

# UNA NUEVA DISTRIBUCIÓN PARA EL TRATAMIENTO DE LA INCERTIDUMBRE

**Catalina García García**

Departamento de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa

Universidad de Granada

e-mail: [cbgarcia@ugr.es](mailto:cbgarcia@ugr.es)

**José García Pérez**

Departamento de Economía Aplicada

Universidad de Almería

e-mail: [jgarcia@ual.es](mailto:jgarcia@ual.es)

## Resumen

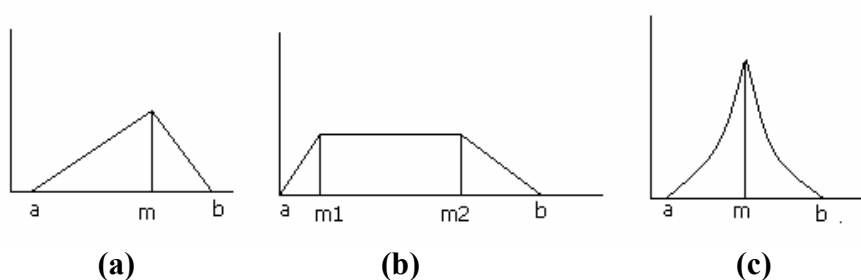
Las distribuciones que se emplean en el tratamiento del riesgo y de la incertidumbre (Triangular, Trapezoidal y en general la TSP- Van Dorp) son distribuciones unimodales definidas en un modelo acotado y que se determinan a partir de los tres valores habituales  $a$ ,  $m$  y  $b$ . Estas distribuciones adolecen de un defecto en su función de densidad ya que esta no es derivable en el punto correspondiente a su moda o a modas. La distribución bipolarabólica reparte la densidad de forma continua, en el sentido que la moda no supone un punto de discontinuidad para la derivada de la función de densidad. Además es la distribución más adecuada para su uso en el ámbito del PERT, de entre todas las distribuciones que pueden obtenerse a partir de las tres estimaciones habituales del experto, en el sentido de que es la que tienen más varianza y solo le supera en moderación la distribución Trapezoidal CPR. La distribución bipolarabólica generalizada está definida en un dominio acotado, tiene forma similar a la distribución normal y puede presentar asimetrías por todo ello se puede afirmar que satisface las intenciones que perseguían los creadores de PERT con el uso de la distribución Beta, y refiriéndonos a esta última presenta la ventaja de que se conoce, explícitamente, su función de distribución, por lo que resulta adecuado para ser utilizada en el MDFD.

*Palabras clave:* Tratamiento del riesgo e incertidumbre, PERT y MDFD

*Área temática:* Métodos Cuantitativos

## 1. Introducción

Las distribuciones que se emplean en el tratamiento del riesgo y de la incertidumbre (Triangular, Trapezoidal, y en general la TSP-Van Dorp) son distribuciones unimodales definidas en un dominio acotado y que pueden ser determinadas a partir de los tres valores habituales optimista, pesimista y más probable. En la figura 1 se presentan las funciones de densidad de las distribuciones Triangular, Trapezoidal CPR, y TSP Van Dorp respectivamente. Se observa que todas estas distribuciones adolecen de un defecto en cuanto a su función de densidad ya que esta no es derivable en el punto correspondiente a la moda o a las modas.



**Figura 1**  
**Función de densidad de las distribuciones Triangular,**  
**Trapezoidal y TSP Van Dorp respectivamente**

Este hecho tiene una sencilla interpretación geométrica que consiste en que el crecimiento marginal de la función de densidad a la derecha de la moda es diferente al crecimiento marginal por la izquierda. Es decir:

$$f'_+(m) \neq f'_-(m)$$

Y, en consecuencia, no existirá la derivada en el punto  $m$ . En definitiva  $f'(x)$  es discontinua en el punto  $m$ , o lo que es lo mismo, la densidad marginal tiene un punto de discontinuidad en las modas. Se puede entender que el hecho de que el reparto de la densidad tenga un salto o discontinuidad puede añadir más incertidumbre en el proceso de determinación de la distribución subyacente al fenómeno objeto de estudio.

Esta característica de discontinuidad que, como hemos dicho anteriormente, padecen las distribuciones empleadas hasta ahora en el campo de valoración, no es ni mucho menos deseable, ya que es lógico pensar que lo más conveniente en cualquier caso será una distribución en la cual la variación de la densidad sea continua en todo su recorrido.

En el presente trabajo se presenta la distribución bipolarabolica, cuya función de densidad es derivable en el punto  $m$ , es decir existe  $f'(m)$ , y además se puede determinar a partir de los tres valores habituales  $a$ ,  $m$  y  $b$ . En primer lugar se presenta la construcción de la distribución, y a continuación se presentan sus características más relevantes. Posteriormente se analiza la aplicación de dicha distribución en el ámbito del PERT y de la valoración por el MDFD, y por último, se presenta la distribución bipolarabolica generalizada y sus características estocásticas.

## 2. Construcción de la distribución bipolarabolica.

La distribución bipolarabolica se obtiene a partir de los tres valores típicos del método PERT, es decir  $(a, m, b)$ , y la propiedad fundamental que la diferencia del resto de distribuciones usadas hasta ahora en el ámbito de la valoración es que su función de densidad es derivable en la moda.

Conocidos los valores  $a$ ,  $m$  y  $b$  se determina la parábola  $f_1(x)$  a partir de los puntos  $(a,0)$   $(m,h)$ , por otro lado, los puntos  $(b,0)$   $(m,h)$  determinan la parábola  $f_2(x)$ . La distribución bipolarabolica surge, y de aquí deriva su nombre, de la conjunción de ambas parábolas. Véase la figura 2.

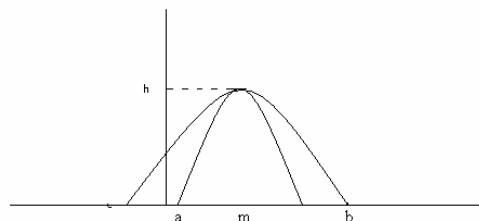


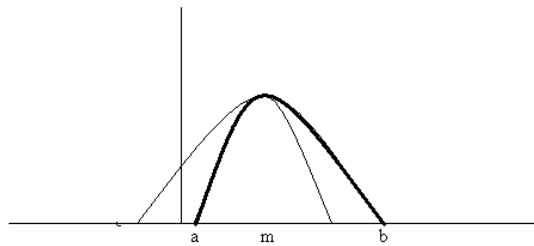
Figura 2  
Parábolas  $f_1(x)$  y  $f_2(x)$

Se define la función de densidad de la distribución bipolarabolica como:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{si } a \leq x \leq m \\ f_2(x), & \text{si } m \leq x \leq b \end{cases}$$

**(1)**

En la figura 3, se presenta gráficamente la construcción de la función de densidad bipolarabolica.



**Figura 3**  
**Construcción de la función de densidad bipolarabolica**

Se puede comprobar:

$$f_1(x) = A(x-a)(x-(2m-a))$$

$$f_2(x) = B(x-b)(x-(2m-b))$$

**(2)**

Para establecer las ecuaciones recogidas en la expresión (2) se han buscado los puntos de corte de ambas funciones con el eje de abscisas. Se sabe que dichas funciones cortan al eje de abscisas en los puntos (a,0) y (b,0) respectivamente. Si se toma m como la abscisa de cada parábola en su vértice se puede definir otro punto de corte con el eje de abscisas para cada parábola que será: (2m-a,0) y (2m-b,0). Para determinar los valores A y B se le impondrá a la función f(x) por un lado la condición propia de una función de densidad y por otro la condición de continuidad.

1) Para que la función f(x) sea continua debe cumplirse que:

$$f_1(m) = f_2(m) \Rightarrow A(m-a)(-m+a) = B(m-b)(-m+b)$$

y por tanto:

$$A = B \frac{(m-b)^2}{(m-a)^2}$$

**(3)**

2) Para que la función  $f(x)$  sea considerada una función de densidad debe cumplirse:

$$\int_a^b f(x)dx = 1$$

(4)

Se puede demostrar que:

$$\int_a^b f(x)dx = -\frac{2}{3}A(m-a)^3 - \frac{2}{3}B(b-m)^3$$

Haciendo uso de las expresiones (3) y (4):

$$-\frac{2}{3} \frac{B(b-m)^2}{(m-a)^2} (m-a)^3 - \frac{2}{3}B(b-m)^3 = 1$$

y despejando se obtienen las siguientes expresiones para A y B:

$$A = -\frac{3}{2} \frac{1}{(m-a)^2(b-a)}$$

(5.a)

$$B = -\frac{3}{2} \frac{1}{(b-m)^2(b-a)}$$

(5.b)

Empleando los resultados anteriores se define la función de densidad bipolarbolica como:

$$f(x) \begin{cases} -\frac{3}{2} \frac{1}{(m-a)^2(b-a)} (x^2 - 2mx + (2m-a)a) & \text{si } a \leq x \leq m \\ -\frac{3}{2} \frac{1}{(m-b)^2(b-a)} (x^2 - 2mx + (2m-b)b) & \text{si } m \leq x \leq b \end{cases}$$

(6)

A partir de aquí, se obtiene la función de distribución como:

$$F(x) \begin{cases} -\frac{3}{2} \frac{1}{(m-a)^2(b-a)} \frac{x^3 - a^3}{3} - m(x^2 - a^2) + (2m-a)(x-a)a & \text{si } a \leq x \leq m \\ 1 - \frac{3}{2} \frac{1}{(m-b)^2(b-a)} \left[ \frac{b^3 - x^3}{3} - m(b^2 - x^2) + (2m-b)b(b-x) \right] & \text{si } m \leq x \leq b \end{cases}$$

**(7)**

operando se obtiene una expresión simplificada de la función de distribución:

$$F(x) \begin{cases} -\frac{1}{2} \frac{(x-a)^2(x-3m+2a)}{(m-a)^2(b-a)}, & \text{si } a \leq x \leq m \\ 1 - \frac{1}{2} \frac{(x-b)^2(x-3m+2b)}{(m-b)^2(b-a)}, & \text{si } m \leq x \leq b \end{cases}$$

**(7.bis)**

Se puede comprobar que:

$$F(m) = \frac{m-a}{b-a} = M$$

Es decir, el valor de la función de distribución en la moda, m, es precisamente la moda estandarizada M. Esta es una propiedad que cumple la distribución TSP de Van Dorp. Una vez obtenidas la función de distribución y la función de densidad de la distribución bipolar, se presentan sus momentos centrales y su varianza:

$$E(x) = \frac{2m+3b+3a}{8}$$

**(8)**

$$E(x^2) = a^2 + 2a \frac{2(m-a) + 3(b-a)}{8} + 2 \frac{(m-a)^2 + 3(m-a)(b-a) + 4(b-a)^2}{20}$$

**(9)**

$$Var(x) = \frac{12(m-a)^2 - 12(m-a)(b-a) + 19(b-a)^2}{320}$$

**(10)**

### 3. La distribución bipolarabolica estandarizada

Para un estudio más profundo procederemos a estandarizar la variable. La Distribución presentada en el apartado anterior, se refería a una variable  $x \in (a, b)$ . En este apartado se presentara la Distribución estandarizada, que se referirá a una variable  $t \in (0,1)$ , donde  $t = \frac{x-a}{b-a}$ .

Se puede demostrar que la función de densidad en este caso será:

$$f(t) = \begin{cases} -\frac{3}{2} \frac{1}{M^2} (t^2 - 2Mt) & \text{si } 0 \leq t \leq M \\ -\frac{3}{2} \frac{1}{(1-M)^2} (t^2 - 2Mt + 2M - 1) & \text{si } M \leq t \leq 1 \end{cases}$$

(11)

y la función de distribución:

$$F(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \frac{t^2(t-3M)}{M^2} & \text{si } 0 \leq t \leq M \\ 1 - \frac{1}{2} \frac{(t-1)^2(t-3M+2)}{(M-1)^2} & \text{si } M \leq t \leq 1 \end{cases}$$

(12)

En cuanto a sus momentos centrales y su varianza:

$$E(t) = \frac{2M+3}{8}$$

(13)

$$E(t^2) = \frac{2M^2+3M+4}{20}$$

(14)

$$V(t) = \frac{12M^2-12M+19}{320}$$

(15)

El uso del sistema generador introducido por Van Dorp y Kotz (2003) va a permitir simplificar cálculos y realizar una presentación más elegante de la distribución bipolarabolica.

