ESTIMACIÓN ACTUARIAL VERSUS ESTIMACIÓN POR EL MÉTODO DE LOS MOMENTOS PARA LA PROBABILIDAD DE MUERTE

José María Sánchez López
Departamento de Economía Financiera, Contabilidad y Comercialización
Universidad Rey Juan Carlos
e-mail: jmsl@fcjs.urjc.es

Ana Isabel Cid Cid
Departamento de Economía Financiera, Contabilidad y Comercialización
Universidad Rey Juan Carlos
e-mail: anacid@fcjs.urjc.es

Resumen

Desde un enfoque actuarial, la estimación de la probabilidad de muerte para un perfil de individuos se basa en los datos brutos observados. Una característica deseable en estos datos está en ser muy numerosos (datos tipo censo) y recoger información detallada y precisa (datos tipo experimental).
Uno de los elementos de interés para una correcta recopilación de los datos brutos son las fechas. La forma de estimar y su precisión se altera por hipótesis adoptadas para facilitar cálculos con fechas. Éstas son necesarias para hallar la exposición al riesgo de muerte (paso previo a la estimación). Según el tipo de exposición considerada se pueden utilizar distintas técnicas de estimación.
Por su facilidad de cálculo ante problemas relacionados con fechas, el estimador actuarial empezó siendo un método informal (previo a la teoría de estimación estadística clásica) desarrollado para estimar probabilidades de muerte en la cartera de pólizas de una empresa aseguradora. Cuando surgió el método de los momentos se observó (en la práctica actuarial) la similitud entre ambos métodos.
En este trabajo se presentan las críticas al estimador actuarial según ventajas e inconvenientes respecto del método de los momentos. A continuación, se reorienta el estudio evitando la comparación con el método de los momentos, esto lleva a buscar una racionalidad propia en el estimador actuarial en base a otros criterios (implicación y límite producto).

Palabras clave: Exposición al riesgo, probabilidad de muerte, estimador actuarial, criterio de implicación, criterio límite producto.

1. Planteamiento del problema: la exposición al riesgo.

Desde un **enfoque actuarial**, la estimación de la probabilidad de muerte para un perfil de individuos se basa en los datos brutos observados. Una característica deseable en estos datos está en que combinen dos importantes características deseables: ser muy numerosos (como datos tipo censo) y recoger información detallada y precisa (como datos tipo experimental). Además, la medida de la mortalidad se debe tomar a partir de colectivos análogos a los que se aseguran: Betzuen Zalbidegoitia, Amancio (1.999) presenta interesantes resultados que muestran la diferencia entre las tablas de mortalidad que se utilizan en el sector asegurador (obtenidas con información de la población general) y la medida de la mortalidad de un colectivo de activos ocupados (perfil habitual de los individuos asegurados).

Los elementos de interés para una correcta recopilación de los **datos brutos** son: la precisión, el intervalo de registro, el periodo elegido para la recogida de datos, la independencia entre los individuos, y la recogida y análisis de varios tipos de variables. Estos elementos están relacionados. La precisión en los datos se puede alterar por hipótesis adoptadas para facilitar los cálculos con las fechas, éstas fechas dependen a su vez del intervalo de registro o seguimiento, conjuntamente y adecuadamente tratados evitan el sesgo en las investigaciones de mortalidad. Los errores también pueden surgir si se eligen periodos de recogidas de datos con oscilaciones inusuales de mortalidad o si se toman individuos dependientes en cuanto a su exposición al riesgos de muerte. Todos los elementos mencionados intervienen en la correcta determinación de las variables fecha necesarias para calcular la exposición al riesgo.

De todos los elementos mencionados, en este trabajo interesa la precisión en las **fechas** relevantes en el cálculo de la exposición individual al riesgo de muerte, ya que serán decisivas en la técnica de estimación: influirán en la dificultad de registro-tratamiento de los datos y en la correcta estimación. Las dificultades asociadas al registro exacto y a los cálculos para la estimación condujo, inicialmente, al uso de la estimación actuarial como alternativa al método de los momentos. Posteriormente, se estudiaron las ventajas, los inconvenientes, las relaciones con otros métodos de estimación y las posibles interpretaciones.

