

PREFERENCIAS INDIVIDUALES GRADUADAS Y SU AGREGACIÓN: ANÁLISIS DE LA COHERENCIA EN UN CASO REAL*

José Luis García Lapresta

Departamento de Economía Aplicada (Matemáticas)

Universidad de Valladolid

lapresta@eco.uva.es

Luis Carlos Meneses Poncio

Departamento de Economía Aplicada (Matemáticas)

Universidad de Valladolid

lmeneses@eco.uva.es

Resumen

En este trabajo analizamos el cumplimiento de varias condiciones de coherencia en un problema real de decisión: 85 estudiantes comparan por pares 6 titulaciones, mostrando sus intensidades de preferencia entre las distintas alternativas mediante etiquetas lingüísticas. Se estudia el cumplimiento de algunas propiedades de transitividad difusa tanto por las preferencias individuales como por las colectivas obtenidas por reglas de agregación neutrales y estables por traslaciones que transmiten la reciprocidad de las preferencias individuales a la colectiva, así como la influencia de la regla de agregación utilizada sobre la preferencia colectiva. Entre los resultados obtenidos cabe destacar que los niveles de coherencia obtenidos por las preferencias agregadas son claramente superiores a los alcanzados por las preferencias individuales.

Palabras clave: preferencias graduadas, medias cuasiaritméticas, transitividad difusa, agregación de preferencias

* Los autores desean agradecer la ayuda financiera de la Consejería de Educación y Cultura de la Junta de Castilla y León (Proyecto VA057/02), así como la del Ministerio de Ciencia y Tecnología, Plan Nacional de Investigación Científica, Desarrollo e Innovación Tecnológica (I+D+I) (Proyecto BEC2001-2253) y la de los fondos FEDER.

1. Introducción.

Dadas dos alternativas, podemos preguntar a un individuo si prefiere una a otra o si es indiferente entre ellas. Si no declara indiferencia, y prefiere una alternativa, entonces podría mostrar con mayor detalle su preferencia: baja, alta, absoluta, etc. Pero tal como ocurre con las preferencias convencionales, los individuos también pueden tener opiniones inconsistentes cuando manifiestan intensidades de preferencia sobre más de dos alternativas (véase, por ejemplo, Switalski (2001), en donde se lleva a cabo un análisis empírico de la racionalidad, basado en diversas propiedades de transitividad difusa, cuando los individuos manifiestan con qué intensidad prefieren unas alternativas a otras).

El principal objetivo de este trabajo es llevar a cabo un análisis empírico en un caso real sobre el cumplimiento de varias condiciones de coherencia, basadas en 6 propiedades de transitividad difusa, tanto para las decisiones individuales como para las colectivas derivadas del uso de varias reglas de agregación. El caso real está basado en las preferencias graduadas manifestadas por 85 estudiantes de primer curso sobre 6 titulaciones universitarias, en el justo momento y lugar en el que se matriculaban en la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad de Valladolid. Los estudiantes compararon las diferentes titulaciones por pares y mostraron intensidades de preferencia entre las distintas alternativas por medio de etiquetas lingüísticas representadas por números reales. Gracias a esta representación hemos podido basar nuestros análisis en el marco de la teoría de subconjuntos difusos (véanse, por ejemplo, Dubois y Prade (1980) y Zimmermann (1991)), más concretamente en lo relativo a las relaciones de preferencia difusas.

Arrow (1963) demostró que es imposible encontrar reglas de agregación que proporcionen decisiones colectivas consistentes que satisfagan algunos requisitos razonables. A pesar de las buenas propiedades de la media aritmética (véase García Lapresta y Llamazares (2000)), esta regla de agregación no asegura decisiones consistentes en el marco de las preferencias difusas (pueden aparecer ciclos e intransitividades en las preferencias agregadas). Por esta razón, analizamos el cumplimiento de varias propiedades de transitividad difusa, no sólo en las opiniones

individuales, sino también en la preferencia colectiva proporcionada por la regla de agregación de la media aritmética y por una clase de reglas de agregación, relacionada con las medias cuasiaritméticas exponenciales, introducida en García Lapresta y Marques Pereira (2003), todas ellas recíprocas y estables por traslaciones. La reciprocidad asegura que si todos los individuos invierten sus preferencias, entonces la preferencia colectiva también se invierte. Por otro lado, la estabilidad por traslaciones garantiza que si cada uno de los individuos incrementa la intensidad de su preferencia entre dos alternativas en una misma cantidad, entonces la preferencia colectiva ve incrementada su intensidad en dicha cantidad. Además, hemos examinado la transitividad clásica en algunas relaciones de preferencia ordinaria (α -cortes) asociadas a las relaciones de preferencia difusa individuales.

Varios estudios y un buen número de referencias bibliográficas sobre medias cuasiaritméticas y diversos operadores de agregación pueden consultarse en Fodor y Roubens (1994, capítulo 5) y Calvo, Kolesàrova, Komorníková y Mesiar (2002). El problema de la consistencia en la toma de decisiones colectivas dentro de un marco difuso se ha considerado, entre otros, en Cutello y Montero (1994) y Herrera, Herrera Viedma y Verdegay (1997).

El trabajo se organiza como sigue. En la sección 2 introducimos la notación y algunos conceptos relacionados con las preferencias difusas y las reglas de agregación. En la sección 3 establecemos algunas propiedades de coherencia que pueden satisfacer las relaciones de preferencia difusas y ordinarias. La sección 4 está dedicada a explicar las características principales del problema real de decisión estudiado. En la sección 5 presentamos los resultados y en la Sección 6 presentamos algunas conclusiones.

2. Preferencias difusas y reglas de agregación.

Consideramos m individuos que muestran sus preferencias sobre un conjunto de alternativas $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, con $n \geq 3$ y $m \geq 3$. Suponemos que cada individuo $k \in \{1, \dots, m\}$ compara todos los pares de alternativas de X y declara sus intensidades

de preferencia por medio de una relación binaria difusa sobre X , R^k , definida por su función de pertenencia $m_{R^k} : X \times X \rightarrow [0,1]$, con $m_{R^k}(x_i, x_j) = r_{ij}^k \in [0,1]$ para cada par de alternativas $x_i, x_j \in X$. Este índice r_{ij}^k expresa la intensidad de preferencia con la que el individuo k prefiere x_i a x_j , siendo 1, 0.5 o 0 dependiendo de si este individuo prefiere absolutamente x_i a x_j , es indiferente entre x_i y x_j , o prefiere absolutamente x_j a x_i , respectivamente. Otros números diferentes a 0, 0.5 y 1 son usados para preferencias no extremas, de manera que cuanto más cerca se esté de 1, mayor será la preferencia de x_i por x_j , y cuanto más cerca se esté de 0, mayor será la preferencia de x_j por x_i .

Además, suponemos que R^k es *recíproca*, es decir, $r_{ij}^k + r_{ji}^k = 1$ para cualesquiera $x_i, x_j \in X$. Denotamos por $R(X)$ el conjunto de relaciones binarias difusas recíprocas sobre X . Si $R \in R(X)$, se dirá que R es una *relación de preferencia difusa* sobre X . Justificaciones sobre el uso del axioma de reciprocidad se pueden encontrar en Bezdek, Spillman y Spillman (1978), Nurmi (1981), Tanino (1984), Nakamura (1986) y García Lapresta y Llamazares (2000), entre otros.

Dada $R \in R(X)$, resulta inmediato comprobar que para todo $\alpha \in [0.5, 1)$ la relación binaria ordinaria sobre X , P_α , definida por $x_i P_\alpha x_j \Leftrightarrow r_{ij} > \alpha$, es *asimétrica*, es decir, si $x_i P_\alpha x_j$, entonces no $x_j P_\alpha x_i$. Así, P_α es una *relación de preferencia ordinaria* sobre X , el α -corte de R . La *relación de indiferencia asociada a P_α* refleja la ausencia de preferencia y se define por $x_i I_\alpha x_j \Leftrightarrow \text{ni } x_i P_\alpha x_j \text{ ni } x_j P_\alpha x_i$, es decir, $r_{ij} \leq \alpha$ y $r_{ji} \leq \alpha$. Por reciprocidad, ambas condiciones son equivalentes a $1 - \alpha \leq r_{ij} \leq \alpha$. Entonces, para cada par de alternativas $x_i, x_j \in X$ ocurre una y sólo una de las siguientes situaciones: $x_i P_\alpha x_j$ ($r_{ij} > \alpha$), $x_i I_\alpha x_j$ ($1 - \alpha \leq r_{ij} \leq \alpha$), $x_j P_\alpha x_i$ ($r_{ji} > \alpha$, esto es, $r_{ij} < 1 - \alpha$).

