VALORACIÓN DE UN PROYECTO DE EDIFICACIÓN MEDIANTE OPCIONES REALES

Eva G. de Arrilucea[1]
Universidad del País Vasco. (UPV/EHU)
e-mail: **deareva@telefonica.net**

Resumen

Se dice que existe una opción real en un proyecto de inversión cuando se presenta la posibilidad de actuar en el futuro tras conocerse la resolución de algún factor que en la actualidad muestra cierto grado de incertidumbre. El proyecto de inversión aquí considerado es un proyecto inmobiliario; en particular, el propietario de un solar urbano tiene la opción de desarrollar el proyecto en el presente, o demorarlo y esperar a que se den condiciones más apropiadas en el futuro. El objetivo de este trabajo es valorar el proyecto para ello se ha construido un modelo teórico con dos fuentes de incertidumbre: el precio de la vivienda y el tipo de interés seguro. A continuación se ha valorado el modelo haciendo uso del método de diferencias finitas implícito. Se ha obtenido así una regla de decisión que permite determinar qué es lo más conveniente en un escenario dado (si acometer la inversión o esperar más tiempo) y, con ello, un valor teórico del proyecto. Por último, se ha realizado también un ejercicio de estática comparativa.: cómo varía el valor del proyecto ante cambios en la volatilidad del precio de la vivienda, en el tipo de interés seguro, en la velocidad de ajuste del tipo de interés y en el precio del riesgo asociado a dicho factor.

Palabras clave: proyectos inmobiliarios, método diferencias finitas, opciones reales

---

[1] Este trabajo forma parte de la tesis doctoral en proceso "Valoración de proyectos empresariales mediante opciones reales" dirigida por los doctores Juan Mascareñas (U. Complutense de Madrid) y José Manuel Chamorro Gómez (Universidad País Vasco)

1. Introducción.

El mercado inmobiliario en España durante la década de los 90 se ha caracterizado por un aumento del precio del metro cuadrado. Sin embargo, el aumento del valor de la vivienda no ha sido homogéneo. En la Tabla 1 podemos observar como la evolución del precio medio no ha sido igual para todas las regiones. Por ejemplo, desde el año 1991 al 2000, el precio medio del m^2 en España ha aumentado en algo más del 40%, pero el aumento en el País Vasco ha sido de casi el 91% y, concretamente, en Vitoria-Gasteiz, el precio se ha incrementado en un 170%.

El proyecto de edificación que servirá de referencia en este trabajo está relacionado con la expansión de Vitoria -Gasteiz en las zonas este-oeste, contenida dentro del Plan General de Ordenación Urbana de Vitoria, que plantea una importante ampliación del suelo para actividades económicas que ponga fin a la escasez de areas disponibles.

La situación de la vivienda en el centro urbano donde se ha diseñado este proyecto se caracteriza por una demanda muy alta y una cierta escasez de oferta, con un precio de la vivienda muy elevado, por lo que, desde el punto de vista social, existen factores que empujan a la inversión en el proyecto con relativa rapidez.

La primera noticia relacionada con la idea de construcción en las zonas este-oeste de la ciudad data de febrero de 1991, cuando el entonces Diputado General Fernado Buesa, subrayó la prioridad existente dentro del ámbito de lo social para subsanar las necesidades de vivienda por parte de los ciudadanos.[2]

Después de esto, el Decreto Foral 109/2000 del Consejo de Diputados de Álava dio por cumplidas las condiciones impuestas en la aprobación definitiva de la modificación del Plan General de Ordenación Urbana de Vitoria relativa a los primeros sectores de construcción.[3]

La teoría de las opciones reales estudia la forma de valorar un proyecto de inversión empresarial de forma análoga a la que se utilizaría para valorar una opción

[2] El Correo 28/02/1991.

[3] Boletín Oficial del Territorio Histórico de Álava (BOTHA) 4/12/2000.

financiera. En este caso estamos ante una opción de compra o *call,* en la que se paga un precio de ejercicio (inversión inicial) para tener derecho a ejercer la opción de compra del activo subyacente (realización del proyecto de construcción) en el futuro. Dado que la inversión puede ser realizada en cualquier momento en que se desee hacerlo, trataremos la opción a desarrollar este proyecto como una opción americana, a diferencia de las opciones de compra europeas en las que el momento en que pueden ser ejercitadas está prefijado.

En la literatura existen varios trabajos que analizan proyectos similares bajo el prisma de las opciones reales.

Titman (1985) analiza los precios de los terrenos urbanos en un contexto de incertidumbre y su repercusión sobre los proyectos de construcción. La decisión de construir va a sopesar, por un lado, los costes de oportunidad asociados a mantener la tierra inactiva en espera y, por otro, las ganancias esperadas de construir un proyecto más apropiado en un momento futuro.

Majd y Pindyck (1986) analizan el momento óptimo de tiempo para desarrollar un proyecto valorando las opciones inherentes al mismo y teniendo en cuenta la flexibilidad empresarial a la hora de tomar decisiones. Encuentran que la decisión de inversión es muy sensible al nivel de riesgo, más incluso que la sensibilidad sugerida por los modelos de inversión tradicionales. Esta sensibilidad tan acusada es debida sobre todo a la flexibilidad en las decisiones empresariales.

Williams (1991) analiza el valor de las opciones a desarrollar una propiedad o mantenerla inactiva desde el punto de vista del propietario de la tierra; este valor depende tanto de los ingresos derivados del proyecto como de los costes de construcción derivados de la propiedad desarrollada. El propietario elige el momento óptimo para desarrollar la propiedad, y la opción es tanto más valiosa cuanto más inciertos sean los cambios sobre los ingresos y los costes de construcción en el tiempo.

Quigg (1993) analiza un modelo de valoración de opciones reales que contiene la opción a esperar para desarrollar un terreno urbano. Se analiza el efecto de la volatilidad sobre las decisiones empresariales y su efecto positivo sobre el valor del proyecto de desarrollo del terreno.

Cappoza y Li (1994) caracterizan el valor de un proyecto de desarrollo de terrenos y el momento óptimo de inversión, e incluyen como novedad la intensidad de construcción, entendiendo por esta el nivel de capital empleado en la inversión. Demuestran cómo la capacidad de variar la intensidad influye en el valor del proyecto aumentando los valores óptimos y retrasando las decisiones de inversión. Encuentran que el valor de la propiedad desarrollada incluye una prima por irreversibilidad y también una prima por la intensidad de construcción.