Para plantear el problema es necesario analizar la **exposición individual al riesgo de muerte** como paso previo a la estimación. Partiendo de la contribución individual a la exposición al riesgo de muerte se estiman probabilidades por periodos recogiendo datos de todos los individuos. Según el tipo de exposición considerada se pueden utilizar distintas técnicas de estimación. La exposición se calculará mediante la transformación de la información relativa a las fechas relevantes respecto del intervalo de estimación. Cuando se obtiene la información se debe contemplar la necesidad de recoger tres edades importantes para los análisis posteriores: la edad de entrada al estudio y_i, la edad de salida programada del estudio z_i y la edad real de salida del periodo de estudio. Esta última situación puede darse por muerte a una edad q_i o puede darse por retirada a una edad f_i, en ambos casos la situación debe producirse antes de fin del periodo de estudio u observación. Las variables q_i y f_i toman valores cero si no se da la situación de muerte o retirada que las define. Así, a cada persona objeto de estudio se le puede asignar un vector que la caracterice de la forma $v_i' = [y_i, z_i, q_i, f_i]$ que recoge la información necesaria sobre la edad (ya sea real o virtual) para los posteriores procesos de estimación.

Un primer tratamiento de los datos llevaría a determinar la contribución de cada persona al intervalo de estimación que, en principio, se considera unitario y de la forma $(x,x+1]$. Se eliminan los vectores de los individuos que no contribuyen o permanecen en el intervalo, esto es, si $y_i \geq x+1$ o si $z_i \leq x$ o si $q_i \leq x$ o si $f_i \leq x$. Por último, se transforma cada vector v_i' en un vector de duración en $(x,x+1]$, de la forma $u_{i,x}' = [r_i, s_i, l_i, k_i]$:

$$r_i \begin{cases} 0 & si \quad y_i \leq x \\ y_i - x & si \quad x < y_i < x+1 \end{cases}$$

$$s_i \begin{cases} z_i - x & si \quad x < z_i < x+1 \\ 1 & si \quad z_i \geq x+1 \end{cases}$$

$$l_i \begin{cases} 0 & si \quad q_i = 0 \\ q_i - x & si \quad x < q_i \leq x+1 \\ 0 & si \quad q_i > x+1 \end{cases}$$

$$k_i \begin{cases} 0 & si \quad f_i = 0 \\ f_i - x & si \quad x < f_i \leq x+1 \\ 0 & si \quad f_i > x+1 \end{cases}$$

Se puede ya, a partir de los datos así presentados, obtener la exposición al riesgo de muerte para un individuo en el intervalo de estudio u observación, esto es, la amplitud del periodo en el cual un individuo está bajo observación, condicionando la posibilidad de muerte.

Se considera la **exposición exacta** como $\begin{bmatrix} s_i \\ l_i \\ k_i \end{bmatrix} - r_i$, eligiendo el menor valor distinto de cero en el vector columna.

Se considera la **exposición programada** como $\begin{bmatrix} s_i \\ k_i \end{bmatrix} - r_i$, eligiendo el menor valor distinto de cero en el vector columna. Existe la posibilidad, en los casos de muerte, de utilizar una exposición distinta a la anterior: en vez de considerar la exposición hasta la salida programada del estudio se toma la exposición hasta una retirada programada fijada (la fecha de finalización de la póliza por ejemplo) o hasta una retirada aleatoria (edad máxima aleatoria en función del comportamiento de toda la cartera).

Se considera la **exposición actuarial** como $\begin{bmatrix} s_i \\ k_i \\ 1 \end{bmatrix} - r_i$, eligiendo el menor valor distinto de cero en el vector columna, salvo en casos de muerte que se toma el valor uno.

Para hallar la exposición total se han de considerar todos los individuos sumando sus exposiciones al riesgo de muerte. Los distintos tipos de exposiciones al riesgo de muerte se utilizarán en los procesos de estimación en las situaciones de datos incompletos.