#### 4. La obtención de la bipolarabolica a partir del sistema de Van Dorp

Sabemos, véase Van Dorp y Kotz (2003) que si  $p(\cdot/\psi)$  es una apropiada función de densidad definida en  $[0,1]$  con parámetros  $\psi$  (puede ser un vector de parámetros) entonces, haciendo uso del sistema Van Dorp, se puede construir la siguiente función de densidad unimodal en  $M$ :

$$g\left\{t/M, p\left(\frac{\bullet}{\psi}\right)\right\} = \begin{cases} p\left(\frac{t}{M}/\psi\right) & \text{si } 0 \leq t \leq M \\ p\left(\frac{1-t}{1-M}/\psi\right) & \text{si } M \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (16)$$

Donde  $p\left(\frac{\bullet}{\psi}\right)$  será la función generadora de  $g\left\{t/M, p\left(\frac{\bullet}{\psi}\right)\right\}$ .

Para que  $g$  sea la función de densidad bipolarabolica presentada anteriormente,  $p(\cdot/\psi)$  deberá cumplir ciertas condiciones. En primer lugar deberá ser una parábola  $p(x/a,b,c)=ax^2+bx+c$ . Si se observa la figura 4 se pueden las siguientes conclusiones.

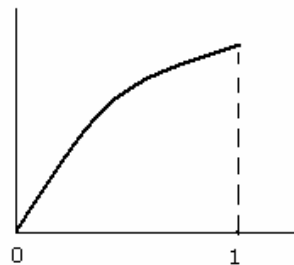


Figura 4  
Representación de  $p(\cdot/\psi)$   
 $p(x)=ax^2+bx+c$

- En primer lugar, dado que la función pasa por el punto (0,0) se puede demostrar que  $c=0$

- En segundo lugar, la función debe tener un máximo en el punto 1, y por tanto si se define la función representada en la grafica anterior como  $y = ax^2 + bx + c$ , y se opera:

$$y'(1) = 2ax + b \Big|_{(1)} = 2a + b = 0 \Rightarrow b = -2a$$

luego debe ser:  $p(x/a) = a(x^2 - 2x)$

- Además, para que sea una función de densidad en  $[0,1)$  debe cumplirse que:

$$\int_0^1 a(x^2 - 2x)dx = 1 \Rightarrow a = -3/2.$$

Por lo tanto,

$$p\left(\frac{x}{\psi}\right) = -\frac{3}{2}(x^2 - 2x) \tag{17}$$

por lo que se puede afirmar que  $p(x)$  no depende de ningún parámetro y esta totalmente determinado.

A partir de estas dos condiciones, obtendríamos la siguiente expresión para la función de densidad:

$$g(t/M, p(x)) = \begin{cases} -\frac{3}{2} \left( \frac{t^2}{M^2} - 2\frac{t}{M} \right) & \text{si } 0 \leq t \leq M \\ -\frac{3}{2} \left[ \left( \frac{1-t}{1-M} \right)^2 - 2\left( \frac{1-t}{1-M} \right) \right] & \text{si } M \leq t \leq 1 \end{cases} \tag{18}$$

Y operando, obtendríamos la función de densidad bipolarabolica que se expuso anteriormente:

$$g(t/M, p(x)) = \begin{cases} -\frac{3}{2} \frac{1}{M^2} (t^2 - 2Mt) & \text{si } 0 \leq t \leq M \\ -\frac{3}{2} \frac{1}{(1-M)^2} (t^2 - 2Mt + (2M-1)) & \text{si } M \leq t \leq 1 \end{cases}$$

(19)

Si se tiene en cuenta que la función de distribución  $G(t/M, P(x))$  de la distribución bipolarabólica  $g$  se puede obtener a partir de su generadora  $p$ , siguiendo a Van Dorp y Kotz (2003):

$$G(t/M, P(x)) = \begin{cases} MP\left(\frac{t}{M}/\psi\right) & 0 \leq t \leq M \\ 1 - (1-M)P\left(\frac{1-t}{1-M}/\psi\right) & M \leq t \leq 1 \end{cases}$$

(19.1)

Donde  $P(\bullet/\psi)$  es la función de distribución asociada a la densidad de la generadora  $p(\bullet/\psi)$ , pudiendo comprobarse en general que:

$$G(M/M, \psi) = MP(1/\psi) = M$$

(19.2)

Por lo tanto, teniendo en cuenta que  $P(x) = -\frac{3}{2} \left( \frac{x^3}{3} - x^2 \right)$ , la función de distribución de la bipolarabólica vendrá dada por:

$$G(t) = \begin{cases} -\frac{3}{2} M \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{t}{M} \right)^3 - \left( \frac{t}{M} \right)^2 \right] & 0 \leq t \leq M \\ 1 - (1-M) \left( -\frac{3}{2} \right) \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{1-t}{1-M} \right)^3 - \left( \frac{1-t}{1-M} \right)^2 \right] & M \leq t \leq 1 \end{cases}$$

(19.3)

Desarrollando estas formulas obtendríamos la expresión (12).

Una característica muy importante de las funciones de densidad pertenecientes al sistema generador de Van Dorp es que cualquier función de este sistema cumple la condición de que  $F(M)=M$ , siendo  $F$  la función de distribución y  $M$  la moda estandarizada.

Se puede demostrar, Van Dorp y Kotz (2003) la siguiente relación entre los momentos de la generadora  $p(x)$  y la  $g(t)$

$$E(t^k / M, p) = M^{k+1} E(x^k / \psi) + \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i (1-M)^{i+1} E[x^i / \psi]$$

(20)

Haciendo uso de la expresión (20) se calculan los valores de los momentos de la distribución biparabolica con respecto al origen:

$$E(t/M, p) = (2M - 1)E(x/\psi) + (1 - M)$$

$$Var(t / M, p) = [M^3 + (1 - M)^3] Var(x/\psi) + M(1 - M)\{E(x/\psi) - 1\}^2$$

Teniendo en cuenta que  $p\left(\frac{x}{\psi}\right) = -\frac{3}{2}(x^2 - 2x)$  operando podemos obtener otras expresiones más sencillas, y que coincidirán con las expresiones (13) y (15):

$$E(t/M, p) = \frac{2M + 3}{8}$$

(21)

$$Var(t / M, p) = \frac{12M^2 - 12M + 19}{320}$$

(22)

## 5. Cálculo de los momentos centrales de la distribución biparabólica estandarizada

Utilizando la expresión (20) que liga los momentos de la función de distribución biparabólica estandarizadas con los de su distribución generadora que se puede demostrar:

$$E(t) = \frac{2M + 3}{8} = 3 \frac{2M + 3}{24}$$

$$E(t^2) = \frac{2M^2 + 3M + 4}{20} = 3 \frac{2M^2 + 3M + 4}{60}$$

$$E(t^3) = \frac{2M^3 + 3M^2 + 4M + 5}{40} = 3 \frac{2M^3 + 3M^2 + 4M + 5}{210}$$

$$E(t^4) = \frac{2M^4 + 3M^3 + 4M^2 + 5M + 6}{70} = 3 \frac{2M^4 + 3M^3 + 4M^2 + 5M + 6}{210}$$

Y en general,

$$E(t^k) = 3 \frac{2M^k + 3M^{k-1} + 4M^{k-2} + \dots + (2+k)}{(k+1)(k+2)(k+3)} = 3 \frac{\sum_{j=0}^k (2+j)M^{k-j}}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

(23)

Utilizando la expresión de Stuart y Ord (1994), podemos relacionar los momentos centrales con los momentos respecto de la media:

$$\mu_2 = m_2 - m_1^2$$

$$\mu_3 = m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3$$

$$\mu_4 = m_4 - 4m_3m_1 + 6m_2m_1^2 - 3m_1^4$$

Así pues:

$$\mu_2 = \frac{12M^2 - 12M + 19}{320}$$

(24)

$$\mu_3 = \frac{8M^3 - 12M^2 - 10M + 7}{1280}$$

(25)

$$\mu_4 = \frac{624M^4 - 1248M^3 + 2088M^2 - 1464M + 1095}{143 \cdot 360}$$

(26)

## 6. Análisis de la forma de la distribución bipolarabólica

Con el objetivo de realizar una presentación global de la distribución bipolarabólica y obtener conclusiones acerca de sus ventajas con respecto a otras distribuciones se presenta a continuación un estudio sobre la curtosis y la asimetría de dicha distribución. La principal ventaja, destacada anteriormente, es que presenta un crecimiento continuo de la densidad en todo su dominio, pero además, como característica propia de la familia de distribución Van Dorp, será una distribución asimétrica y presentará un mayor apuntamiento que la normal, siendo ambas características muy deseables en el ámbito de la valoración.

Se define el coeficiente de asimetría como:

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}$$

Se sustituye aplicando las expresiones (24) y (25) y se obtiene la siguiente expresión:

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = \frac{\left( \frac{8M^3 - 12M^2 - 10M + 7}{1280} \right)^2}{\left( \frac{12M^2 - 12M + 19}{320} \right)^3}$$

(27)

En la figura 5, se recoge la representación en el espacio del coeficiente de asimetría. Se observa que siempre toma valores inferiores a 0,143, y por tanto podemos decir que dado que el coeficiente toma valores muy cercanos a cero, se tratara de una distribución con poca asimetría. Además se aprecia que conforme la moda tiende al punto medio, en el caso de la distribución estandarizada  $M = 1/2$ , el coeficiente de asimetría tiende a 0.

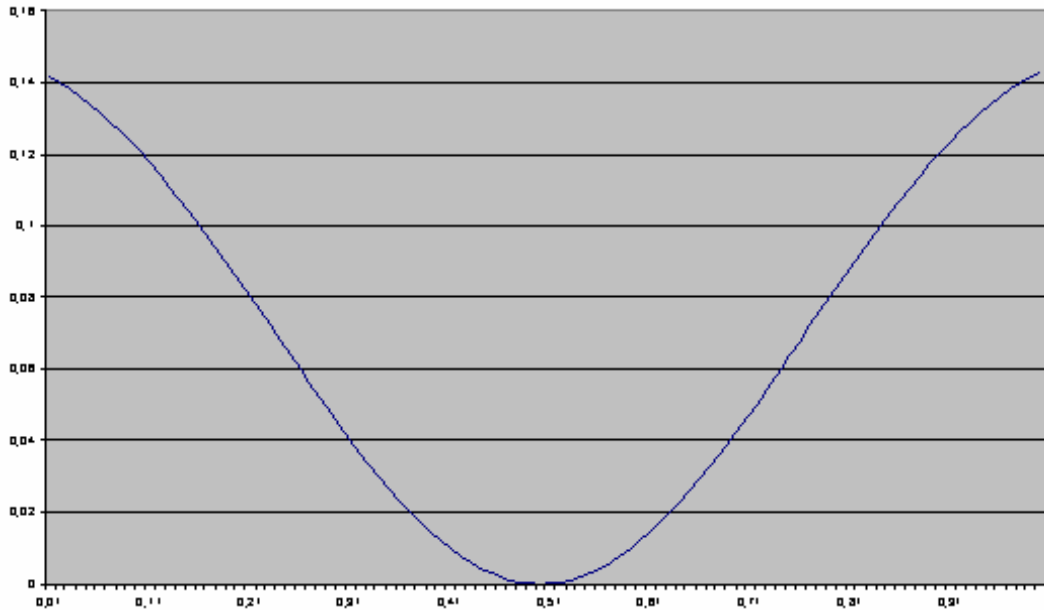


Figura 5  
Representación del coeficiente de asimetría

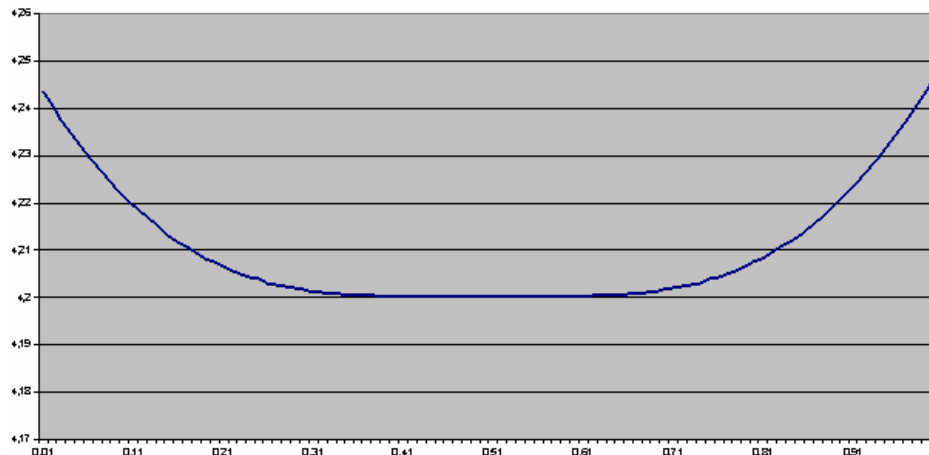
En cuanto al coeficiente de curtosis se define como:

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

se sustituye usando las expresiones (24) y (26):

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{624M^4 - 1248M^3 + 2088M^2 - 1464M + 1095}{143 \cdot 360} = \frac{7}{5} \left[ \frac{624M^4 - 1248M^3 + 2088M^2 - 1464M + 1095}{\left(\frac{12M^2 - 12M + 19}{320}\right)^2} \right] \quad (28)$$

En la figura 6 se representa el coeficiente de curtosis de la distribución bipolarabólica estandarizada, y se aprecia que siempre toma valores iguales o superiores a 4,2. Dado que el coeficiente de curtosis propio de una distribución normal es 3, diremos que la función de distribución bipolarabólica presenta mayor apuntamiento que la normal.