El objetivo de este trabajo será construir un modelo teórico para valorar un proyecto de edificación urbana, con dos fuentes de incertidumbre, teniendo en cuenta la opción del propietario de los terrenos a desarrollar el proyecto o esperar a que se den condiciones más apropiadas en el futuro. Con los datos económicos de que disponemos, buscaremos los valores óptimos del precio de la vivienda y del tipo de interés seguro a partir de los cuales sea óptimo invertir en el proyecto.

El trabajo que aquí se presenta está estructurado de la siguiente forma. En la primera sección se construye un modelo teórico para la correcta valoración de la opción a desarrollar este proyecto de edificación. Con los datos económicos disponibles, se plasman los resultados arrojados por el modelo en una hoja de cálculo y se realiza un ejercicio de estática comparativa para analizar la respuesta del modelo ante cambios en las variables. En la última sección se analizan los resultados y se presentan las conclusiones sobre el trabajo.

2. Caracterización del problema.

Este modelo contempla dos fuentes de incertidumbre derivadas de los cambios en el precio de la vivienda y los cambios en el tipo de interés.

El rasgo más importante de estas variables es que sus valores futuros van a ser siempre inciertos y que la volatilidad se define constante en el tiempo.

Suponemos que existe un equilibrio en la economía y que los activos contingentes[4] en el par formado por el precio del subyacente (la vivienda) y el tipo de interés, están valorados de forma única. Podemos hacer descansar este supuesto en la hipótesis de no arbitraje en una economía con mercados completos y sin costes de transacción, donde existen activos negociables cuyos precios están perfectamente correlados con las variables de estado del modelo, S y r. [5]

Definimos la primera variable de estado, S, como el precio del activo subyacente (precio de la vivienda) y suponemos que esta variable sigue un proceso geométrico browniano:

$$\mathbf{dS/S = \mu_s\ dt + \sigma_s\ dz_s},$$

donde:

μ_S es la tendencia constante del precio de la vivienda; σ_S es la volatilidad; dz_S es el incremento de un proceso Gauss-Wiener que satisface: $dz_S = \varepsilon_S \sqrt{dt}$, ε_S variable aleatoria que sigue una distribución normal estándar $N\tilde{}\ (0,1)$.

La segunda variable de estado será el tipo de interés libre de riesgo nominal, que se supone sigue un proceso browniano con reversión a la media: [6]

$$\mathbf{dr = \kappa\,(r_M - \mu_r)\,dt + \sigma_r\,dz_r}$$

donde:

κ: parámetro de reversión a la media, velocidad de ajuste del tipo de interés a su media a largo plazo ($\kappa>0$); $r_{M:}$ tipo de interés medio en el largo plazo; $\mu_{r:}$ tendencia a corto plazo; $\sigma_{r\,:}$ volatilidad constante del tipo de interés; dz_r es el incremento de un proceso Gauss-Wiener que satisface:

[4] Llamamos activo contingente a aquel activo que ofrece una cantidad si ocurre un determinado estado de la naturaleza, y nada en cualquier otro estado.

[5] Estos supuestos se asumen también en Brennan y Schwartz, 1985; Titman, 1985

[6] Una diferencia importante entre el precio del subyacente y el tipo de interés es que este último suele converger a un nivel medio a largo plazo. Este fenómeno es lo que se conoce como *reversión a la media*. Vasicek (1977) incorpora la reversión a la media en el proceso que sigue el tipo de interés, manteniendo constantes κ, $r_{M,}$ y σ_r. Esta forma de expresar la estructura temporal de los tipos de interés es la llamada *spot* o al contado; la alternativa es una representación mediante factores de descuento o como tipo de interés a plazo (*forward*). Estos últimos representan los tipos que en un momento del tiempo rigen para periodos de tiempo futuros. Aunque en la literatura se ha mantenido una aparente similitud entre el uso de ambos modelos, parece ser que los modelos de

$dz_r = \varepsilon_r \sqrt{dt}$; ε_r variable aleatoria que sigue una distribución normal estándar N˜ (0,1).

Asumimos, por tanto, que el tipo de interés converge estocástica mente a un tipo de interés a largo plazo y suponemos un coeficiente de correlación constante entre las variables de estado, que denotamos por ρ:

$dz_s \, dz_r = \rho \, dt$.

Siguiendo los modelos de valoración neutrales al riesgo en tiempo continuo y sin posibilidades de arbitraje, definimos un proceso browniano ajustado al riesgo para el precio del subyacente y para el tipo de interés.

Con algunos supuestos simplificadores, podríamos obtener procesos ajustados al riesgo para las variables de estado donde el exceso de rendimiento esperado sobre el tipo de interés seguro por unidad de desviación estándar iguale a una constante λ, que se define como el precio de mercado del riesgo del factor:

$\mathbf{v_s \equiv (\mu_s - \lambda_s \sigma_s) = r}$

$\mathbf{v_r \equiv [\kappa (r_M - \mu_r) - \lambda_r \sigma_r] = r}$

Lo que estamos suponiendo es que los inversores en este proyecto son aversos al riesgo, mantienen carteras bien diversificadas y se les compensa por el componente de riesgo que tiene naturaleza sistemática.

Siguiendo el esquema planteado en otros estudios[7], el valor del proyecto de edificación va a depender de las variables de estado del modelo y del tiempo:

$Q = Q(S, r, t)$.

Vamos a adoptar un horizonte temporal arbitrariamente largo de tal forma que $Q_t = 0$, es decir, el valor del proyecto no va a verse alterado por limitaciones temporales a la inversión, en tanto que consideramos que la propiedad estará disponible a

---

tipo de interés al contado se ajustan mejor a los datos de mercado que sus equivalentes en tipos de interés a plazo (Moraleda, 1998) .

[7] Quigg, 1993; Cortazar, Schwartz y Salinas, 1998; Schwartz y Moon, 2000; Murillas 2001.

perpetuidad para que los inversores potenciales puedan decidir en qué momento desean invertir, sin ningún tipo de límite o restricción.

El valor Q (S, r ,t) ha de cumplir la ecuación fundamental de valoración para evitar posibilidades de arbitraje.[8]

$$\tfrac{1}{2}\sigma^2_s S^2 Q_{ss} + \sigma_{rs} S\, r\, Q_{sr} + \tfrac{1}{2}\sigma^2_r r^2 Q_{rr} + v_s S Q_s + v_r r Q_r - r Q + \alpha\,(S,r) = 0$$

donde α (S,r) son los flujos monetarios asociados al proyecto.