Los datos normalmente disponibles para los cálculos actuariales en las empresas de seguros vida son incompletos. En primer lugar, existen otros fenómenos (distintos de la muerte) de naturaleza aleatoria, que pueden concretarse en sucesos que conlleven la "retirada" de los individuos de la muestra observada antes del momento de la muerte. Aunque no se considere significativo el número de retiradas, en la mayoría de los estudios actuariales se encuentra el problema de observaciones de las que no se realiza un seguimiento hasta la total extinción del grupo seleccionado. Los estudios longitudinales, a edades no avanzadas, sólo se consideran viables si se analizan muestras pequeñas con corto tiempo de vida (análisis de supervivencia en ensayos clínicos o investigaciones médicas). Los estudios actuariales son mayoritariamente de corte transversal. Al finalizar el periodo de observación son muchos los individuos de la muestra que permanecen vivos, son los llamados "finalistas", que tendrán (en el momento de cierre de observación) una "edad de finalización predeterminada".

Con el fin de diferenciar ciertos casos tipo se pueden emplear los valores del par (r_i,s_i):

Caso A, con r_i=0 y s_i=1 para todo i: contribución en todo el intervalo.

Caso B, con 0≤r_i<1 y s_i=1 para todo i: hay incorporaciones tras el inicio del intervalo y todos permanecen hasta el final del intervalo.

Caso C, con 0<s_i≤1 y r_i=0 para todo i: todos se incorporan al inicio del intervalo y pueden darse salidas programadas antes de finalizar el intervalo.

Caso D, con 0≤r_i<1 y 0<s_i≤1 para todo i: hay incorporaciones tras el inicio del intervalo y pueden darse salidas programadas antes de finalizar el intervalo, es el "caso más genérico".

En la **exposición programada**, utilizada en la estimación por el **método de los momentos**, se sigue que cuando una persona es finalista observado, según lo programado, en $x+s_i$ contribuye s_i-r_i, cuando una persona se observa se retira en $x+k_i$ contribuye k_i-r_i, y, cuando una persona muere en (x,x+1] contribuye hasta la edad de salida programada del periodo de estudio (existiendo otras alternativas ya mencionadas).

En ciertos planteamientos se intenta distinguir entre retiradas planeadas y no planeadas (tal como anulaciones de pólizas), buscándose un tratamiento aleatorio especial para las retiradas no planeadas: se pasa a un entorno conocido como de "doble decremento". Ante esta situación parece adecuado el comentario que aparece en Elandt-Johnson, Regina and Johnson Norman, L. (1.980): "En nuestra opinión, si la mencionada mortalidad no depende del tipo de retirada, una hipótesis muy común, distinguir entre retiradas planeadas y no planeadas es irrelevante, una vez que los datos han sido recogidos". En todo caso, cabe añadir que únicamente para las situaciones o datos de muerte podría plantearse este problema y que no interesa en este estudio el proceso de retirada en sí mismo. Todo lo anterior lleva a tabajar en un entorno de "simple decremento".

El método actuarial, también conocido como **aproximación actuarial** al método de los momentos, simplifica los cálculos mediante el uso de una **exposición actuarial**, se distingue de la exposición programada en que para el caso de muerte se toma una exposición de 1-r_i.

En la exposición observada se utilizan los datos derivados únicamente de lo observado, aplicándose en la estimación por máxima verosimilitud.

En este trabajo no se tratará este último método, exclusivamente se presentan el método de los momentos (utiliza la denominada “exposición programada”) y el método de estimación actuarial (utiliza la denominada “exposición actuarial”).

2. Método de los momentos.

Se identifica el número de muertes esperado (calculado a través de la variable aleatoria número de muertes) con el número de muertes observado (obtenido con la información muestral) en un determinado intervalo de tiempo fijado. Se debe proponer alguna hipótesis que lleve a una expresión que refleje el número de muertes esperado y se resuelve la ecuación para hallar el estimador deseado. Este procedimiento de estimación se justifica, siguiendo el teorema de Kintchine, por la convergencia en probabilidad de los momentos muestrales a los poblacionales, supuesta la independencia e igual distribución de las variantes que se tienen en los elementos de la muestra, cuya esperanza finita se supone igual a la de la población.

