3].

$$q_1 = \frac{Y}{p_1 + p_2 \frac{a_1}{a_2}}; q_2 = \frac{Y}{p_2 + p_1 \frac{a_2}{a_1}} \qquad [3]$$

Para analizar el grado de sustituibilidad que permite este tipo de preferencias, usando las funciones de demanda ordinarias, es inmediato calcular las elasticidades precio de la demanda. Así, por ejemplo, para el producto 1 las elasticidades de la demanda con respecto a su propio precio y al precio del producto 2 se muestran en [4].

$$\varepsilon_{q_1}^{p_1} = -\frac{p_1}{p_1 + p_2 \frac{a_1}{a_2}} ; \varepsilon_{q_1}^{p_2} = -\frac{p_2 \frac{a_1}{a_2}}{p_1 + p_2 \frac{a_1}{a_2}} \qquad [4]$$

Como se puede observar y debido al carácter complementario de las preferencias tipo Leontief, la elasticidad precio cruzada es negativa. Es decir, si se incrementa el precio del producto 1 se producirá una reducción de la cantidad consumida de ambos productos.

Este resultado difícilmente es compatible con el comportamiento del consumidor dentro de un estrato elemental, ya que, recordemos que éste está formado por un conjunto bastante homogéneo de bienes, lo que significa que son bienes que presentan un elevado nivel de sustituibilidad.

El comportamiento esperado por parte del consumidor dentro del conjunto de productos que pertenecen a un mismo estrato elemental tiene que analizarse sobre las bases que se define en el epígrafe 2. Esto es, cada uno de los precios se puede identificar como procedente de un establecimiento distinto para un único bien o servicio y el hecho de que el precio en un establecimiento se incremente, provocaría el desplazamiento de la demanda del consumidor hacia el otro.

En definitiva, el uso de una función de preferencias del consumidor del tipo Leontief como base teórica del cálculo del IPE no es adecuada puesto que se corresponde con bienes complementarios y no permite ningún nivel de sustituibilidad, ni entre los productos ni entre los establecimientos que los venden.

3.2. Las preferencias tipo Cobb-Douglas como función de preferencias para el cálculo del IPC y su idoneidad en el ámbito del estrato elemental

La función de preferencias tipo Cobb-Douglas para dos productos se expresa tal y como se muestra en [5], siendo $a_1 + a_2 = 1$ dos constantes cuya relación miden las preferencias por productos y establecimientos.

$$U = q_1^{a_1} q_2^{a_2} \qquad [5]$$

La maximizaxión de esta función sujeta a la restricción presupuestaria permitiría obtener las funciones de demanda ordinarias, cuya expresión se muestra en [6].

$$q_i = \frac{Ya_i}{p_i}, i = \{1,2\} \qquad [6]$$

El primer elemento que destaca en [6] es que no existe efecto cruzado de precios. Es decir, el cambio del precio del producto 1 no afecta a la cantidad demandada del producto 2. Esto es, la elasticidad precio cruzada es igual a cero. Además, la elasticidad del precio propio es constante e igual a -1. Esto significa que el gasto es fijo para cada producto al margen de la relación de precios que mantengan los dos productos. En concreto en el producto i-ésimo el consumidor gastaría una parte de la renta total disponible igual a $a_i /(a_1 + a_2)$ para i={1,2}.

Por tanto, la función de preferencias tipo Cobb-Douglas, en sentido estricto, tampoco permite las sustituibilidad entre los productos. Lo que sí permite es la sustituibilidad entre la cantidad y el precio del mismo producto. Sin embargo, ésta es muy limitada, puesto que un incremento de un 1% en el precio del producto produce una reducción también del 1% en su cantidad demandada, no afectando a las cantidades demandadas del resto de productos. La traslación de estos resultados al escenario en el cual se elabora el IPE, significa que el consumidor gastaría lo mismo en cada establecimiento, debido a que en la práctica se desconoce el valor de las constantes y se suponen iguales. Además, cuando un precio se incrementa, el consumidor reduce su demanda únicamente en dicho establecimiento pero no la incrementa en otro más barato. Esto conlleva una falta de optimización en la conducta del consumidor.