Denotamos por V(S,r) el valor del proyecto cuando éste se desarrolla, y por W(S,r) el valor cuando se mantiene en espera. Para que no existan situaciones que propicien el arbitraje, ambos valores habrán de cumplir la ecuación fundamental de valoración.

$$\tfrac{1}{2}\sigma^2_s S^2 V_{ss} + \sigma_{rs} S\, r\, V_{sr} + \tfrac{1}{2}\sigma^2_r r^2 V_{rr} + v_s S V_s + v_r r V_r - r V + \alpha_1 (S,r) = 0$$

$$\tfrac{1}{2}\sigma^2_s S^2 W_{ss} + \sigma_{rs} S\, r\, W_{sr} + \tfrac{1}{2}\sigma^2_r r^2 W_{rr} + v_s S W_s + v_r r W_r - r W + \alpha_2 (S,r) = 0$$

donde:

α_1(S,r) son los flujos asociados al proyecto desarrollado, que vamos a suponer proporcionales al valor de la vivienda. (Pueden ser negativos, a causa de los costes ecológicos, o positivos, si predominan los beneficios sociales derivados de una mayor cantidad de viviendas disponibles en el área urbana);

α_2(S,r) son los flujos asociados al proyecto sin desarrollar, que se suponen proporcionales al valor de la vivienda. (Pueden ser negativos, como el pago de impuestos sobre la propiedad inactiva, o positivos, como los beneficios ecológicos o sociales derivados del disfrute de los terrenos sin edificar).

Las condiciones de contorno[9] son:

V (0,r) = W(0,r) = 0: Cuando S=0, el proyecto no tiene ningún valor, independientemente de que se desarrolle o se mantenga en espera.

[8] Hull, 1997. Ver Anexo I : Derivación de la Ecuación Fundamental de Valoración

[9] Cortazar y Casassus(1998); Murillas (2001)

El valor del proyecto es una función continua del precio de la vivienda: "*Smooth – pasting condition*":

$V(S^*,r^*) = W(S^*,r^*)$

$V_s(S^*,r^*) = W_s(S^*,r^*)$

donde S* y r* representan los valores óptimos a los que se ejerce la opción a desarrollar el proyecto de edificación

$\lim_{r \to \infty} V(S,r) = 0$: cuando el tipo de interés es suficientemente alto, desarrollar el proyecto carece de valor. [10]

$\lim_{s \to \infty} V(S,r)/S < \infty$: cuando el precio del subyacente S es muy alto, el valor V/S es finito.

$r > 0$: el tipo de interés es estrictamente positivo.

A la hora de resolver el modelo, asumiremos que la inversión necesaria para acometer el proyecto de edificación viene fijada exógenamente y que no existen costes derivados de parar y retomar el proyecto en un momento posterior[11]. Además, el tamaño o densidad del proyecto de construcción (el output por unidad de terreno) es exógeno y no es posible introducir cambios[12]

3. Resolución del Modelo.

[10] Ingersoll y Ross (1992) realizan un estudio con el tipo de interés estocástico. Comparando el valor de un proyecto de inversión con el de un bono cupón cero, calculan una tasa crítica r* por debajo de la cual la opción a retrasar el proyecto pierde su valor y se realiza la inversión. Por encima de esta tasa, la opcion tiene un valor positivo y creciente con el tipo de interés de la economía y, por lo tanto, se induce a esperar hasta que el tipo baje lo suficiente para que resulte aconsejable acometer el proyecto. (Véase también Wilmott 1998, cap.14)
Este resultado está en consonancia con la Teoría Económica clásica, que relaciona la inversión y el tipo de interés de forma inversa. En el estudio de Ingersoll y Ross, se demuestra que cambios en la inversión inicial, horizonte temporal o volatilidad del subyacente a lo largo del análisis, alteran r*; para evitar que esto suceda, hemos enunciado las hipótesis de volatilidad e inversión inicial constantes.

[11] Este supuesto se toma por simplicidad; de hecho, normalmente sí que existen costes derivados de cerrar y volver a tomar un proyecto. Brennan y Schwartz (1985) consideran estos costes en el análisis de la explotación de una mina.

[12] Williams (1991) analiza el caso en que el propietario de la tierra puede determinar la densidad o escala a la cual desarrollar su propiedad. Concluye que la opción a desarrollar el proyecto es más valiosa si se considera flexibilidad en la elección de la densidad. De hecho, la introducción de flexibilidad sobre las acciones futuras que puedan tomarse, siempre va a aumentar el valor de la opción.

Existen varios procedimientos numéricos que pueden usarse para valorar activos derivados cuando no se dispone de fórmulas exactas.

Las técnicas de valoración de opciones normalmente utilizadas son tres: simulación de Monte Carlo, métodos binomiales y métodos de diferencias finitas [13]

El método binomial es el más intuitivo. Los árboles binomiales resultan útiles si se va a calcular el valor de un pequeño número de opciones; sin embargo, si las opciones a valorar son más numerosas, resulta más eficiente usar métodos de diferencias finitas.

El método de Monte Carlo es bastante eficiente cuando se trabaja con un número elevado de fuentes de incertidumbre, pero los métodos de diferencias finitas funcionan mejor con dimensiones bajas como en este caso.[14]

El método de diferencias finitas valora una opción resolviendo numéricamente la ecuación diferencial que esa opción satisface. La ecuación diferencial es convertida en un sistema de ecuaciones en diferencias que son resueltas iterativamente.

Usaremos el método implícito frente al explícito, porque el primero es más robusto y sus propiedades de estabilidad son superiores.[15]

Una de las ventajas que presenta este método es que las divisiones que hagamos del tiempo no están sujetas a ningún tipo de restricción. Las divisiones del precio del activo pueden ser pequeñas y las del tiempo grandes, sin que por ello tengamos que enfrentarnos a problemas de estabilidad. La desventaja de este método es que han de resolverse M-1 ecuaciones simultáneamente para calcular $f_{i,j}$ a partir de $f_{i+1,j}$.

Los métodos en diferencias finitas sirven para valorar tanto opciones europeas como americanas; sin embargo, son difíciles de aplicar cuando los pagos dependen de la historia pasada de las variables de estado, además de depender de sus valores actuales.

El proceso para calcular el valor de la opción será el siguiente: vamos a construir una malla bidimensional, con el precio de la vivienda y el tipo de interés como variables.

[13] Wilmott 1998. Ver Anexo II: Metodos de Diferencias Finitas: Método Implícito.

[14] El método en diferencias finitas es usado también por Geske y Shastri (1985), Majd y Pindyck (1987), Hull (1997), Murillas (2001).

[15] Geske y Shastri (1985) hacen notar que, transformado logarítmicamente, el método explícito podría ser tan eficiente incluso como el implícito, en tanto que su utilización sería más sencilla y no requeriría solucionar un sistema de ecuaciones simultáneas.

