

TÉCNICAS BAYESIANAS SOBRE MODELOS DE ESPACIOS DE ESTADOS NO LINEALES ASOCIADOS A POBLACIONES PESQUERAS EXPLOTADAS

Isabel Serrano Czaia

Departamento de Economía General y Estadística
Universidad de Huelva
e-mail: iserrano@uhu.es

María Dolores González Galán

Departamento de Economía General y Estadística
Universidad de Huelva
e-mail: gonzalez@uhu.es

Juan José García del Hoyo

Departamento de Economía General y Estadística
Universidad de Huelva
e-mail: hoyo@uhu.es

Resumen

Cada vez se extiende más el uso de modelos de espacios de estados no lineales que describen la dinámica de poblaciones pesqueras explotadas en combinación con técnicas bayesianas que permiten estimar los parámetros poblacionales que aparecen en estos modelos.

Uno de los aspectos en los que no hay consenso a la hora de aplicar técnicas bayesianas sobre modelos asociados a la evolución de recursos pesqueros es en la determinación de las distribuciones “a priori” o iniciales asociadas a los parámetros. En este sentido, los propósitos de este trabajo son establecer las distribuciones iniciales obtenidas al aplicar criterios formales o lo más objetivos posible, y estudiar la sensibilidad de los parámetros ante cambios en las distribuciones iniciales ajustando un modelo no lineal de *stock-reclutamiento* a datos observados. Finalmente se comparan los modelos estimados mediante medidas de discrepancia entre los valores reales y valores generados aleatoriamente.

Para llevar a cabo las estimaciones, se utilizan series de esfuerzo pesquero estandarizado y de capturas, mientras que la técnica bayesiana empleada se basa en el Muestreo de Gibbs.

Palabras clave: Poblaciones pesqueras explotadas, modelos *stock-reclutamiento* no lineales, análisis bayesiano, distribuciones iniciales, muestreo de Gibbs.

1. Introducción

La dinámica de las poblaciones pesqueras explotadas se estudia a partir de modelos matemáticos, que pretenden recoger todos los factores que pueden influir sobre ellas y mostrar las relaciones entre estos factores y la evolución de las biomásas de estas poblaciones, de donde surgen modelos de estado-medida generalmente no lineales.

En los estudios sobre la dinámica de pesquerías, donde la aplicación de las técnicas bayesianas está cada vez más extendida, no se aprecia un consenso en cuanto al establecimiento de las distribuciones iniciales asociadas a los parámetros, algunos autores recomiendan tomarlas no informativas por defecto (Walters y Ludwig (1994)), mientras que otros consideran que, siempre que se pueda, debe incluirse el conocimiento histórico o la experiencia con otros *stocks* a la hora de determinarlas (Punt y Hilborn (1997)). De forma general, cuando se necesita trabajar con este tipo de distribuciones, se acude a la distribución uniforme o a la distribución uniforme en una escala logarítmica.

En cuanto a la estimación de los modelos estado-medida no lineales pueden utilizarse diferentes métodos, ya sea el Filtro de Kalman Extendido combinado con Máxima-verosimilitud, aplicado a problemas similares por Pella (1993), u otros filtros alternativos al filtro de Kalman para modelos no lineales. Otra técnica es la que se basa en los métodos bayesianos conocida como Muestreo de Gibbs, una de cuyas aplicaciones que cabe destacar es la estimación de modelos estado-medida no lineales desarrollada por Carlin et al.(1992), semejante a al procedimiento seguido en este trabajo. Una aplicación más reciente es la de García del Hoyo (1995), García Ordaz y García del Hoyo (1998) o Millar y Meyer (2000).

En este trabajo presentaremos brevemente algunos de los modelos más utilizados para describir una población pesquera explotada (apartado 2), así como la metodología estadística basada en las técnicas bayesianas sobre estos modelos, incluyendo la determinación formal de las distribuciones iniciales que surge cuando se aplica el método de Jeffreys (apartado 3). Finalmente, en el apartado 4,

presentamos una aplicación de esta metodología sobre los datos de la pesquería del fletán desde el año 1974 hasta el año 2001 obtenidos a partir del informe de la *International Pacific Halibut Commission*, comparando los resultados de dos modelos que se obtienen al cambiar las distribuciones iniciales de los parámetros de la ecuación de estado.

2. Descripción de la dinámica asociada a las poblaciones pesqueras explotadas

Una de las cuestiones más importantes relacionadas con la valoración de las pesquerías explotadas es la estimación de los parámetros que aparecen en los modelos que tratan de describir la dinámica asociada a estas poblaciones, y que se desarrollan teniendo en cuenta los factores que pueden influir en su evolución. Entre estos modelos se encuentran los modelos agregados, en los que se considera de forma conjunta la influencia de los factores naturales en la dinámica de la población y se formulan en tiempo continuo, destacándose entre ellos el Modelo General de Producción de Schaefer (1954) que considera como variable independiente el tiempo y cuatro variables dependientes o funciones del tiempo: la *biomasa de la población*, la *tasa del esfuerzo de pesca*, la *tasa de captura* y la *tasa de captura por unidad de esfuerzo* (CPUE).