Abundando en las limitaciones del valor de la elasticidad precios de esta función de preferencias, Tellis (1988) realiza un meta-análisis de la elasticidad precio de demanda de productos específicos (no agregados) y estima que su elasticidad media es de -1.76, claramente superior a la de la función de preferencias Cobb-Douglas.

Por tanto, de forma similar al resultado obtenido con la función del tipo Leontief, tampoco la función de utilidad del tipo Cobb-Douglas es la adecuada para representar el comportamiento del consumidor dentro del conjunto de bienes que forman un estrato elemental.

3.3. Las preferencias tipo Bergson como función de preferencias para el cálculo del IPC y su idoneidad en el ámbito del estrato elemental

La función de utilidad que se considera en este apartado pertenece al conjunto de funciones de preferencias conocidas como familia Bergson. En concreto, trabajaremos con la función de utilidad definida en [7], siendo a_i dos constantes con una interpretación general similar a los casos anteriores.

$$U = \left[a_1\sqrt{q_1} + a_2\sqrt{q_2}\right]^2 \qquad [7]$$

Las funciones de demanda ordinarias correspondientes a esta función de utilidad se obtienen maximizando la expresión [7] sujeta a la restricción presupuestaria $Y = p_1 q_1 + p_2 q_2$. El resultado se muestra en [8].

$$q_1 = \frac{a_1^2 p_2 Y}{p_1\left[p_2 a_1^2 + p_1 a_2^2\right]};\, q_2 = \frac{a_2^2 p_1 Y}{p_2\left[p_2 a_1^2 + p_1 a_2^2\right]} \qquad [8]$$

La observación directa de [8] muestra que las preferencias definidas en [7] si permiten la sustituibilidad entre los productos 1 y 2. Analíticamente la demostración se puede hacer calculando las elasticidades precio directa y cruzada. Sus valores se muestran en [9].

$$\varepsilon_{q_1}^{p_1} = -1 - \frac{p_1 a_2^2}{p_2 a_1^2 + p_1 a_2^2} ; \varepsilon_{q_1}^{p_2} = \frac{p_1 a_2^2}{p_2 a_1^2 + p_1 a_2^2} \qquad [9]$$

Como se puede observar, para valores de las constantes positivas, la elasticidad del precio propio esta comprendida entre -1 y -2, dependiendo, entre otras cosas, de la relación que mantengan los precios, siendo compatible con el trabajo de Tellis (1988). Además, la elasticidad precio cruzada tiene el signo esperado por la Teoría del Consumidor para bienes sustitutivos, estando su valor comprendido entre cero y uno. En concreto, la forma de sustitución es [10] y en ella se muestra que la cantidad que se consume en cada establecimiento y a cada precio es proporcional a la relación que mantengan los precios de ambos bienes. En consecuencia y bajo ceteris paribus, se gastará más en el establecimiento que tenga el precio más bajo.

$$p_1 q_1 = \frac{a_1^2 p_2}{a_2^2 p_1} p_2 q_2 \qquad [10]$$

Por ejemplo, supongamos que p_1 y p_2 son los precios de un mismo producto en dos establecimientos y que hay un sólo consumidor que compra en ambos. Si p_1 es mucho más grande que p_2, lo normal es que la cantidad gastada en este establecimiento será muy pequeña. Por el contrario, si los precios son iguales, lo normal es que gaste lo mismo en ambos establecimientos. Todo ello está condicionado por los valores de a_1 y a_2. Es decir, en el ejemplo anterior pueden medir las preferencias por los establecimientos. En el caso de los productos que forman el estrato elemental, pueden medir la preferencia por una determinada marca para un mismo producto.

Por tanto, la función de preferencias definida en [7] sí puede ser representativa del comportamiento del consumidor dentro de un estrato elemental y puede ser utilizada para definir cuál es el índice de precios teórico que debe utilizarse para el cálculo del IPE.