Siguiendo a Wilmott (1998), planteamos la resolución del modelo de la siguiente manera:

La ecuación fundamental que hemos visto en la sección II, y que debe cumplir el valor de la opción para evitar oportunidades de arbitraje, es:

$$\tfrac{1}{2}\,\sigma^2_s\, S^2\, Q_{ss} + \sigma_{rs}\, S\, r\, Q_{sr} + \tfrac{1}{2}\,\sigma^2_r\, r^2\, Q_{rr} + v_s\, S\, Q_s + v_r\, r\, Q_r + \alpha(S,r) = r\, Q\ ;$$

el siguiente paso es discretizar las variables de estado: $S = j\,\Delta S$; $r = i\,\Delta r$

donde los índices se definen:

j: (0,1......J) índice para S;

i: (0,1.......I) índice para r;

$\Delta S = S_{max} / M$, con un total de M+1 precios posibles del subyacente;

$\Delta r = r / N$, con un total de N+1 particiones del tipo de interés libre de riesgo.

Establecemos tres condiciones de contorno:

$$Q(S, r) = \text{Max}[\ S\text{-}E\ ,\ 0\ ]$$

donde E es el precio de ejercicio de la opción.

En este caso, para ejercitar la opción a desarrollar el proyecto, el precio que se ha de pagar es la inversión inicial, determinada en las bases del proyecto. La opción a desarrollar el proyecto carece de valor a partir de un tipo de interés suficientemente alto que consideraremos límite. Por debajo de este punto límite, el valor de la opción será la diferencia entre el valor del subyacente y el precio de ejercicio.

$$Q(0, r) = 0$$

La opción a desarrollar el proyecto no vale nada si el subyacente carece de valor.

$$\text{Lim}_{S \to \infty}\ Q(S,r)/S = 1$$

La opción a desarrollar acaba valiendo lo mismo que el activo subyacente cuando éste tiene un valor suficientemente grande. El objetivo es construir una malla de puntos como la representada en la Tabla 3 y encontrar el valor que tomará la opción en cada uno de ellos. Los puntos ✓ son aquellos conocidos definidos por las condiciones de contorno que acabamos de enunciar. Tenemos, por tanto, (N+1)(M+1) puntos en la malla.

Para un punto interior cualquiera (i, j), que corresponde a los puntos ($i\Delta r$, $j\Delta S$), podemos aproximar las derivadas en términos de i y j de la siguiente forma:[16]

$$d^2Q/dS^2 = Q_{ss} = [\, q_{i,j+1} + q_{i,j-1} - 2\, q_{i,j}\,] / \Delta S^2$$
$$dQ/dr = Q_r = [q_{i+1,j} - q_{i-1,j}] / 2\,\Delta r$$
$$d^2Q/dr^2 = Q_{rr} = [\, q_{i+1,j} + q_{i-1,j} - 2\, q_{i,j}\,] / \Delta r^2$$
$$d^2Q/dS\,dr = Q_{rs} = Q_{sr} = [\, q_{i+1,j+1} - q_{i-1,j+1} - q_{i+1,j-1} + q_{i-1,j-1}] / 4\,\Delta S\,\Delta r$$

Introduciendo estas aproximaciones en la ecuación diferencial original:

$$\tfrac{1}{2}\sigma^2_s S^2 Q_{ss} + \tfrac{1}{2}\sigma^2_r r^2 Q_{rr} + \sigma_{rs} S\, r\, Q_{sr} + v_s\, S\, Q_s + v_r\, r\, Q_r + \alpha(S,r) = r\,Q$$

y sustituyendo $S = j\,\Delta S$; $r = i\,\Delta r$, obtenemos:

$\tfrac{1}{2}\sigma^2_s j^2 [\, q_{i,j+1} + q_{i,j-1} - 2\, q_{i,j}\,] + \tfrac{1}{2}\sigma^2_r i^2 [\, q_{i+1,j} + q_{i-1,j} - 2\, q_{i,j}] + [\sigma_{rs}\, i\, j/4]$
$[\, q_{i+1,j+1} - q_{i-1,j+1} - q_{i+1,j-1} + q_{i-1,j-1}] + [v_s\, j/2]\, [q_{i,j+1} - q_{i,j-1}] + [v_r\, i/2]\, [q_{i+1,j} - q_{i-1,j}] + \alpha(S,r) = i\,\Delta r\, q_{i,j}$.

En el caso de realizar la inversión, el valor del proyecto es V (S, r), reagrupamos los términos en la ecuación anterior y sustituimos

$$\alpha(S,r) = \alpha_1(S,r)$$

donde $\alpha_1(S,r)$ es una función que arrojará valores más altos para el proyecto cuando el tipo de interés sea bajo o el precio de la vivienda tome valores altos:

$V_{i-1,j+1} [-\sigma_{rs}\, i\, j/4] + V_{i-1,j} [\tfrac{1}{2}\sigma^2_r i^2 - v_r\, i/2] + V_{i-1,j-1}[\sigma_{rs}\, i\, j/4] + V_{i,j+1} [\tfrac{1}{2}\sigma^2_s j^2 + v_s\, j/2] + V_{i,j-1} [\tfrac{1}{2}\sigma^2_s j^2 - v_s\, j/2] + V_{i+1,j+1}[\sigma_{rs}\, i\, j/4] + V_{i+1,j} [\tfrac{1}{2}\sigma^2_r i^2 + v_r\, i/2] + V_{i+1,j-1} [-\sigma_{rs}\, i\, j/4] - \alpha_1(S,r) = V_{i,j} [i\,\Delta r + \sigma^2_s j^2 + \sigma^2_r i^2]$.

simplificando:

$$\mathbf{-a\,V_{i-1,j+1} + b\,V_{i-1,j} + a\,V_{i-1,j-1} + c\,V_{i,j+1} + d\,V_{i,j-1} + a\,V_{i+1,j+1} + e\,V_{i+1,j} - a\,V_{i+1,j-1}}$$
$$- \alpha_1(S,r) = \mathbf{V_{i,j}}$$

---

[16] El cálculo de la derivada cruzada se ha realizado siguiendo a Wilmott (1998):
para calcular Q_{rs} se puede realizar la aproximación como:
$d\,[dQ/dr] / dS \approx [\, Q_r (S + \Delta S, r) - Q_r (S - \Delta S, r)\,] / 2\,\Delta S$,
pero sabemos que:
$Q_r (S + \Delta S, r) \approx [q_{i+1,j+1} - q_{i-1,j+1}] / 2\,\Delta S$.