Otra posibilidad para explicar la dinámica de las poblaciones pesqueras explotadas se obtiene con los modelos *stock*-reclutamiento, que se formulan en tiempo discreto y se basan en las relaciones entre el *stock* reproductor o frezante y el reclutamiento obtenido a partir de éste, esto permite ajustar el comportamiento estacional de algunas especies así como aquellas pesquerías en las que se establecen medidas que limitan la pesca en un período concreto del año. En líneas generales, los modelos *stock*-reclutamiento se definen por dos componentes, cuya dinámica es la siguiente: a partir del *stock* de reproductores o frezantes (S_t) se producirá una nueva generación de peces o recluta (X_{t+1}). Parte de estos reclutas serán capturados (P_{t+1}) y el resto

conformarán un nuevo *stock* de reproductores, conocido también como supervivientes (*escapement*)¹ (Figura 1). Por tanto,

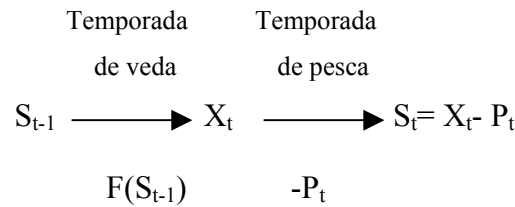


Figura 1: Esquema de un modelo *stock*-reclutamiento

Las ecuaciones (1) y (2) definen las relaciones *stock*-reclutamiento en dichos modelos.

$$X_t = F(S_{t-1}) \quad (1)$$

$$S_t = X_t - P_t \quad (2)$$

Entre las distintas formas de exponer esta relación *stock*-reclutamiento podemos señalar las siguientes:

- Modelo de Beverton-Holt (1957)

$$X_t = \frac{\beta_1 S_{t-1}}{1 + \beta_2 S_{t-1}} \quad (3)$$

donde el parámetro β_1 se relaciona con la mortalidad densidad-independiente y β_2 con la mortalidad densidad-dependiente de las larvas².

- Modelo de Ricker (1954)

¹Se supone que el *stock* de reproductores no sobrevive para pasar a formar parte del *stock* de reclutas así como que la captura tiene lugar previamente al proceso de reproducción.

²En general, este modelo resulta adecuado para aquellas especies en las que el reclutamiento no se ve afectado por la actividad pesquera, al menos dentro de un rango "normal" de esfuerzo de pesca (Clark (1990)).

$$X_t = \beta_1 S_{t-1} e^{-\beta_2 S_{t-1}} \quad (4)$$

Teniendo los parámetros β_1 y β_2 la misma interpretación que en el caso de Beverton-Holt.

- Modelo de Cushing (1971)

$$X_t = \beta_1 S_{t-1}^{\beta_2} \quad (5)$$

Siendo β_2 un índice de dependencia de la densidad.

Las relaciones anteriores se pueden interpretar como ecuaciones de estado (deterministas) para la biomasa de las poblaciones pesqueras.

Por otra parte, a partir de la función de producción de la pesquería o función de capturas se obtiene una ecuación de observación (determinista). La relación entre las capturas observadas y las biomásas también admiten varias expresiones siendo las más comunes:

- Función de capturas de Schaefer (1954) (versión discreta)

$$P_t = qX_t E_t \quad (6)$$

- Función de capturas de Spence (1974):

$$P_t = X_t (1 - e^{-qE_t}) \quad (7)$$

donde q es una constante que representa el coeficiente de capturabilidad, esto es, la *tasa instantánea de la mortalidad causada por unidad de esfuerzo pesquero* y $E(t)$ el esfuerzo pesquero que, en líneas generales, constituye un indicador de la magnitud e intensidad de la actividad humana para extraer el pescado³.

3. Metodología estadística

3.1 Modelo de espacio de estados

Cada función de *stock*-reclutamiento junto a una de las ecuaciones de capturas constituye una versión determinista del modelo de producción general. No obstante, dada la incertidumbre asociada a toda pesquería, podemos introducir perturbaciones aleatorias independientes e idénticamente distribuidas de forma multiplicativa que representen respectivamente un error de proceso, w_t , que recoge la incertidumbre asociada a la dinámica de la población y un error de observación v_t , relativo a los posibles errores de medida. Como resultado, el modelo estadístico utilizado para estimar las biomásas y los parámetros biológicos adopta la siguiente forma

$$X_t = F(S_{t-1}) \cdot e^{w_t} \quad \text{con } w_t \approx N(0, h_w) \quad (8)$$

$$P_t = G(X_t) \cdot e^{v_t} \quad \text{con } v_t \approx N(0, h_v) \quad (9)$$

donde h_w y h_v representan respectivamente las precisiones (inversas de las varianzas) de los errores de proceso y observación. Dada la inexistencia de evaluaciones anteriores de la biomasa de esta especie, estas variables tendrán la consideración de inobservables, y deberán ser estimadas junto a los parámetros del modelo a partir de las observaciones de esfuerzo y capturas disponibles.

Tomando logaritmo en las expresiones (8) y (9), la forma estocástica de las ecuaciones del proceso se puede describir como:

$$\ln X_t = \ln F(S_{t-1}) + w_t \quad \text{con } w_t \approx N(0, h_w) \quad (10)$$

$$\ln P_t = \ln G(X_t) + v_t \quad \text{con } v_t \approx N(0, h_v) \quad (11)$$

3.2 Muestreo de Gibbs

El algoritmo mencionado consiste en generar muestras aleatorias a partir de las distribuciones condicionales completas univariantes para cada una de las variables que intervienen en el modelo. Disponemos de un conjunto de $T+6$ variables

³ Ambas son versiones discretas de la función de capturas propuesta por Schaefer (1954), que supone

aleatorias, $X_0, X_1, \dots, X_T, \exists_1, \exists_2, q, h_v, h_w$, y un conjunto de observaciones y . Dado un vector inicial $(X_0^{(0)}, \dots, X_T^{(0)}, \exists_1^{(0)}, \exists_2^{(0)}, q^{(0)}, h_v^{(0)}, h_w^{(0)})$, obtenido mediante la simulación de las distribuciones *a priori*, el algoritmo sigue los siguientes pasos:

Paso 1: 1ª extracción $X_0^{(1)} \sim f(X_0 / X_1^{(0)}, \dots, X_T^{(0)}, \exists_1^{(0)}, \exists_2^{(0)}, q^{(0)}, h_v^{(0)}, h_w^{(0)}, y)$

2ª extracción $X_1^{(1)} \sim f(X_1 / X_0^{(1)}, X_2^{(0)}, \dots, X_T^{(0)}, \exists_1^{(0)}, \exists_2^{(0)}, q^{(0)}, h_v^{(0)}, h_w^{(0)}, y),$

...

extracción final $h_w^{(1)} \sim f(h_w / X_0^{(1)}, \dots, X_T^{(1)}, \exists_1^{(1)}, \exists_2^{(1)}, q^{(1)}, h_v^{(1)}, y).$

Paso 2: Tomar como vector inicial $(X_0^{(1)}, X_1^{(1)}, \dots, X_T^{(1)}, \exists_1^{(1)}, \exists_2^{(1)}, q^{(1)}, h_v^{(1)}, h_w^{(1)})$

Volver al paso 1 o salir.

Esta secuencia de valores constituyen una cadena de Markov, de forma que, operando de forma sucesiva un número l de veces suficientemente grande, obtendríamos el vector $T+6$ dimensional $(X_0^{(l)}, X_1^{(l)}, \dots, X_T^{(l)}, \exists_1^{(l)}, \exists_2^{(l)}, q^{(l)}, h_v^{(l)}, h_w^{(l)})$ que como mostraron Geman y Geman (1984) converge en distribución a una muestra aleatoria de tamaño unidad de la conjunta $f(X_0, X_1, \dots, X_T, \exists_1, \exists_2, q, h_v, h_w)$ a medida que l tiende a infinito. Repitiendo el proceso G veces en paralelo se obtendría una muestra de tamaño G de extracciones aleatorias de la distribución conjunta, $(X_0^{(j)}, X_1^{(j)}, \dots, X_T^{(j)}, \exists_1^{(j)}, \exists_2^{(j)}, q^{(j)}, h_v^{(j)}, h_w^{(j)})$ para $j = 1, \dots, G$, que puede ser utilizada para estimar las densidades marginales y cualquier estadístico de dichas distribuciones.

Para la estimación de las densidades marginales puede utilizarse el estimador de núcleo, basado en el teorema de Rao-Blackwell, dado por Gelfand y Smith (1990), que, para una variable cualquiera, $f(X_i)$ adoptará la forma

$$\hat{f}(x_0) = \frac{1}{G} \sum_{k=1}^G f(x_0 / x_1^{(k)}, \dots, x_T^{(k)}, \beta_1^{(k)}, \beta_2^{(k)}, q^{(k)}, h_v^{(k)}, h_w^{(k)}) \quad (12)$$

que la pesca por unidad de esfuerzo es proporcional a la magnitud de la población: $P(t) = qE(t)X(t)$.

procediendo de la misma manera para el resto de parámetros a estimar, podemos obtener las estimaciones requeridas de las biomásas y los parámetros del modelo.

La aplicabilidad del método reside, por consiguiente, en la disponibilidad de distribuciones *a priori* de los parámetros y de la biomasa inicial, y de la posibilidad de obtener las distribuciones condicionales completas mediante la aplicación del Teorema de Bayes.

3.3 Distribuciones iniciales de los parámetros

Con respecto a las distribuciones *a priori*, se puede hablar de dos tipos de distribuciones: informativas y no informativas. Box y Tiao (1973) definen una distribución *a priori* no informativa (o de referencia) como aquella que proporciona muy poca información con relación al experimento que se esté estudiando, en este caso la valoración del *stock* de recursos; el problema que suelen presentar estas distribuciones es que son muy sensibles a los sistemas de medida. Por otra parte, una distribución *a priori* informativa permite incorporar información disponible sobre el *stock* a partir de fuentes literarias o de la experiencia con otros *stocks*, y puede que influya en los resultados.

Entre los métodos desarrollados para determinar las distribuciones iniciales siguiendo un procedimiento formal o lo más objetivo posible caben destacar los resultados de Jeffreys (1961), Zellner (1971), Box y Tiao (1973) o Bernardo (1979). En el trabajo que presentamos analizaremos las distribuciones *a priori* no informativas que les corresponderían a los parámetros que aparecen en el modelo estadístico formado por las ecuaciones (8) y (9) según el método de Jeffreys

3.2.1 Determinación de las distribuciones iniciales no informativas según el criterio de Jeffreys

La regla de Jeffreys para determinar las distribuciones iniciales depende de la matriz de información de Fisher. Esta matriz se define como $I_X(\theta) = \left(I(x, \theta)_{i,j} \right)$, con θ como vector de parámetros. Bajo condiciones de regularidad, una forma alternativa de obtener la información de Fisher es

$$I(x, \theta)_{ij} = -E \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \ln f(x, \theta) \right] \quad (13)$$

siendo $f(x, \theta)$ la función de verosimilitud asociada al parámetro, y que denotaremos por $l(\theta|x)$. Una propiedad de esta medida y de la que haremos uso dadas las características de nuestro modelo es la siguiente:

Propiedad: Bajo las condiciones de regularidad, la información conjunta de T variables aleatorias $(X_1, X_2, \dots, X_T)$ se puede calcular a partir de la siguiente expresión:

$$I_X(\theta) = I_{X_1}(\theta) + E_{X_1} \left[I_{X_2|X_1}(\theta) \right] + E_{X_1, X_2} \left[I_{X_3|X_1, X_2}(\theta) \right] + \dots + E_{X_1, \dots, X_{T-1}} \left[I_{X_T|X_1, \dots, X_{T-1}}(\theta) \right] \quad (14)$$

donde

$$I_{X_t|X_1, \dots, X_{t-1}}(\theta)_{ij} = -E_{X_t|X_1, \dots, X_{t-1}} \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \ln f(x_t|x_1, \dots, x_{t-1}) \right] \quad (15)$$

para $t=2, 3, \dots, T$.