Interesa, para cada persona, genéricamente la i-ésima, la probabilidad condicionada de morir antes de $x+s_i$ (edad programada de salida del estudio o de retirada si anterior) estando vivo en $x+r_i$, esto proporciona el número de muertes esperado para la muestra de tamaño uno que se representa como

$${}_{s_i-r_i}q_{x+r_i}\ .$$

Si se toma toda la muestra, la esperanza de la variable aleatoria queda:

$$E(D_x)=\sum_{i=1}^{n_x}{}_{s_i-r_i}q_{x+r_i}\ .$$

Para obtener probabilidades estimadas para años enteros hay que utilizar alguna **hipótesis de distribución** de los valores de la probabilidad en el interior del intervalo. Se presentan tres situaciones: fuerza de mortalidad decreciente, fuerza de mortalidad constante y fuerza de mortalidad creciente.

Si se sigue la llamada hipótesis de Balducci, que presupone un comportamiento hiperbólico de la función de supervivencia y un decremento de la fuerza de mortalidad dentro del intervalo de estimación (situación poco realista pero conveniente por el resultado analítico), queda:

$$_{s_i - r_i}q_{x+r_i} \approx (s_i - r_i)q_x \quad \Rightarrow \quad E(D_x) = q_x \sum_{i=1}^{n_x}(s_i - r_i)\,.$$

Si se sigue, dentro del intervalo de estimación, la primera ley de Dormoy, que presupone un comportamiento exponencial de la función de supervivencia y una fuerza de mortalidad constante (situación algo más realista que la anterior), queda:

$$_{s_i - r_i}q_{x+r_i} \approx 1 - (1 - q_x)^{s_i - r_i} \quad \Rightarrow \quad E(D_x) = n_x - \sum_{i=1}^{n_x}(1 - q_x)^{s_i - r_i}\,.$$

Si se presupone un comportamiento lineal de la función de supervivencia, tal como expresa la ley de Moivre, que conduce a una fuerza de mortalidad creciente dentro del intervalo de estimación (situación más realista y equivalente a una interpolación lineal entre valores consecutivos de la función de supervivencia), queda:

$$_{s_i - r_i}q_{x+r_i} \approx \frac{(s_i - r_i)q_x}{1 - (r_i \bullet q_x)} \quad \Rightarrow \quad E(D_x) = q_x \sum_{i=1}^{n_x}\frac{s_i - r_i}{1 - (r_i \bullet q_x)}\,.$$

Por otra parte, el número de muertes observado en la muestra será representado por d_x.

Al igualar esperanza de la variante y número de muertes observado, la estimación de la probabilidad de muerte durante el año x se obtendrá bajo los tres supuestos considerados:

$$E(D_x) = d_x \quad \Rightarrow \quad \hat{q}_x = \frac{d_x}{\sum_{i=1}^{n_x}(s_i - r_i)}\,,$$

$$E(D_x) = d_x \quad \Rightarrow \quad n_x - \sum_{i=1}^{n_x}(1 - \hat{q}_x)^{s_i - r_i} = d_x\,,$$

$$E(D_x) = d_x \quad \Rightarrow \quad \hat{q}_x \sum_{i=1}^{n_x}\frac{s_i - r_i}{1 - (r_i \bullet \hat{q}_x)} = d_x\,.$$

Sólo la primera expresión tiene una solución analítica, para el resto se utilizarán algoritmos matemáticos de aproximación o métodos de tanteo recursivos mediante ordenador.

Si se presta atención a la primera expresión, es claro que el sumatorio que aparece en el denominador representa la exposición prevista o programada de la muestra y que si un individuo de la muestra muere en periodo de observación no se da toda la exposición programada.

En cuanto a las propiedades del estadístico estimador es claro que al estimarse un momento respecto del origen de la distribución poblacional se llega a que el estimador obtenido es insesgado. Por ejemplo, para el estimador

$$\hat{q}_x = \frac{d_x}{\sum_{i=1}^{n_x}(s_i - r_i)}$$

si se admite la hipótesis de hiperbólica o de Balducci empleada al estimar, se llega a:

$$E\left(\hat{Q}_x\right) = \frac{E(D_x)}{\sum_{i=1}^{n_x}(s_i - r_i)} = \frac{\sum_{i=1}^{n_x} {}_{s_i - r_i}q_{x + r_i}}{\sum_{i=1}^{n_x}(s_i - r_i)} \approx \frac{q_x \sum_{i=1}^{n_x}(s_i - r_i)}{\sum_{i=1}^{n_x}(s_i - r_i)} = q_x \, .$$

El sesgo sólo aparece si la hipótesis no se cumple. Si para hallar el estimador se emplea una hipótesis de mortalidad decreciente y la población sigue una fuerza de mortalidad constante o creciente se llega a una esperanza del estimador mayor que el valor del parámetro estimado.