**Figura 6**  
**Representación del coeficiente de curtosis**

## 7. Utilización de la distribución estandarizada en el ámbito del PERT

En ambiente de incertidumbre siempre es deseable que la media estimada sea lo más centrada posible, es decir que sea moderada, y, por otro lado, que la varianza sea lo mas grande posible. Estos criterios se selección fueron propuestos por Taha y Herrerías. Con este fin se van a comparar las medias y las varianzas de la distribución bipolarabolica con otras distribuciones usadas habitualmente en el ámbito del PERT como son la distribución Triangular, la distribución Beta Clásica y la distribución Trapezoidal CPR. En cuadro1 se presentan los valores esperados y la varianza para las distintas distribuciones.

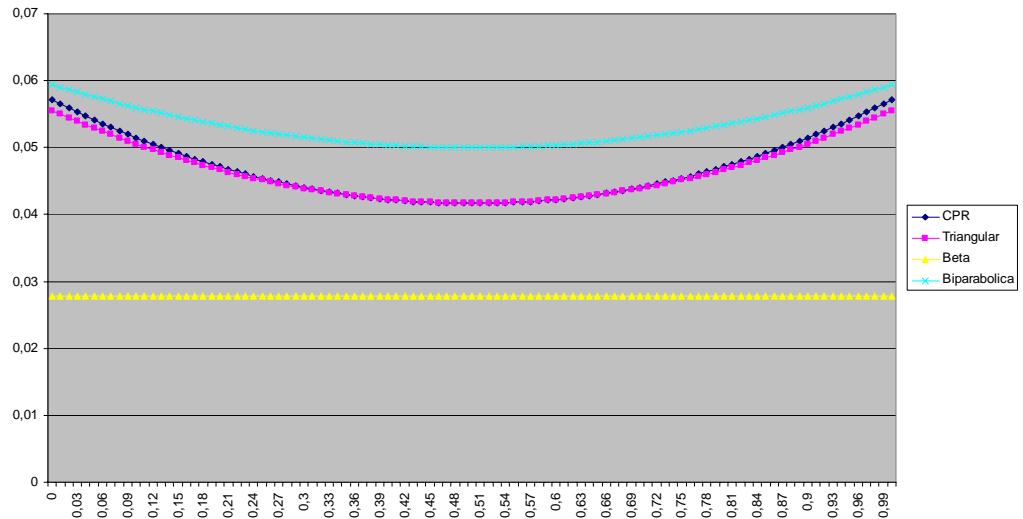
Supongamos que  $x$  es la variable aleatoria cuyo comportamiento ha de ser estimado a través de las tres estimaciones subjetivas del experto ( $a$ ,  $m$ ,  $b$ ), la variable estandarizada  $t$  se definirá como  $t = \frac{x - a}{b - a}$  y su moda será  $M = \frac{m - a}{b - a}$ .

	Variable aleatoria x	Variable t estandarizada
Triangular	$E(x) = \frac{a + m + b}{3}$ $V(x) = \frac{(b-a)^2 - (m-a)(b-m)}{18}$	$E(t) = \frac{n+1}{3}$ $V(t) = \frac{1-M(1-M)}{18}$
Beta clásica	$E(x) = \frac{a + 4m + b}{6}$ $V(x) = \frac{(b-a)^2}{36}$	$E(t) = \frac{1+4M}{6}$ $V(t) = \frac{1}{36}$
Biparabolica	$E(x) = \frac{2m + 3a + 3b}{8}$ $V(x) = \frac{12(m-a)^2 - 12(m-a)(b-a) + 19(b-a)^2}{320}$	$E(t) = \frac{2M + 3}{8}$ $V(t) = \frac{12M^2 - 12M + 19}{320}$
<b>Variable t estandarizada</b>		
Trapezoidal CPR	$E(t) = \begin{cases} \frac{1}{3} \left[ M + \frac{3}{2} - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2} - M} \right] & \text{si } M < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \left[ M + \frac{3}{2} - \frac{M}{\frac{1}{2} + M} \right] & \text{si } M > \frac{1}{2} \end{cases}$	$V(t) = \begin{cases} \frac{1}{18} \left[ \frac{1}{4} + \frac{1}{2}M + (1-M)^2 - \frac{\left(\frac{1}{2} - M\right)(1-M)}{\left(\frac{3}{2} - M\right)^2} \right] & \text{si } M < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{18} \left[ \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(1-M)^2 + M^2 - \frac{\left(M - \frac{1}{2}\right)M}{\left(M + \frac{1}{2}\right)^2} \right] & \text{si } M > \frac{1}{2} \end{cases}$

**Cuadro 1**

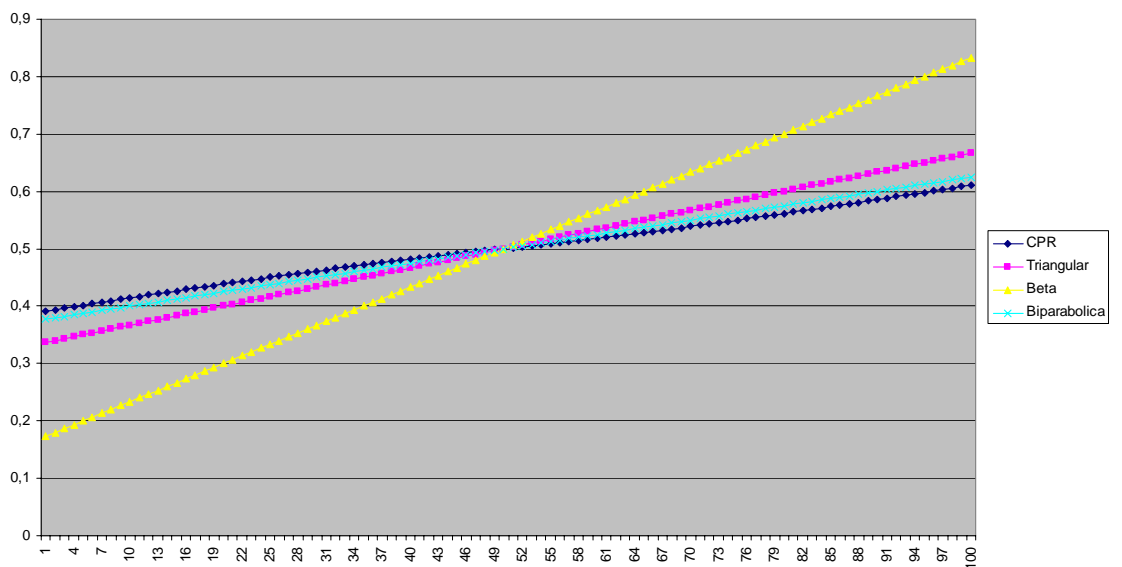
**Valores esperados y varianzas de las distribuciones más usadas en el ámbito del PERT**

En la figura 7 se compara la varianza de la distribución bipolarabolica con las varianzas de las distribuciones CPR, Triangular y Beta. Se observa que la varianza de la distribución bipolarabolica esta siempre por encima de las demás.



**Figura 7**  
Comparación de varianzas

En cuanto a la media se observa se observa en la figura 8 que la bipolarabolica es casi tan moderada en media como la trapezoidal CPR y más moderada que ninguna de las otras.



**Figura 8**  
Comparación de medias

Por ultimo, en la figura 9 se representan las densidades de las anteriores distribuciones y como conclusión fundamental se destaca que la ordenada en la moda es menor para la distribución bipolarabolica que para la distribución triangular y la distribución trapezoidal CPR, cuyas expresiones vienen dadas por:

Triangular	$h_T = \frac{2}{b-a}$
Uniforme	$h_U = \frac{1}{b-a}$
Biparabolica	$h_{Bp} = \frac{3/2}{b-a}$
Trapezoidal CPR	$h_{CPR} = \begin{cases} \frac{2}{b-a + \frac{1}{2} - m} & \text{si } m < \frac{a+b}{2} \\ \frac{2}{b-a + m - \frac{1}{2}} & \text{si } m > \frac{a+b}{2} \end{cases}$

Cuadro 2  
Alturas modales

Se puede comprobar que la altura modal de la bipolarabolica es exactamente la media aritmética de las alturas modales de las distribuciones uniforme y triangular.

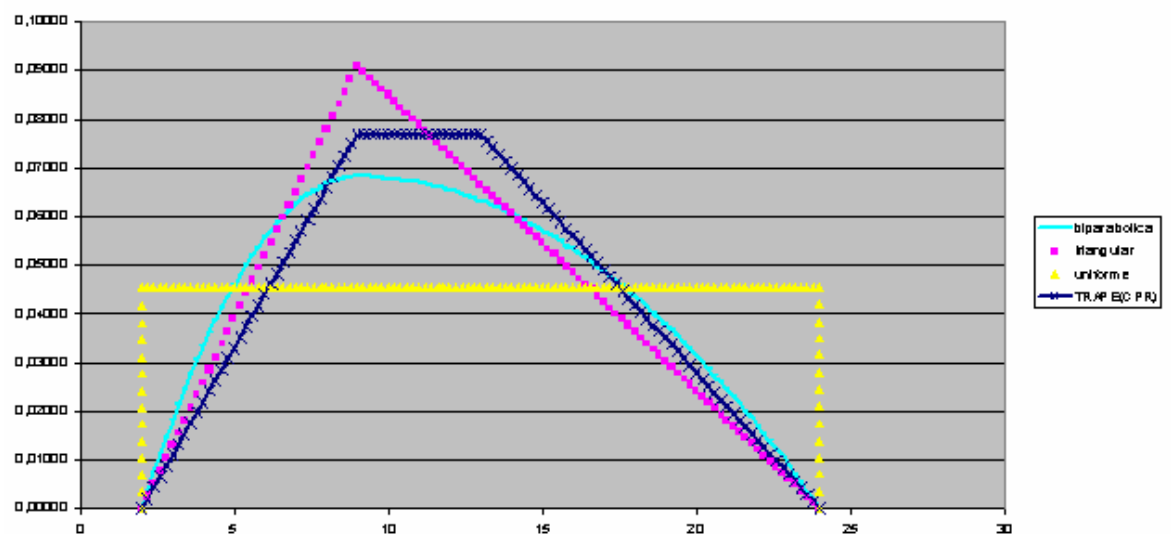


Figura 9  
Comparación de densidades y alturas modales

En conclusión, si se aplica el criterio de máxima varianza defendido por Taha y Herrerías (1994), la distribución bipolarabolica seria la mas conveniente para ser usada en el ámbito del PERT, ya que tiene una media casi tan moderada como la trapezoidal CPR, que presenta la media más moderada de las distribuciones conocidas hasta ahora, pero una varianza mucho mayor que las demás.

## 8. Utilización de la distribución Biparabolica en el Método de las Dos Funciones de Distribución

Si deseamos utilizar la distribución bipolarabolica en el MDFD, debemos resolver un problema algebraico ya que las funciones de distribución vienen dadas por ecuaciones cúbicas.