En cuanto a la construcción de las distribuciones *a priori*, La norma de Jeffreys consiste en tomar la distribución inicial asociada a un parámetro θ , $\pi(\theta)$, de forma que

$$\pi(\theta) \propto \det(I_X(\theta))^{1/2} \quad (16)$$

En 1961 realiza una modificación para solucionar el problema que se presentaba al imponer la condición de invarianza ante reparametrizaciones, evaluando de forma independiente las submatrices de Fisher correspondientes a los parámetros de localización y los de escala.

3.2.3 Aplicación del método de Jeffreys sobre los modelos de espacio de estados

En cuanto a la determinación de las distribuciones iniciales asociadas a los parámetros que aparecen en las ecuaciones del modelo de espacio de estados (10) y (11), consideraremos la biomasa inicial (X_0) como una variable cuya distribución inicial es independiente del resto de las biomásas y en la que no interviene ninguno de los parámetros del modelo.

Los parámetros para los que trataremos de definir formalmente las distribuciones iniciales no informativas son $\exists_1$, $\exists_2$, q , h_w y h_v . Al componerse los modelos de dos ecuaciones que no poseen parámetros en común, se puede separar el cálculo de las distribuciones iniciales para dos vectores paramétricos independientes, llamémosles $2_1 = (\exists_1, \exists_2, h_w)$ y $2_2 = (q, h_v)$.

La función de verosimilitud asociada a 2_1 es

$$l(\theta_1 | LX_0, LX_1, \dots, LX_T) \propto \prod_{t=1}^T f(LX_t | LX_{t-1}, \theta_1) = \prod_{t=1}^T \left\{ \sqrt{\frac{h_w}{2\pi}} \exp \left[-\frac{h_w}{2} (LX_t - \ln F(S_{t-1}, \theta_1))^2 \right] \right\} \quad (17)$$

donde $LX_t = \ln X_t$ para $t=0, \dots, T$, y $F(S_{t-1}, \theta_1)$ depende de la relación de reclutamiento que estemos considerando y que se muestran en las ecuaciones (3), (4) y (5).

Para el vector que recoge los parámetros que aparecen en la ecuación de observación, 2_2 , la función de verosimilitud queda

$$l(\theta_2 | LP_1, LP_2, \dots, LP_T, X_1, X_2, \dots, X_T) \propto \prod_{t=1}^T f(LP_t | X_t, \theta_2) = \prod_{t=1}^T \left\{ \sqrt{\frac{h_v}{2\pi}} \exp \left[-\frac{h_v}{2} (LP_t - G(X_t, \theta_2))^2 \right] \right\} \quad (18)$$

donde $LP_t = \ln P_t$ para $t=1, \dots, T$ y $G(X_t, \theta_2)$ depende de la función de producción que se tome ((6) o (7)). Como resultado, teniendo en cuenta las igualdades (14) y (15), y aplicando la modificación de Jefreys, la expresión de la distribución inicial para el primer vector paramétrico, $2_1 = (\exists_1, \exists_2, h_w)$, es:

$$\pi(\theta_1) \propto \frac{1}{\beta_1} \left(\sum_{t=2}^T \text{Var}_{LX_1, \dots, LX_{t-1}} [g(S_{t-1}, \beta_2)] + \sum_{s=1}^{T-1} \sum_{t=s}^{T-1} E_{LX_1, \dots, LX_t} \left[(g(S_{s-1}, \beta_2) - g(S_t, \beta_2))^2 \right] \right)^{1/2} \frac{1}{h_w} \quad (19)$$

donde, dado $S_{t-1}=X_{t-1}-P_{t-1}$,

- $g(S_{t-1}, \beta_2) = \frac{S_{t-1}}{1 + \beta_2 S_{t-1}}$ si la ecuación de estados se define a partir de la relación de Beverton-Holt (3).
- $g(S_{t-1}, \beta_2) = S_{t-1}$ en el caso de que la relación que se tome sea la de Ricker (4)
- $g(S_{t-1}, \beta_2) = \ln(S_{t-1})$ si se considera la función de Cushing (5).

Mientras que para el segundo vector de parámetros, $\mathcal{Z}_2 = (q, h_v)$, se obtiene

$$\pi(\theta_2) \propto \frac{1}{q} \frac{1}{h_v} \quad (20)$$

Si se toma como función de capturas la relación (6), y

$$\pi(\theta_2) \propto \frac{1}{h_v} \left(\sum_{t=1}^T \frac{E_t^2 e^{-qE_t}}{(1 - e^{-qE_t})^2} \right)^{1/2} \quad (21)$$

Si se considera la función de producción (7).

Vemos que el hecho de trabajar con variables dependientes y con formas no lineales añade una gran complejidad a las distribuciones iniciales. En los casos en los que los parámetros, a partir de la transformación logarítmica, pasan a ser parámetros de localización las distribuciones iniciales que se obtienen son uniformes en una escala logarítmica. Igualmente, la distribución del logaritmo de los parámetros de escala es uniforme.