Sustituyendo, obtenemos la discretización de esta forma:
$d^2Q/dS\,dr = Q_{rs} = Q_{sr} = [\, q_{i+1,j+1} - q_{i-1,j+1} - q_{i+1,j-1} + q_{i-1,j-1}] / 4\,\Delta S\,\Delta r$.

donde:

$$a \equiv [\ \sigma_{rs}\ i\, j/4] / [\ i\ \Delta r + \sigma^2{}_s\, j^2 + \sigma^2{}_r\, i^2\ ]$$

$$b \equiv [½\ \sigma^2{}_r\ i^2 - v_r\ i/2] / [\ i\ \Delta r + \sigma^2{}_s\, j^2 + \sigma^2{}_r\, i^2\ ]$$

$$c \equiv [½\ \sigma^2{}_s\, j^2 + v_s\ j/2] / [\ i\ \Delta r + \sigma^2{}_s\, j^2 + \sigma^2{}_r\, i^2\ ]$$

$$d \equiv [½\ \sigma^2{}_s\, j^2 - v_s\ j/2] / [\ i\ \Delta r + \sigma^2{}_s\, j^2 + \sigma^2{}_r\, i^2\ ]$$

$$e \equiv [½\ \sigma^2{}_r\ i^2 + v_r\ i/2] / [\ i\ \Delta r + \sigma^2{}_s\, j^2 + \sigma^2{}_r\, i^2\ ]$$

Si se decide esperar antes de realizar la inversión, el valor del proyecto se denota como W(S,r), siendo α (S,r)= α_2(S,r). Los flujos darán un valor más alto a esperar siempre que el tipo de interés tome valores altos y el precio de la vivienda sea bajo. La ecuación resultante tiene la siguiente forma:

$$-\mathbf{a}\ \mathbf{W}_{i-1,\, j+1} + \mathbf{b}\ \mathbf{W}_{i-1,\, j} + \mathbf{a}\ \mathbf{W}_{i-1,\, j-1} + \mathbf{c}\ \mathbf{W}_{i,\, j+1} + \mathbf{d}\ \mathbf{W}_{i,\, j-1} + \mathbf{a}\ \mathbf{W}_{i+1,\, j+1} + \mathbf{e}\ \mathbf{W}_{i+1,j} - \mathbf{a}\ \mathbf{q}_{i+1,\, j-1} - \alpha_2\,(S,r) = \mathbf{W}_{i,\, j}\ ;$$

donde a,b,c,d y e se definen como en el caso anterior.

REGLA DE DECISIÓN

Calcularemos el valor del proyecto si se decide invertir, V(S,r), y el valor del proyecto si se decide esperar, W(S,r), en cada punto, y compararemos ambos para determinar cuál es la decisión óptima en cada uno de los puntos de la malla. Como sabemos por la condición de “*smooth-pasting*”, ambos deben coincidir para los pares (S*,r*), distinguiéndose progresivamente a medida que S se aleja de S* y r se aleja de r*.

4. Análisis de Resultados.

Hemos desarrollado un modelo teórico para valorar un proyecto de edificación introduciendo dos fuentes de incertidumbre, la que se deriva de la evolución del precio de la vivienda y la generada por la evolución en el tiempo del tipo de interés.

La flexibilidad existente desde el punto de vista empresarial a la hora de tomar decisiones relacionadas con el proyecto nos ha llevado a tener en cuenta la opción a retrasar el proyecto y desarrollarlo en un momento futuro. Por lo tanto, dado que los métodos tradicionales de valoración no incluyen este tipo de opciones en el valor de un proyecto de inversión, hemos aplicado el método de las opciones reales para desarrollar el modelo.

Una vez aplicado el modelo, se obtiene el valor del proyecto de construcción. Para cada uno de los pares (S,r), se ha calculado el valor del proyecto si se decide invertir y si se decide esperar. Se comparan los valores y se toma el mayor de ambos.

La superficie del Gráfico 1 representa los pares (S*, r*) por encima de los cuales es óptimo desarrollar el proyecto de inversión. Por debajo de esta línea, la estrategia óptima es esperar a desarrollar el proyecto de construcción en un momento futuro.

En general, atendiendo a los resultados mostrados en el gráfico 1, observamos que:

1. El valor de desarrollar el proyecto de construcción aumenta con el precio de la vivienda y disminuye cuando el tipo de interés aumenta.
2. La diferencia entre el valor del proyecto cuando es óptimo invertir y el valor cuando es preferible retrasar la inversión es más acusada para los valores más bajos y más altos del precio de la vivienda. Cuando el precio de la vivienda es muy bajo, el valor del proyecto si se decide esperar es mucho más alto que el valor del proyecto si se decide invertir; a medida que el precio del subyacente va aumentando, esta diferencia se invierte y aumenta a favor de desarrollar el proyecto. En la zona central de la tabla se encuentran los pares óptimos S*, r*, para los que se cumple que W=V. De forma análoga, para tipos de interés bajos, el valor del proyecto cuando se decide invertir es sensiblemente superior al valor del proyecto si se decide esperar. Cuando el tipo de interés aumenta, esta diferencia se va haciendo menor y acaba por invertirse.
3. A pesar de los tipos de interés altos, es óptimo invertir si el precio del subyacente lo justifica. Por encima del 7%, es óptimo invertir en el proyecto de construcción, siempre que el precio de la vivienda supere los 66.000 €.[17]

[17] Se han obtenido resultados similares ampliando los valores del tipo de interés hasta el 11% en el cálculo de los valores óptimos.

4. Para tipos de interés por debajo del 7%, basta con que el precio de la vivienda esté por encima de los 60.000 € para que sea óptimo desarrollar el proyecto de construcción.
5. Para precios de la vivienda por debajo de los 60.000 €, la estrategia óptima es retrasar el proyecto de inversión, independientemente de cuál sea el tipo de interés.

En un contexto similar, Quigg (1993) concluye que la opción a esperar es valiosa y ha de tenerse en cuenta para valorar correctamente el proyecto de inversión. Una conclusión similar obtienen Capozza y Sick (1994): las opciones reales afectan a las valoraciones de mercado de los terrenos, y también al uso que se hace de los mismos. Cuando existe incertidumbre, la opción a desarrollar es más valiosa, y los precios a los que resulta óptimo acometer el proyecto de inversión sobre esas tierras aumentan. Como resultado, se espera más tiempo para desarrollar.

