UNA APROXIMACIÓN A LA VALORACIÓN DE OPCIONES AMERICANAS UTILIZANDO LA TEORÍA DE SEMIGRUPOS.

Cruz Báez, Domingo Israel
González Rodríguez, José Manuel
Departamento de Economía Aplicada
Universidad de La Laguna.
E-mail: dicruz@ull.es ; jomagon@ull.es

Palabras clave: Opciones americanas, operadores semilineales parabólicos, semigrupos de operadores.

Resumen: Existen varios métodos para el análisis teórico y numérico de opciones americanas. Algunos están basados en la denominada ecuación de Black y Scholes [1], entre ellos destacamos los métodos de ecuaciones en derivadas parciales y otros basados en el método binomial propuesto por Cox, Ross y Rubinstein (véase, por ejemplo, [16], [7] y [3]). No obstante aunque existan estos métodos hay una fuerte demanda para crear otros que sean más eficientes computacional y analíticamente. En esta comunicación demostramos, bajo ciertas condiciones, la existencia de un único valor de una opción americana, utilizando la teoría de semigrupos.

1 Introducción

Las opciones no son un producto de reciente innovación financiera, se concibieron opciones, de hecho, hace miles de años. Algunos historiadores de mercado datan los orígenes de las opciones en la Grecia antigua y el filósofo Thales que estableció opciones sobre la cosecha de aceituna y sobre el uso de los molinos de aceite. En Estados Unidos, las opciones de compra de acciones se empezaron comerciando ya entrado el siglo dieciocho en mercados no organizados, fue ya en 1973 en Chicago, cuando aparece el primer mercado organizado de derivados financieros, el cual experimento un crecimiento espectacular.

Las opciones pertenecen a lo que se denomina como derivados. Un derivado es un producto financiero elaborado sobre la base de un activo. El propietario de una opción tiene el derecho (no la obligación) de compra o de venta de cierto activo en una fecha futura a un precio determinado.

Uno de los tipos de opciones más sencillas son las que dan derecho a comprar un activo, se conocen como opciones de compra o “call”. Es importante tener en cuenta que el propietario de una opción “call” puede escoger en no ejercer la opción y no obtener ningún beneficio por la opción. Así, pues, ejerciendo la opción, el propietario se beneficia de un movimiento favorable en el precio del activo, y no ejerciéndola, el propietario no sufre una pérdida significativa motivado por un movimiento desfavorable. Por otra lado, el vendedor de la opción “call” si está obligado a cumplir las condiciones del contrato si el propietario ejerce la opción.

En 1973, la publicación del famoso trabajo de Black y Scholes [1] revolucionó los mercados financieros del mundo. Considerando un sencillo modelo para el precio de un recurso financiero, pudieron obtener una fórmula analítica para el precio de una opción de compra europea sobre una acción. La opción de compra europea es un ejemplo de derivado financiero que le da el derecho al poseedor, pero no la obligación, para comprar una unidad de un recurso en un momento fijo (la fecha de expiración), a precio fijo K (el precio de ejercicio). Si denotamos por C y S los valores al vencimiento de la opción de compra, y de la acción, respectivamente, el poseedor de esa opción recibirá $C = \max(0, S - K)$. Black y Scholes asumieron que no había arbitraje en el mercado y obtuvieron un único precio para la opción que permitiría a un banco tomar ese dinero y, usando una estrategia de la cobertura de riesgo, garantizar el pago de la opción. Recientemente en [4] hemos valorado opciones europeas usando la teoría de sernigrupos.

Las opciones americanas son contratos que pueden ejercerse antes de la fecha de vencimiento. Por ejemplo, si la opción es una “call”, podemos pagar el precio del ejercicio y recibir el activo siempre que deseemos. Por este hecho, el problema de valorar opciones americanas se torna más complicado. Es conocido que una opción de compra americana que no reparte dividendos tiene el mismo precio que su correspondiente opción europea (no ocurre lo mismo con las opciones de venta), pero sin embargo no hay ninguna expresión explícita para una opción de tal naturaleza. Debemos destacar entre las técnicas empleadas para la valoración de los precios de las opciones a la que utilizan la teoría de ecuaciones en derivadas parciales, medidas de martingalas y árboles binomiales ([3],[7],[16]). En este artículo, nos plantemos abordar este problema de una forma diferente, utilizando la teoría de semigrupos.