Por el mencionado teorema de Kintchine se tienen estimaciones consistentes y con el teorema de Lindeberg-Levi se comprueba la normalidad asintótica. En cuanto a la varianza del estimador, si se admite el comportamiento binomial de la variante número de muertes, y con la aproximación hiperbólica quedará:

$$V\left(\hat{Q}_x\right)=\frac{V(D_x)}{\left[\sum_{i=1}^{n_x}(s_i-r_i)\right]^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n_x} {}_{s_i-r_i}q_{x+r_i}\bullet\left(1-{}_{s_i-r_i}q_{x+r_i}\right)}{\left[\sum_{i=1}^{n_x}(s_i-r_i)\right]^2}=$$

$$=\frac{q_x\sum_{i=1}^{n_x}(s_i-r_i)-(q_x)^2\sum_{i=1}^{n_x}(s_i-r_i)^2}{\left[\sum_{i=1}^{n_x}(s_i-r_i)\right]^2}.$$

Una aproximación se consigue si se considera el estimador de la probabilidad de muerte a la edad x como proporción binomial de una muestra con tamaño equivalente a la exposición programada:

$$V\left(\hat{Q}_x\right)=\frac{V(D_x)}{\left[\sum_{i=1}^{n_x}(s_i-r_i)\right]^2}\approx\frac{q_x\bullet(1-q_x)}{\sum_{i=1}^{n_x}(s_i-r_i)}.$$

Ambas expresiones dependen del tamaño de la muestra y, de la entrada y salida programada al intervalo de estimación.

3. Método de estimación actuarial.

El Método Actuarial es del siglo XIX, previo al desarrollo formal de la Teoría de Estimación estadística. Tuvo un desarrollo intuitivo y busca simplificar los cálculos (por carecer de medios informáticos o de información precisa sobre la salida programada) para los casos de muerte dentro del intervalo de estudio. Utiliza el concepto de exposición actuarial (en lugar de exposición programada).

Cuando se trata la denominada “aproximación actuarial al método de los momentos” o simplemente el “estimador actuarial” se simplifica la situación derivada de los casos de muerte dentro del intervalo de estudio, esto es, el análisis de la edad de salida considerada como programada (simbolizada como $x+s_i$). Se necesitaría un análisis de datos extenso para resolver el problema. La solución actuarial establece un s_i=1 para todas las muertes (se supone a todos programados para finalizar el intervalo unitario de tiempo objeto de estudio). Con esto, se identifica $x+s_i$ a posteriori de la finalización del intervalo (según el individuo muera o no). Si, realmente, s_i fuera igual a uno en todos los individuos fallecidos en el intervalo considerado, no sería una aproximación. Esto último ocurre en las situaciones denominadas Caso especial A y Caso especial B.

Aparecieron intentos, ya clásicos, de **justificación estadística** (por Cantelli y Balducci). Se intenta identificar o asociar el método de los momentos al método actuarial. Así, se considera:

$$E(D_x) = n_{x\,1-r}q_{x+r} - e_{x\,1-s}q_{x+s} = d_x\ ;$$

para un grupo de tamaño n_x, donde todas las muertes que se espera ocurran antes de $x+1$ sumarán la cantidad de $n_{x\,1-r}q_{x+r}$.

Esta cifra se separa en dos, las muertes observables, d_x, y, las muertes que se espera ocurran antes de $x+1$, pero no observables al ocurrir entre los e_x individuos que dejan la muestra en $x+s$, esto es, $e_{x\,1-s}q_{x+s}$. Como se consideraba que las edades de finalización programadas no estaban disponibles no se recurre a ellas, pero sí al número real observado de finalistas. Si se dieran las condiciones del Caso especial A o del Caso especial B la aproximación actuarial al método de los momentos y el método de los momentos conducirían a expresiones idénticas. En general, como ya se dijo, se puede interpretar como una aproximación basada en la filosofía del método de los momentos que utiliza los escasos datos disponibles.

