ESTUDIO SOBRE EL EXCESO DE AMPLITUD EN LA CONSTRUCCIÓN DE INTERVALOS DE CONFIANZA PARA LA MEDIA POBLACIONAL CON VARIANZA DESCONOCIDA EN UNA POBLACIÓN NORMAL

Luis González Abril y Luis M. Sánchez-Reyes

{luisgon, luiss-rf}@us.es - Dpto. Economía Aplicada I

Universidad de Sevilla

Palabras clave: Intervalos de Confianza, Distribución t, Distribución Normal

Resumen

En este trabajo se comparan los intervalos de confianza que pueden obtenerse aplicando los métodos estándar para estimar la media poblacional en un modelo generador de datos normal en las dos situaciones posibles, (con varianza poblacional conocida y desconocida), cuantificando la probabilidad de que el intervalo que se obtiene en el segundo caso sea más estrecho que en el primero, y analizando el significado que tiene que esto pueda llegar a ocurrir.

1. Introducción al problema. Intervalos de confianza que proporcionan los métodos estándar

Consideremos la siguiente situación: la característica de interés de una población se distribuye según una variable aleatoria $X \in N(m,1)$, y dos investigadores que trabajan por separado desean construir un intervalo de confianza al 90% para la media poblacional m a partir de una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 2$ a la que ambos van a tener acceso. Obtenida la muestra ésta resulta ser $x_1 = 0.95$ y $x_2 = 1.05$, de forma que la media y varianza muestrales son $\overline{X} = 1$ y $S^2 = 0.0025$ respectivamente.

El primer investigador ha tenido acceso a la mencionada información sobre la distribución de la característica de interés, por lo que plantea el correspondiente intervalo de confianza de la muestra, que como es sabido para un grado de confianza 1-a supuesto conocida la varianza es:

$$\overline{X} - z_{1-a/2}\frac{s}{\sqrt{n}} < m < \overline{X} + z_{1-a/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

donde $z_{1-a/2}$ es el correspondiente percentil del modelo normal tipificado. Este intervalo con los datos obtenidos se convierte en:

$$-0.163 < m < 2.163$$

El segundo investigador posee menos información que el primero y sólo conoce que $X \in N(m, s)$, por lo que construye el intervalo de confianza según la expresión

$$\overline{X} - t_{n-1,1-a/2}\frac{S}{\sqrt{n-1}} < m < \overline{X} + t_{n-1,1-a/2}\frac{S}{\sqrt{n-1}}$$

donde $t_{n-1,1-a/2}$ es el correspondiente percentil del modelo *t*–Student con *n*-1 grados de libertad y *S* es la raíz cuadrada de la varianza muestral. Este intervalo al sustituir los valores correspondientes queda:

$$0.684 < m < 1.316$$

de forma que el segundo intervalo es mucho más preciso debido a su menor amplitud.

La pregunta que surge es: ¿cómo es posible que el segundo investigador utilizando menos información haya obtenido un intervalo más preciso que el primero con el mismo nivel de confianza? (de hecho puede comprobarse que el intervalo $-0.163 < m < 2.163$ a nuestro segundo investigador llegaría a proporcionarle una confianza bastante superior al 95%). Así pues si el primer investigador tuviese conocimiento del intervalo obtenido por el segundo, ¿debería desechar su resultado y adoptar el del compañero?

La respuesta es negativa, y con este trabajo vamos a justificar que si nuestro investigador actuase de esta manera estaría interpretando equivocadamente la confianza. Recuérdese que la confianza se entiende como la probabilidad, previa a la obtención de la muestra, de que el intervalo que se va a construir contenga al verdadero valor del parámetro, pero téngase también presente que el intervalo es aleatorio y depende de la muestra obtenida. En este caso la muestra es tal que ha ocurrido el "suceso raro" de que la amplitud del primer intervalo es mayor que la del segundo.

2. Análisis de los intervalos de confianza

En esta sección se comparan las amplitudes de los intervalos que proporcionan los dos métodos de construcción de intervalos de confianza antes descritos.