Hemos de notar que si R no fuera recíproca, entonces P_a podría no ser asimétrica, lo que sería equivalente a que al menos un par de alternativas fueran mutuamente preferidas la una a la otra. Por este motivo, exigiremos que tanto las preferencias individuales como las colectivas sean recíprocas.

Una *regla de agregación* es una función $F : R(X)^m \rightarrow R(X)$ que asigna una relación de preferencia difusa colectiva, $\bar{R} = F(R^1, \dots, R^m) \in R(X)$, a cada *perfil* de preferencias difusas individuales $(R^1, \dots, R^m) \in R(X)^m$. Con $\bar{r}_{ij}$ denotaremos la preferencia colectiva entre x_i y x_j según la relación agregada $\bar{R}$.

En el presente trabajo sólo consideraremos reglas de agregación *neutrales*, aquéllas que dan un trato igualitario a las alternativas: para cualquier par de perfiles $(R^1, \dots, R^m), (S^1, \dots, S^m) \in R(X)^m$ y cualesquiera alternativas $x_i, x_j, x_p, x_q \in X$, si se verifica $r_{ij}^k = s_{pq}^k$ para todo $k \in \{1, \dots, m\}$, entonces también se satisface $\bar{r}_{ij} = \bar{s}_{pq}$. En García Lapresta y Llamazares (2000) se demuestra que el hecho de que $F : R(X)^m \rightarrow R(X)$ sea neutral equivale a que exista una función $f : [0, 1]^m \rightarrow [0, 1]$ tal que $\bar{r}_{ij} = f(r_{ij}^1, \dots, r_{ij}^m)$ para cualesquiera alternativas $x_i, x_j \in X$.

Puesto que $\bar{R}$ es recíproca por construcción, de acuerdo con García Lapresta y Llamazares (2000), para todo $(a_1, \dots, a_m) \in [0, 1]^m$ se verifica

$$f(1-a_1, \dots, 1-a_m) = 1 - f(a_1, \dots, a_m).$$

Toda función $f : [0, 1]^m \rightarrow [0, 1]$ que verifique la condición anterior se dirá que es *recíproca* y definirá de forma natural una regla de agregación neutral $F : R(X)^m \rightarrow R(X)$ tal que $\bar{r}_{ij} = f(r_{ij}^1, \dots, r_{ij}^m)$.

En este trabajo consideraremos reglas de agregación neutrales que son *estables por traslaciones*: para cualesquiera $(a_1, \dots, a_m) \in [0, 1]^m$ y $t \in [-1, 1]$ se verifica

$$f(a_1 + t, \dots, a_m + t) = f(a_1, \dots, a_m) + t,$$

siempre que $(a_1 + t, \dots, a_m + t) \in [0, 1]^m$ y $f(a_1 + t, \dots, a_m + t) \in [0, 1]$.

La clase de reglas de agregación neutrales estables por traslaciones proporcionan un instrumento adecuado para asignar una preferencia colectiva a las preferencias individuales, preservando la reciprocidad. En primer lugar, la neutralidad permite obtener la intensidad de preferencia colectiva entre cada par de alternativas mediante una función recíproca $f : [0, 1]^m \rightarrow [0, 1]$ que tiene en cuenta sólo las intensidades de preferencia individuales entre ese par de alternativas, independientemente de cuáles sean. Este hecho, además de dar una tratamiento igualitario a las alternativas, garantiza el cumplimiento del axioma de independencia de alternativas irrelevantes (véanse Arrow (1963) y García Lapresta y Llamazares (2000)). Por otro lado, la estabilidad por traslaciones transporta a la intensidad de preferencia colectiva los mismos aumentos o disminuciones unánimes en las intensidades de preferencia individuales.

Entre las reglas de agregación neutrales estables por traslaciones hemos considerado la media aritmética, debido a sus buenas propiedades (véase García Lapresta y Llamazares (2000)), y una clase de reglas de agregación, relacionada con las medias cuasiaritméticas exponenciales, introducida en García Lapresta y Marques Pereira (2003).

Dada una función creciente y biyectiva $j : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, la *media cuasiaritmética asociada a j* es la función $f : [0, 1]^m \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$f(a_1, \dots, a_m) = j^{-1} \left(\frac{\sum_{k=1}^m j(a_k)}{m} \right).$$

Según Nagumo (1930) (véase Fodor y Roubens (1994, pp. 117-118)), las medias cuasiaritméticas generadas por las funciones exponenciales,

$$j(a) = \frac{e^{ba} - 1}{e^b - 1}, \quad b > 0,$$

y la media aritmética, generada por la función identidad $j(a) = a$:

$$f_b(a_1, \dots, a_m) = \frac{1}{b} \ln \frac{\sum_{k=1}^m e^{ba_k}}{m} \quad \text{y} \quad f_0(a_1, \dots, a_m) = \frac{\sum_{k=1}^m a_k}{m}$$

son las únicas medias cuasiaritméticas estables por traslaciones.

En García Lapresta y Llamazares (2001) se demuestra que la media cuasiaritmética asociada a j es recíproca si y sólo si $j(1-a) = 1-j(a)$ para todo $a \in [0,1]$.

Entonces, la única función recíproca de la familia $\{f_b \mid b \geq 0\}$ es la media aritmética, f_0 . No obstante, de acuerdo con García Lapresta y Marques Pereira (2003), la *parte simétrica* de f_b , la función $\hat{f}_b : [0,1]^m \rightarrow [0,1]$ definida por

$$\hat{f}_b(a_1, \dots, a_m) = \frac{1}{2b} \ln \frac{\sum_{k=1}^m e^{ba_k}}{\sum_{k=1}^m e^{-ba_k}},$$

es recíproca y estable por traslaciones; además en dicho trabajo se establece que, para $m = 2$, $\hat{f}_b$ coincide con la media aritmética y que, para $m > 2$, $\hat{f}_b$ no es una media cuasiaritmética.

A continuación demostramos que la función $\hat{f}_b$ tiende a la media aritmética de los valores mínimo y máximo de las componentes del vector al que dan imagen cuando b tiende a infinito.

Proposición. Dado un vector $(a_1, \dots, a_m) \in [0,1]^m$, sean $a_* = \min\{a_1, \dots, a_m\}$ y $a^* = \max\{a_1, \dots, a_m\}$. Entonces:

$$\hat{f}_\infty(a_1, \dots, a_m) = \lim_{b \rightarrow \infty} \hat{f}_b(a_1, \dots, a_m) = \frac{a_* + a^*}{2}.$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\lim_{b \rightarrow \infty} \hat{f}_b(a_1, \dots, a_m) &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2b} \ln \frac{\sum_{k=1}^m e^{b a_k}}{\sum_{k=1}^m e^{-b a_k}} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\ln \sum_{k=1}^m e^{b a_k} - \ln \sum_{k=1}^m e^{-b a_k}}{2b} = \\
&= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sum_{k=1}^m a_k e^{b a_k}}{\sum_{k=1}^m e^{b a_k}} + \frac{\sum_{k=1}^m a_k e^{-b a_k}}{\sum_{k=1}^m e^{-b a_k}}}{2} = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^m a_k e^{b a_k}}{\sum_{k=1}^m e^{b a_k}} + \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^m a_k e^{-b a_k}}{\sum_{k=1}^m e^{-b a_k}} = \\
&= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{e^{-b a^*} \sum_{k=1}^m a_k e^{b a_k}}{e^{-b a^*} \sum_{k=1}^m e^{b a_k}} + \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{e^{b a_*} \sum_{k=1}^m a_k e^{-b a_k}}{e^{b a_*} \sum_{k=1}^m e^{-b a_k}} = \\
&= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^m a_k e^{b(a_k - a^*)}}{\sum_{k=1}^m e^{b(a_k - a^*)}} + \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^m a_k e^{-b(a_k - a_*)}}{\sum_{k=1}^m e^{-b(a_k - a_*)}} = \frac{1}{2} a^* + \frac{1}{2} a_* = \frac{a_* + a^*}{2}.
\end{aligned}$$

Resulta inmediato comprobar que la función resultante $\hat{f}_\infty: [0,1]^m \rightarrow [0,1]$ es recíproca y estable por traslaciones, por lo que define una regla de agregación neutral estable por traslaciones.