Supongamos que el Activo esta representado por la función  $B_1(a_1, m_1, b_1)$  y que el índice viene dado por la función  $B_2(a_2, m_2, b_2)$  si estandarizamos ambas variables tendremos las distribuciones  $B_1^S(0, M_1, 1)$  y  $B_2^S(0, M_2, 1)$  cuyas funciones de distribución serán respectivamente  $G_1^S(t)$  y  $G_2^S(t)$  y vendrán dadas por:

$$G_i(t_i) = \begin{cases} -\frac{3}{2}M_i \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{t_i}{M_i} \right)^3 - \left( \frac{t_i}{M_i} \right)^2 \right] & 0 \leq t \leq M_i \\ 1 - (1 - M_i) \left( -\frac{3}{2} \right) \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{1-t_i}{1-M_i} \right)^3 - \left( \frac{1-t_i}{1-M_i} \right)^2 \right] & M_i \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (i = 1, 2)$$

**(29)**

Dado un valor concreto del índice  $t_2^0$  debemos encontrar el valor del activo  $t_1^0$  que cumple la condición:

$$G_1(t_1^0) = G_2(t_2^0) \Rightarrow t_1^0 = G_1^{-1}(G_2(t_2^0))$$

**(30)**

Y posteriormente el valor será:

$$X_1^0 = a_1 + t_1^0(b_1 - a_1)$$

Al plantear este análisis, nos encontramos con dos casos que a su vez se subdividen en tres casos particulares:

**Primer caso**

$$M_2 < M_1 \begin{cases} t_2^0 \in (0, M_2) \\ t_2^0 \in (M_1, 1) \\ t_2^0 \in (M_2, M_1) \end{cases}$$

**Segundo caso**

$$M_2 > M_1 \begin{cases} t_2^0 \in (0, M_1) \\ t_2^0 \in (M_2, 1) \\ t_2^0 \in (M_1, M_2) \end{cases}$$

**Solución caso 1**

**Proposición 1:** Cuando  $M_2 < M_1 \Rightarrow G_2(t_2^0) > G_1(t_1^0) \forall t \in (0,1)$ . Véase la figura 10:

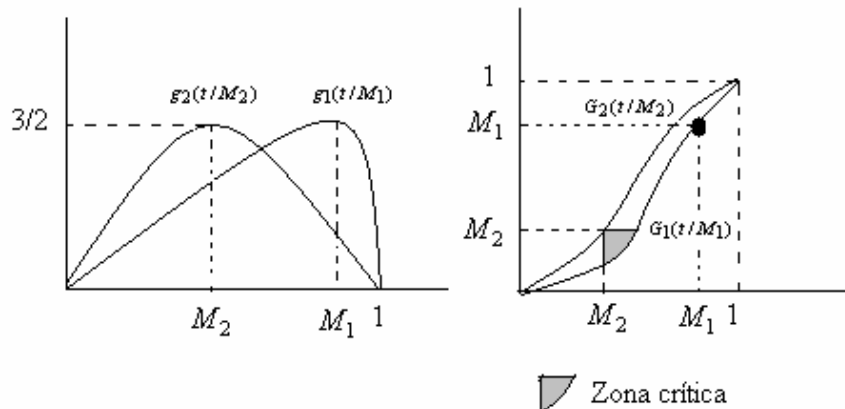


Figura 10

**Proposición 2**

- Si  $0 < t < M_2 \Rightarrow G_2(t) < G_2(M_2) = M_2 < M_1$
- Si  $M_1 < t < 1 \Rightarrow G_2(t) > G_2(M_1) > G_1(M_1)M_2 = M_1$
- Si  $M_2 < t < M_1 \Rightarrow G_2(t) \underset{>}{<} M_1$  véase la zona crítica de la gráfica

**Caso 1.1.** Dado  $t_2^0 \in (0, M_2)$  se deduce que  $G_2(t_2^0) < M_1$  y aplicando la igualdad de la expresión (30):

$$G_1(t_1^0) = -\frac{3}{2}M_1 \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{t_1}{M_1} \right)^3 - \left( \frac{t_1}{M_1} \right)^2 \right] = -\frac{3}{2}M_2 \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{t_2}{M_2} \right)^3 - \left( \frac{t_2}{M_2} \right)^2 \right] = G_2(t_2^0) \tag{31}$$

Operando:

$$\frac{1}{3} \left( \frac{t_1^0}{M_1} \right)^3 - \left( \frac{t_1^0}{M_1} \right)^2 = -\frac{2}{3} \frac{G_2(t_2^0)}{M_1}$$

donde:

$$k = -\frac{2}{3} \frac{G_2(t_2^0)}{M_1}$$

(32)

$$z = \frac{t_1^0}{M_1}$$

(33)

Obteniendo la siguiente ecuación cúbica:

$$z^3 - 3z^2 - 3k = 0$$

(34)

Una vez resuelta la ecuación cúbica, utilizaremos los valores (a,m,b) para calcular  $t_1^0$  y

$$X_1^0 = a_1 + t_1^0 (b_1 - a_1).$$

**Caso 1.2.** Dado  $t_2^0 \in (M_1, 1)$  se deduce que  $G_2(t_2^0) > M_1$  y de manera análoga al caso anterior planteamos la siguiente ecuación:

$$1 - (1 - M_1) \left( -\frac{3}{2} \right) \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{1 - t_1}{1 - M_1} \right)^3 - \left( \frac{1 - t_1}{1 - M_1} \right)^2 \right] = G_2(t_2^0)$$

(35)

Operando:

$$\frac{1}{3} \left( \frac{1 - t_1}{1 - M_1} \right) - \left( \frac{1 - t_1}{1 - M_1} \right)^2 = -\frac{2}{3} \frac{1 - G_2(t_2^0)}{(1 - M_1)}$$

Donde:

$$z = \frac{1 - t_1}{1 - M_1}$$

(36)

$$k = -\frac{2}{3} \frac{1 - G_2(t_2^0)}{(1 - M_1)}$$

(37)

Se obtiene la siguiente ecuación cúbica:

$$\frac{1}{3}z^3 - z^2 = 0$$

(38)

Esto nos permitiría obtener un valor para  $z_0$ , y a partir de este valor obtener un valor para  $t_1^0$  y  $X_1^0 = a_1 + t_1^0(b_1 - a_1)$ .

**Caso 1.3.** Dado  $t_2^0 \in (M_2, M_1)$  puede ocurrir que  $G_2(t_2^0)$  sea menor o mayor que  $M_1$ . En el caso en que  $G_2(t_2^0) < M_1$  operamos como en el caso 1.1, y cuando  $G_2(t_2^0) > M_1$  operamos como en el caso 1.2.

### Solución caso 2

**Proposición 3:** Cuando  $M_1 < M_2 \Rightarrow G_1(t_1^0) > G_2(t_2^0) \forall t \in (0,1)$ . Véase la grafica:

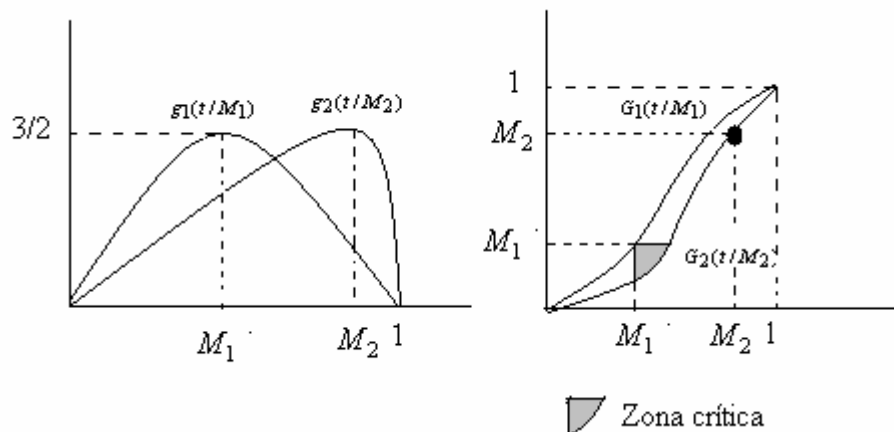


Figura 11

### Proposición 4

- Si  $0 < t < M_1 \Rightarrow G_2(t) < G_1(t) < G_1(M_1) < M_1$
- Si  $M_2 < t < 1 \Rightarrow G_2(t) > G_2(M_2) = M_2 > M_1$
- Si  $M_1 < t < M_2 \Rightarrow G_2(t) > M_1$  véase la zona crítica de la gráfica

### **Caso 2.1.**

Dado  $t_2^0 \in (0, M_1)$  se deduce que  $G_2(t_2^0) < M_1$  y aplicando la igualdad de la expresión (30):

$$-\frac{3}{2}M_1 \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{t_1}{M_1} \right)^3 - \left( \frac{t_1}{M_1} \right)^2 \right] = G_2(t_2^0)$$

(39)

operando: 
$$\frac{1}{3} \left( \frac{t_1}{M_1} \right)^3 - \left( \frac{t_1}{M_1} \right)^2 = -\frac{2}{3} \frac{G_2(t_2^0)}{M_1}$$

Donde

$$z = \left( \frac{t_1}{M_1} \right)$$

(40)

$$k = -\frac{2}{3} \frac{G_2(t_2^0)}{M_1}$$

(41)

Se obtiene la siguiente ecuación cúbica:

$$z^3 - 3z - 3k = 0$$

(42)

Esto nos permitiría obtener un valor para  $z_0$ , y a partir de este valor obtener un valor para  $t_1^0 = z_0 M_1$  y  $X_1^0 = a_1 + z_0 M_1 (b_1 - a_1)$ .

### **Caso 2.2.**

Dado  $t_2^0 \in (M_2, 1)$  se deduce que  $G_2(t_2^0) > M_1$  y aplicando la igualdad de la expresión (39) obtenemos la expresión (43). Este caso se resuelve de manera similar al caso 1.2.

$$1 - (1 - M_1) \left( -\frac{3}{2} \right) \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{1-t_1}{1-M_1} \right)^3 - \left( \frac{1-t_1}{1-M_1} \right)^2 \right] = G_2(t_2^0)$$

(43)

### Caso 2.3

Dado  $t_2^0 \in (M_1, M_2)$  puede ocurrir que  $G_2(t_2^0)$  sea menor o mayor que  $M_1$ . En el caso en que  $G_2(t_2^0) < M_1$  operamos como en el caso 2.1, y cuando  $G_2(t_2^0) > M_1$  operamos como en el caso 2.2.

Una vez expuestos todos los posibles casos con sus correspondientes planteamientos se presenta en el cuadro 3 una síntesis de todos los resultados obtenidos:

$M_1 < M_2$	$M_2 < M_1$	Valor de k	Valor de z	Cúbica	Valor estándar	Valor real
$0 < t < M_2$	$0 < t < M_1$	$k = -\frac{2}{3} \frac{G_2(t_2^0)}{M_1}$	$z = \frac{t_1^0}{M_1}$	$z^3 - 3z^2 - 3k = 0$	$t_1^0 = z_0 M_1$	$X_1^0 = a_1 + t_1^0 (b_1 - a_1)$
$M_1 < t < 1$	$M_2 < t < 1$	$k = -\frac{2}{3} \frac{1 - G_2(t_2^0)}{(1 - M_1)}$	$z = \frac{1 - t_1}{1 - M_1}$	$\frac{1}{3} z^3 - z^2 = 0$	$t_1^0 = 1 - z_0 (1 - M_1)$	$X_1^0 = a_1 + [1 - z_0 (1 - M_1)] (b_1 - a_1)$
$M_2 < t < M$	$M_1 < t < M$	$G_2(t_2^0) < M_1 \Rightarrow CASO1$				
		$G_2(t_2^0) > M_1 \Rightarrow CASO2$				

Cuadro 3

## 9. La distribución Biparabolica Generalizada

Para construir la Biparabolica generalizada, introduciremos un nuevo parámetro  $\alpha$ , tomaremos como función de densidad generadora en el intervalo  $[0,1]$

$$p(x) = a(x^{2\alpha} - 2x^\alpha)$$

(44)

Que será la función generadora de densidad:

$$\int_0^1 a(x^{2\alpha} - 2x^\alpha) dx = 1, \text{ de donde se deduce que } a = \frac{(2\alpha + 1)(\alpha + 1)}{-3\alpha - 1}$$

En el caso en que  $\alpha = 1$  tendríamos la distribución bipolarabolica. Por lo tanto, la función generadora de densidad será:

$$p(x) = \frac{(2\alpha + 1)(\alpha + 1)}{-3\alpha - 1} (x^{2\alpha} - 2x^\alpha)$$

(45)

Valor esperado de  $x$

$$E(x) = \frac{(2\alpha + 1)(3\alpha + 2)}{2(\alpha + 2)(3\alpha + 1)}$$

**(46)**

Valor esperado de  $x^n$

$$E[x^n] = \frac{(2\alpha + 1)(\alpha + 1)}{3\alpha + 1} \left[ \frac{3\alpha + n + 1}{(2\alpha + n + 1)(\alpha + n + 1)} \right]$$

**(47)**

Definimos la función de densidad  $g(t)$  en el intervalo  $[0,1]$  tomando como generadora a la función  $p(x)$  de la expresión (1).