Una vez vistas las tres funciones de preferencias, se puede afirmar que las preferencias tipo Leontief y Cobb-Douglas no se adaptan a los supuestos utilizados en el cálculo de un estrato elemental, que recordemos, está formado por un conjunto bastante homogéneo de bienes, lo que significa que son bienes que presentan un elevado nivel de sustituibilidad. En efecto, las preferencias tipo Leontief se corresponden con bienes complementarios y no permite ningún nivel de sustituibilidad ni entre los productos ni entre los establecimientos que los venden. Las Preferencias tipo Cobb-Douglas tampoco permite las sustituibilidad entre los productos en sentido estricto, puesto que, aunque permite la sustituibilidad entre la cantidad y el precio del mismo producto, ésta es muy limitada, ya que no afecta a las cantidades demandadas del resto de productos. Por su parte, la función de preferencia tipo Bergson que se ha utilizado, no sólo puede medir las preferencias por los establecimientos sino que, en el caso de los productos que forman el estrato elemental, puede medir la preferencia por una determinada marca para un mismo producto. Por tanto la conclusión a la que se llega es que, en el ámbito de los índices elementales, solamente la última es congruente con la Teoría del Consumidor y con la evidencia empírica acerca la elasticidad precio, que indica que es claramente superior, en términos absolutos, a 1.

4. Las fórmulas de los índices de precios en función del tipo de preferencias del consumidor. Aplicación al IPE

Una vez conocidas las funciones de preferencias y sus demandas ordinarias se pueden calcular las funciones de utilidad indirectas y, a partir de estas, las funciones de coste asociadas, que de forma genérica definimos en [1]. En la tabla 1 se muestran las fórmulas de los índices de precios al aplicar la definición [1] a cada una de las funciones de utilidad estudiadas en el epígrafe anterior, denotando por p_i^0 y p_i^t a los precios del producto i={1,2} en los instantes de tiempo base, 0, y actual, t.

Las fórmulas de los índices de precios para las funciones de utilidad Leontief y Cobb-Douglas de la tabla 1 son ampliamente conocidas y, en consecuencia, no se abunda en su demostración.

Tabla 1. Índices de Precios teóricos		
Leontief	Cobb-Douglas	Bergson
$\dfrac{p_1^t a_2 + p_2^t a_1}{p_1^0 a_2 + p_2^0 a_1}$	$\left[\dfrac{p_1^t}{p_1^0}\right]^{a_1}\left[\dfrac{p_2^t}{p_2^0}\right]^{a_2}$	$I_B = \dfrac{\dfrac{(p_2^t a_1^2 + p_1^t a_2^2)p_1^t p_2^t}{(p_1^t + p_2^t)^2}}{\dfrac{(p_2^0 a_1^2 + p_1^0 a_2^2)p_1^0 p_2^0}{(p_1^0 + p_2^0)^2}}$

Para obtener la expresión del índice de precios para la utilidad tipo Bergson se sustituyen las funciones de demanda ordinarias de [8] en la función [7], con el objeto de obtener la función de utilidad indirecta para estas preferencias, U^I . Esto es, se obtiene [11],

$$U^I = \left[a_1 \sqrt{\frac{a_1^2 p_2 Y}{p_1 \left[p_2 a_1^2 + p_1 a_2^2 \right]}} + a_2 \sqrt{\frac{a_2^2 p_1 Y}{p_2 \left[p_2 a_1^2 + p_1 a_2^2 \right]}} \right]^2 \qquad [11]$$

Desarrollando el cuadrado y operando adecuadamente se concluye que la función de utilidad indirecta es igual a [12].

$$U^I = \frac{a_1^2 a_2^2 (p_1 + p_2)}{p_2 a_1^2 + p_1 a_2^2} Y \frac{p_1 + p_2}{p_1 p_2} \qquad [12]$$

Despejando Y se obtiene la función de costes, C(P,U), cuya expresión se muestra en [13].

$$C(P,U) = \frac{U p_1 p_2 (p_2 a_1^2 + p_1 a_2^2)}{a_1^2 a_2^2 (p_1 + p_2)} \qquad [13]$$

Por último, teniendo en cuenta [1], la fórmula del índice de precios para la función de utilidad tipo Bergson se puede escribir como [14], que coincide con la que se muestra en la tabla 1.

$$I_B = \frac{\dfrac{(p_2^t a_1^2 + p_1^t a_2^2) p_1^t p_2^t}{(p_1^t + p_2^t)^2}}{\dfrac{(p_2^0 a_1^2 + p_1^0 a_2^2) p_1^0 p_2^0}{(p_1^0 + p_2^0)^2}} \qquad [14]$$

Una vez obtenidas las expresiones teóricas de los índices de precios para las funciones de preferencias estudiadas, en lo que sigue éstas se relacionan con las fórmulas utilizadas para calcular los IPE en el IPC. Para obtener estas relaciones tendremos en cuenta que, como ya comentó en la introducción, en el ámbito del IPE sólo se dispone de los precios y no se conocen los valores de las constantes a_i.