4. Aplicación

El modelo de espacio de estados formado por las ecuaciones (13) y (14) se aplicó sobre los datos de esfuerzo, capturas y CPUE correspondientes al fletán (*halibut*) y procedentes del informe que elabora la *International Pacific Halibut Commission*. Estos datos, para el período 1974-2001 se recogen en la siguiente tabla:

<i>Año</i>	<i>Esfuerzo</i> (skates)	<i>Capturas</i> (libras/10 ⁶)	<i>CPUE</i> (libras/skates)	<i>Año</i>	<i>Esfuerzo</i> (skates)	<i>Capturas</i> (libras/10 ⁶)	<i>CPUE</i> (libras/skates)
1974	134,339	10.22	76.08	1988	190,919	25.813	135.20
1975	170,162	13.37	78.57	1989	172,037	22.076	128.32
1976	200,346	12.81	63.94	1990	138,205	20.331	147.11
1977	117,063	8.70	74.32	1991	151,877	19.013	125.19
1978	115,226	9.02	78.25	1992	154,781	20.171	130.32
1979	109,519	9.57	87.41	1993	162,012	24.754	152.79
1980	88,158	9.23	104.68	1994	174,686	23.326	133.53
1981	72,102	9.99	138.55	1995	133,888	20.428	152.58
1982	64,414	9.56	148.45	1996	142,811	21.806	152.69
1983	82,429	12.45	150.98	1997	158,067	25.775	163.06
1984	105,863	15.58	147.20	1998	173,176	27.15	156.78
1985	131,452	20.86	158.70	1999	191,385	26.127	136.52
1986	179,546	23.38	130.23	2000	173,603	23.073	132.91
1987	192,674	24.52	127.24	2001	158,454	21.805	137.61

Tabla 1: Esfuerzo, Captura y CPUE para el fletán (1974-2001).

Como relación de reclutamiento se consideró la función de Beverton-Holt (3) y como función de producción la definida por Spence (7). En cuanto a la metodología estadística, la distribución conjunta combina la información a priori con los datos muestrales a través de la siguiente expresión

$$f(LX_0, \dots, LX_T, \beta_1, \beta_2, q, h_w, h_v, P_1, \dots, P_T) =$$

$$f(LX_0) \left[\prod_{t=1}^T f(LX_t / LX_{t-1}, P_{t-1}, \beta_1, \beta_2, h_w) \right]$$

$$\left[\prod_{t=1}^T f(\text{Log}(P_t) / LX_t, q, h_v) \right] f(\beta_1) f(\beta_2) f(q) f(h_w) f(h_v)$$

De la que, para obtener las distribuciones condicionales completas, establecemos en primer lugar las distribuciones iniciales asociadas a los parámetros. En este estudio hemos considerado dos posibilidades cambiando las distribuciones iniciales en los parámetros de la ecuación de estado, lo que nos permitirán observar la sensibilidad de los parámetros ante estos cambios. El primer modelo considera todas las distribuciones iniciales informativas, aunque tomando un coeficiente de variación muy alto. En el segundo modelo asignamos distribuciones no informativas, en concreto uniformes, a los parámetros de la relación de reclutamiento (10) y a la biomasa inicial. En ambos casos las perturbaciones serán informativas. Las distribuciones, así como los valores medios iniciales, obtenidos a partir de una aproximación lineal de Schnute(1977) al modelo, son las siguientes:

Parámetro	Modelo 1: Dist. Inicial informativa	Modelo 2: Dist. Inicial no informativa	Valor medio	Coefficiente de variación (%)
X_0	Normal	Uniforme	82.24	400
$\text{Ln}\beta_1$	Normal	Uniforme	0.26	200
β_2	Normal	Uniforme	8.79E-04	400
q	Normal	Normal	9.08E-07	15
h_w	Gamma	Gamma	0.10	200
h_v	Gamma	Gamma	0.03	200

Tabla 2: Distribuciones y valores iniciales de los parámetros.

En cuanto a las distribuciones condicionales completas, combinaremos la información a priori con los resultados muestrales a través del Teorema de Bayes, con la única salvedad de utilizar la aproximación de primer orden de Taylor en

aquellos casos en los que la función sea no lineal respecto a la variable para la que queramos estimar su densidad.

La estimación se llevó a cabo usando el muestreo de Gibbs, programando el algoritmo con el paquete estadístico GAUSS 3.2, con una amplitud de convergencia de $l=25$ y calculando $G=1000$ muestras en paralelo de la distribución conjunta. Los resultados se presentan en la siguiente tabla:

Parámetros	Modelo 1:			Modelo 2:		
	Distribuciones iniciales informativas			Distribuciones iniciales no informativas		
	Medias	Desv St.	C.V. (%)	Medias	Desv. St.	C.V. (%)
X_0	4.2595	0.7339	17.23	4.1229	0.8238	19.98
$Ln(\beta_1)$	1.1011	0.1609	14.62	0.6826	0.1920	28.13
β_2	0.0023	0.0017	75.03	0.0045	0.0018	39.41
q	9.13E-07	9.88E-08	10.83	9.08E-07	1.06E-07	11.64
h_w	2.1676	0.5288	24.39	2.1358	0.5343	25.02
h_v	1.1199	0.1268	11.32	0.8921	0.1440	16.15

Tabla 3: Resultados de las estimaciones del algoritmo de Gibbs.

En ambos modelos se puede apreciar una reducción significativa en los coeficientes de variación, siendo en el parámetro q donde esta reducción, en relación al valor inicial, ha sido menor.

La figura 2 muestra una comparación entre las biomásas estimadas que aparecen en el informe de la *International Pacific Halibut Commission* y las predicciones de las distribuciones a posteriori obtenidas con los dos modelos, representando conjuntamente los valores medios y un intervalo predictivo construido a partir de los percentiles 10 y 90 de estas distribuciones a posteriori y las estimaciones de las biomásas recogidas en el informe.