$$g(t/M, p(\bullet/\alpha)) = \begin{cases} \frac{(2\alpha + 1)(\alpha + 1)}{-3\alpha - 1} \left( \left( \frac{t}{M} \right)^{2\alpha} - 2 \left( \frac{t}{M} \right)^\alpha \right) & 0 \leq t \leq M \\ \frac{(2\alpha + 1)(\alpha + 1)}{-3\alpha - 1} \left( \left( \frac{1-t}{1-M} \right)^{2\alpha} - 2 \left( \frac{1-t}{1-M} \right)^\alpha \right) & M \leq t \leq 1 \end{cases}$$

**(48)**

Podemos comprobar que cuando  $\alpha = 1$  se obtiene la distribución biparabolica. Utilizando la expresión presentada en Van Dorp y Kotz (2003):

$$E(t/M) = (2M - 1)E(x/\alpha) + (1 - M)$$

$$E(t) = \frac{M6\alpha^2 + 7\alpha + 2}{6\alpha^2 + 14\alpha + 4}$$

**(49)**

Se comprueba que si estuviésemos en el intervalo  $(a,m,b)$  el valor esperado de  $x$ ,

$t = \frac{x-a}{b-a}$ , sería:

$$E(x) = \frac{(7\alpha + 2)a + 6\alpha^2 m + (7\alpha + 2)b}{6\alpha^2 + 14\alpha + 4}$$

**(50)**

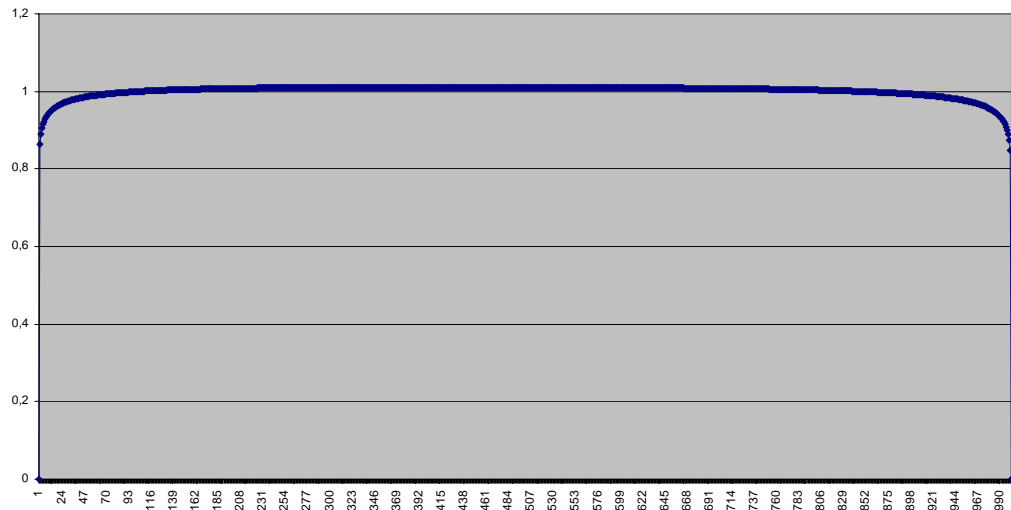
Luego la ponderación de la moda sería:  $\frac{6\alpha^2}{6\alpha^2 + 14\alpha + 4}$

Con respecto a la varianza

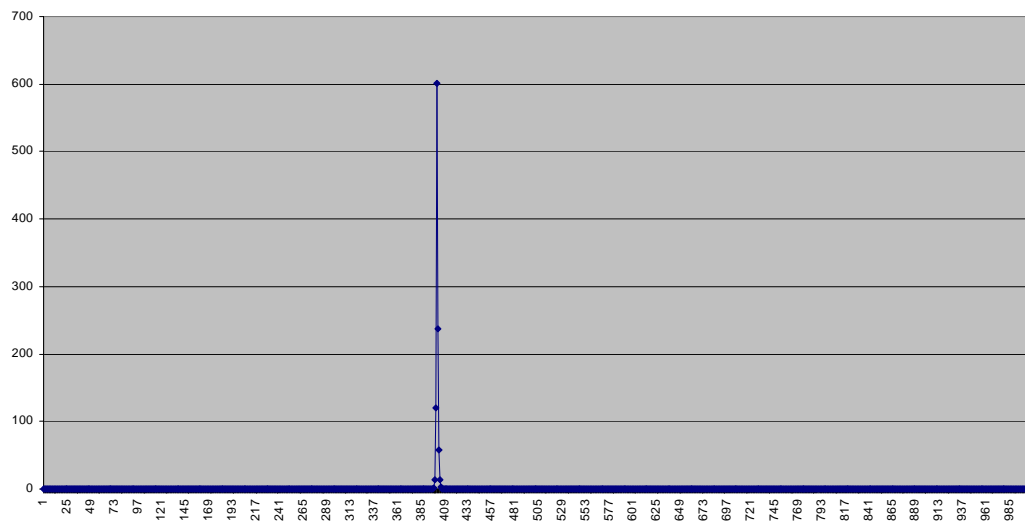
$$Var(t/M, \alpha) = \frac{(148\alpha^4 + 244\alpha^3 + 40\alpha^2)M^2 - (148\alpha^4 + 244\alpha^3 + 40\alpha^2)M + (82\alpha^4 + 247\alpha^3 + 247\alpha^2 + 96\alpha + 12)}{4(3\alpha + 1)^2(\alpha + 2)^2(2\alpha + 3)(\alpha + 3)}$$

**(51)**

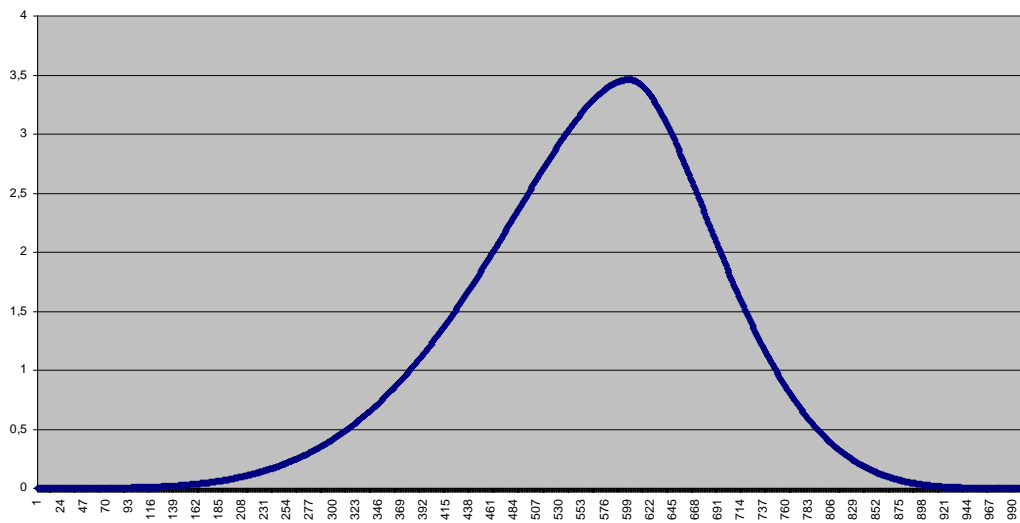
Con el objeto de obtener conclusiones acerca de la distribución generalizada se presentan las figuras 12.a, 12.b, 12.c, 12.d, 12.e, 12.f, 12.g, 12.h, y 12.i, , que recogen funciones de densidades para valores concretos de M y  $\alpha$ .



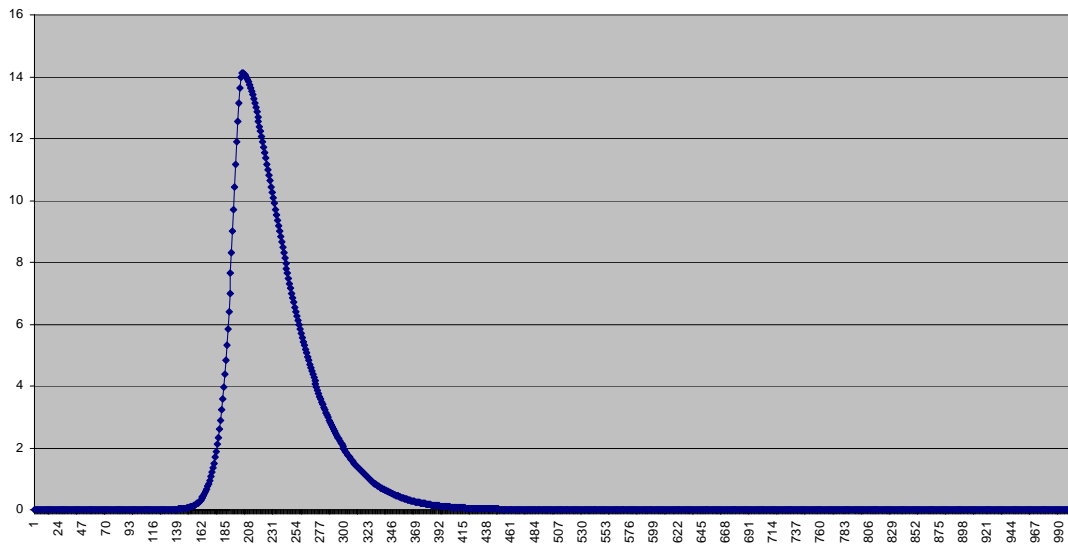
**Figura 12.a**  
M=0,4  $\alpha$ =0,08



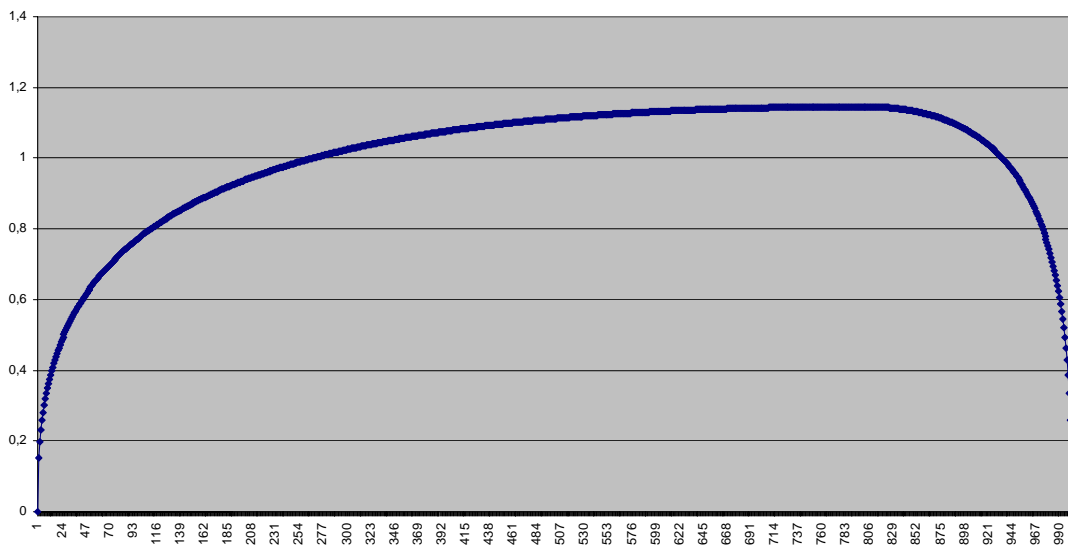
**Figura 12.b**  
M=0,4  $\alpha$ =90



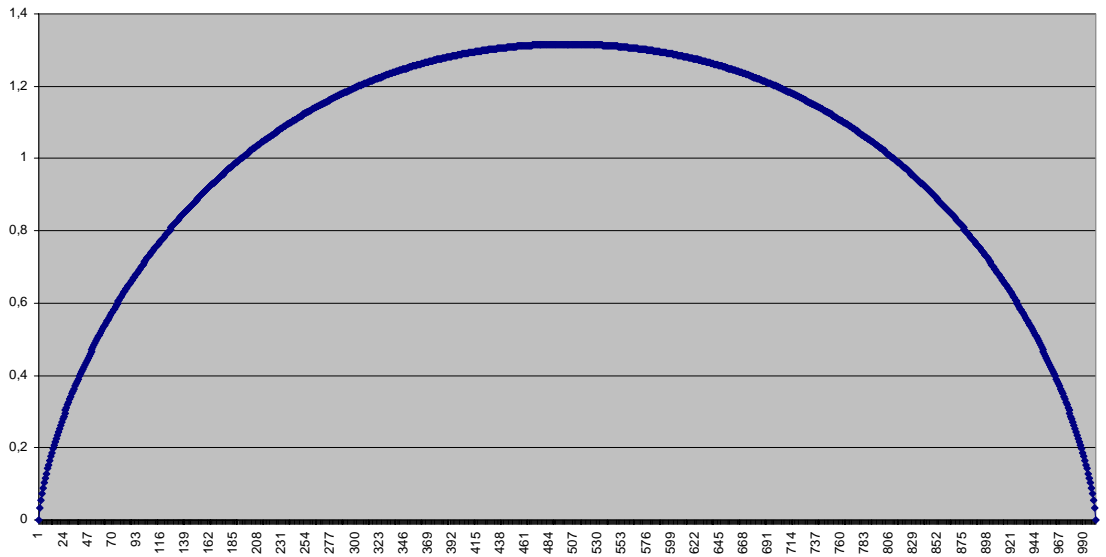
**Figura 12.c**  
 $M=0,4 \quad \alpha=3$