Por los motivos expuestos, en la agregación de preferencias individuales consideraremos las reglas de agregación neutrales y estables por traslaciones asociadas a las funciones f_0 , $\hat{f}_b$ ($b > 0$) y $\hat{f}_\infty$. Dadas dos alternativas $x_i, x_j \in X$, las reglas de agregación mencionadas asignan la intensidad de preferencia colectiva entre x_i y x_j de la siguiente manera:

$$\bar{r}_{ij}^0 = f_0(r_{ij}^1, \dots, r_{ij}^m) = \frac{\sum_{k=1}^m r_{ij}^k}{m}, \quad \bar{r}_{ij}^b = \hat{f}_b(r_{ij}^1, \dots, r_{ij}^m) = \frac{1}{2b} \ln \frac{\sum_{k=1}^m e^{b r_{ij}^k}}{\sum_{k=1}^m e^{-b r_{ij}^k}},$$

$$\bar{r}_{ij}^{\infty} = \hat{f}_{\infty}(r_{ij}^1, \dots, r_{ij}^m) = \frac{\min\{r_{ij}^1, \dots, r_{ij}^m\} + \max\{r_{ij}^1, \dots, r_{ij}^m\}}{2}.$$

3. Condiciones de coherencia

En la modelización clásica de las preferencias, la transitividad es punto de referencia obligado para abordar el análisis de la racionalidad. Una relación binaria ordinaria P sobre X es *transitiva* si de $x_i P x_j$ y $x_j P x_k$ se sigue $x_i P x_k$, para cualesquiera $x_i, x_j, x_k \in X$. La principal hipótesis de coherencia en los enfoques difuso y probabilístico de la teoría de la decisión sigue siendo la transitividad. Sin embargo, en estos ámbitos existe una amplia clase de condiciones de transitividad que generalizan la propiedad clásica (véanse Zadeh (1971), Fishburn (1973), Dubois y Prade (1980), Nurmi (1981), Tanino (1984 y 1988), Dutta, Panda y Pattanaik (1986), Ovchinnikov (1986), Suppes, Krantz, Luce y Tversky (1989), Barrett, Pattanaik y Salles (1990), Jain (1990), Zimmermann (1991), Fodor y Roubens (1994), Dasgupta y Deb (1996), Triantaphyllou (2000), Switalski (1999, 2001 y 2003) y García Lapresta y Meneses Poncio (2001), entre otros). A continuación introducimos las propiedades de transitividad difusa consideradas en el caso real estudiado.

Sea $*$ una operación binaria sobre $[0.5, 1]$, es decir, $a * b \in [0.5, 1]$ para cualesquiera $a, b \in [0.5, 1]$, con las siguientes propiedades:

- Conmutatividad: $a * b = b * a$ para cualesquiera $a, b \in [0.5, 1]$.
- Monotonía: $(a \leq a' \text{ y } b \leq b') \Rightarrow a * b \leq a' * b'$, para cualesquiera $a, a', b, b' \in [0.5, 1]$.
- Continuidad: pequeños cambios en las variables a, b producen pequeños cambios en el resultado $a * b$.

Decimos que $R \in R(X)$ es *transitiva max- $*$ débil* si se verifica

$$(r_{ij} > 0.5 \text{ y } r_{jk} > 0.5) \Rightarrow (r_{ik} > 0.5 \text{ y } r_{ik} \geq r_{ij} * r_{jk}),$$

para cualesquiera $x_i, x_j, x_k \in X$.

Obviamente, la relación de preferencia ordinaria $P_{0.5}$ asociada a cada $R \in R(X)$ transitiva max- $*$ débil es transitiva.

En el caso de las relaciones binarias difusas la propiedad de transitividad max- $*$ fue definida inicialmente mediante el requisito $r_{ik} \geq r_{ij} * r_{jk}$, para cualesquiera $x_i, x_j, x_k \in X$. La calificación “débil”, “moderada” o “restringida” ha sido considerada, entre otros, por Tanino (1984) y Dasgupta y Deb (1996), al requerir ciertas hipótesis adicionales. En este trabajo, suponemos intensidades de preferencia mayores que 0.5.

Con el fin de introducir propiedades concretas de transitividad max- $*$ débil, consideramos 6 operaciones binarias conmutativas, monótonas y continuas sobre el intervalo $[0.5, 1]$:

$$\begin{aligned} a *_1 b &= 0.5, & a *_2 b &= \max\{a + b - 1, 0.5\}, & a *_3 b &= \max\{ab, 0.5\}, \\ a *_4 b &= \min\{a, b\} & a *_5 b &= \frac{a + b}{2}, & a *_6 b &= \max\{a, b\}. \end{aligned}$$

Diremos que $R \in R(X)$ verifica la propiedad T_i si R es transitiva max- $*$ $_i$ débil.

Es fácil ver que $a *_1 b \leq a *_2 b \leq a *_3 b \leq a *_4 b \leq a *_5 b \leq a *_6 b$, para cualesquiera $a, b \in [0.5, 1]$, es decir, $T_6 \Rightarrow T_5 \Rightarrow T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1$. Además, T_1 es equivalente a que la relación de preferencia $P_{0.5}$ sea transitiva, y P_a es transitiva para todo $a \in [0.5, 1)$ siempre que R satisfaga T_4 , T_5 o T_6 . Esto es debido a que T_4 equivale a que P_a sea transitiva para todo $a \in [0.5, 1)$.

4. Análisis de la coherencia en un caso real.

Para examinar las propiedades de coherencia en un caso real, realizamos una encuesta a 85 estudiantes sobre sus preferencias sobre las siguientes titulaciones universitarias:

- A) Administración y Dirección de Empresas (5 años).
- B) Ciencias Empresariales (3 años).
- C) Derecho (5 años).
- D) Administración y Dirección de Empresas – Derecho (6 años).
- E) Relaciones Laborales (3 años).
- F) Economía (5 años).

La encuesta se realizó en el justo momento y lugar en el que los estudiantes se matriculaban de primer curso en la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad de Valladolid de las titulaciones A, D o F (las otras 3 titulaciones, B, C y E, son las más relacionadas con las que se podían matricular en dicha Facultad). Los estudiantes tuvieron que comparar cada par de alternativas a través de 4 modalidades de preferencia lingüísticas: “totalmente”, “bastante”, “mucho” y “poco”, cuando preferían una alternativa a la otra; en ausencia de preferencia entre las alternativas podían declarar “indiferente”.

Posteriormente, asignamos un número de 0 a 1 a cada una de las 9 modalidades de preferencia o indiferencia: la intensidad de preferencia entre x_i y x_j , r_{ij} , se define para cualquiera de los nueve términos; teniendo en cuenta la hipótesis de reciprocidad, la intensidad de preferencia entre x_j y x_i se define por $r_{ji} = 1 - r_{ij}$.

Para conocer la posible influencia de los números reales asociados a las etiquetas lingüísticas sobre el nivel de cumplimiento de las propiedades T_i , consideramos dos asignaciones diferentes (véase Tabla 1). Por simplicidad, en la semántica 1 los números reales asociados con términos consecutivos tienen un paso constante, 0.125. Sin embargo, los individuos pueden sentir diferentes distancias entre etiquetas lingüísticas consecutivas. Por esta razón, los pasos de la representación numérica de la semántica 2 son variables (0.022, 0.130, 0.131, 0.217). Los números asignados a los términos de la semántica 2 están relacionados con la semántica proporcionada por Bonissone y Decker (1986), donde la vaguedad es mayor alrededor de la indiferencia que en las proximidades de las preferencias extremas. Nuestras asignaciones son similares a los números reales asociados por Delgado, Vila y Voxman (1998) a los

números difusos trapeciales dados por Bonissone y Decker (1986) y, consecuentemente, los pasos decrecen cuando los términos se desplazan hacia las preferencias extremas.