2 Preliminares

Para valorar una opción americana con pago g, consideramos primero las opciones más usadas y con más movimiento en el mercado que son las opciones americanas de compra y venta. Éstas son con pagos independientes del tiempo $g(s,t)=(s-k)^+$ y $g(s,t)=(k-s)^+$, respectivamente, siendo $k \geq 0$ es el precio de ejercicio y $x^+ = \max\{x,0\}$, $x \in \mathbf{R}$.

McKean, Merton y Samuelson [11], [12], [14], [15] demostraron que los valores de una opción de compra "call" americana y de una opción de venta "put" americana (*C* y *P*, respectivamente) en el modelo de Black-Scholes verifican las siguientes problemas,

$$\text{(2.1)}\quad \begin{aligned} &\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 s^2\frac{\partial^2 C}{\partial s^2}+(r-d)s\frac{\partial C}{\partial s}-rC=0, \quad s\in[0,s_c(t)),\ t\in[0,T],\\ &C(s,T)=(s-k)^+,\\ &C(s_c(t),t)=(s_c(t)-k)^+,\\ &\frac{\partial C}{\partial s}(s_c(t),t)=1, \end{aligned}$$

$$\text{(2.2)}\quad \begin{aligned} &\frac{\partial P}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 s^2\frac{\partial^2 P}{\partial s^2}+(r-d)s\frac{\partial P}{\partial s}-rP=0, \quad s>s_p(t),\ t\in[0,T],\\ &P(s,T)=(k-s)^+,\\ &P(s_p(t),t)=(s_p(t)-k)^+,\\ &\frac{\partial P}{\partial s}(s_p(t),t)=-1, \end{aligned}$$

donde, *s* es un precio de una acción, $\sigma > 0$ es la volatilidad del activo, $d \geq 0$ es la rentabilidad del activo dada a interés compuesto continuo, $r \geq 0$ es la tasa de interés compuesto continuo y las fronteras, es decir, las fronteras de ejercicio óptimo denotadas por s_c, s_p.

En [8, pp. 5064 5065], usando la funciones características $h\left((s-k)^+ - C\right)$ y $h\left((k-s)^+ - P\right)$, $s \in \mathbf{R}^+$, siendo h la función de Heaviside,

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases},$$

se transforma (2.1) y (2.2) en una única ecuación no homogénea del tipo Black-Scholes en todo el dominio de la variable de estado s, es decir,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 C}{\partial s^2} + (r-d)s\frac{\partial C}{\partial s} - rC = -(ds - rk)^+ h\left((s-k)^+ - C\right), \quad s \geq 0,\ t \in [0,T], \\ &C(s,T) = (s-k)^+, \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 P}{\partial s^2} + (r-d)s\frac{\partial P}{\partial s} - rP = -(rk - ds)^+ h\left((k-s)^+ - P\right), \quad s \geq 0,\ t \in [0,T], \\ &P(s,T) = (k-s)^+. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Recordemos también que en [8] se obtiene una ecuación semilineal del tipo Black-Scholes para las opciones americanas en general, con pago g:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} + (r-d)s\frac{\partial V}{\partial s} - rV = -\rho^+(s,t)h\left(g(s,t) - V\right), \quad s \geq 0,\ t \in [0,T],ç \\ &V(s,T) = g(s,T), \end{aligned} \tag{2.9}$$

siendo $\rho^+(s,t) = -\left(\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 g}{\partial s^2} + (r-d)s\frac{\partial g}{\partial s} - rg\right)^+ (s,t).$

Para opciones de compra y venta americanas, la ecuación (2.9) toma la forma de (2.3) y (2.4), respectivamente.