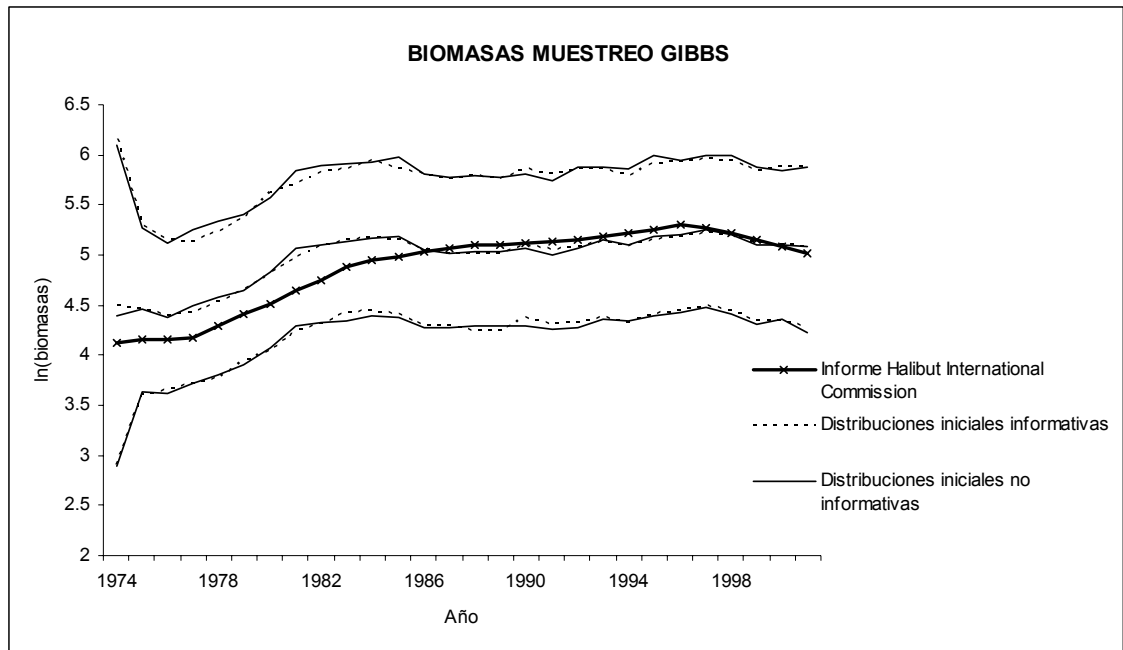


Figura 2: $\ln(\text{Biomazas})$ estimadas según el informe de *International Pacific Halibut Commission* y valores medios y percentiles 10 y 90 de las distribuciones a posteriori en los modelos estudiados.

Observamos que las biomazas recogidas en el informe se sitúan dentro del intervalo construido, mientras que no se observa una diferencia apreciable entre las estimaciones que obtenemos con ambos modelos.

Partiendo de los resultados del muestreo de Gibbs hemos obtenido simulaciones de las capturas, que nos han permitido construir intervalos predictivos considerando los percentiles 10 y 90 de estas simulaciones, y comparar las capturas reales observadas con sus valores estimados (figura 3). Al igual que en la figura anterior, los valores observados se sitúan en todo momento dentro del intervalo y se puede apreciar la proximidad entre los valores reales y sus estimaciones en ambos modelos.

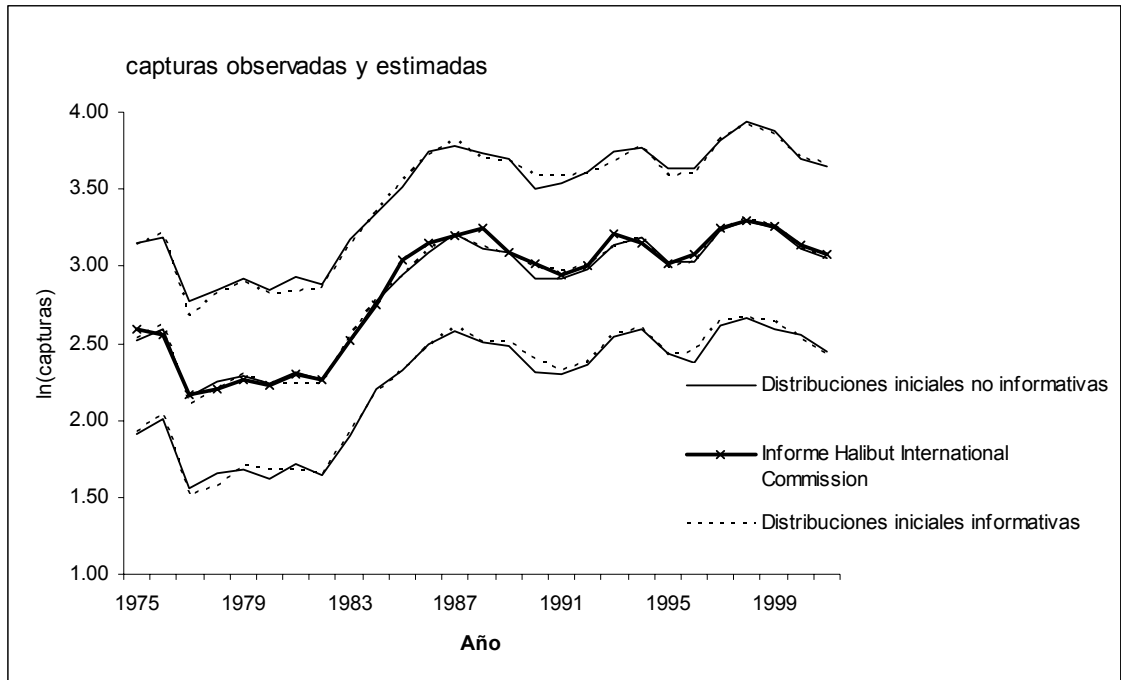


Figura 3: $\ln(\text{capturas observadas})$ según el informe de *International Pacific Halibut Commission* y valores medios y percentiles 10 y 90 de las distribuciones a posteriori en los modelos estudiados.