PLANTEAMIENTO GENERAL: Sea X un modelo generador de datos que sigue un modelo normal de media m y varianza s^2, es decir, $X \in N(m, s)$. A partir de este modelo obtenemos una realización muestral de tamaño $n : \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Puesto que el intervalo de confianza de la muestra con un grado de confianza 1-α supuesto conocida la varianza es:

$$\left(\bar{X} - \frac{1}{\sqrt{n}} \sigma \; z_{1-\alpha/2} \quad , \quad \bar{X} + \frac{1}{\sqrt{n}} \sigma \; z_{1-\alpha/2} \right)$$

la amplitud de este intervalo vale:

$$\frac{2}{\sqrt{n}} \sigma \; z_{1-\alpha/2}$$

Análogamente, la expresión del intervalo de confianza de la muestra con un grado de confianza 1-α supuesto desconocida la varianza es:

$$\left(\bar{X} - \frac{1}{\sqrt{n-1}} S \; t_{n-1,1-\alpha/2} \quad , \quad \bar{X} + \frac{1}{\sqrt{n-1}} S \; t_{n-1,1-\alpha/2} \right)$$

con amplitud:

$$\frac{2}{\sqrt{n-1}} S \; t_{n-1,1-\alpha/2}$$

Para comparar las amplitudes de los intervalos que se pueden obtener por ambos métodos conviene considerar el cociente entre la amplitud variable del intervalo basado en la distribución t y la amplitud fija del que se basa exclusivamente en la distribución $N(0,1)$. Este cociente por lo visto antes es

$$C = \frac{t_{n-1,1-\alpha/2}}{z_{1-\alpha/2}} \frac{1}{\sqrt{n-1}} \frac{\sqrt{n}\, S}{\sigma}$$

y como características de interés pueden calcularse $E[C]$ y $Var[C]$. Para determinar $E[C]$ sólo cabe tener en cuenta que por cumplirse $\frac{nS^2}{\sigma^2} \in \chi^2_{n-1}$ entonces $E\left[\sqrt{n}S/\sigma\right] = \sqrt{2}\,\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma((n-1)/2)}$, de manera que

$$E[C] = \frac{t_{n-1,1-\alpha/2}}{z_{1-\alpha/2}} \frac{\sqrt{2}\;\Gamma(n/2)}{\sqrt{n-1}\;\Gamma((n-1)/2)}$$

$$Var[C]=\left(\frac{t_{n-1,1-a/2}}{z_{1-a/2}}\right)^2\left(1-\left(\frac{\sqrt{2}\ \Gamma(n/2)}{(n-1)\ \Gamma((n-1)/2)}\right)^2\right)$$

En estas expresiones aparece la función gamma, para la que se cumple la propiedad general $\lim_{x\to+\infty}\frac{\Gamma(x+1/2)}{\sqrt{x}\ \Gamma(x)}=1$, lo que aplicado a nuestro caso significa que

$$\frac{\sqrt{2}\ \Gamma(n/2)}{\sqrt{n-1}\ \Gamma((n-1)/2)}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$$

por lo que para a fijo

$$E[C]\xrightarrow[n\to\infty]{}1 \quad \text{y} \quad Var[C]\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

de modo que para n grande ambos métodos tienden a ser equivalentes. Siguiendo esta construcción se ha obtenido la siguiente tabla, para un grado de confianza del 95% y variando el tamaño muestral

n	E[C]	Var[C]
2	5,1726	15,2719
3	1,9455	1,0342
4	1,4960	0,3986
5	1,3316	0,2336
6	1,2480	0,1627
7	1,1977	0,1241
8	1,1643	0,1000
9	1,1404	0,0837
10	1,1226	0,0718
11	1,1088	0,0629
12	1,0978	0,0560
13	1,0888	0,0504
14	1,0813	0,0458
15	1,0750	0,0420
16	1,0695	0,0387
17	1,0648	0,0360
18	1,0608	0,0336
19	1,0571	0,0315
20	1,0539	0,0296
21	1,0511	0,0280
22	1,0485	0,0265
23	1,0462	0,0252
24	1,0441	0,0239
25	1,0421	0,0229
26	1,0404	0,0219
27	1,0387	0,0209