En cambio, esta aproximación actuarial se **critica** en los casos en que se esperaran finalistas en el periodo de estimación (Caso especial C) tal como dice Hoem, Jan M. (1.984). Se condiciona al grupo n_x a estar vivo en $x+r$ y, al grupo e_x, a estarlo en $x+s$ ($x+s>x+r$). No se especifica, sin embargo, la supervivencia entre $x+r$ y $x+s$. De hecho, e_x o finalistas observados serían la realización de una variante binomial del fenómeno número de supervivientes a $x+s$ de una muestra con edad de salida programada en situación de supervivencia a $x+s$.

En los casos de finalistas a $x+s_i$ con $s_i<1$ se muestra mediante simulaciones y atendiendo al análisis del problema, tal como se tiene en Broffit, James D. (1.984), que el estimador actuarial es sesgado negativamente e inconsistente. En los estudios actuariales basados en grandes cantidades de datos aportados por compañías de seguros aparecerán un número significativo de finalistas. Para evitarlo, puede diseñarse un estudio cuyos límites de intervalo coincida con periodos de finalistas programados (coincidir límite de intervalo con periodo de renovación de la póliza).

Críticas parecidas se tratan en Hoem, Jan M. (1.984), cuya base se encuentra en no asignar una función de probabilidad para los individuos que se retiran.

4. Comentarios y nuevos enfoques.

Debido a la importancia y a la gran aplicación del llamado “estimador actuarial convencional (clásico)” se han realizado muchos estudios. A pesar de esto, no hay consenso unánime en la interpretación y en la posible validez teórica del método actuarial clásico.

Una sencilla e interesante defensa de la aproximación actuarial convencional a la estimación del riesgo por exposición se tiene en **Dorrington, Robert Edwin and Slawski, Janina Krystyna (1.993)**. Basa sus argumentos en la consistencia del método actuarial de cálculo de exposición con el número esperado agregado de muertes.

Supone que la variable aleatoria que representa la muerte o vida para el individuo i-ésimo, cuya observación comienza a la edad $x+r_i$, tiene una esperanza de la forma

$$E[D_i] = {}_{a_i - r_i}q_{x+r_i}$$

con lo que la esperanza para el conjunto de los individuos considerados será

$$\begin{aligned} E[D_x] &= \sum_i {}_{a_i - r_i}q_{x+r_i} = \sum_i {}_{1-r_i}q_{x+r_i} - \sum_i {}_{a_i - r_i}p_{x+r_i}\ {}_{1-a_i}q_{x+a_i} = \\ &= \sum_i {}_{1-r_i}q_{x+r_i} - \sum_i (1 - E[D_i])\ {}_{1-a_i}q_{x+a_i} = \\ &= \sum_i {}_{1-r_i}q_{x+r_i} - E\left[\sum_i (1 - D_i)\ {}_{1-a_i}q_{x+a_i}\right] = \\ &= \sum_i {}_{1-r_i}q_{x+r_i} - E\left[\sum_{i:D_i=0} {}_{1-a_i}q_{x+a_i}\right] \end{aligned}$$

Basta ahora sustituir la edad máxima $x+a$ observada en el individuo en el intervalo especificado (edad de salida para individuos que no mueren y edad desconocida inicialmente para individuos que mueren) por la edad real de salida $x+t$ ya que aparece sólo en los casos de individuos no fallecidos (valor cero para la variante dicotómica “vida muerte”). Se tiene entonces,

$$E[D_x] = \sum_i {}_{1-r_i}q_{x+r_i} - E\left[\sum_{i:D_i=0} {}_{1-t_i}q_{x+t_i}\right],$$

que se presenta como la correcta interpretación para las muertes esperadas según la aproximación convencional o actuarial. Tiene su adecuado sentido cuando se involucran todas las N vidas, sin separar o descomponer la expresión para individuos determinados.