El hecho que el término no lineal $\rho^+(s,t)h\left(g(s,t) - V(s,t)\right)$ sea una función discontinua de V no permite una simple aplicación de la teoría del punto fijo al análisis de la ecuación (2.9). Para evitar este problema, reemplazaremos la función de Heaviside en el término no lineal por una aproximación suave (diferente a la utilizada en [8, p. 5067]). En concreto utilizaremos la función Error que puede verse entre otros en [9, p. 17, (2.1.5)] y viene dada por:

$$\operatorname{Erf} z = \int_0^z e^{-t^2}\,dt\,.$$

Esta función Error nos permite definir en la forma: $h_\varepsilon(z)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{Erf}(\varepsilon z)\right)$, (nótese que cuando $\varepsilon\to\infty, h_\varepsilon(z)\to h(z)$), y por consiguiente, podemos reemplazar h por h_ε, obteniendo el siguiente problema aproximado para opciones americanas:

$$
(2.10)\quad \begin{array}{l} \dfrac{\partial V}{\partial t}+\dfrac{1}{2}\sigma^2 s^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial s^2}+(r-d)s\dfrac{\partial V}{\partial s}-rV=F_\varepsilon(s,t,V),\quad s\geq 0,\ t\in[0,T],ç \\ V(s,T)=g(s,T), \end{array}
$$

donde $F_\varepsilon(s,t,V)$ es la función $-\rho^+(s,t)\cdot h_\varepsilon(g(s,t)-V)$.

Recientemente, en [6] se estudia la generación de semigrupos analíticos en el espacio $L^2(\mathbf{R}^d)$ y la caracterización de su dominio para una familia de operadores elípticos con coeficientes no acotados, que incluyen algunos conocidos operadores que se surgen en la Matemática Financiera. Sin embargo, en este artículo se comenta que no es posible obtener un resultado de generación de semigrupo sin imponer un crecimiento adecuado y condiciones sobre los coeficientes, principalmente por la posibilidad de la no acotación de todos los coeficientes y la degeneración del operador. Estos resultados se emplean para obtener la existencia, la unicidad y estimaciones sobre la regularidad para las soluciones de los problemas parabólicos asociados.

Exponemos a continuación los cambios de variable con los que conseguimos reducir (2.10) a una variante de la ecuación de difusión para resolver el problema de la degeneración del operador.

Primero podemos ver el componente espacial del operador como una ecuación diferencial de Riemann, y usando el cambio

$$(2.11)\quad s=e^x,\quad t=2(T-\tau)/\sigma^2,\quad V=w(x,\tau),$$

obtener la ecuación

$$(2.12)\quad \frac{\partial w}{\partial\tau}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\left(\frac{2(r-d)}{\sigma^2}-1\right)\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{2r}{\sigma^2}w-H_\varepsilon(x,\tau,w),$$

siendo $H_\varepsilon(x,\tau,w)=\rho^+(s,t)h_\varepsilon(g(s,t)-V)_{|s=e^x;t=2(T-\tau)/\sigma^2}$ la transformación de F_ε.

La ecuación (2.12) ahora se parece mucho más a una ecuación de difusión, y podemos convertirla en ella con un simple cambio de variable de la forma

$$(2.13)\quad w=e^{\alpha x+\beta\tau}u(x,\tau),$$

para algunas constantes α,β dadas por

$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{(r-d)}{\sigma^2}$, $\beta = -\frac{1}{4}\left(\frac{2r}{\sigma^2} - \frac{2d}{\sigma^2} + 1\right)^2 - \frac{2d}{\sigma^2}$, siendo u una función de variable real definida sobre $\mathbf{R} \times \left[0, \frac{1}{2}\sigma^2 T\right]$.

Por consiguiente la ecuación (2.10), toma la forma siguiente:

$$\text{(2.14)} \quad \begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f_\varepsilon(x,\tau,u),\ x \in \mathbf{R},\ \tau \in \left[0, \frac{1}{2}\sigma^2 T\right] \\ &u(x,0) = \hat{g}(x,0) \end{aligned}$$

siendo

$x = \log s$, $t = 2(T-\tau)/\sigma^2$, $f_\varepsilon(x,\tau,u) = \hat{\rho}^+(x,\tau) \cdot h_\varepsilon(\hat{g}(x,\tau) - u)$, $\hat{g}(x,\tau) = g(e^x, 2(T-\tau)/\sigma^2)e^{-\alpha x - \beta\tau}$, $\hat{\rho}^+(x,\tau) = (\hat{g}_\tau(x,\tau) - \hat{g}_{xx}(x,\tau))^+$.