n	E[C]	Var[C]
28	1,0372	0,0201
29	1,0358	0,0193
30	1,0346	0,0186
31	1,0333	0,0179
32	1,0322	0,0173
33	1,0312	0,0167
34	1,0302	0,0162
35	1,0293	0,0157
36	1,0284	0,0152
37	1,0276	0,0148
38	1,0268	0,0143
39	1,0261	0,0139
40	1,0254	0,0136
41	1,0248	0,0132
42	1,0241	0,0129
43	1,0235	0,0125
44	1,0230	0,0122
45	1,0224	0,0119
46	1,0219	0,0117
47	1,0214	0,0114
48	1,0210	0,0111
49	1,0205	0,0109
50	1,0201	0,0107
100	1,0098	0,0052
200	1,0049	0,0025
500	1,0019	0,0010

3. Estudio del suceso raro

Pese a que el valor esperado del cociente de amplitudes es superior a la unidad sin embargo es posible, como se tuvo ocasión de comprobar en la introducción del problema, que el intervalo de confianza proporcionado a partir del modelo *t* de Student cuando desconocemos la varianza tenga menor amplitud que el basado en el modelo normal, cuando la varianza es conocida. Así, calculemos la probabilidad:

$$P\left(\frac{2}{\sqrt{n-1}} S\, t_{n-1,1-\alpha/2} < \frac{2}{\sqrt{n}} \sigma\, z_{1-\alpha/2} \right)$$

teniendo en cuenta que todas las cantidades involucradas son positivas y despejando convenientemente, esta probabilidad se expresa:

$$P\left(\frac{n\, S^2}{\sigma^2} < (n-1) \frac{z^2_{1-\alpha/2}}{t^2_{n-1,1-\alpha/2}} \right)$$

y si nuevamente recordamos que $\frac{n\, S^2}{\sigma^2} \in \chi^2_{n-1}$ se ha de calcular:

$$P\left(\chi^2_{n-1} < (n-1) \frac{z^2_{1-\alpha/2}}{t^2_{n-1,1-\alpha/2}} \right)$$

Distinguimos dos casos:

a) Supongamos que el tamaño muestral es grande:

Es conocido que si el tamaño muestral es grande entonces:

$$t_{n,\, p} \approx z_p \sqrt{\frac{n}{n-2}}$$

y sustituyendo esta expresión en la probabilidad queda:

$$P\left(\chi^2_{n-1} < n-3 \right)$$

y si tenemos en cuenta que:

$$E\left(\chi^2_{n-1} \right) = n-1 \qquad Var\left(\chi^2_{n-1} \right) = 2\,(n-1)$$

entonces:

$$P\left(\frac{c_{n-1}^2 - E\left(c_{n-1}^2\right)}{\sqrt{Var\left(c_{n-1}^2\right)}} < -\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right)$$

y como n es grande aplicando el teorema central del límite se sigue que la probabilidad anterior es aproximadamente igual a:

$$P\left(Z<0\right)=0.5$$

con Z siguiendo un modelo normal tipificado.

Luego, como era lógico si el tamaño muestral es suficientemente grande los intervalos que se obtienen tienen una probabilidad del 50% de ser uno mayor que otro. Esto se sigue también del hecho de que el modelo t_n cuando n es grande se aproxima suficientemente bien por un normal, o también del resultado anterior $Var[C]\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

b) Supongamos que el tamaño muestral es pequeño:

En este caso no existe relación sencilla entre los percentiles del modelo normal tipificado y el modelo t con n grados de libertad y la única solución pasa por implementarlo es un ordenador y ver lo que ocurre. Así lo hemos hecho, seleccionando los grados de confianza más utilizados y calculando la correspondiente probabilidad para obtener la tabla siguiente:

$P\left(c_{n-1}^2<(n-1)\frac{z_{1-a/2}^2}{t_{n-1,1-a/2}^2}\right)$						
$1-a=$ $z_{1-a/2}=$	**0,90** **1,64485**		**0,95** **1,95996**		**0,99** **2,57583**	
n	**t**	**Probabilidad**	**t**	**Probabilidad**	**t**	**Probabilidad**
2	**6,3137**	**0,2055**	**12,7062**	**0,1226**	**63,6559**	**0,0323**
3	**2,9200**	**0,2719**	**4,3027**	**0,1874**	**9,9250**	**0,0651**
4	**2,3534**	**0,3098**	**3,1824**	**0,2321**	**5,8408**	**0,0998**
5	**2,1318**	**0,3340**	**2,7765**	**0,2630**	**4,6041**	**0,1305**
6	**2,0150**	**0,3510**	**2,5706**	**0,2856**	**4,0321**	**0,1565**
7	**1,9432**	**0,3637**	**2,4469**	**0,3030**	**3,7074**	**0,1783**
8	**1,8946**	**0,3737**	**2,3646**	**0,3168**	**3,4995**	**0,1967**
9	**1,8595**	**0,3818**	**2,3060**	**0,3280**	**3,3554**	**0,2124**
10	**1,8331**	**0,3885**	**2,2622**	**0,3375**	**3,2498**	**0,2260**
11	**1,8125**	**0,3942**	**2,2281**	**0,3456**	**3,1693**	**0,2379**
12	**1,7959**	**0,3991**	**2,2010**	**0,3525**	**3,1058**	**0,2484**
13	**1,7823**	**0,4034**	**2,1788**	**0,3586**	**3,0545**	**0,2578**
14	**1,7709**	**0,4072**	**2,1604**	**0,3641**	**3,0123**	**0,2662**

15	**1,7613**	**0,4105**	**2,1448**	**0,3689**	**2,9768**	**0,2738**
16	**1,7531**	**0,4136**	**2,1315**	**0,3733**	**2,9467**	**0,2808**
17	**1,7459**	**0,4163**	**2,1199**	**0,3772**	**2,9208**	**0,2871**
18	**1,7396**	**0,4188**	**2,1098**	**0,3808**	**2,8982**	**0,2929**
19	**1,7341**	**0,4211**	**2,1009**	**0,3841**	**2,8784**	**0,2983**
20	**1,7291**	**0,4232**	**2,0930**	**0,3872**	**2,8609**	**0,3033**
21	**1,7247**	**0,4251**	**2,0860**	**0,3900**	**2,8453**	**0,3079**
22	**1,7207**	**0,4270**	**2,0796**	**0,3926**	**2,8314**	**0,3122**
23	**1,7171**	**0,4286**	**2,0739**	**0,3950**	**2,8188**	**0,3162**
24	**1,7139**	**0,4302**	**2,0687**	**0,3973**	**2,8073**	**0,3200**
25	**1,7109**	**0,4317**	**2,0639**	**0,3995**	**2,7970**	**0,3236**
26	**1,7081**	**0,4331**	**2,0595**	**0,4015**	**2,7874**	**0,3270**
27	**1,7056**	**0,4344**	**2,0555**	**0,4034**	**2,7787**	**0,3301**
28	**1,7033**	**0,4356**	**2,0518**	**0,4052**	**2,7707**	**0,3332**
29	**1,7011**	**0,4367**	**2,0484**	**0,4069**	**2,7633**	**0,3360**
30	**1,6991**	**0,4378**	**2,0452**	**0,4085**	**2,7564**	**0,3387**
31	**1,6973**	**0,4389**	**2,0423**	**0,4100**	**2,7500**	**0,3413**
32	**1,6955**	**0,4399**	**2,0395**	**0,4114**	**2,7440**	**0,3438**
33	**1,6939**	**0,4408**	**2,0369**	**0,4128**	**2,7385**	**0,3461**
34	**1,6924**	**0,4417**	**2,0345**	**0,4141**	**2,7333**	**0,3484**
35	**1,6909**	**0,4426**	**2,0322**	**0,4154**	**2,7284**	**0,3505**
36	**1,6896**	**0,4434**	**2,0301**	**0,4166**	**2,7238**	**0,3526**
37	**1,6883**	**0,4442**	**2,0281**	**0,4178**	**2,7195**	**0,3546**
38	**1,6871**	**0,4450**	**2,0262**	**0,4189**	**2,7154**	**0,3565**
39	**1,6860**	**0,4457**	**2,0244**	**0,4200**	**2,7116**	**0,3583**
40	**1,6849**	**0,4464**	**2,0227**	**0,4210**	**2,7079**	**0,3601**
41	**1,6839**	**0,4471**	**2,0211**	**0,4220**	**2,7045**	**0,3618**
42	**1,6829**	**0,4477**	**2,0195**	**0,4229**	**2,7012**	**0,3634**
43	**1,6820**	**0,4484**	**2,0181**	**0,4238**	**2,6981**	**0,3650**
44	**1,6811**	**0,4490**	**2,0167**	**0,4247**	**2,6951**	**0,3665**
45	**1,6802**	**0,4495**	**2,0154**	**0,4256**	**2,6923**	**0,3680**
46	**1,6794**	**0,4501**	**2,0141**	**0,4264**	**2,6896**	**0,3694**
47	**1,6787**	**0,4507**	**2,0129**	**0,4272**	**2,6870**	**0,3708**
48	**1,6779**	**0,4512**	**2,0117**	**0,4280**	**2,6846**	**0,3722**
49	**1,6772**	**0,4517**	**2,0106**	**0,4287**	**2,6822**	**0,3735**
50	**1,6766**	**0,4522**	**2,0096**	**0,4295**	**2,6800**	**0,3747**
80	**1,6644**	**0,4623**	**1,9905**	**0,4444**	**2,6395**	**0,4009**
100	**1,6604**	**0,4664**	**1,9842**	**0,4503**	**2,6264**	**0,4113**
200	**1,6525**	**0,4763**	**1,9720**	**0,4649**	**2,6008**	**0,4372**
500	**1,6479**	**0,4850**	**1,9647**	**0,4779**	**2,5857**	**0,4603**