Si en el desarrollo anterior, en concreto en

$$E[D_x] = \sum_i {}_{1-r_i} q_{x+r_i} - \sum_i \left(1 - E[D_i]\right)_{1-a_i} q_{x+a_i}$$

se sustituye la variante dicotómica por su esperanza se tiene la aproximación convencional o actuarial:

$$\sum_i D_i = \sum_i {}_{1-r_i} q_{x+r_i} - \sum_i \left(1 - D_i\right)_{1-a_i} q_{x+a_i} = \sum_i {}_{1-r_i} q_{x+r_i} - \sum_{i:D_i=0} {}_{1-t_i} q_{x+t_i} \; .$$

Por tanto, aparece una relación racional y coherente entre el estimador que se tiene por el método de los momentos y el estimador actuarial. Son estas razones las que llevan a afirmar a Robert Edwin Dorrington y a Janina Krystyna Slawski que "la aproximación convencional es una aceptable aproximación práctica que permite cálculo directo de la estimación requerida sin necesitar hipótesis explícitas sobre la edad máxima de la muerte".

Otros trabajos apoyan el método de estimación actuarial, suministrando un nuevo enfoque. Se propone una nueva racionalidad que se relaciona con el estimador límite producto. Destaca el trabajo desarrollado por **Puzey, Anthony S. (1.995)**. El autor pretende reorientar la discusión, evitando la referencia continua al método de los momentos. Tal como dice, hasta ahora "la crítica y la justificación a la idiosincrasia del método de cálculo de muertes esperadas parece surgir desde las comparaciones del método de cálculo del estimador convencional con el método de cálculo del estimador del método de momentos". Se conseguirá expresar el criterio subyacente en el estimador actuarial sin recurrir a una posible relación con el método de los momentos, a la que se llegaría modificando hipótesis o estableciendo restricciones.

Se parte, al igual que en el estimador actuarial, de la relación que iguala el número observado de muertes a la diferencia entre número de muertes esperadas en el total de vivos que están presentes (en algún momento) en el periodo y edad de estudio, y número de muertes esperadas en los vivos que se retiran de observación (según retirados realmente observados):

$$D = \sum_N {}_{1-r_i} q_{x+r_i} - \sum_W {}_{1-t_i} q_{x+t_i}$$

Este punto de partida puede criticarse por no emplear, a priori, una función de probabilidad para los individuos que se retirarán.

A continuación, se observa que la expresión

$$
\begin{aligned}
{}_{1-r}p_{x+r} &= P\left(X \geq x+1 \big/ X \geq x+r\right) = \frac{P(X \geq x+1)}{P(X \geq x+r)} = \\
&= \frac{P(X \geq x+1)/P(X \geq x)}{P(X \geq x+r)/(X \geq x)} = \frac{P\left(X \geq x+1 \big/ X \geq x\right)}{P\left(X \geq x+r \big/ X \geq x\right)} = \frac{p_x}{{}_r p_x}
\end{aligned}
$$

permite sustituir en la ecuación anterior:

$$
\begin{aligned}
D &= \sum_N {}_{1-r_i}q_{x+r_i} - \sum_W {}_{1-t_i}q_{x+t_i} = \sum_N \left(1 - \frac{p_x}{{}_{r_i}p_x}\right) - \sum_W \left(1 - \frac{p_x}{{}_{t_i}p_x}\right) = \\
&= N - \sum_N \left(\frac{p_x}{{}_{r_i}p_x}\right) - W + \sum_W \left(\frac{p_x}{{}_{t_i}p_x}\right)
\end{aligned}
.
$$

Finalmente, considerando los supervivientes como *S*=*N*-*W*-*D*, simplificando y despejando se llega a:

$$
\sum_N \frac{1}{{}_{r_i}p_x} = \sum_{WS} \frac{1}{{}_{t_i}p_x} .
$$

No se emplea una posible distribución de probabilidad para retirados. El método de los momentos, en sentida estricto, si requiere estimar tal distribución (o utilizar retiradas planeadas).

El lado izquierdo de la ecuación refleja el número de vidas que intervienen para establecer el número de supervivientes a la mortalidad. El lado derecho de la ecuación refleja el número de vidas que salen no por muerte, de las consideradas anteriormente. Esta asociación, entre probabilidades relacionadas con número de individuos implicados al inicio y probabilidades relacionadas con número de individuos saliendo no fallecidos implicados al final, es lo que se llamará **"criterio de implicación"**. Este criterio se deriva de la aproximación actuarial clásica o convencional de estimación del riesgo de exposición.