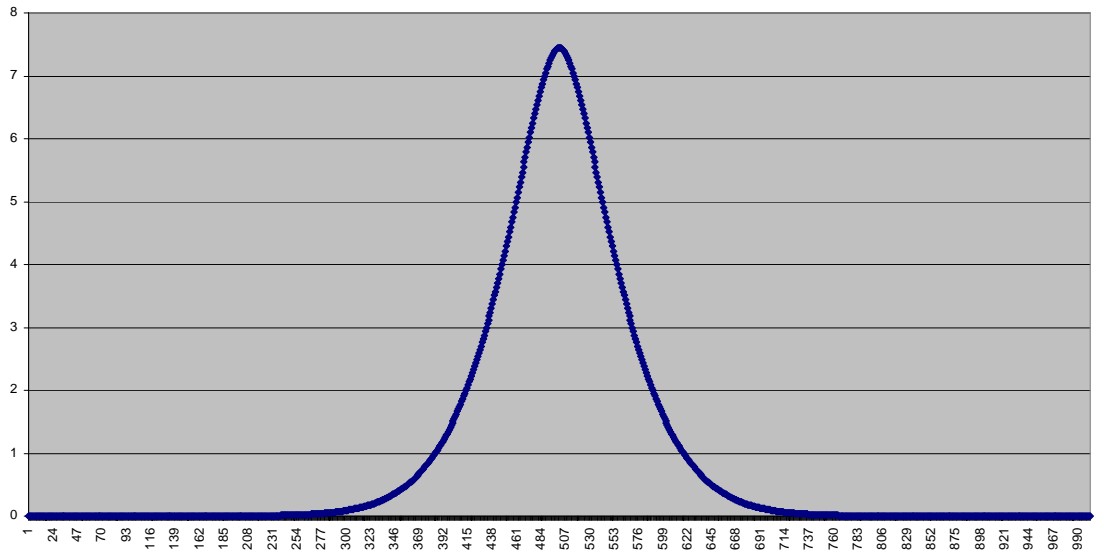
**Figura 12.d**  
 $M=0,2 \quad \alpha=20$



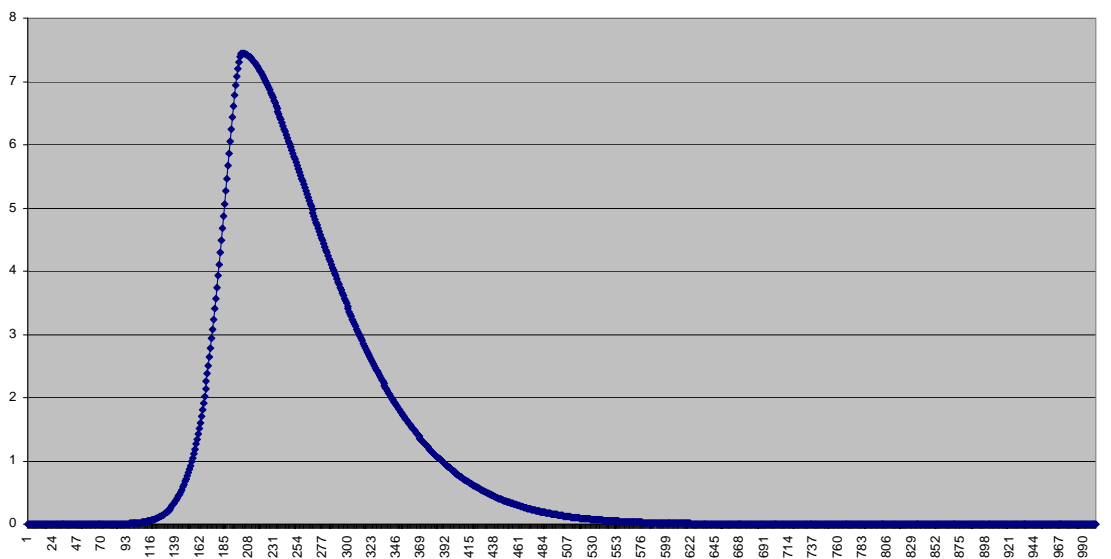
**Figura 12.e**  
 $M=0,8 \quad \alpha=0,4$



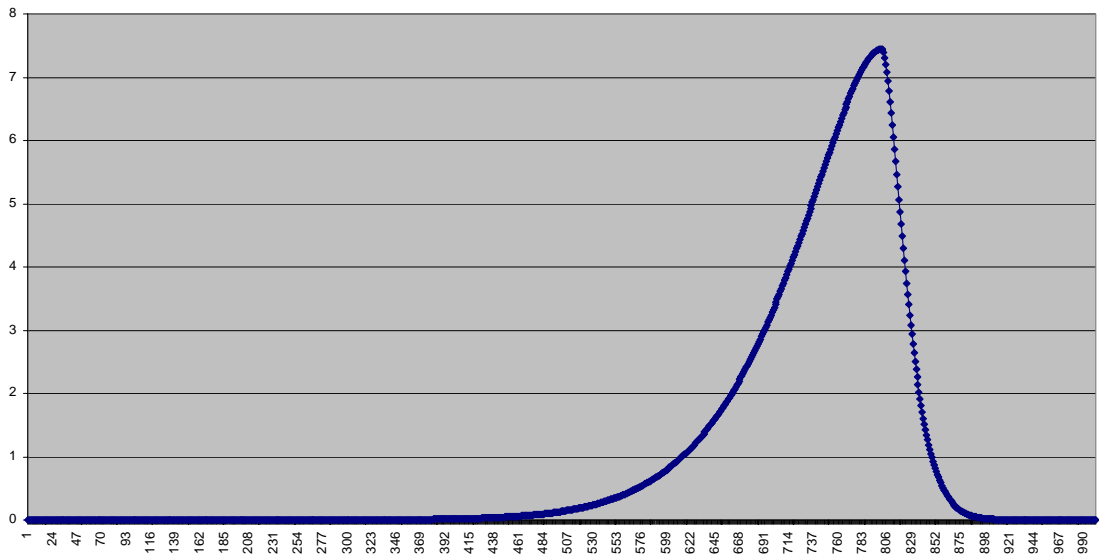
**Figura 12.f**  
 $M=0,5 \quad \alpha=0,7$



**Figura 12.g**  
 $M=0,5 \quad \alpha=10$



**Figura 12.h**  
 $M=0,2 \quad \alpha=10$



**Figura 12.i**  
**M=0,8  $\alpha$  =10**

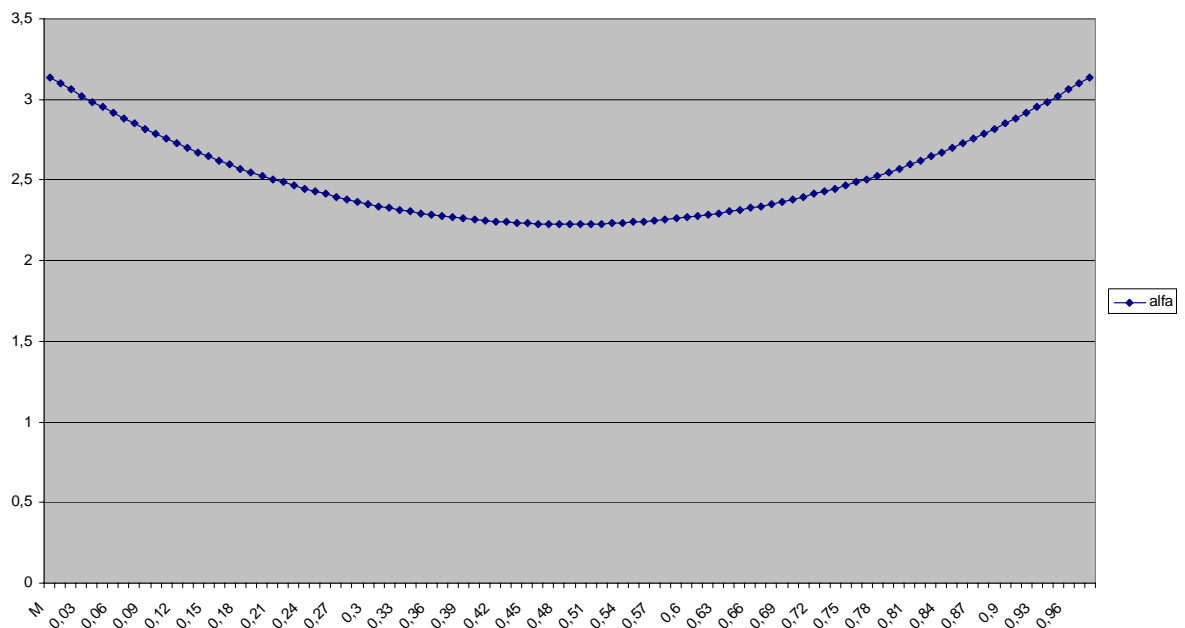
Como se observa en los gráficos 12.a y 12.i la distribución biparabólica generalizada, puede adoptar la forma de la distribución uniforme, a medida que  $\alpha$  tiende a 0, o puede ser una distribución degenerada con toda la masa concentrada en un punto, figura 12.b, a medida que  $\alpha$  tiende a infinito. Para valores de  $\alpha$  entre 1 y 10 la distribución adopta formas parecidas a la distribución normal, con la diferencia de que la distribución biparabólica generalizada puede ser asimétrica, figura 12.c y figura 12.d. Para valores de  $\alpha$  entre 0 y 1 pero próximos a 0,5 la distribución es parecida a una biparabólica muy suavizada, figura 12.e y figura 12.f, con  $\alpha =10$  podemos ver como la similitud con la normal es bastante acentuada, gráfica 12.g, y se desdibuja a medida que aumenta la asimetría en las gráficas 12.h y 12.i.

A modo de conclusión, destacaremos que, como se ha afirmado anteriormente, la distribución biparabólica se convierte en la distribución más conveniente en el ámbito del PERT. Los creadores de este método quisieron sustituir la distribución Normal por la distribución Beta básicamente por dos razones: En primer lugar, porque la distribución beta el recorrido de la variable está limitado, no presenta colas infinitas como es el caso de la distribución normal, y por eso es más adecuada para la valoración ya que tanto el tiempo de terminación de una tarea como el flujo de caja son, obviamente, variables acotadas. En segunda lugar, la distribución beta puede presentar asimetría, en contra de lo que le ocurre a la distribución normal que siempre es simétrica.

Por otro lado, se conoce que la beta del PERT clásico tiene la misma varianza y curtosis que la distribución normal. Es evidente que la intención fue utilizar una distribución acotada y con posibles asimetrías que fuese lo más parecida posible a la distribución normal. La distribución bipolarabolica, como se puede comprobar en la figura 12 anterior, reúne las dos condiciones mencionadas y su parecido con la normal se manifiesta claramente. Por otra parte, es posible conseguir que tenga la misma varianza que la distribución normal ( $1/36$ ), igualando la expresión (51) a  $1/36$  lo que conduciría a resolver la siguiente ecuación sexta:

$$-18\alpha^6 - 165\alpha^5 + (1332M^2 - 1332M + 157)\alpha^4 + (2196M^2 - 2196M + 1240)\alpha^3 + (360M^2 - 360M + 1414)\alpha^2 + 576\alpha + 72 = 0$$

**(52)**

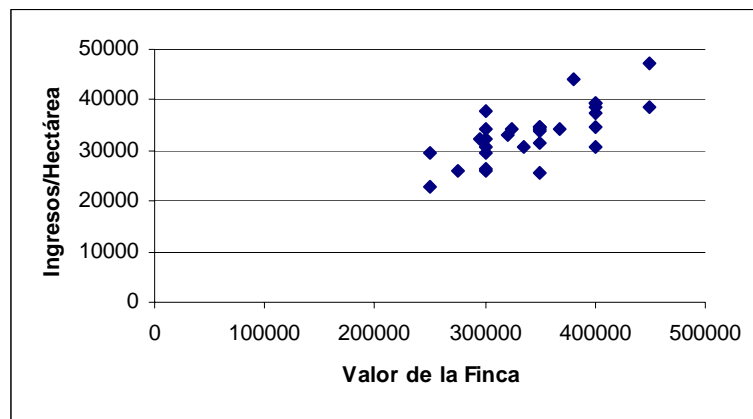


**Figura 13**

Se puede comprobar que para cada valor  $M \in (0,1)$ , existe un solo valor de  $\alpha > 0$  que verifica la ecuación (52), la figura 13 recoge la relación entre M y  $\alpha$ . Los valores de  $\alpha$  entre 2,2 y 3,2 dan lugar a bipolarabolicas generalizadas que adoptan formas similares a la distribución normal.