Las obras de acondicionamiento de los terrenos para proceder a levantar el proyecto de construcción en el primer sector se comenzaron en enero del 2000. Según los datos disponibles, en ese momento el tipo de interés nominal era el 3.8%. El precio medio de la vivienda nueva en Vitoria era de 2.891€ por m2. El valor de las viviendas oscilaría, por tanto, entre 303.541€ las de 105 m2; 332.450€ las de 115 m2 y 433.630€ las viviendas de 150 m2.[18]

Consultando la tabla de resultados, podemos ver que con un tipo de interés aproximado del 4% y un valor del subyacente superior a 150.250 €, la estrategia óptima es desarrollar el proyecto de inversión, tal como efectivamente se hizo.

5. Estática Comparativa.

<u>Cambios en la Volatilidad.</u>

---

[18] El precio medio por metro cuadrado de vivienda nueva en España se situó en 1.158€ , aunque las diferencias entre ciudades son abismales: Vitoria es la ciudad más cara, con su metro cuadrado a 2.891 € . Le siguen San Sebastián, con 2.867 €, y Bilbao, a 1.923 € (datos del último trimestre de 1999, facilitados por el Gobierno Vasco). http://www.consumer-revista.com/abr2000/portada_01.html
El incremento del precio medio de la vivienda sobre el territorio español en el primer semestre de 2001 (3,2%) ha supuesto un considerable descenso respecto a los valores registrados en 2000, donde en el primer semestre el precio medio ascendió el 6,5%, y el 5,6% en el segundo. Vitoria tenía el metro cuadrado a 1989 €.
http://www.diarioelcorreo.es/inmobiliaria/articulos/arti050801.html%20%20

La volatilidad de las variables del modelo es un factor que tiene una gran importancia en el cálculo del valor de un proyecto, según el método de las opciones reales.

Tradicionalmente se sostiene que cuanto mayor sea la volatilidad, mayor será el valor de la opción, en tanto que existen más probabilidades de alcanzar valores altos. La responsabilidad limitada de los inversores implica una función de valoración no lineal, que protege a los inversores de pérdidas por encima de lo que estén dispuestos a invertir inicialmente. Huchzermeier y Loch (2001) estudian el efecto que la volatilidad ejerce sobre el valor de la flexibilidad empresarial. Concluyen que una mayor volatilidad aumentará el valor de la flexibilidad sólo si la incertidumbre se resuelve antes de hacer efectivas las decisiones empresariales.

En el Gráfico 2 se reflejan los resultados. Si disminuimos la volatilidad del tipo de interés desde el 11% al 9%, las conclusiones generales del modelo no se ven alteradas. El precio óptimo de la vivienda a partir del cual es deseable invertir en el proyecto se mantiene en un nivel ligeramente más alto que el del caso inicial (sobre los 66.000 € por vivienda). Sin embargo, el rasgo más destacado es que el valor de la opción a esperar para todos y cada uno de los pares (S,r) es menor cuando se disminuye la volatilidad. Por ejemplo, para una vivienda de 90.000 € y un tipo de interés del 5%, el valor en el caso base era de 501.905 €; al disminuir la volatilidad, pasa a ser 424.134 €. Por lo tanto, al disminuir la volatilidad, el valor de mantener la opción disminuye y, en el intervalo del 7% al 9%, la estrategia óptima de inversión aconseja ejercerla para precios de la vivienda menores que en el caso inicial.

Resultados similares se obtienen en Titman (1985), quien encuentra que la incertidumbre en los precios de los terrenos urbanos disminuye la actividad constructora en el momento actual, en espera de que se resuelvan las condiciones que la provocan. Majd y Pindyck (1987) encuentran que el momento óptimo para desarrollar un proyecto se ve influido por la incertidumbre sobre las variables del modelo y el coste de oportunidad de retrasar el proyecto. En particular, la incertidumbre provoca un efecto negativo sobre el nivel de inversión, que puede ser más acusado cuando se trata de decidir el momento óptimo para construir.

Cambios en la Velocidad de Ajuste

En el Gráfico 3 vemos como al disminuir la velocidad de ajuste del tipo de interés desde el 1,18 al 0,7, aumenta el valor de esperar a desarrollar el proyecto de inversión.

Este efecto se puede explicar de la siguiente manera: la velocidad de ajuste de los tipos afecta a la distribución futura de los mismos. Cuando los tipos se ajustan más lentamente al punto de convergencia, aumenta la variabilidad de los mismos y esto provoca que el valor del proyecto aumente, tal y como hemos explicado en el punto anterior. Por ejemplo, para un tipo de interés del 5% y un precio de la vivienda de 90.000 €, al disminuir la velocidad de ajuste de los tipos, el valor del proyecto pasa de 501.905 € a 699.000€. La opción a esperar es más valiosa y por lo tanto la estrategia óptima de inversión indica realizar el proyecto cuando el precio de la vivienda tome valores más altos que en el caso inicial.

Un resultado similar se obtiene en Schwartz y Moon (2000).

Cambios en el precio de mercado del factor de riesgo asociado al tipo de interés

En el Gráfico 4 vemos que **c**uando aumenta el precio de mercado del factor de riesgo asociado al tipo de interés λ_r desde 0,8 a 1, el valor de desarrollar el proyecto disminuye.

Retomando el ejemplo de los casos anteriores, con un precio de la vivienda de 90.000€ y un tipo de interés del 5 %, este aumento del precio de mercado del factor de riesgo asociado al tipo de interés provoca que el valor del proyecto disminuya de 501.905 € a 169.245 €.

Esto sucede porque los inversores son más aversos al riesgo derivado de la incertidumbre asociada al tipo de interés y, en consecuencia, exigen una compensación mayor para hacer frente al mismo. Esto provoca una disminución en el rendimiento ajustado al riesgo y el valor del proyecto disminuye, perdiendo atractivo para los inversores.

Esta situación es la que se ve reflejada en el Gráfico 4; a partir del 5%, la opción a esperar es más valiosa que la opción a invertir para valores entre 60 y 70 mil €.

En el caso inicial, la decisión óptima de inversión está por encima de los 60.000 € y al aumentar el precio de riesgo, se necesita que el precio de la vivienda alcance los 72.000€ para que desarrollar el proyecto sea óptimo.

6. Conclusiones.

Dentro de todo proyecto de inversión existen opciones inherentes al mismo que, dependiendo de si son o no ejercidas, cambian el valor real del proyecto para los empresarios e inversores. Los métodos tradicionales no son capaces de valorar correctamente los proyectos de inversión, en tanto que no captan las posibilidades derivadas de la flexibilidad a la hora de tomar decisiones empresariales sobre los proyectos. Sólo en el caso de que no existiera ningún tipo de incertidumbre sobre la evolución de las variables del modelo, podríamos hablar de una correcta valoración de los proyectos mediante el método del flujo de caja descontado[19].