También se debe destacar la relación con el estimador límite producto. Se pueden fijar las probabilidades de la anterior expresión

$$\sum_{N} \frac{1}{{}_{r_i}p_x} = \sum_{WS} \frac{1}{{}_{t_i}p_x}$$

sin recurrir a leyes de mortalidad paramétricas. Se cumple el criterio de implicación y la ecuación anterior si se recurre al estimador límite producto. Para ello, se parte el periodo en intervalos limitados por los puntos donde aparecen entradas o salidas no debidas a muertes, y las probabilidades se estimarán con la proporción de vidas que sobrevivan en el subperiodo estudiado. La consideración de todos los subperiodos permite hallar la probabilidad de supervivencia en todo el intervalo.

Aunque se puedan unificar los criterios iniciales entre estimación actuarial y límite producto, la forma final de fijar la estimación establecerá diferencias. Destaca que el estimador actuarial es ponderado según el número de vidas mientras que el estimador límite producto es ponderado según tiempo de subperiodos. La desviación típica en este último caso es generalmente mayor debida a la importancia de los datos en cada punto y según su volumen.

A modo de **resumen** se puede decir que el método de estimación actuarial empezó siendo un método informal, previo a la teoría de estimación estadística clásica, desarrollado para estimar probabilidades de muerte en la cartera de pólizas de una empresa aseguradora. Cuando surgió el método de los momentos, se observó (en la práctica actuarial) la similitud entre ambos métodos.

Las críticas al estimador actuarial se propusieron según ventajas e inconvenientes respecto del método de los momentos. Las ventajas se refieren a la posibilidad de aplicar la filosofía del método de los momentos a pesar de no tener todos los datos necesarios disponibles, buscando la consistencia del método en el cálculo de la exposición con el número esperado agregado de muertes. Los inconvenientes se refieren a los casos con finalistas en el periodo de estimación ya que no se asigna una función de probabilidad a los individuos que se retiran.

Posteriormente, se reorienta el estudio evitando la comparación con el método de los momentos, esto lleva a buscar una racionalidad propia en el estimador actuarial en base al criterio de implicación y al estimador límite producto.

Bibliografía.

Betzuen Zalbidegoitia, Amancio (1.999). "La medida de la mortalidad en un colectivo de activos ocupados", *Actuarios*, Núm.17, Dossier, pp.:1-8.

Breslow, N. and Crowley, J. (1.974). "A large sample study of the life table and product limit estimates under random censorship", *The Annals of Statistics*. Vol.2, Núm.3, pp.:437-453.

Broffit, James D. (1.984). "Maximum likelihood alternatives to actuarial estimators of mortality rates", *Transactions of the Society of Actuaries*. Vol.36, pp.:77-122.

Dorrington, Robert Edwin and Slawski, Janina Krystyna (1.993). "A defence of the conventional actuarial approach to the estimation of the exposed-to-risk", *Scandinavian Actuarial Journal*. Núm.2, pp.:107-113.

Elandt-Johnson, Regina C. and Johnson Norman, L. (1.980). *Survival models an data analysis.* Wiley. New York.

Hoem, Jan M. (1.984). "A flaw in actuarial exposed to risk theory", *Scandinavian Actuarial Journal*, Núm.3, pp.:187-194.

London, D. (1.988). *Survival models and their estimation***,** Actex Publications. Connecticut.

Martín Peña, María Luz y Sánchez López, José María (1.998). "Aspectos técnicos del seguro de vida: elementos financieros y actuariales", *Revista Española de Seguros*, Núm.95, pp.:445-462. Madrid.

Miller, John H. and Courant, Simon T. (1.988). "Anderson's attributed exposure method", *Congress International of Actuaries*. pp.373-391.

Puzey, Anthony S. (1.986). *Exposed-to-risk***.** Institute of Actuaries. London.

Puzey, Anthony S. (1.995). "A reappraisal of the principle underlying the conventional actuarial estimator of $\underline{q_x}$", *Insurance, Mathematics and Economics*. Núm.17, pp.:125-132. North-Holland.

Sánchez López, José María (2.001). *Cuantificación de riesgos y análisis global de la empresa aseguradora de vida*, Dykinson, S.L., Madrid.

Sánchez López, José María (2.001). "Construcción de tablas de mortalidad", *Revista Española de Seguros*. Núm.106, pp.:297-306. Madrid.