## 10. Aplicación practica

Se toma como punto de partida el caso práctico desarrollado por Alonso y Lozano, (1985), trabajo que ha sido reiteradamente citado en la aplicaciones del método que nos ocupa, Un simple representación gráfica en un diagrama de dispersión nos permite ver que en principio la variable ingresos/Ha, puede tener capacidad para explicar el valor de las tierras.



En la Tabla 1, tenemos recogidos en las columnas (1) y (2), los valores de las fincas y los ingresos por hectárea, y en las columnas (3) y (4) dichos datos estandarizados. Al aplicar la distribución biparabolica en el método de las dos funciones de distribución se plantea un análisis algebraico que fue resuelto en el apartado correspondiente y que en este apartado llevaremos a la practica. En primer lugar hay que tener en cuenta que dado un valor determinado del índice  $t_2^0$  debemos encontrar el valor del activo  $t_1^0$  que cumple la condición:

$$G_1(t_1^0) = G_2(t_2^0) \Rightarrow t_1^0 = G_1^{-1}(G_2(t_2^0))$$

Y desestandarizando el valor resultante será:  $X_1^0 = a_1 + t_1^0(b_1 - a_1)$

Si partimos de los valores para el índice aportados por el experto, cuadro 4:

VALORES DEL INDICE		
Pesimista	20000	1
Optimista	50000	0
Más probable	31466	0,3822

Cuadro 4

Y de los valores para el valor del activo, cuadro 5:

VALORES DEL ACTIVO		
Pesimista	250000	1
Optimista	500000	0
mas probable	289575	0,1583

Cuadro 5

Se observa que la moda del activo,  $M_1$ , es inferior a la moda del índice,  $M_2$ . Por tanto nos encontramos en el primer caso descrito en el cuadro 3. El siguiente paso es hallar el valor de  $G_2(t_2^0)$ , y para ello se diferencian tres casos:

- cuando  $t_2^0 \in (0, M_2)$ : 
$$-\frac{3}{2}M_1 \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{t_1}{M_1} \right)^3 - \left( \frac{t_1}{M_1} \right)^2 \right] = G_2(t_2^0)$$

- cuando  $t_2^0 \in (M_1, 1)$ : 
$$1 - (1 - M_1) \left( -\frac{3}{2} \right) \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{1-t_1}{1-M_1} \right)^3 - \left( \frac{1-t_1}{1-M_1} \right)^2 \right] = G_2(t_2^0)$$

- cuando  $t_2^0 \in (M_2, M_1)$  dependerá de si  $G_2(t_2^0) < M_1$  o  $G_2(t_2^0) > M_1$  aplicándose el caso 1 o el caso 2 respectivamente.

La columna (5) de la tabla 1 recoge el valor de  $G_2(t_2^0)$  que se ha calculado de manera diferente según nos encontremos en el caso 1 o en el caso 2. Se presenta de manera explícita en la columna (6) el caso al que corresponde cada valor. Resolviendo la ecuación cúbica correspondiente a cada caso obtenemos el valor de  $z$  que se recoge en la columna (6), escogiéndose solo aquel valor que se encuentra entre 0 y 1 y que es inferior a la moda del activo. Deshaciendo el cambio obtenemos el valor para el activo  $t_1^0$  y que se recoge en la columna (8) de forma estandarizada y en la columna (9) desestandarizado. En la tabla 2 se obtienen los residuos, restando al valor real del activo que se ofrece en el ejemplo el valor obtenido mediante la aplicación del método de las dos funciones de distribución.

(1) Valor de la Finca	(2) Ingresos /Ha	(3) Valor Estandarizado	(4) Ingresos Estandarizados	(5) G(t0)	(6) CASO	(7) z	(8) t	(9) Valor estimado
400000	30810	0,6	0,360333333	0,51710714	2	0,847427	0,28672069	321680,174
450000	38587,5	0,8	0,619583333	0,81045109	2	0,516938	0,56489329	391223,321
400000	38587,5	0,6	0,619583333	0,81045109	2	0,516938	0,56489329	391223,321
450000	47400	0,8	0,913333333	0,98905881	2	0,119756	0,89920137	474800,344
300000	30870	0,2	0,362333333	0,51971545	2	0,845001	0,28876266	322190,665
400000	37472,5	0,6	0,582416667	0,77484446	2	0,565837	0,523735	380933,749
400000	34590	0,6	0,486333333	0,67198619	2	0,690203	0,41905613	354764,034
350000	25725	0,4	0,190833333	0,28277518	1	0,833533	0,13194827	282987,068
336000	30870	0,344	0,362333333	0,51971545	2	0,845001	0,28876266	322190,665
350000	31600	0,4	0,386666667	0,55109452	2	0,815252	0,31380239	328450,598
275000	25942,5	0,1	0,198083333	0,2932389	1	0,86907	0,13757378	284393,445
300000	25942,5	0,2	0,198083333	0,2932389	1	0,86907	0,13757378	284393,445
300000	37920	0,2	0,597333333	0,78943361	2	0,546259	0,5402138	385053,45
400000	39514	0,6	0,650466667	0,83809154	2	0,476018	0,59933565	399833,912
300000	34360	0,2	0,478666667	0,66316352	2	0,699981	0,41082599	352706,498
400000	39514	0,6	0,650466667	0,83809154	2	0,476018	0,59933565	399833,912
350000	34360	0,4	0,478666667	0,66316352	2	0,699981	0,41082599	352706,498
380000	44010	0,52	0,800333333	0,94417987	2	0,274398	0,7690392	442259,801
250000	29340	0	0,311333333	0,45191147	2	0,90561	0,23774806	309437,016
350000	34760	0,4	0,492	0,67845226	2	0,685465	0,42304411	355761,027
320000	33007	0,28	0,433566667	0,60959906	2	0,75699	0,36284152	340710,379
300000	26519	0,2	0,2173	0,32081962	1	0,965866	0,15289659	288224,147
250000	22752	0	0,091733333	0,13721403	1	0,382994	0,06062795	265156,988
350000	33741	0,4	0,458033333	0,63900355	2	0,726174	0,38877934	347194,836
350000	34760	0,4	0,492	0,67845226	2	0,685465	0,42304411	355761,027
300000	32274	0,2	0,409133333	0,57945757	2	0,787483	0,33717556	334293,89
325000	34360	0,3	0,478666667	0,66316352	2	0,699981	0,41082599	352706,498
295000	32274	0,18	0,409133333	0,57945757	2	0,787483	0,33717556	334293,89
300000	29340	0,2	0,311333333	0,45191147	2	0,90561	0,23774806	309437,016
368000	34360	0,472	0,478666667	0,66316352	2	0,699981	0,41082599	352706,498

Tabla 1

Valores OBSERVADOS	Valores ESTIMADOS	e	e <sup>2</sup>	abs e
REALES	REALES	REALES	REALES	REALES
400000	321680,174	78319,8265	6.133.995.219,07	78.319,83
450000	391223,321	58776,6787	3.454.697.953,13	58.776,68
400000	391223,321	8776,67865	77.030.088,13	8.776,68
450000	474800,344	-24800,3437	615.057.047,64	24.800,34
300000	322190,665	-22190,6646	492.425.594,28	22.190,66
400000	380933,749	19066,2507	363.521.916,71	19.066,25
400000	354764,034	45235,9663	2.046.292.644,83	45.235,97
350000	282987,068	67012,9315	4.490.732.991,57	67.012,93
336000	322190,665	13809,3354	190.697.744,88	13.809,34
350000	328450,598	21549,4021	464.376.730,87	21.549,40
275000	284393,445	-9393,44525	88.236.813,66	9.393,45
300000	284393,445	15606,5548	243.564.551,16	15.606,55
300000	385053,45	-85053,4499	7.234.089.344,14	85.053,45
400000	399833,912	166,08765	27.585,11	166,09
300000	352706,498	-52706,4981	2.777.974.939,33	52.706,50
400000	399833,912	166,08765	27.585,11	166,09
350000	352706,498	-2706,49808	7.325.131,83	2.706,50
380000	442259,801	-62259,8008	3.876.282.801,88	62.259,80
250000	309437,016	-59437,0158	3.532.758.841,27	59.437,02
350000	355761,027	-5761,02738	33.189.436,42	5.761,03
320000	340710,379	-20710,3792	428.919.808,68	20.710,38
300000	288224,147	11775,8531	138.670.715,06	11.775,85
250000	265156,988	-15156,9876	229.734.271,59	15.156,99
350000	347194,836	2805,16395	7.868.944,79	2.805,16
350000	355761,027	-5761,02738	33.189.436,42	5.761,03
300000	334293,89	-34293,8897	1.176.070.872,47	34.293,89
325000	352706,498	-27706,4981	767.650.035,58	27.706,50
295000	334293,89	-39293,8897	1.544.009.769,72	39.293,89
300000	309437,016	-9437,01575	89.057.266,27	9.437,02
368000	352706,498	15293,5019	233.891.201,13	15.293,50
			40.771.367.282,71	835.028,75

Tabla 2

En la tabla 3 se comparan los residuos de la tabla 2, mediante la desviación absoluta media, obtenidos con el uso de la distribución bipolar en el método de las dos funciones de distribución, con los residuos obtenidos mediante la aplicación de otros métodos. Véase García, García y Trinidad.

RESIDUOS								
Valores Observados	Normal	Beta	Triangula	Error mínim	STSP	Regresión STSI	Regresión Linea	Biparabolica
250000	36733,89	22596,28	14632,47	5565,66	11962,21	3112,05	16411,13	78319,82648
350000	109299,05	52831,88	60296,22	62623,24	70286,86	70246,9	62358,68	58776,67865
275000	32291,96	23965,76	16537,96	14704,01	5439,64	6702,12	14194,49	8776,67865
300000	57291,96	1034,24	8462,04	10295,99	19560,36	18297,88	10805,51	24800,3437
300000	51972,02	3730,54	3600,42	4127,44	17425,73	13131,86	6688,72	22190,66458
250000	24060,17	77046,1	70189,07	76057,26	48163,36	62147,12	63456,04	19066,25072
300000	25939,83	27046,1	20189,07	26057,26	1836,64	12147,12	13456,04	45235,96628
400000	112374,67	60804,35	67414,42	58213,74	89412,77	74680,21	76046,69	67012,93152
300000	11820,99	39691,55	33091,56	42428,26	11173,53	25857,45	24381,77	13809,33542
336000	47820,99	3691,55	2908,44	6428,26	24826,47	10142,55	11618,23	21549,4021
350000	55084,55	4275	10752,35	239,26	31133,94	17601,02	20405,3	9393,44525
300000	1135,12	51295,61	44931,5	57451,06	26291,2	38438,69	34407,73	15606,55472
295000	6135,12	56295,61	49931,5	62451,06	31291,2	43438,69	39407,73	85053,44992
320000	12100,75	37353,86	31112,89	45294,16	14327,39	25007,11	19642,09	166,08765
350000	35327,4	13420,36	7302,71	23147,96	7667,61	1584,48	5116,42	52706,49808
300000	20384,73	68536,4	62522,73	79771,26	49049,2	57131,34	49303,86	166,08765
350000	29615,27	18536,4	12522,73	29771,26	950,8	7131,34	696,14	2706,498072
325000	4615,27	43536,4	37522,73	54771,26	24049,2	32131,34	24303,86	62259,80082
368000	47615,27	536,4	5477,27	11771,26	18950,8	10868,66	18696,14	59437,01572
400000	77492,83	29562,65	35537,68	17767,74	48463,21	40807,63	49053,71	5761,027372
350000	25924,07	21842,4	15895,93	34051,26	3372,54	10715,74	2160,26	20710,37922
350000	25924,07	21842,4	15895,93	34051,26	3372,54	10715,74	2160,26	11775,85302
400000	50893,12	5738,79	11229,55	13075,01	17691	14977,55	28469,78	15156,98752
300000	53236,41	97959,8	92544,21	117863,26	87013,99	89032,5	74725,82	2805,16395
450000	90603,9	46523,31	51826,76	24994,49	56007,46	54986,03	70507,56	5761,027372
400000	40603,9	3476,69	1826,76	25005,51	6007,46	4986,03	20507,56	34293,88972
400000	32054,16	11134,21	5986,42	34919,06	3596,28	3316,33	13891,43	27706,49808
400000	32054,16	11134,21	5986,42	34919,06	3596,28	3316,33	13891,43	39293,88972
380000	29434,93	68293,65	63901,18	103026,26	68555,69	63604,99	38214,51	9437,01575
450000	9282,15	26312	22489,05	69299,26	29825,35	23982,78	7577,5	15293,50192
	1189122,67	950044,45	882517,91	1180141,83	831300,72	850239,59	832556,39	835028,7498
Desviación	At							
Media	39637,42	31668,15	29417,27	39338,06	27710,02	28341,32	27751,88	27834,29166