4.1.- La función preferencias tipo Leontief y su relación con las fórmulas de Carli y Dutot

En primer lugar, si tomamos $a_1=a_2=0.5$, el índice de precios Leontief, I_L, se convierte en el cociente de las medias aritméticas de los precios en t y en 0. Esta fórmula se conoce como fórmula de Dutot y, dado que proviene de la función de utilidad tipo Leontief, hemos demostrado que no es la más adecuada para el IPE.

En segundo lugar, partiendo del índice de precios derivado de las preferencias tipo Leontief, esto es de [15],

$$\frac{p_1^t a_2 + p_2^t a_1}{p_1^0 a_2 + p_2^0 a_1} \qquad [15]$$

dividiendo numerador y denominador por $p_1^0 p_2^0$, definiendo I_i como $\frac{p_i^t}{p_i^0}$ y w_i^t como $\frac{p_i^t q_i^t}{Y}$, se obtiene que el índice de precios con base en la función de utilidad de tipo Leontief también se puede expresar como [16], que no es más que la media ponderada de los índices simples.

$$I_L = \sum_{i=1}^{2} w_i^0 I_i \qquad [16]$$

Esta última expresión es el índice de Carli ponderado. Si volvemos a imponer la restricción sobre el valor de las constantes en el sentido de que son iguales a 0.5, se obtiene la expresión del índice de Carli no ponderado que no es más que la media aritmética de los índices de precios simples. Nuevamente los resultados del epígrafe 2 indicarían la inconveniencia de utilizar esta fórmula para el cálculo de los IPE, puesto que también procede de una función de preferencias que no representa adecuadamente el comportamiento de un consumidor dentro de un estrato elemental.

En tercer lugar, volviendo a la fórmula general del índice de precios basados en las preferencias tipo Leontief, y teniendo en cuenta que para estas preferencias se cumple que $a_1 q_1^0 = a_2 q_2^0$, se puede escribir [17].

$$a_1 = a_2 \frac{p_1^0}{p_2^0} \frac{w_2^0}{w_1^0} \qquad [17]$$

Sustituyendo [17] en la fórmula general del índice de precios basado en las preferencias tipo Leontief, [15], se demuestra que este índice de precios se puede escribir como [18].

$$I_L = \frac{\sum_{i=1}^{2} w_i^0 p_i^t}{\sum_{i=1}^{2} w_i^0 p_i^0} \qquad [18]$$

Esta última expresión es el índice de Dutot ponderado. Esto es, el cociente entre las medias aritméticas de los precios en el instante cero y t, con ponderaciones en el año base. Si se toman éstas iguales a 0,5, se obtiene la fórmula de Dutot no ponderada. Llegados a este punto, se debe señalar que el hecho de que las ponderaciones sean iguales implica que $p_1^0 q_1^0 = p_2^0 q_2^0$ y, dado que se cumple $a_1 q_1^0 = a_2 q_2^0$, el supuesto que se está haciendo al utilizar en el IPE la fórmula de Dutot no ponderada es que las constantes son iguales a los precios. Es decir, los establecimientos con precios más altos en el instante base son los preferidos por parte de los consumidores.

Para finalizar con las preferencias tipo Leontief, podemos concluir que éstas no representan de forma adecuada a la conducta del consumidor dentro de un estrato elemental. Dado que las fórmulas de Carli y Dutot se derivan de este tipo de preferencias, ambas fórmulas no son adecuadas para agregar la información que procede de los precios de los productos dentro de un agregado elemental.