En ésta, se puede observar que no es ni mucho menos inusual que el intervalo de confianza de la media muestral con varianza desconocida sea más estrecho que cuando se supone varianza conocida, es decir, el "suceso raro" no es tan extraño como a primera vista puede parecernos. Por ejemplo, considerando un grado de confianza del 95% (el más frecuente) con una muestra de tamaño 7, esta probabilidad es superior al 30% y para $n=10$ la probabilidad es superior a 1/3, subiendo esta probabilidad por encima del 40% cuando el tamaño es de 26.

4. Paradoja acerca de la confianza que merecen los intervalos. Corrección de la confianza.

La aparente contradicción que se presentó en la introducción estaba relacionada con la ocurrencia del “suceso raro” y consistía en decidir si procede preferir el intervalo más estrecho frente al de mayor amplitud. Como ya indicamos desde el principio la respuesta es negativa y pasemos a examinar por qué. La confianza de que intervalo aleatorio que se obtiene aplicando la distribución t contenga a m es el siguiente valor

$$P\left[\left|\bar{X}-m\right|<\frac{1}{\sqrt{n-1}}S\ t_{n-1,1-a/2}\right]$$

o lo que es igual

$$P\left[\left|\sqrt{n}\left(\bar{X}-m\right)/s\right|<\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}\frac{S}{s}t_{n-1,1-a/2}\right]$$

Teniendo en cuenta que $\bar{X}\in N(m,s/\sqrt{n})$, para cada valor de S la expresión derecha de la desigualdad será un determinado percentil de orden $1-p/2$ de la distribución $N(0,1)$, es decir

$$z_{1-p/2}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}\frac{S}{s}t_{n-1,1-a/2}$$