Una vez resuelto los problemas planteados en [8] y [6], demostraremos la existencia de un único valor de una opción americana con un pago general, es decir, demostramos un teorema de existencia y unicidad para el problema de Cauchy que viene dado por (2.10) utilizando la teoría del semigrupos. Además estableceremos una propiedad de regularidad.

3 Notación

Daremos algunas definiciones y teoremas que utilizaremos posteriormente.

Definición 3.1. Sea $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{C}$, $1 \le p < \infty$, diremos que *f* pertenece a L^p_α si $\|f\|_{p,\alpha} < \infty$ siendo

$$\|f\|_{p,\alpha} = \left(\int_0^\infty s^{-\alpha p - 1} |f(s)|^p \, ds\right)^{1/p},$$

y $|f|$ representa el módulo de *f*. También definimos el operador

$$-\frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} - (r-d)s\frac{\partial}{\partial s} + r : D(A) \subset L^p_\alpha \to L^p_\alpha$$

$$f(s) \mapsto \left(-\frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} - (r-d)s\frac{\partial}{\partial s} + r\right) f(s)$$

siendo $D(A) = \left\{ f \in L^p_\alpha : -\frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} - (r-d)s\frac{\partial f}{\partial s} + rf \in L^p_\alpha \right\}$.

Además, como es usual, $L^p(\mathbf{R}) = \{ f : \|f\|_p < \infty \}$ donde

$$\|f\|_p = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Definición 3.2. [10, p., 258] Una función $f : [0,T] \times X \to X$, diremos que es Lipschitz continua si existe $L > 0$ tal que

(3.15) $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x - y\|$, $\forall t \in [0,T]$.

Definición 3.3. [10, p. 33] Sea X un espacio de Banach, dotado con la norma $\|\cdot\|$. Se dice que A es sectorial si existen constantes $\omega \in \mathbf{R}$, $\theta \in (\pi/2, \pi)$, $M > 0$ tal que:

1. $S_{\theta,\omega} = \{\lambda \in \mathbf{C} : \lambda \neq \omega, |\arg(\lambda - \omega)| < \theta\} \subset \rho(A)$,

2. $\|R(\lambda : A)\| \leq \dfrac{M}{|\lambda - \omega|}$, $\forall \lambda \in S_{\theta,\omega}$.

Proposición 3.1. [13, Teorema 7.7, p. 30] Sea A un operador definido densamente en X que satisface las siguientes condiciones:

1. Para algún $\delta : 0 < \delta < \pi/2$, $S_\delta = \{\lambda \in \mathbf{C} : |\arg(\lambda)| < \pi/2 + \delta\} \cup \{0\} \subset \rho(A)$,

2. Existe una constante M tal que: $\|R(\lambda : A)\| \leq \dfrac{M}{|\lambda|}$, para $\lambda \in S_\delta$, $\lambda \neq 0$.

Entonces A es el generador infinitesimal de un C_0 semigrupo $T(t)$ que satisface $\|T(t)\| \leq C$ para alguna constante C.

Consecuencia de la Definición 3.3 y la Proposición 3.1. Todo operador sectorial es el generador infinitesimal de un C_0 semigrupo analítico.

En [13, Capítulo 6, p. 181], con una ligera modificación, podemos ver el siguiente problema parabólico semilineal:

(3.16) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t)}{\partial t} = Au(t) + f(t, u(t)), & t < T, \\ u(T) = u_0, \end{cases}$$

donde $A : D(A) \to X$ es un operador lineal sectorial, $f : [0,T] \times X \to X$ es una función continua en t y que satisface una condición Lipschitz en u, siendo X un espacio de Banach.