4.2.- La función de preferencias tipo Cobb-Douglas y su relación con la fórmula de Jevons

En el epígrafe 3 también se ha visto que las preferencias tipo Cobb-Douglas tampoco son las más adecuadas para agregar los precios de los productos de estrato elemental cuando el objetivo es calcular un IPE. Dada la forma del índice que se muestra en la tabla 1 para estas preferencias, se deduce claramente que la fórmula del índice de precios coincide con la fórmula ponderada del índice de Jevons, cuando todas las constantes son positivas y su suma es igual a 1. Además, cuando no se dispone de información sobre las constantes y éstas se toman iguales a 0,5, se obtiene la fórmula de Jevons no ponderada.

$$I_J = \sqrt{q_1 q_2} \qquad [19]$$

Esto significa que esta fórmula tampoco es adecuada para calcular el IPE, puesto que supone que se gasta la misma cantidad de renta en todos los establecimientos o a cada uno de los precios, sin que el cambio del precio de un establecimiento modifique la demanda en otro.

4.3- La función de preferencias tipo Bergson y su relación con la fórmula propuesta por Rodríguez, González y Rodríguez (2005)

En principio, lo que cabría esperar de la Teoría del Consumidor es que las cantidades gastadas en dos establecimientos fueran proporcionales a las relaciones de sus precios. Esto es lo que se produce con las preferencias tipo Bergson estudiada. Como se ha demostrado, en este caso la fórmula del IPE es [14]. Dado que se desconocen los valores de las constantes, si éstas se toman todas iguales, la expresión [14] se convierte en las expresión [20].

$$I_B = \frac{\dfrac{a^2(p_2^t + p_1^t)p_1^t p_2^t}{(p_1^t + p_2^t)^2}}{\dfrac{a^2(p_2^0 + p_1^0)p_1^0 p_2^0}{(p_1^0 + p_2^0)^2}} = \frac{\dfrac{p_1^t p_2^t}{(p_1^t + p_2^t)}}{\dfrac{p_1^0 p_2^0}{(p_1^0 + p_2^0)}} \qquad [20]$$

Reordenando [20] tal y como se muestra en [21], se obtiene la fórmula para el índice de precios teórico de la función tipo Bergson utilizada en este trabajo.

$$I_B = \frac{\dfrac{p_1^t p_2^t}{(p_1^t + p_2^t)}}{\dfrac{p_1^0 p_2^0}{(p_1^0 + p_2^0)}} = \frac{p_1^t p_2^t (p_1^0 + p_2^0)}{p_1^0 p_2^0 (p_1^t + p_2^t)} = \frac{\dfrac{(p_1^0 + p_2^0)}{p_1^0 p_2^0}}{\dfrac{(p_1^t + p_2^t)}{p_1^t p_2^t}} = \frac{\sum_{i=1}^{2} \dfrac{1}{p_i^0}}{\sum_{i=1}^{2} \dfrac{1}{p_i^t}} \qquad [21]$$

La fórmula obtenida en [21] coincide con la propuesta por Rodríguez, González y Rodríguez (2005) para el cálculo del IPE del estrato elemental j cuando se dispone de 2 precios para cada instante de tiempo. La obtención de la expresión [21] para el caso genérico de trabajar con K_j precios en vez de con dos no supone ninguna dificultad. Para este caso, los autores demuestran que I_B es igual a la media armónica de los índices de precios simples ponderados por el inverso de los precios en el período base, expresión [22].

$$I_B = I_{A(t/0)} = \left[\sum_{i=1}^{K_j} {}^j w_i^0 \times \left(\frac{{}^j p_i^t}{{}^j p_i^0} \right)^{-1} \right]^{-1}, \text{con } {}^j w_i^0 = \frac{1}{{}^j p_i^0 \times \sum_{i=1}^{K_j} \dfrac{1}{{}^j p_i^0}} \qquad [22]$$

Asimismo, Rodríguez, González y Rodríguez (2005) demuestran que, desde el punto de vista axiomático, [22] es una fórmula superior a la de Jevons cuando los bienes del estrato elemental son homogéneos, ya que cumple una propiedad deseable más que esta última.

Además, si se trabaja nuevamente con dos productos y sin información sobre las constantes, es fácilmente demostrable que el índice propuesto por estos autores, y que se deriva de una función de preferencias tipo Bergson, es el único de los estudiados en el cual el gasto en cada producto es proporcional a la relación entre sus precios.

La demostración de esta afirmación se puede realizar estudiando las ponderaciones implícitas en gasto que tienen las distintas fórmulas derivadas de las funciones de utilidad estudiadas. Si se denota por G_i al gasto realizado en el producto i, la ponderación del producto i es igual a G_i/Y.