Término	Semántica 1	Semántica 2
x_i se prefiere totalmente a x_j	$r_{ij} = 1$ ($r_{ji} = 0$)	$r_{ij} = 1$ ($r_{ji} = 0$)
x_i se prefiere mucho a x_j	$r_{ij} = 0.875$ ($r_{ji} = 0.125$)	$r_{ij} = 0.978$ ($r_{ji} = 0.022$)
x_i se prefiere bastante a x_j	$r_{ij} = 0.750$ ($r_{ji} = 0.250$)	$r_{ij} = 0.848$ ($r_{ji} = 0.152$)
x_i se prefiere poco a x_j	$r_{ij} = 0.625$ ($r_{ji} = 0.375$)	$r_{ij} = 0.717$ ($r_{ji} = 0.283$)
x_i es indiferente a x_j	$r_{ij} = 0.500$ ($r_{ji} = 0.500$)	$r_{ij} = 0.500$ ($r_{ji} = 0.500$)
x_j se prefiere poco a x_i	$r_{ij} = 0.375$ ($r_{ji} = 0.625$)	$r_{ij} = 0.283$ ($r_{ji} = 0.717$)
x_j se prefiere bastante a x_i	$r_{ij} = 0.250$ ($r_{ji} = 0.750$)	$r_{ij} = 0.152$ ($r_{ji} = 0.848$)
x_j se prefiere mucho a x_i	$r_{ij} = 0.125$ ($r_{ji} = 0.875$)	$r_{ij} = 0.022$ ($r_{ji} = 0.978$)
x_j se prefiere totalmente a x_i	$r_{ij} = 0$ ($r_{ji} = 1$)	$r_{ij} = 0$ ($r_{ji} = 1$)

Tabla 1. Dos semánticas de nueve términos.

Al considerar el conjunto de 6 alternativas, cada estudiante tuvo que comparar 15 pares de alternativas, por lo que el número total de pares que intervinieron en el estudio fue de 1275. Toda esta información se procesó por medio de varios programas informáticos con el fin de determinar el nivel de coherencia alcanzado por los individuos mediante el análisis del cumplimiento de las 6 propiedades de transitividad consideradas en las distintas ternas de alternativas (el número total de ternas del estudio fue de 1700).

5. Los resultados.

El análisis empírico efectuado está dividido en dos partes bien diferenciadas. Por un lado calculamos las intensidades de preferencia colectiva entre los distintos pares de alternativas mediante varias reglas de agregación, así como los órdenes asociados

según los correspondientes 0.5-cortes. Por otro lado, analizamos la coherencia de las preferencias individuales y colectivas, tanto mediante el estudio del cumplimiento de las distintas propiedades de transitividad difusa consideradas en el trabajo, como mediante el análisis de la transitividad ordinaria al utilizar diferentes α -cortes asociados con las preferencias difusas.

5.1. Agregación de las preferencias individuales.

Con el fin de obtener la opinión colectiva sobre las 6 alternativas consideramos las reglas de agregación asociadas a la media aritmética, f_0 , a la parte simétrica de las medias cuasiaritméticas exponenciales $\hat{f}_b$, considerando diferentes valores de b , y al caso límite, $\hat{f}_\infty$. Las medias cuasiaritméticas exponenciales, f_b , no han sido contempladas debido a que no son recíprocas y, consecuentemente, no definen reglas de agregación propiamente dichas.

Las intensidades de preferencia colectiva entre los distintos pares de alternativas obtenidas de esta manera se muestran en las Tablas 2 y 3, de acuerdo con las dos semánticas; en las Figuras 1a y 1b se muestran gráficamente los resultados obtenidos de acuerdo con la semántica 1.

A la vista de los datos mostrados, se puede observar que las intensidades de preferencia colectiva tienden hacia el valor límite originado por $\hat{f}_\infty$, a medida que aumenta el valor de b . Esta tendencia se produce de forma monótona, creciente o decreciente, con dos excepciones: los pares (A,D) y (C,E) (véase Figura 2). El par (A,D) es el único donde cambia el sentido de la preferencia colectiva al considerar diferentes reglas de agregación: inicialmente A es preferida a D, pero a medida que aumenta el valor de b , la intensidad de preferencia disminuye hasta que se invierte la preferencia colectiva, pasando a ser D preferida a A; posteriormente, la intensidad aumenta ligeramente tendiendo hacia el valor límite. En el par (C,E) inicialmente la intensidad colectiva aumenta con b , pero a partir de un cierto momento comienza a decrecer y tiende al valor asignado por $\hat{f}_\infty$.

	(A,B)	(A,C)	(A,D)	(A,E)	(A,F)	(B,C)	(B,D)	(B,E)	(B,F)	(C,D)	(C,E)	(C,F)	(D,E)	(D,F)	(E,F)
f_0	0.800	0.822	0.529	0.866	0.649	0.609	0.293	0.703	0.388	0.206	0.538	0.310	0.766	0.600	0.294
$\hat{f}_1$	0.797	0.821	0.528	0.866	0.645	0.607	0.295	0.702	0.390	0.207	0.539	0.313	0.765	0.597	0.296
$\hat{f}_2$	0.788	0.817	0.525	0.865	0.637	0.600	0.302	0.698	0.394	0.209	0.540	0.322	0.760	0.590	0.302
$\hat{f}_3$	0.772	0.810	0.520	0.864	0.626	0.591	0.312	0.692	0.399	0.213	0.542	0.335	0.753	0.581	0.311
$\hat{f}_4$	0.752	0.800	0.516	0.863	0.613	0.580	0.324	0.683	0.405	0.218	0.545	0.349	0.743	0.571	0.321
$\hat{f}_5$	0.729	0.788	0.512	0.861	0.601	0.569	0.336	0.673	0.410	0.225	0.548	0.363	0.731	0.562	0.332
$\hat{f}_{10}$	0.638	0.718	0.502	0.846	0.562	0.531	0.375	0.623	0.430	0.267	0.555	0.414	0.673	0.533	0.370
$\hat{f}_{20}$	0.574	0.644	0.498	0.814	0.534	0.506	0.402	0.581	0.450	0.319	0.542	0.452	0.619	0.517	0.399
$\hat{f}_{30}$	0.551	0.617	0.498	0.795	0.523	0.501	0.413	0.571	0.462	0.338	0.530	0.467	0.600	0.511	0.411
$\hat{f}_{40}$	0.538	0.604	0.499	0.784	0.517	0.500	0.418	0.568	0.470	0.347	0.522	0.475	0.591	0.509	0.417
$\hat{f}_{50}$	0.531	0.595	0.499	0.777	0.514	0.500	0.422	0.567	0.476	0.353	0.518	0.480	0.585	0.507	0.421
$\hat{f}_{100}$	0.515	0.579	0.499	0.764	0.507	0.500	0.430	0.565	0.488	0.364	0.509	0.490	0.574	0.503	0.429
$\hat{f}_{200}$	0.508	0.571	0.500	0.757	0.503	0.500	0.434	0.564	0.494	0.370	0.504	0.495	0.568	0.502	0.433
$\hat{f}_{300}$	0.505	0.568	0.500	0.755	0.502	0.500	0.435	0.563	0.496	0.371	0.503	0.497	0.566	0.501	0.435
$\hat{f}_{400}$	0.504	0.567	0.500	0.753	0.502	0.500	0.436	0.563	0.497	0.372	0.502	0.497	0.565	0.501	0.435
$\hat{f}_\infty$	0.500	0.563	0.500	0.750	0.500	0.500	0.438	0.563	0.500	0.375	0.500	0.500	0.563	0.500	0.438