El uso de la teoría de las opciones reales soluciona este problema y permite calcular con más precisión el verdadero valor de una inversión. Dependiendo de las características del caso que se desee valorar (dimensión del proyecto, número de variables de estado), resulta más adecuado utilizar uno u otro método de valoración. Por lo tanto, es necesario hacer una evaluación de cada proyecto en particular para decidir cuál será el instrumento de valoración que proporcionará los mejores resultados posibles.

El modelo que hemos desarrollado aquí recoge características importantes del proyecto de inversión que nos ocupa; el valor del proyecto evoluciona en la misma dirección que el precio de la vivienda y en dirección opuesta al tipo de interés. Y cambia cuando se alteran los valores de las variables que lo definen, afectando a las decisiones de inversión.

Este modelo podría ampliarse añadiendo más fuentes de incertidumbre o modificando los supuestos iniciales; en ese caso, seguramente resultaría más conveniente utilizar otro tipo de método de valoración, en tanto que ya hemos señalado que el método de diferencias implícito no resulta el más adecuado para trabajar con dimensiones altas.

7. Bibliografía.

1. F. Black, M. Scholes (1973) "The pricing of options and corporate liabilities" Journal of Political Economy 81

2. M. Brennan, E. Schwartz (1985) "Evaluating natural resource investments" Journal of Business 58

3. D. Capozza, Y. Li (1994) "The intensity and timing of investment: the case of land" American Economic Review

4. D.Capozza, G. Sick (1994) "The risk structure of land markets" Journal of Urban Economics

5. T. Copeland, V. Antikarov (2001) "Real options: a practitioner's guide "
Ed. Texere

6. G. Cortazar, J. Casassus (1998) "Optimal timing of a mine expansion: implementing a real options model " Quaterly Review of Economics and Finance

7. G. Cortazar, E. Schwartz (1998) "Monte Carlo evaluation model of an undeveloped oil field" Journal of Energy Finance and Development

8. G. Cortazar, E. Schwartz, M. Salinas (1998) "Evaluating environmental investments: a real options approach" Management Science

9. R. Geske, K. Shastri (1985) "Valuation by approximation: a comparison of alternative option valuation techniques" Journal of Financial and Quantitative Analysis

10. A.Huchzermeier, C. Loch (2001) *"Project management under risk" Management Science*

11. J. Hull (1997) "Options, futures and other derivatives" Prentice Hall

12. J. Ingersoll, S. Ross (1992) "Waiting to invest: investment and uncertainty" Journal of Business, vol 65, nº 1

13. S. Majd, R.Pindyck (1987) "Time to build, option value and investment decisions" Journal of Financial Economics 18

14. J. M. Moraleda (1998) "Derivados sobre renta fija y renta variable en España" III Jornadas de Economía Financiera Fundación BBV

[19] Copeland y Antikarov (2001)

15. A. Murillas (2001) “Investment and development of fishing resources: a real options approach” Documentos de trabajo Universidad de Vigo, Abril, nº 0101

16. L.Quigg (1993) “Empirical testing of real options – pricing models” Journal of Finance

17. E. Schwartz, M. Moon (2000) “Rational pricing of Internet companies” Financial Analysts Journal

18. S. Titman (1985)“Urban land prices under uncertainty” American Economic Review

19. L. Trigeorgis (1996) “Real options” MITT Press

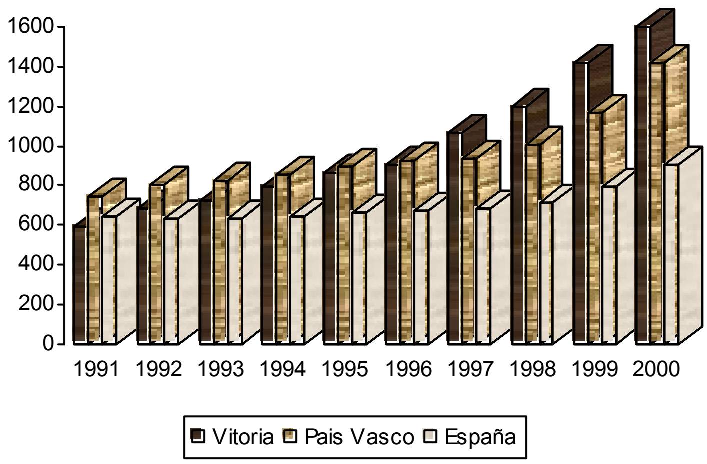
20. O. Vasicek (1977) “An equilibrium characterization of the term structure” Journal of Financial Economics 5

21. P. Wilmott (1998) “Derivatives: The theory and practice of financial engineering” Wiley &Sons

22. J. Williams (1991) “Real estate development as an option” Journal of Real Estate Finance and Economics.

8. Anexos: Tablas y Gráficos

TABLA 1: EVOLUCIÓN DEL PRECIO DE LA VIVIENDA (precio medio por m^2 en €)



Fte: Estadísticas del Ministerio de Fomento http://www.mfom.es/estadisticas/atlas/indice.htm

TABLA 2 EL PROYECTO DE EDIFICACIÓN (BOTHA nº14 del 2/02/2000)

Terreno Disponible	Zona este – 3.595.037 m^2
6.079.708 m^2	Zona oeste – 2.484.671 m^2
	1.302-unifamiliares venta libre (150m^2)
Número de Viviendas	5.209 -colectivas venta libre (115 m^2)
21.704	15.193 - de protección oficial (105 m^2)
Inversión Inicial	Particulares - 130 millones €
195 millones € (9000 € por vivienda)	Ayuntamiento – 65 millones €
Otros costes medios a cargo del Ayuntamiento	Suelo y urbanización – 5000 €
	Redacción proyectos básicos – 1200 €

TABLA 3: MALLA DEL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITO IMPLÍCITO

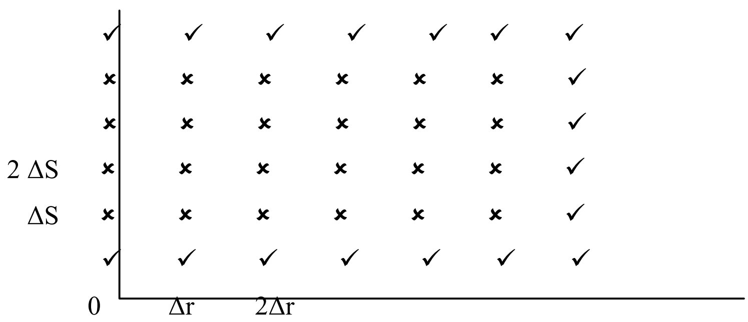


TABLA 4 : PARÁMETROS DEL MODELO[20]