Para ver cómo afectan los cambios en las estimaciones en las características poblacionales, es interesante tener en cuenta la relación de los parámetros que aparecen en el modelo de Beverton-Holt y la curva de crecimiento logístico de Schaefer (1954), definida por la ecuación:

$$F[X(t)] = rX(t)[1-X(t)/K]$$

Donde r representa la tasa intrínseca de crecimiento y K el nivel de saturación o capacidad de carga del medio. Los parámetros $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ de la función de reclutamiento se relacionan con los del modelo de Schaefer mediante las expresiones: $\mathcal{E}_1 = e^r$ y $\mathcal{E}_2 = (e^r - 1)/K$. A partir de las estimaciones obtenidas con ambos modelos, los valores correspondientes para K y r son:

	Modelo 1	Modelo 2

r	1.1011	0.6826
K (libras/ 10^6)	760.15	217.56

Tabla 4: Resultados de las estimaciones del algoritmo de Gibbs.

De donde se aprecia que el nivel de saturación disponible a partir de los resultados del modelo 1 es mucho más elevado que aquél que se obtiene con el modelo 2, aunque no se manifiesta una diferencia significativa entre las estimaciones de los parámetros en ambos modelos, los cambios son suficientes para obtener una diferencia elevada en los parámetros poblacionales, es decir, r y K son sensibles a los cambios en las distribuciones iniciales.

A partir de las relaciones *stock-reclutamiento* estimadas podemos determinar las curvas esfuerzo rendimiento que proporcionan las combinaciones de esfuerzo y capturas que mantendrían al recurso estable a lo largo del tiempo. Estas curvas obedece a un enfoque estático y se determinan a partir de la condición:

$$\Delta S = S_t - S_{t-1} = 0$$

Una regulación adecuada del esfuerzo puede permitir mantener el stock en un nivel de equilibrio tal que proporcione las máximas capturas posibles, lo que equivale a obtener el Rendimiento Máximo Sostenible y que se localiza en el máximo de la función. En el caso de la pesquería del fletán se controlan cada temporada las capturas permitidas partiendo de la estimación de las biomazas y de los niveles de esfuerzo existentes y utilizando para ello modelos matemáticos más complejos que los que hemos presentados. Podemos suponer que las capturas que se observan cada año son las que proporcionan un rendimiento óptimo manteniendo el nivel del recurso estable, por lo que decidimos comparar estas capturas observadas con las que capturas sostenibles que se obtienen con lo modelos que aplicamos.

Realizando una simulación de las capturas sostenibles, partiendo de los resultados de la muestra de Gibbs y comparando el valor medio en cada instante con las capturas observadas en el mismo calculamos el error cuadrático que se obtiene con los

resultados de ambos modelos, obteniendo este error el valor 1350, en el caso del modelo cuyas distribuciones iniciales eran no informativas (Modelo 2), y 1677 para el modelo de distribuciones iniciales informativas (Modelo 1).

La representación gráfica de las combinaciones de capturas-esfuerzo reales junto a la curva de esfuerzo sostenible (entorno estable) que se obtiene a partir de los resultados del Modelo 2 permiten apreciar cómo ha ido evolucionando el stock. A partir de 1985 los puntos de capturas-esfuerzo observados se sitúan muy próximos a la curva, lo que nos permite afirmar que la regulación del nivel de capturas permitido hace que la población se mantenga en situaciones de equilibrio.