Tabla 3

Se observa que la distribución bipolarabólica ofrece una desviación absoluta media algo superior a la obtenida mediante el uso de la distribución STSP y el uso de la regresión. Sin embargo, se ha de tener en cuenta que la distribución STSP es una distribución tetraparamétrica y la regresión hace uso del conjunto total de datos, mientras que la distribución bipolarabólica es una distribución triparamétrica y aun así presenta una menor desviación media que mediante el uso de otras distribuciones como la Normal, la Triangular, la Beta, el método de error mínimo y la regresión STSP

## **11. Conclusiones**

1. La distribución bipolarabólica es una distribución que reparte la densidad de forma continua, en el sentido que la moda no supone un punto de discontinuidad para la derivada de la función de densidad
2. La distribución bipolarabólica es la distribución más adecuada para su uso en el ámbito del PERT, de entre todas las distribuciones que pueden obtenerse a partir de las tres estimaciones habituales del experto, pesimista, más probable y optimista, en el sentido de que es la que tienen más varianza y solo le supera en moderación la distribución Trapezoidal CPR.
3. La distribución bipolarabólica generalizada es una distribución que se puede obtener a partir de las tres estimaciones habituales del PERT, esta definida en un dominio acotado, tiene forma similar a la distribución normal y puede presentar asimetrías por todo ello se puede afirmar que satisface las intenciones que perseguían los creadores de PERT con el uso de la distribución Beta, y refiriéndonos a esta última presenta la ventaja de que conocemos, explícitamente, su función de distribución, por lo que resulta adecuado para ser utilizada en el MDFD.
4. Como puede observarse en las figuras 12.a-12.i la distribución bipolarabólica puede adoptar casi la forma de una distribución uniforme (12.a), de una distribución casi-degenerada (con toda la masa concentrada en un punto) (12.b) pasando por formas similares a la normal (12.g), otras formas que recuerdan una normal en la que se ha forzado la asimetría (12.c),(12.d), (12.h) y (12.i), una distribución que recuerda la trapezoidal en la que se han suavizado las aristas, (12.e) y una distribución cuadrática (12.f). En conclusión, la distribución bipolarabólica presenta una gran versatilidad.

5. La aplicación en el MDFD presenta dificultades pues es necesario resolver una ecuación cúbica, a pesar de ello, en el caso práctico tiene el mejor comportamiento de entre todas las distribuciones triparamétricas empleadas.

## 12. Futuras líneas de investigación

1. Obtener una expresión analítica de la curtosis de la distribución Biparabólica Generalizada y tratar de encontrar el valor de  $\alpha$  (o los valores de  $\alpha$ ) que dan una distribución BG con la misma curtosis y varianza que la distribución normal.

2. Tratar de resolver mediante un programa informático el MDFD en el caso de la distribución BG.

3. Construir distribuciones cuya función generadora de densidad sea una ecuación cúbica y puedan ser determinadas a través de los tres valores habituales.

Ejemplo:  $p(x/a, b, c, d)$

i)  $p(0/a, b, c, d) = 0 \Rightarrow d = 0$

ii)  $p(x/a, b, c, d)$  tiene un máximo en el punto  $(1, 0)$

iii)  $p(x/a, b, c, d)$  tiene un punto de inflexión en  $x = 1/2$

De ii) y iii) se deduce que  $c=0$

$$\text{iv) } \int_0^1 (ax^3 + bx) dx = 1 \Rightarrow \frac{a}{4} + \frac{b}{3} = 1$$

$$\text{De i), ii), iii) y iv) se deduce que } p(x/a, b, c, d) = -4x^3 + 6x^2 \quad (53)$$

A partir de (53) se podría construir una Distribución bicúbica y a partir de ella una bicúbica generalizada.

4. Aplicación de la distribución bipolarabólica generalizada para obtener el valor del VAN y calcular el VAN penalizado.

### 13. Bibliografía

- Athanassoulis, Skarsoulis, Belibassakis (1994). Bivariate distributions with given marginals with an application to wave climate description. *Applied Ocean research*, nº 16, pg.1-17
- Alonso, R., Lozano, J. (1985). El método de las dos funciones de distribución: Una aplicación a la valoración de fincas agrícolas en las comarcas Centro y Tierra de Campos (Valladolid). *Anales del INIA, Economía*, 9, 295-325.
- Ballester, E. (1971). Sobre la valoración sintética de tierras y un nuevo método aplicable a la concentración parcelaria. *Revista de Economía Política*, Abril 1971, pp. 225-238.
- Ballester, E. (1973). Nota sobre un nuevo método rápido de valoración. *Revista de Estudios Agrosociales*, 85, Octubre-Diciembre 1973, pp. 75-78.
- Ballester, E., Caballer, V., (1982). Il metodo delle due beta. Un procedimento rapido nella stima dei beni fondiari. *Genio Rurale*, vol. 45, nº 6, pp. 33-36.
- Ballester, E., Rodríguez, J.A. (1999). *El precio de los inmuebles urbanos*. CIE Inversiones Editoriales DOSSAT 2000.
- Barnett, Vic (1980), "Some bivariate Uniform Distributions" *Communications in Statistics*, A9, 453-461.
- Caballer, V., (1994). *Métodos de valoración de empresas*. Ediciones Pirámide, S.A., Madrid, 101-104.
- Caballer, V., (1998). *Valoración agraria. Teoría y práctica*. Ediciones Mundi-Prensa, Madrid, 4ª edición.
- Caballer, V., (1999). *Valoración de árboles, frutales, forestales, medioambientales, ornamentales*. Ediciones Mundi-Prensa.
- Cañas, J. A., Domingo, J., Martínez, J. A. (1994). Valoración de tierras en las campiñas y la Subética de la provincia de Córdoba por el método de las funciones de distribución. *Investigación Agraria. Serie Economía*, vol. 9, nº 3, 447-467.
- Conway, D. A.(1979), "Multivariate Distributions with specified Marginals" Technical Report nº145, Stanford University, Dept. of Statistics.
- Eyraud H. (1936) , Les principes de la mesure des corrélations, *Ann. Univ. Lyon, Sect. A1*, 30-47.
- Farlie, D.J.G. (1960), "The performance of some correlation coefficients for a general Bivariate distribution" *Biometrika*, 47, 307-323
- Frechet, M. (1951). " Sur les Tableaux de Corrélation Dont les Marges Sont Données" *Annals de l'Université de Lyon, Ser. 3*, 14, 53-77

- García, J., Cruz, S., Andújar, A. S., (1999). Il metodo delle due funzioni di distribuzione: Il modello triangolare. *Una revisione. Genio Rurale*, 11, 3-8.
- García, J., Cruz, s., García L.B. (2002a). *Generalización del Método de las dos funciones de distribución (MDFD) a familias betas determinadas con los tres valores habituales. Análisis, Selección y Control de Proyectos y Valoración*. Servicio de publicaciones de la Universidad de Murcia.
- García, J., Cruz, S., García, L.B. (2002b). Regresión a través de las funciones de Distribución. *Actas de la XVI Reunión Asepelt-España*, Madrid (publicación en CD-Rom)
- García, J., Cruz, S., Rosado, Y., (2000). Las funciones de distribución multivariantes en la teoría general de valoración. *Actas de la XIV Reunión Asepelt-España*, Oviedo (publicación en CD-Rom).
- García, J., Cruz, S., Rosado, Y., (2002). Extensión multi-índice del método beta en valoración agraria. *Economía Agraria y Recursos Naturales*. Vol. 2 Num. 2 , pp. 3-26
- García, J., Trinidad, J. E., García L.B. ( ). Valoración por el método de las dos funciones de distribución: Como seleccionar la mejor distribución.
- García, J., Trinidad, J. E., Gómez, J. (1999): El método de las dos funciones de distribución: la versión trapezoidal. *Revista Española de Estudios Agrosociales y Pesqueros*. Nº 185 pp. 57-80.
- García, J., Trinidad, J. E., Sánchez, M. (1997). Selección de una cartera de cultivos: el principio “primero la seguridad” de Roy. *Investigación Agraria. Serie Economía* Vol. 12, nº 1,2,3, pp. 425-445.
- Genest C., Mackay J., (1986) The joy of copulas: Bivariate Distributions with Uniform Marginals. *The American Statistician*, noviembre 1986, Vol. 40, nº 4, pg.280-283
- Guadalajara, N. (1996). *Valoración Agraria*. Casos Prácticos. Ediciones Mundi-Prensa, Madrid.
- Herrerías Pleguezuelo, R., García Pérez, J., Cruz Rambaud, S. Herrerías Velasco, J.M. (2001). Il modello probabilistico trapezoidale nel metodo delle due distribuzione della teoria generale de valutazioni. “*Genco Rurale*”. *Estimo e Territorio. Rivista de Scienze Ambientali* ANNO LXIV Aprile 2001 nº 4, pp. 3-9.
- Johnson Mark E., Tenenbein A. (1981). A bivariate Distributon Family with specified marginals. *Journal of the American Statistical Association*, Marzo 1981, vol. 76, nº 373,pg. 198-201
- Kimeldorf, G., Sampson, A.R. (1975), “One-Parameter Families of Bivariate Distributions with Fixed Marginals” *Communications in Statistics*, 4, 293-301
- Kotz S., Drouet M. (2001), *Correlation and dependence*. Imperial College Press, Londres.

- Kotz S., Johnson, N.L. (1977). On some generalized Farlie-Gumbel-Morgenstern Distributions-Regression, correlation and further generalizations. *Commun. Statist.-Theor. Meth*, A6(6), pg 485-496
- Mardia, V. (1967), "Some contributions to contingency-Type Bivariate Distributions" *Biometrika*, 54, 235-249.
- Morgenstern, D. (1956), "Einfache Beispiele Zweidimensionaler Verteilungen" *Mitteilungs für Mathematische Statistik*, 8, 234-235
- Nataf, A. (1962). "Détermination des distributions de Probabilités dont des Marges sont Données" *C.R. Academy of Sciences*, 225, 42-43.
- Palacios, F., Callejón, J., Herrerías, J.M., (2000). Fundamentos probabilísticos del Método de Valoración de las dos distribuciones. *Actas de la XIV Reunión Asepelt-España*, Oviedo (publicación en CD-Rom).
- Plackett, R. L. (1965), A class of bivariate distributions. *J. Am. Statistical Assoc.* n° 60, pg 516-522
- Romero, C. (1977). Valoración por el método de las dos distribuciones beta: Una extensión. *Revista de Economía Política*, 75, pp. 47-62.
- Schweizer B., Sklar A., (1983), *Probabilistic Metric Spaces*, New York: North Holland.
- Van Dorp, J.R. y Kotz, S. (2002a). "A novel extension of the triangular distribution and its parameter estimation". *The Statistician*, 51 1, 63-79.
- Van Dorp, J.R. y Kotz, S. (2002b). "The Standard Two Sided Power distribution and its properties: with applications in financial engineering". *The American Statistician*, 56 2, 90-99.
- Van Dorp, J.R. y Kotz, S. (2002c). "A versatile bivariate distribution on a bounded domain: another look at the product moment correlation". *Journal of Applied Statistics*, Vol 29. n° 8, 2002, pag 1165-1179
- Van Dorp, J.R. y Kotz, S (2003). Generalizations of two Sided Power Distributions and their convolution. *Communications and statistics: Theory and Method*. vol.32. n° 9.