Si se conoce s pueden calcularse $z_{1-p/2}$ y $p/2$. Además por la independencia entre las distribuciones $\bar{X}$ y S, la probabilidad condicionada a S del anterior suceso no cambia, es decir,

$$P\left[\left|\sqrt{n}\left(\bar{X}-m\right)/s\right|<z_{1-p/2}\ |S\right]=1-p/2$$

y por consiguiente es $1-p$ el verdadero grado de confianza atribuible al intervalo; es decir, si se conoce s se debe corregir la confianza. Nótese que la tentación de preferir el intervalo basado en la distribución t aparece cuando

$$\frac{S}{\sqrt{n-1}}t_{n-1,1-a/2}<\frac{s}{\sqrt{n}}z_{1-a/2}$$

o lo que igual, si

$$z_{1-p/2} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} \frac{S}{\sigma} t_{n-1,1-\alpha/2} < z_{1-\alpha/2}$$

de modo que entonces $1-p/2 < 1-\alpha/2$ y $1-p < 1-\alpha$, lo que significa que la confianza corregida es inferior al grado de confianza que se tomó inicialmente.

Así pues, para un intervalo basado en la distribución t si se conoce σ se puede corregir su confianza que pasa a ser

$$1-p(S) = P\left[\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}\right| < \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} \frac{t_{n-1,1-\alpha/2}}{\sigma} S\right]$$

y cabe preguntarse, ¿será también $1-\alpha$ el valor esperado de esta esperanza corregida en coherencia con el planteamiento del método estándar? Veamos que efectivamente es así. Abreviando la notación mediante

$$Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}, \quad u(S) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} \frac{t_{n-1,1-\alpha/2}}{\sigma} S$$

y representando por Φ y f_S las funciones de densidad de Z y de S entonces

$$E[1-p(S)] = \int_0^{+\infty} P\left[|Z| < u(S)\right] f_S(s)\, ds = \int_0^{+\infty} \int_{-u(s)}^{u(s)} \Phi(z)\, f_S(s)\, dz ds$$

y por ser Z y S independientes entonces $\Phi(z)\, f_S(s)$ es también la función de densidad conjunta de ambas variables aleatorias, por lo que la última expresión coincide con

$$P\left[|Z| < u(S)\right] = P\left[\frac{|\bar{X}-\mu|}{\sigma}\sqrt{n} < \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} \frac{t_{n-1,1-\alpha/2}}{\sigma} S\right] = P\left[\frac{|\bar{X}-\mu|}{S/\sqrt{n-1}} < t_{n-1,1-\alpha/2}\right] = 1-\alpha$$

tal y como se había anunciado. Nótese además que por su misma definición

$$1-p(S) = 2\Phi(u(S)) - 1$$

5. Cuantificación del exceso de amplitud

En la tabla de probabilidades dada en la sección 3 se podía observar que la probabilidad de obtener el "suceso raro" se aproxima al 50% cuando el tamaño muestral crece, es decir, cada vez deja de ser menos raro.

Sin embargo, lo realmente importante es ver como difieren en términos relativos las amplitudes de los intervalos de confianza considerados, y es claro que cuando n crece ambas amplitudes tienden a cero (para la que se basa en la distribución t esa convergencia es en probabilidad) y asimismo también para el cociente de ambas $C \xrightarrow{P} 1$ y por tanto aunque se tenga la ocurrencia del "suceso raro" la diferencia entre las amplitudes es insignificante. La situación a considerar por tanto tiene interés cuando el tamaño muestral es pequeño, pues entonces puede que la probabilidad de que las amplitudes difieran significativamente sea importante.