Empezando por la fórmula de Carli, la ponderación implícita es 0,5. Por tanto, se cumple [23].

$$\frac{G_i}{Y} = 0,5 \Rightarrow \frac{p_i q_i}{p_1 q_1 + p_2 q_2} = 0,5 \qquad [23]$$

Es evidente a partir de esta última expresión que si este es el caso, se cumple que $G_1=G_2$. Es decir, al usar la fórmula de Carli sin ponderar, conlleva una ponderación implícita en términos de participación en el gasto que iguala las cantidades gastadas. Si se parte de la fórmula de Dutot, ésta se puede escribir como [24] [Rodríguez, González y Rodríguez (2005)].

$$I_D = \sum_{i=1}^{2} \frac{p_i}{\sum_{i=1}^{2} p_i} I_i \qquad [24]$$

Repitiendo el proceso realizado con Carli en [23], esto es, igualando la expresión teórica de la participación en gasto con la ponderación implícita en la fórmula del índice, se obtiene que la expresión de partida para la fórmula de Dutot es la mostrada en [25].

$$\frac{G_i}{Y} = \frac{p_i}{\sum_{i=1}^{2} p_i} \Rightarrow \frac{p_i q_i}{p_1 q_1 + p_2 q_2} = \frac{p_i}{\sum_{i=1}^{2} p_i} \qquad [25]$$

Despejando q_1 en [25] se concluye que el uso de la ponderación $\frac{p_i}{\sum_{i=1}^{2} p_i}$ en términos de participación en el gasto implica que las cantidades de ambos bienes son iguales.

Para el índice propuesto por Rodríguez, González y Rodríguez (2005), el punto de partida es la expresión [26].

$$\frac{G_i}{Y} = \frac{1}{p_i \times \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{p_i}} \qquad [26]$$

Desarrollando [26] se demuestra que es equivalente a [27].

$$q_1 = \left[p_1 q_1 + p_2 q_2 \right] \frac{1}{p_1^2 \left[\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \right]} \qquad [27]$$

Despejando q_1 de esta última expresión es obtiene ka relación [28]

$$q_1 = \frac{\frac{p_2^2 q_2}{p_1 [p_1 + p_2]}}{1 - \frac{p_2}{p_1 + p_2}}, \qquad [28]$$

a partir de donde es inmediato demostrar que con el índice propuesto por Rodríguez, González y Rodríguez (2005) la ponderación en gasto implica que el gasto en el producto 1 es proporcional al gasto en el producto 2, siendo la constante que los relaciona el cociente de sus precios. Esto es, implica [29].

$$p_1 q_1 = \frac{p_2}{p_1} p_2 q_2 \qquad [29]$$

La aplicación de este procedimiento a la fórmula de Jevons es más compleja dado el carácter multiplicativo con el que participan los índices simples. Sin embargo, para el caso de dos bienes se puede realizar la siguiente aproximación. El índice de Jevons sin ponderar para dos productos es iguala a $I_J = I_1^{0,5} I_2^{0,5}$. Este equivale a un índice aditivo genérico de la forma $I_J = S_1 I_1 + S_2 I_2$, siendo $S_1 + S_2 = 1$. Por tanto se cumple [30].

$$\frac{S_1 I_1 + S_2 I_2}{I_1^{0,5} I_2^{0,5}} = 1 \qquad [30]$$

Esta última relación se puede rescribir como [31], en donde $\alpha = \sqrt{\frac{I_1}{I_2}}$.

$$S_1 \alpha + S_2 \frac{1}{\alpha} = 1 \qquad [31]$$

Teniendo en cuenta que $S_1 + S_2 = 1$, se demuestra el cumplimiento de [32].

$$S_1 = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{I_1}{I_2}}} ; S_2 = \frac{\sqrt{\frac{I_1}{I_2}}}{1 + \sqrt{\frac{I_1}{I_2}}} \qquad [32]$$

Ahora si se puede aplicar el procedimiento general que se le aplicó a los índices de Carli, Dutot y al propuesto por Rodríguez, González y Rodríguez (2005). Esto es, igualar la ponderación en gasto a la ponderación implícita, tal y como se muestra en [33].