Tabla 2. Intensidades de preferencia colectiva con la semántica 1. Valores

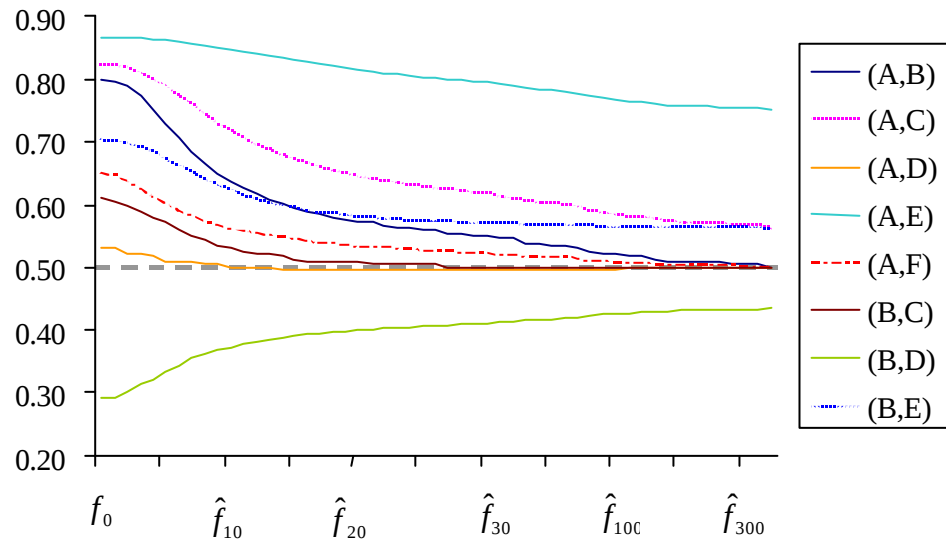


Figura 1a. Intensidades de preferencia colectiva con la semántica 1. Representación gráfica.

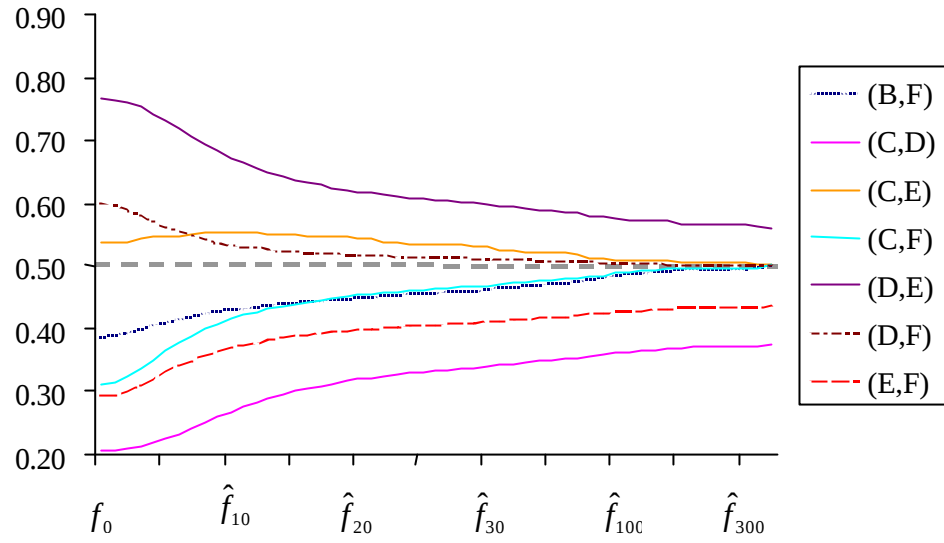
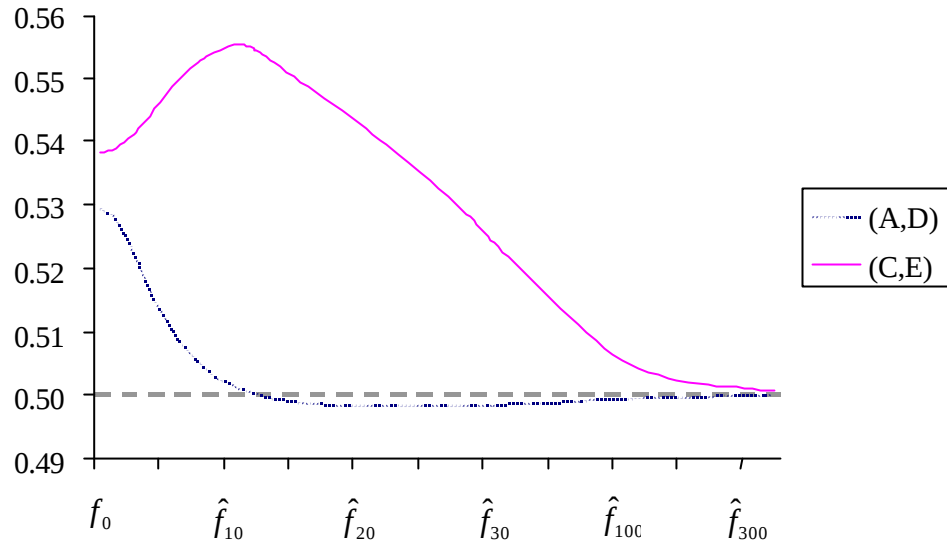


Figura 1b. Intensidades de preferencia colectiva con la semántica 1. Representación gráfica

	(A,B)	(A,C)	(A,D)	(A,E)	(A,F)	(B,C)	(B,D)	(B,E)	(B,F)	(C,D)	(C,E)	(C,F)	(D,E)	(D,F)	(E,F)
f_0	0.859	0.876	0.543	0.929	0.681	0.648	0.252	0.770	0.372	0.140	0.538	0.273	0.819	0.626	0.258
$\hat{f}_1$	0.853	0.873	0.541	0.928	0.675	0.644	0.259	0.767	0.375	0.143	0.538	0.279	0.815	0.621	0.264
$\hat{f}_2$	0.836	0.864	0.535	0.927	0.659	0.631	0.275	0.756	0.385	0.149	0.538	0.296	0.804	0.608	0.278
$\hat{f}_3$	0.808	0.849	0.528	0.925	0.639	0.615	0.298	0.740	0.397	0.160	0.539	0.318	0.786	0.592	0.298
$\hat{f}_4$	0.773	0.828	0.523	0.922	0.619	0.598	0.320	0.720	0.409	0.175	0.540	0.341	0.763	0.577	0.318
$\hat{f}_5$	0.738	0.802	0.518	0.919	0.603	0.584	0.341	0.698	0.419	0.193	0.540	0.362	0.739	0.565	0.337
$\hat{f}_{10}$	0.629	0.690	0.507	0.888	0.559	0.542	0.399	0.618	0.447	0.282	0.541	0.422	0.646	0.533	0.394
$\hat{f}_{20}$	0.565	0.603	0.502	0.829	0.532	0.519	0.437	0.561	0.467	0.354	0.535	0.459	0.578	0.515	0.436
$\hat{f}_{30}$	0.544	0.572	0.501	0.802	0.522	0.511	0.454	0.541	0.476	0.379	0.528	0.472	0.555	0.510	0.453
$\hat{f}_{40}$	0.534	0.556	0.500	0.788	0.517	0.508	0.463	0.532	0.481	0.391	0.522	0.478	0.543	0.508	0.463
$\hat{f}_{50}$	0.527	0.546	0.500	0.780	0.513	0.506	0.469	0.526	0.484	0.399	0.517	0.482	0.536	0.506	0.469
$\hat{f}_{100}$	0.515	0.528	0.499	0.764	0.507	0.501	0.480	0.516	0.490	0.412	0.509	0.490	0.523	0.503	0.480
$\hat{f}_{200}$	0.508	0.519	0.499	0.757	0.503	0.500	0.485	0.512	0.494	0.418	0.504	0.495	0.517	0.502	0.485
$\hat{f}_{300}$	0.505	0.516	0.499	0.755	0.502	0.500	0.486	0.512	0.496	0.420	0.503	0.497	0.515	0.501	0.486
$\hat{f}_{400}$	0.504	0.515	0.499	0.753	0.502	0.500	0.487	0.512	0.497	0.421	0.502	0.497	0.514	0.501	0.487
$\hat{f}_{\infty}$	0.500	0.511	0.500	0.750	0.500	0.500	0.489	0.511	0.500	0.424	0.500	0.500	0.511	0.500	0.489

Tabla 3. Intensidades de preferencia colectiva con la semántica 2. Valores.