Centremos nuestro estudio sobre intervalos de confianza al 95%[1]. Si se dispone de una muestra de tamaño 10, la probabilidad de obtener un intervalo de confianza más estrecho cuando desconocemos la varianza que cuando la conocemos es de 0.3375 pero la pregunta que pretendemos contestar en esta sección es ¿qué probabilidad existe de que en verdad las amplitudes sean considerablemente diferentes? Para ello se ha calculado para distintos valores de k la probabilidad que

$$\frac{S}{\sqrt{n-1}} t_{n-1,1-a/2} < \frac{s}{\sqrt{n}} z_{1-a/2} \, (1-k)$$

Así, para k=0.5 se estudia cuando el intervalo basado en la distribución t es menos de la mitad del intervalo basado en la normal. De esta forma se ha construido la siguiente tabla:

k	**0.75**	**0.5**	**0.25**	**0.1**
n	**Probabilidades**			
2	**0,0308**	**0,0615**	**0,0921**	**0,1104**
3	**0,0129**	**0,0506**	**0,1102**	**0,1547**
4	**0,0049**	**0,0371**	**0,1128**	**0,1798**
5	**0,0019**	**0,0263**	**0,1091**	**0,1938**

[1] De forma análoga se realizaría el estudio para cualquier otro grado de confianza.

6	**0,0007**	**0,0185**	**0,1030**	**0,2018**
7	**0,0003**	**0,0130**	**0,0961**	**0,2061**
8	**0,0001**	**0,0091**	**0,0891**	**0,2083**
9	**0,0000**	**0,0064**	**0,0824**	**0,2089**
10	**0,0000**	**0,0045**	**0,0759**	**0,2087**
11	**0,0000**	**0,0032**	**0,0699**	**0,2077**
12	**0,0000**	**0,0022**	**0,0644**	**0,2062**
13	**0,0000**	**0,0016**	**0,0593**	**0,2044**
14	**0,0000**	**0,0011**	**0,0545**	**0,2024**
15	**0,0000**	**0,0008**	**0,0502**	**0,2002**
20	**0,0000**	**0,0001**	**0,0332**	**0,1877**
30	**0,0000**	**0,0000**	**0,0148**	**0,1625**
40	**0,0000**	**0,0000**	**0,0068**	**0,1403**
50	**0,0000**	**0,0000**	**0,0031**	**0,1214**
100	**0,0000**	**0,0000**	**0,0001**	**0,0612**
200	**0,0000**	**0,0000**	**0,0000**	**0,0174**
500	**0,0000**	**0,0000**	**0,0000**	**0,0005**

En ella podemos observar como cuando el tamaño muestral crece, la probabilidad de que el intervalo basado en la *t* tenga una amplitud inferior al 50% de la amplitud del intervalo basado en la normal está próximo a cero a partir de un tamaño de 15.

Si consideramos como una diferencia importante que el tamaño del intervalo basado en la *t* tenga una amplitud inferior en un 25% al tamaño del basado en la normal, se sigue que estos sucesos no son en absoluto raros ya que para un tamaño muestral de 10 es del 7’59% y aún cuando el tamaño se duplica, esta probabilidad es relativamente alta (3’32%).

Todo esto nos sugiere de forma analítica que la interpretación de los intervalos de confianza de la media poblacional basados en la distribución de *t* de Student deben ser interpretado con una cierta cautela para cualquier tipo de investigación siempre que el tamaño de la muestra sea pequeño.

Conclusiones

En este trabajo hemos comprobado teóricamente que no es un hecho excepcional el obtener intervalos de confianza de la media muestral más estrecho con menor información. Todo depende de la muestra concreta y en todo caso la probabilidad de tener intervalos de confianza más estrechos despreciando información es relativamente alta en contra de lo que se podría pensar, aunque como finalmente se desprende del análisis esa ganancia en la precisión del intervalo ha resultado ficticia.

Ignorar el valor de s se paga obteniendo un intervalo que por término medio tendrá más amplitud que el que se hubiese obtenido utilizando esa información. Además, a la luz del conocimiento de s se puede corregir la confianza que merece el intervalo que se obtuvo basado en la distribución t. El hecho de que el valor medio de la confianza corregida siga siendo el mismo que el que fijó inicialmente el investigador se explica básicamente debido a que la confianza corregida viene dada por la función cóncava $1-p(S)=2f(u(S))-1$, lo que significa que un incremento positivo de S tiene menos repercusión en el aumento de la confianza corregida que la disminución asociada al mismo incremento negativo de S (aunque también es un factor a tener en cuenta la propia distribución de S).