PARÁMETRO	FUENTE	VALOR
σ_r	datos sobre tipos de interés de las Letras del Tesoro a 1 año	11,021% (volatilidad anual)
μ_r	datos sobre tipos de interés de las Letras del Tesoro a 1 año	7,28367 %
σ_S	Calculado a partir de la evolución del valor de la vivienda en Vitoria Gasteiz (Http://www.ine.es/tempus)	5,23 % (volatilidad anual)
μ_s	Calculado a partir de la evolución del valor de la vivienda en Vitoria Gasteiz	0,88 %
λ_s	Producto de la correlación entre los cambios porcentuales en el precio y el rendimiento de la renta	0,02

[20] La tasa compuesta continua se calcula como $u_t = \ln(A_t / A_{t-1})$, donde u_t es el beneficio del activo entre t-1 y t, y A_t es el valor del activo en el momento t. La volatilidad ha sido calculada mediante la fórmula habitual de la desviación estándar: $\sigma = \sqrt{}(1/n-1)\,\Sigma(u_t-u)^2$

	agregada multiplicado por la desviación estándar de la renta agregada.	
$\sigma_{r\,s}$	Obtenido de los datos disponibles relativos a la evolución del tipo de interés y el precio de la vivienda	0.000001038
Δr	Incremento elegido para el tipo de interés	0,25 %
Δs	Incremento elegido para el precio de la vivienda	6010 €
λ_r	Producto de la correlación entre los cambios porcentuales en el tipo de interés y el rendimiento de la renta agregada multiplicado por la desviación estándar de la renta agregada.	0,08
κ	Cortazar y Schwartz, 1998	1,187
r_M	Expectativas futuras sobre los tipos de interés www.ine.es	4 %
E	Datos publicados en BOTHA 14/2000	42070 €

GRÁFICO 1: DECISIÓN ÓPTIMA DE INVERSIÓN CASO BASE

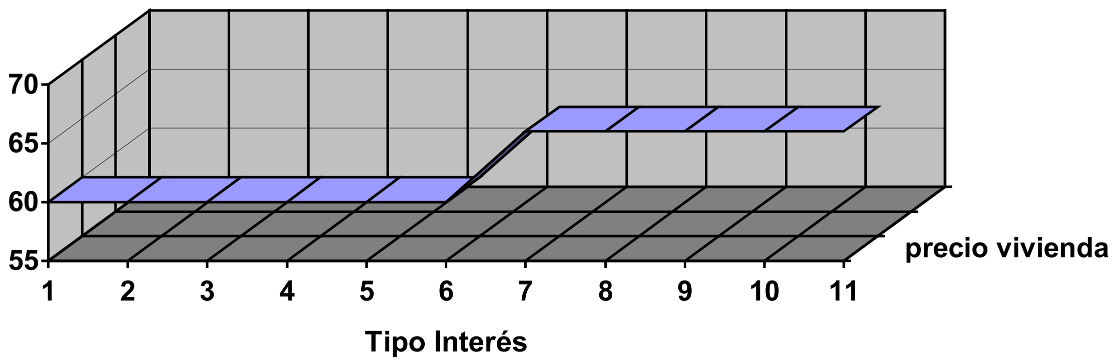


GRÁFICO 2: DECISIÓN ÓPTIMA DE INVERSIÓN CON MENOR VOLATILIDAD

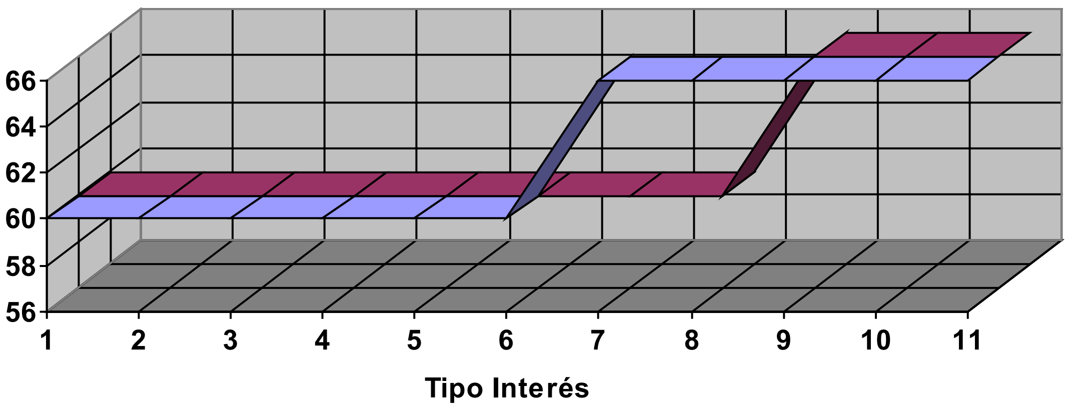


GRÁFICO 3: DECISIÓN ÓPTIMA DE INVERSIÓN CON MENOR VELOCIDAD DE AJUSTE

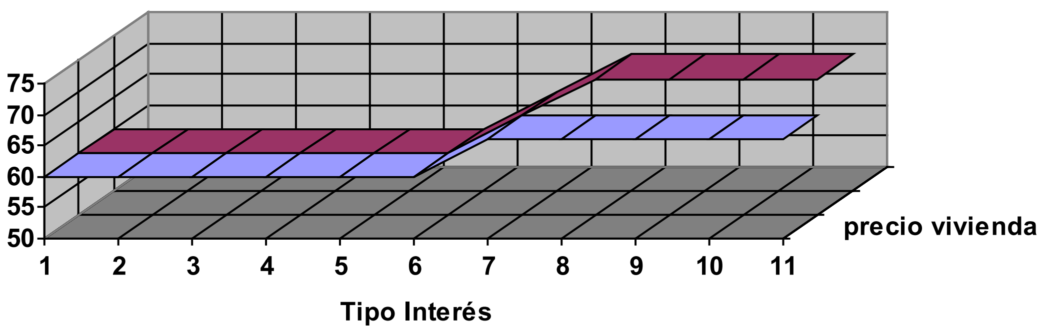


GRÁFICO 4: DECISIÓN ÓPTIMA DE INVERSIÓN CON AUMENTOS EN EL PRECIO DE RIESGO ASOCIADO AL TIPO DE INTERÉS