**Figura 2. Intensidades de preferancia colectiva con la semántica 1 de los pares (A,D) y (C,E).
Representación gráfica.**

El hecho de que para valores altos de b la intensidad de preferancia colectiva se aproxime a la media aritmética de los valores mínimo y máximo manifestados por los individuos, puede provocar que esta intensidad no refleje apropiadamente la opinión mayoritaria de los individuos. Por ejemplo, en un perfil de preferancias en el que 84 individuos prefirieran *bastante* una alternativa a otra y que un único individuo prefiriera *totalmente* la segunda alternativa a la primera, si se toma un valor alto de b , la segunda alternativa sería declarada preferida colectivamente a la primera.

Tal como podemos examinar en las Figuras 3 y 4, la preferancia colectiva derivada de la media aritmética origina la misma ordenación de las alternativas en las dos semánticas: en ambos casos es A, D, F, B, C, E. Por otra parte, si sólo consideramos intensidades de preferancia colectiva mayores que 0.5, las que proporciona la semántica 2 son mayores que las que suministra la semántica 1, excepto $\bar{r}_{CE}^0$ por sólo una diferencia de 0.001.

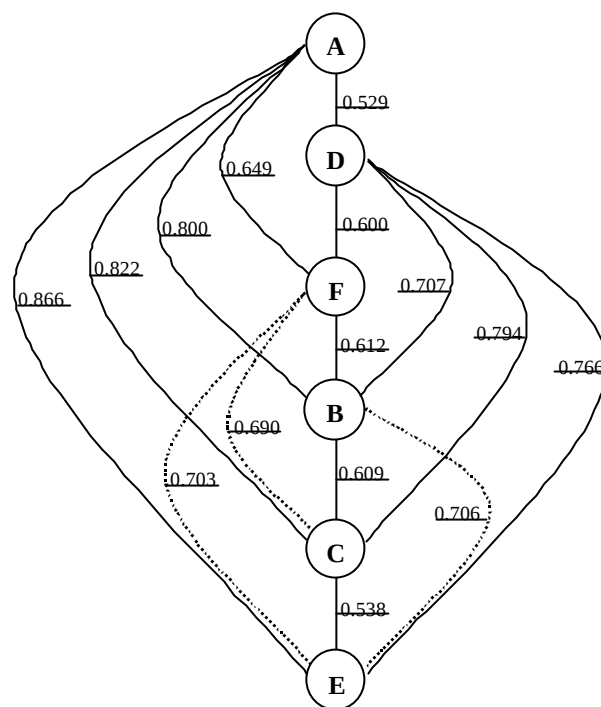


Figura 3. Intensidades de preferencia colectiva con la semántica 1 para la regla de agregación de la media aritmética. Representación gráfica.

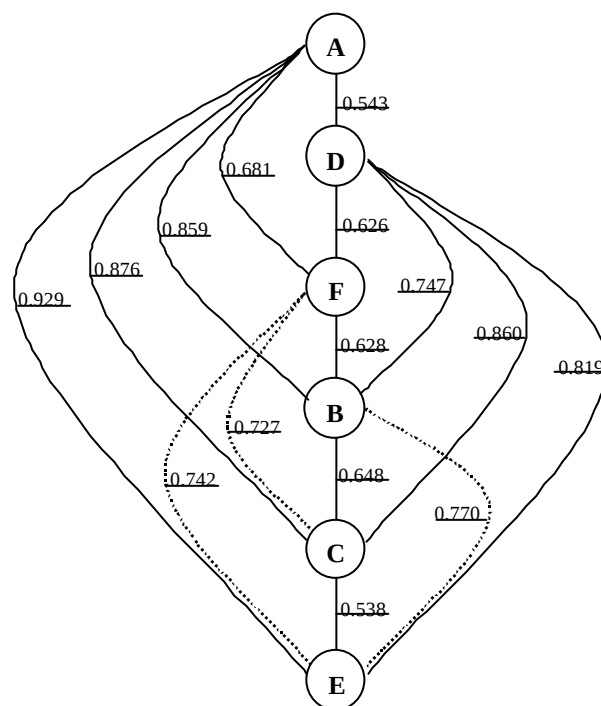


Figura 4. Intensidades de preferencia colectiva con la semántica 2 con la regla de agregación de la media aritmética. Representación gráfica.

La anterior ordenación se mantiene con las reglas de agregación $\hat{f}_b$ para valores bajos de b : en los valores considerados, la ordenación es la misma hasta $b=10$ con la semántica 1 y hasta $b=50$ con la semántica 2. A partir de estos valores se produce una inversión en las preferencias entre las alternativas A y D, lo que provoca que la ordenación sea D, A, F, B, C, E, según $P_{0.5}$.

5.2. Análisis de la coherencia.

A continuación, examinamos el cumplimiento individual de cada una de las 6 clases de transitividad difusa consideradas en el trabajo. Este análisis lo realizamos desde una doble perspectiva: por un lado analizamos el cumplimiento absoluto de cada condición T_i , más concretamente el porcentaje de estudiantes que cumple cada propiedad de transitividad difusa en la totalidad de las ternas de alternativas. Por otro lado, hemos tenido en cuenta una medida relativa del cumplimiento de cada propiedad de coherencia T_i , el porcentaje de ternas x_i, x_j, x_k donde se verifica

$$(r_{ij} > 0.5 \text{ y } r_{jk} > 0.5) \Rightarrow (r_{ik} > 0.5 \text{ y } r_{ik} \geq r_{ij} * r_{jk}).$$

En la Tabla 4 se muestran los porcentajes de cumplimiento absoluto y relativo de las distintas propiedades de transitividad difusa T_i para las preferencias individuales.

	T_1		T_2		T_3		T_4		T_5		T_6	
Semántica	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
Absoluto	78.82	78.82	75.29	56.47	56.47	50.59	50.59	50.59	25.88	25.88	18.82	18.82
Relativo	98.59	98.59	98.12	96.47	96.47	96.06	96.06	96.06	87.82	87.82	84.12	84.12

Tabla4. Porcentajes de cumplimiento individual de T_i con ambas semánticas. Valores.

Obviamente, el cumplimiento absoluto es menor que el cumplimiento relativo de cada propiedad T_i , con las dos semánticas consideradas. La diferencia entre los porcentajes de cumplimiento absoluto y relativo de las propiedades T_i crece a medida que i aumenta. Los resultados coinciden en ambas semánticas para T_1 , T_4 y

T_5 . La propiedad T_2 ha sido la más sensible al cambio de semántica, principalmente en el cumplimiento absoluto: con la semántica 1 cerca de un 20% de los estudiantes satisfacen esta propiedad más que con la semántica 2.

En la Tabla 5 se muestran los porcentajes de cumplimiento relativo de las propiedades T_i para preferencias colectivas según las reglas de agregación consideradas. En las Figuras 5 y 6 se muestran gráficamente los resultados obtenidos con la regla de agregación de la media aritmética junto con los porcentajes de cumplimiento individuales.

A pesar de las inconsistencias individuales, cabe destacar el extraordinario cumplimiento de la coherencia de las preferencias colectivas: con ambas semánticas, y con cualquier regla de agregación, T_1 , T_2 , T_3 y T_4 se satisfacen plenamente; T_5 se verifica por todas las ternas si se considera la media aritmética (f_0) o un b no superior a 10 con las reglas de agregación asociadas a $\hat{f}_b$, mientras que si b es superior a 10 no se verifica por un máximo de 3 ternas. La única propiedad que no se verifica con ninguna de las reglas de agregación consideradas es T_6 y nunca por más de 4 ternas.

Aunque en la mayoría de los casos, al aumentar b los porcentajes de cumplimiento relativo disminuyen o se mantienen constantes, esto no siempre es así. Por ejemplo, si se considera la semántica 2, se observa un mayor número de ternas que verifican la propiedad T_6 con $b = 20$ que con valores menores. Respecto a la regla de agregación asociada a $\hat{f}_\infty$, se ha de señalar que verifica todas las propiedades. Esto que a primera vista puede resultar chocante, debido a la disminución del cumplimiento de las propiedades a medida que b aumenta, tiene su explicación en el hecho de que la intensidad de preferencia colectiva generada por $\hat{f}_\infty$ es, en la mayoría de los casos 0.5 (indiferencia), por lo que las propiedades se satisfacen automáticamente.