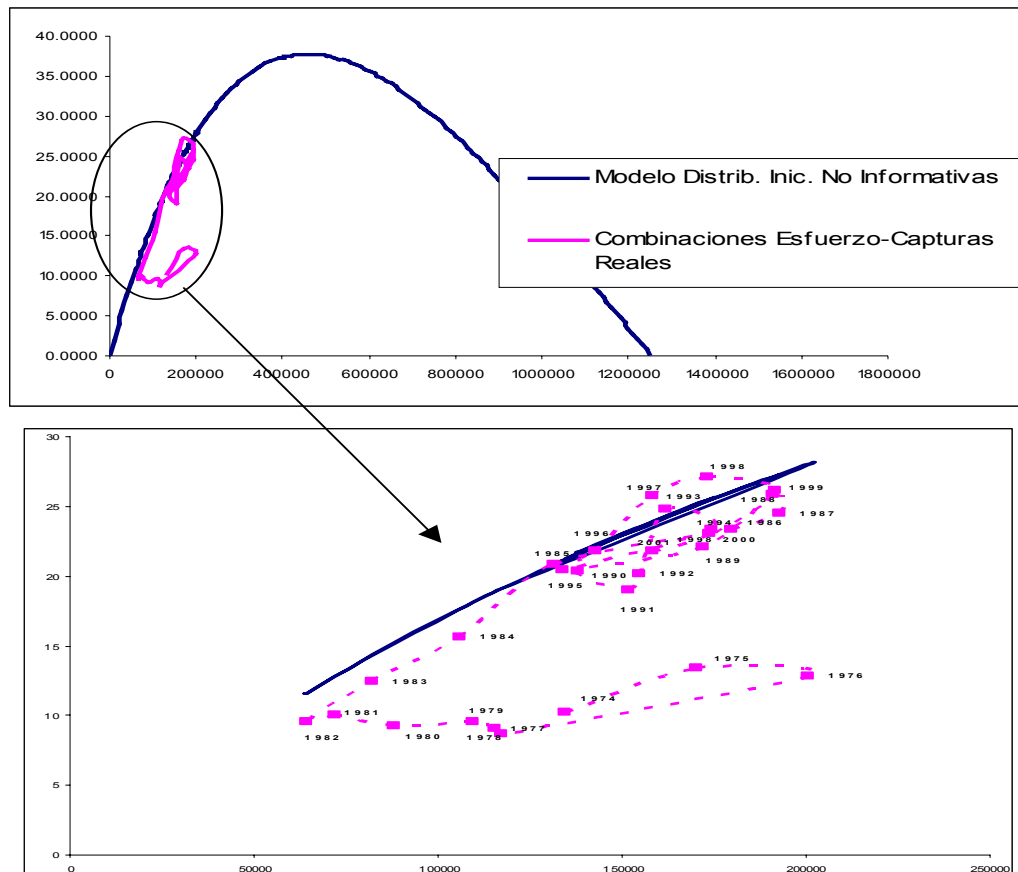


Figura 4: Representación gráfica de las combinaciones de capturas-esfuerzo reales junto a la curva de esfuerzo sostenible.

Referencias

- Bernardo, J.M., (1979): Reference posterior distributions for Bayesian inference, *J. Roy. Statist. Soc. B* 41, 113-147.
- Beverton, R.J.H. y S. J. Holt, (1957): On the Dynamics of Exploited Fish Populations, *Fishery Investigations Series II, XIX*, Londres: Ministry of Agriculture, Fisheries and Food.
- Box, G.E.P. and Tiao, G.C. (1973): *Bayesian Inference in Statistical Analysis*, Reading, MA: Addison-Wesley.
- Carlin, B.P. *et al.*, (1991): Inference for Nonconjugate Bayesian Models Using the Gibbs Sampler, *Canadian Journal of Statistics*, 19, 399-405.
- Carlin, B.P., Polson, N.G. y Stoffer, D.S., (1992): A Montecarlo Approach to Nonnormal and Non-linear State-space Modelling, *J. of the American Statistical Association*, 87 (418), 493-500.
- Clark, C.W., (1990), *Mathematical Bioeconomics. The Optimal Management of Renewable Resources*, Nueva York: Wiley.
- Cushing, D.H., (1971): The dependence of recruitment on parent stock in different groups of fishes, *Cons. Perm. Int. Explor. Mer. J.*, 33, 340-362.
- Devroye, L., (1986), *Non-Uniform random variate generation*, Nueva York: Springer-Verlag.
- García del Hoyo, J.J., (1995): Análisis Económico de la pesca del cerco en la Región Suratlántica Española, *Papeles de Economía Española*, 71, 231-251.
- García Ordaz, F. y García del Hoyo, J.J., (1998): Un Modelo Bioeconómico para la Pesquería de la Chirla (*Chamelea gallina*) de la Región Suratlántica Española, *Revista Española de Estudios Agrosociales y Pesqueros*, 184, 183-211.

- Geman, S. y Geman, D. (1984): Stochastic Relaxation, Gibbs Distributions and the Bayesian Restoration of Images, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 6, 721-741.
- Gelfand, A.E. y Smith, A.F.M., (1990): Sampled-Based Approaches to Calculating Marginal Densities, *JASA*, 85, 398-409.
- Gelman, A., Carlin J.B., Stern, H.S., y Rubin, D.B. (1995), *Bayesian Data Analysis*, London: Chapman and Hall.
- Jeffreys, H. (1967), *Theory of Probability*, Oxford: Clarendon Press.
- Millar, R.B. y Meyer, R.,(2000): Non linear state space modelling of fisheries biomass dynamics by using Metropolis-Hastings within-Gibbs sampling, *Appl. Statist.*, 49, (3), 327-342.
- Punt, A. y Hilborn R. (1997): Fisheries stock assessment and decision analysis: The Bayesian approach, *Reviews in Fish Biology and Fisheries*, 7, 35-63.
- Ricker, W.E. (1954): Stock and Recruitment, *J. Fish. Res. Bd. Canada*, 11(5), 559-623.
- Schaefer, M. B., (1954): Some aspects of the Dynamics of Populations Important to the Management of the Commercial Marine Fisheries, *Bulletin of the Inter-American Tropical Tuna Commission*, 1 (2), 1-56.
- Schaefer, M.B., (1957): Some Considerations of Population Dynamics and economics in Relation to the Management of the Marine Fisheries, *J. Fish. Res. B. Can.*, 14 (5), 669-681.
- Schnute, J., (1977): Improved estimates from the Schaefer Production Model: Theoretical Considerations, *J. Fish. Res. Bd. Canada*, 34 (5), 583-603.
- Spence, M., (1974): Blue Whales and applied control theory, en Zadeh, C.L. et al. (ed.), *System Approaches for Solving Mathematical Problems*, Gottingen y Zurich: Vandenhoeck & Ruprecht.

Walters, C.J. y Ludwig, D., (1994): Calculation of Bayes posterior probability distributions for key population parameters, *Canadian Journal of Fisheries and Aquatic Sciences*, 51, 946-958.

Zellner, A. (1997), *Bayesian Analysis in Econometrics and Statistics*, UK: Edward Elgar Publishing Company.