$$\frac{p_1 q_1}{p_1 q_1 + p_2 q_2} = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{I_1}{I_2}}} \qquad [33]$$

Manipulando esta última expresión se llega a la conclusión de que los gastos son proporcionales a la raíz cuadrada de los índices simples, tal y como se muestra en la expresión [34].

$$p_1 q_1 = \sqrt{\frac{I_2}{I_1}} p_2 q_2 \qquad [34]$$

Este resultado es importante puesto que nos dice que la relación entre las cantidades gastadas en dos productos no depende de la relación de sus precios sino de la relación de los cambios en sus precios. Por tanto, tal y como demuestran Rodríguez, González y Rodríguez (2004), podemos decir que este resultado es compatible con un objetivo de estabilidad de precios pero no así de convergencia de los mismos. En cualquier caso, este resultado no es más que un caso particular definido por la restricción que impone la expresión [30] y que no es totalmente comparable con el resto de expresiones.

5. Conclusiones

A lo largo del trabajo se ha demostrado la inconsistencia, desde el punto de vista económico, de utilizar las fórmulas de Carli, Dutot y Jevons para el cálculo de un IPE para estratos homogéneos, debido a que estas fórmulas se derivan de unas funciones de preferencias que no son adecuadas para representar el comportamiento esperado por la Teoría de Consumidor.

Una solución más coherente con dicha teoría es la que se deriva de una función de preferencias tipo Bergson. En concreto, el uso de una función de preferencias definida como el cuadrado de la suma de las raíces cuadradas de las cantidades, da lugar a un índice de precios teóricos que se calcula como el cociente entre el sumatorio de los inversos de los precios en el instante cero dividido por el mismo sumatorio de los precios pero ahora en el instante actual. Este índice coincide con el propuesto por Rodríguez, González y Rodríguez (2005) definido como la media armónica de los índices de los precios simples ponderados por la inversa de los precios en el instante base.

La nueva fórmula para el IPE se muestra compatible con la Teoría del Consumidor y cumple con todas las propiedades deseables para el número índice de un agregado elemental homogéneo. Además, es compatible con las estimaciones de la elasticidad precio para productos sustituibles.

Por último, la fórmula propuesta implica que el gasto realizado es proporcional a la relación de precios, mostrándose, en consecuencia, superior al resto de fórmulas las cuales implican igualdad entre las cantidades, entre el gasto o proporcional a la relación entre los índices de precios.

Por todo lo demostrado, la conclusión básica es que debe estudiarse por parte de las Agencias de Estadística la sustitución de la fórmula del agregado elemental por la fórmula propuesta en este trabajo, máxime si se tiene en cuenta que su implementación no supone ningún coste adicional para dichas agencias.

Bibliográficas

1. Advisory Commission To The Study The Consumer Price Index (1996): "Toward a More Accurate Measure of The Cost of Living", Final Report To The Senate Finance Committee, Washington, December 4.

2. Diewert, W. (1976): “Exact and Superlative Index numbers”, *Journal of Econometrics*, **4-2**, pp.115-145.

3. Fisher, I. (1922): *The Making of the Index Numbers*, Houghton-Mifflin, Boston.

4. Konus, A. (1939): “The Problem of the True Index of the Cost of Living”, *Econometrica,* **7**, pp.10-29.

5. OIT (2003): “Chapter 20 Elementary Indices”, *CPI Manual*, Electronic Document: http://www.ilo.org/public/ english/bureau/stat /guides/cpi/, International Labour Organization.

6. Rodríguez, S., González, C. y Rodríguez, A. (2004): "¿Cómo Medir los Cambios en la Paridad de Poder de Compra a Partir de los Índices de Precios de Consumo y los Tipos de Cambio?" *Estadística Española*, **157**, pp. 489-510.

7. Rodríguez, S., González, C. y Rodríguez, A. (2005): “Inconsistencia Económica de las Fórmulas de Carli, Dutot y Jevons para Calcular el Índice Elemental del IPC con Estratos Básicos Homogéneos”, *Estadística Española*, **160**, en imprenta.

8. Tellis, G. (1988): “The Price Elasticity of Selective Demand: A Meta-Analysis of Econometric Models of Sales”, *Journal of Marketing Research*, **XXV**, pp.331-341.