	$T_1 - T_4$		T_5		T_6	
Semántica	1	2	1	2	1	2
$\hat{f}_0$	100	100	100	100	95	90
$\hat{f}_1$	100	100	100	100	95	90
$\hat{f}_2$	100	100	100	100	90	90
$\hat{f}_3$	100	100	100	100	90	90
$\hat{f}_4$	100	100	100	100	90	90
$\hat{f}_5$	100	100	100	100	90	85
$\hat{f}_{10}$	100	100	100	100	90	85
$\hat{f}_{20}$	100	100	90	95	80	90
$\hat{f}_{30}$	100	100	90	95	80	85
$\hat{f}_{40}$	100	100	90	95	80	85
$\hat{f}_{50}$	100	100	90	90	80	85
$\hat{f}_{100}$	100	100	90	85	80	80
$\hat{f}_{200}$	100	100	90	85	80	80
$\hat{f}_{300}$	100	100	90	85	85	80
$\hat{f}_{400}$	100	100	90	85	85	80
$\hat{f}_\infty$	100	100	100	100	100	100

Tabla 5. Porcentajes de cumplimiento colectivo de T_i con ambas semánticas. Valores.

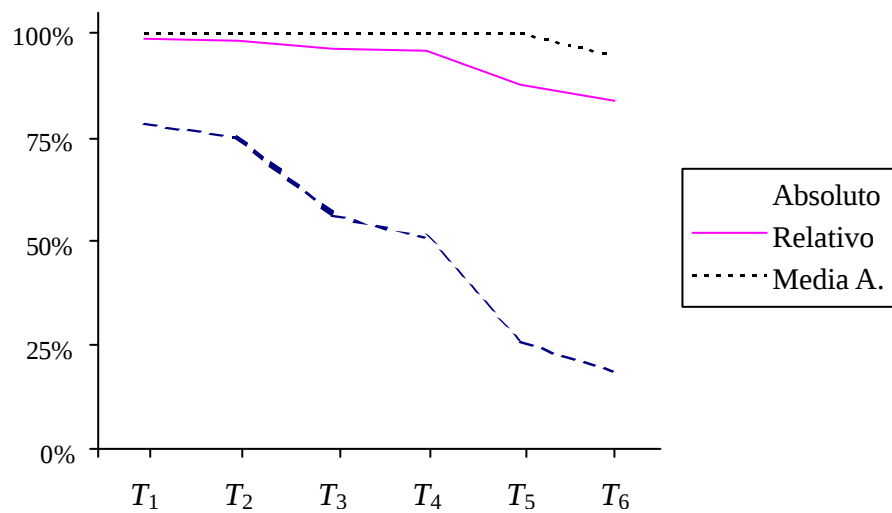


Figura 5. Porcentajes de cumplimiento de 4 con la semántica 1. Representación gráfica.

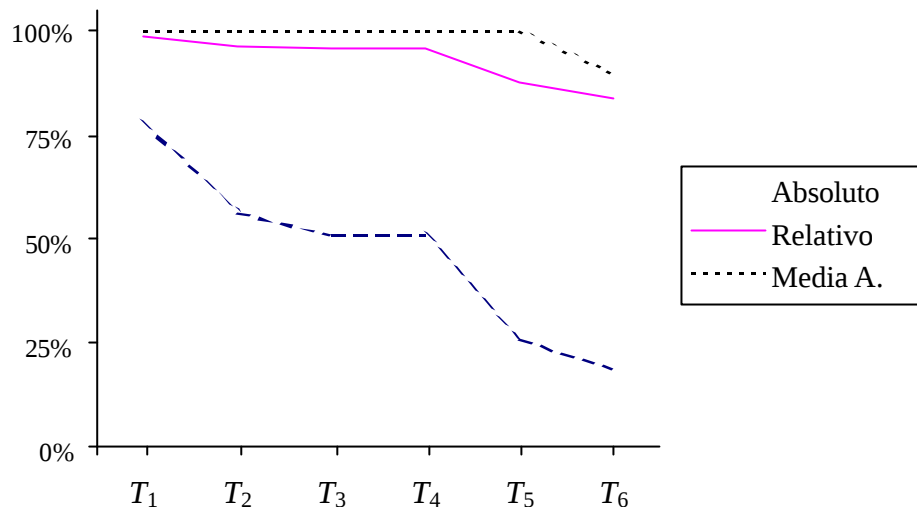


Figura 6. Porcentajes de cumplimiento de T_i con la semántica 2. Representación gráfica.

En la Tabla 6 y en las Figuras 7 y 8 mostramos el cumplimiento de la transitividad ordinaria en algunos α -cortes asociados con las preferencias difusas individuales. En las preferencias colectivas todos los α -cortes son transitivos, ya que como se ha mostrado en la Tabla 5, todas las preferencias agregadas verifican la propiedad T_4 .

Observamos que en el 0.5-corte y en el 0.6-corte las dos semánticas proporcionan los mismos resultados. Aunque los porcentajes de cumplimiento relativo son similares en ambas semánticas, el cumplimiento absoluto de las propiedades es más sensible al uso de diferentes semánticas: en el 0.8-corte hay una diferencia del 9.41%, y en el 0.9-corte la diferencia es del 25.88%. Finalmente, enfatizamos el hecho de que en las dos semánticas para cualquier α -corte y para cualquier regla de agregación el cumplimiento de la transitividad es total con las preferencias colectivas.

α	0.5		0.6		0.7		0.8		0.9	
Semántica	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
Absoluto	78.82	78.82	78.82	78.82	82.35	78.82	72.94	82.35	98.82	72.94
Relativo	98.59	98.59	98.59	98.59	98.94	98.59	98.06	98.94	99.94	98.06

Tabla 6. Porcentajes de cumplimiento de la transitividad ordinaria en los α -cortes con ambas semánticas. Valores.

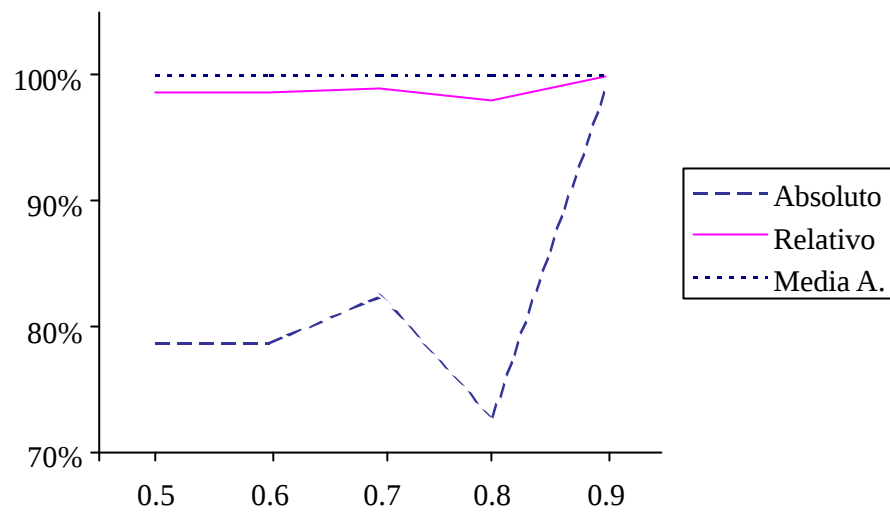


Figura 7. Porcentajes de cumplimiento de la transitividad ordinaria en los α -cortes con la semántica 1. Representación gráfica.

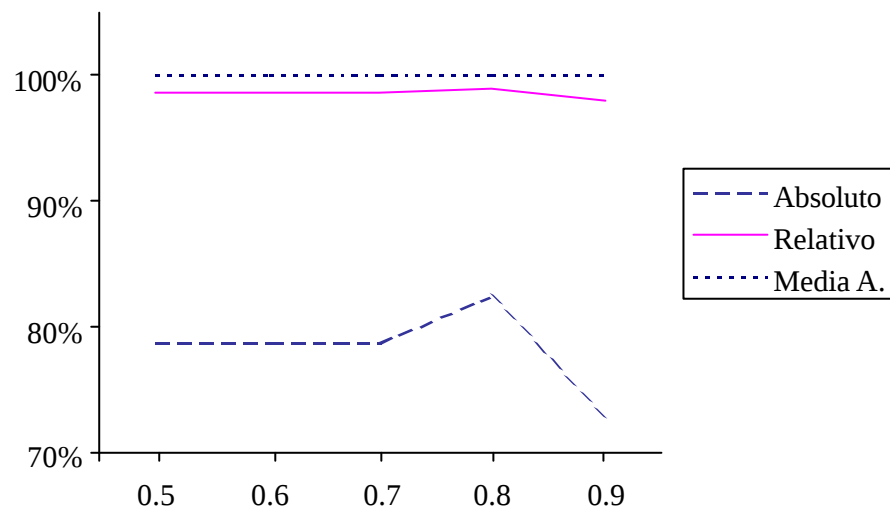


Figura 8. Porcentajes de cumplimiento de la transitividad ordinaria en los α -cortes con la semántica 2. Representación gráfica.

6. Conclusiones.

Cuando se agregan preferencias individuales para determinar la opinión de un grupo de individuos es importante que la regla de agregación utilizada verifique ciertas

propiedades para evitar resultados no deseados. Con este fin, en el presente trabajo hemos considerado reglas de agregación neutrales y estables por traslaciones que transmiten la reciprocidad de las preferencias individuales a la preferencia colectiva. Entre esta clase de reglas de agregación, hemos tenido en cuenta aquéllas asociadas a la media aritmética, f_0 , la parte simétrica de las medias cuasiaritméticas exponenciales, $\hat{f}_b$, y el caso límite $\hat{f}_\infty$.

Con el fin de permitir a los individuos que puedan mostrar sus preferencias graduadas entre las alternativas, hemos considerado etiquetas lingüísticas representadas por números reales con dos semánticas diferentes relacionadas con dos enfoques distintos. Es importante enfatizar que tanto los resultados individuales como los colectivos son muy similares en las dos semánticas. Entre los resultados obtenidos en nuestro estudio empírico, hemos observado que la ordenación proporcionada por el 0.5-corte asociado a la preferencia colectiva generada por f_0 y $\hat{f}_b$, para valores bajos de b (menores que 10 y 50 para las semánticas 1 y 2, respectivamente) coinciden plenamente; y si b toma valores más altos, la ordenación es muy similar a la anterior. Pero usando $\hat{f}_\infty$ o bien valores extremos de b se pueden producir preferencias colectivas no representativas, debido a las indiferencias colectivas que aparecen.

Un objetivo de este trabajo ha sido comparar el comportamiento racional y colectivo de acuerdo con 6 propiedades de transitividad difusa. Mientras que en cualquiera de las propiedades consideradas los individuos no la satisfacen en alguna terna de alternativas, la totalidad de las preferencias difusas colectivas proporcionadas por las reglas de agregación consideradas verifican plenamente las 4 primeras propiedades, incluida la hipótesis más usual de coherencia, la transitividad max-min débil. Y las otras dos propiedades han sido cumplidas por un alto porcentaje de individuos.

Bibliografia.

1. Arrow, K. J. (1963): *Social Choice and Individual Values*, Second edition, Yale University Press, New Hagen.
2. Barrett, C. R., Pattanaik, P. K. y Salles, M. (1990): "On choosing rationally when preferences are fuzzy", *Fuzzy Sets and Systems*, **34**, pp. 197-212.
3. Bezdek, J. C., Spillman, B. y Spillman, R. (1978): "A fuzzy relation space for group decision theory", *Fuzzy Sets and Systems*, **1**, pp. 255-268.
4. Bonissone, P. P. y Decker, K. S. (1986): "Selecting uncertainty calculi and granularity: An experiment in trading-off precision and complexity", en L. H. Kanal, J. F. Lemmer (eds.), *Uncertainty in Artificial Intelligence*, North-Holly, Amsterdam, pp. 217-247.
5. Calvo, T., Kolesàrova, A., Komorníková, M. y Mesiar, R. (2002): "Aggregation operators: Properties, classes and constructions models", en T. Calvo, G. Mayor y R. Mesiar (eds.), *Aggregation Operators: New Trends and Applications*, Physica-Verlag, Heidelberg, pp. 3-104.
6. Cutello, V. y Montero, J. (1994): "Fuzzy rationality measures", *Fuzzy Sets and Systems*, **62**, pp. 39-54.
7. Dasgupta, M. y Deb, R. (1996): "Transitivity and fuzzy preferences", *Social Choice and Welfare*, **13**, pp. 305-318.
8. Delgado, M., Vila, M. A. y Voxman, W. (1998): "On a canonical representation of fuzzy numbers", *Fuzzy Sets and Systems*, **93**, pp. 125-135.
9. Dubois, D. y Prade, H. (1980): *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*, Academic Press, Nueva York.
10. Dutta, G., Panda, S. C. y Pattanaik, P. K. (1986): "Exact choice and fuzzy preferences", *Mathematical Social Sciences*, **11**, pp. 53-68.

11. Fishburn, P. C. (1973): "Binary choice probabilities: On the varieties of stochastic transitivity", *Journal of Mathematical Psychology*, **10**, pp. 327-352.
12. Fodor, J. y Roubens, M. (1994): *Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support*, Kluwer, Dordrecht.
13. García Lapresta, J. L. y Llamazares, B. (2000): "Aggregation of fuzzy preferences: Some rules of the mean", *Social Choice and Welfare*, **17**, pp. 673-690.
14. García Lapresta, J. L. y Llamazares, B. (2001): "Majority decisions based on difference of votes", *Journal of Mathematical Economics*, **45**, pp. 463-481.
15. García Lapresta, J. L. y Marques Pereira, R. A. (2003): "Constructing reciprocal and stable aggregation operators", *Proceedings of the 2003 IFSA Conference*, Estambul.
16. García Lapresta, J. L. y Meneses Poncio, L. C. (2001): "An empirical analysis of fuzzy transitivity in decision making", *Proceedings of the VIII SIGEF Congress*, Nápoles.
17. Herrera, F., Herrera Viedma, E. y Verdegay, J. L. (1997): "A rational consensus model in group decision making using linguistic assessments", *Fuzzy Sets and Systems*, **88**, pp. 31-49.
18. Jain, N. (1990): "Transitivity of fuzzy relations and rational choice", *Annals of Operations Research*, **23**, pp. 265-278.
19. Nakamura, K. (1986): "Preference relations on a set of fuzzy utilities as a basis for decision making", *Fuzzy Sets and Systems*, **20**, pp. 147-162.
20. Nurmi, H. (1981): "Approaches to collective decision making with fuzzy preference relations", *Fuzzy Sets and Systems*, **6**, pp. 249-259.
21. Ovchinnikov, S. V. (1986): "On the transitivity property", *Fuzzy Sets and Systems*, **20**, pp. 241-243.

22. Suppes, P., Krantz, D. H., Luce, R. D. y Tversky, A. (1989): *Foundations of Measurements, Vol. 2*, Academic Press, Nueva York.
23. Switalski, Z. (1999): "Rationality of fuzzy reciprocal preference relations", *Fuzzy Sets and Systems*, **107**, pp. 187-190.
24. Switalski, Z. (2001): "Transitivity of fuzzy preference relations – an empirical study", *Fuzzy Sets and Systems*, **118**, pp. 503-508.
25. Switalski, Z. (2003): "General transitivity conditions for fuzzy reciprocal preference matrices", *Fuzzy Sets and Systems*, en prensa.
26. Tanino, T. (1984): "Fuzzy preference orderings in group decision making", *Fuzzy Sets and Systems*, **12**, pp. 117-131.
27. Tanino, T. (1988): "Fuzzy preference relations in group decision making", en J. Kacprzyk y M. Roubens (eds.), *Non-Conventional Preference Relations in Decision Making*, Springer-Verlag, Berlín, pp. 54-71.
28. Triantaphyllou, E. (2000): *Multi-Criteria Decision Making Methods: A Comparative Study*, Kluwer, Dordrecht.
29. Zadeh, L. A. (1971): "Similarity relations and fuzzy orderings", *Information Sciences*, **3**, pp. 177-200.
30. Zimmermann, H. J. (1991): *Fuzzy Set Theory and Its Applications*, Kluwer, Dordrecht.