Recordemos de [13, Capítulo 6, Teorema 1.2, p. 184] el siguiente resultado:

Proposición 3.2. Sea $f:[0,T]\times X\to X$ una función continua en t sobre $[0,T]$ y uniformemente Lipschitz continua (con constante *L*) sobre *X*. Si A es un operador sectorial sobre *X* entonces para cada $u_0 \in X$, el problema de valor inicial (3.16) tienen una única solución débil $u \in C([0,T]:X)$ satisfaciendo la ecuación integral

$$u(t) = e^{(T-t)A}u_0 + \int_t^T e^{(y-t)A} f(y,u(y))dy$$

donde

$$e^{tA} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r,\eta}} e^{t\lambda} R(\lambda : A)d\lambda\,,\ t>0\,,$$

siendo $r>0$, $\eta \in (\pi/2,\theta)$ y $\gamma_{r,\eta}$ es la curva

$\{\lambda \in \mathbf{C} : |\arg\lambda| = \eta, |\lambda| \geq r\} \cup \{\lambda \in \mathbf{C} : |\arg\lambda| \leq \eta, |\lambda| = r\}$,

orientada en sentido contrario a las agujas del reloj.

El siguiente resultado de regularidad se puede encontrar en [13, Teorema 1.6, p. 189].

Proposición 3.3. Dado *A* el generador infinitesimal de un C_0 semigrupo $T(t)$ sobre un espacio de Banach reflexivo *X*. Si $f:[0,T]\times X\to X$ es Lipschitz continua en ambas variables, $u_0 \in D(A)$ y *u* es una solución débil del problema de valor inicial (3.16) entonces *u* es una solución fuerte.

4 Resultados principales

Después de estos preliminares, en esta sección, demostraremos la existencia de un único valor de una opción americana con un pago cualquiera, es decir, demostramos la existencia y unicidad del problema de Cauchy (2.10).

Para esto, es muy importante demostrar que el operador de Black-Scholes genera un semigrupo analítico.

Teorema 4.1. El operador diferencial $A \equiv -\frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} - (r-d)s\frac{\partial}{\partial s} + r$ genera un semigrupo analítico, que viene dado por la fórmula

(4.17) $T(t)\phi = e^{tA}\phi = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma_{r,\eta}} e^{t\lambda}R(\lambda : A)\phi\, d\lambda\,,$

siendo $\phi \in L^p_\alpha$, donde $\gamma_{r,\eta}$ es la curva $\{\lambda \in \mathbf{C} : |\arg\lambda| = \eta, |\lambda| \geq r\} \cup \{\lambda \in \mathbf{C} : |\arg\lambda| \leq \eta, |\lambda| = r\}$, orientada en sentido contrario a las agujas del reloj, $r > 0$, $\eta \in (\pi/2, \theta)$ y

(4.18) $R(\lambda : A)\phi(s) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{1}{\lambda^{1/2}} \int_0^\infty z^{-\alpha-1}\phi(z)\, e^{-\lambda^{1/2}\,\mathrm{abs}(\log(s/z))} dz$. (abs la función valor absoluto).

Demostración.

Probaremos que el operador de Black-Scholes es sectorial y por tanto genera un semigrupo analítico.

Para ello, recordamos que en la Sección 2 usando los cambios de variables (2.11) y (2.13), la ecuación (2.10) se reduce a la ecuación (2.14).

Es decir, si demostramos que $B \equiv \frac{d^2}{dx^2}$ es un operador sectorial tendremos el resultado para el operador $A \equiv -\frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} - (r-d)s\frac{\partial}{\partial s} + r$, sin más que deshacer los cambios de variables.

Nótese que con (2.11)-(2.13) el espacio L^p_α se reduce a $L^p(\mathbf{R})$ y

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} : D(B) \subset \quad & L^p(\mathbf{R}) \to L^p(\mathbf{R}) \\ & f(x) \quad \mapsto \frac{d^2 f}{dx^2} \end{aligned}$$

donde $D(B) = \left\{ f \in L^p(\mathbf{R}) : \frac{d^2 f}{dx^2} \in L^p(\mathbf{R}) \right\}$.

Si denotamos por C_0^∞ a las funciones $f \in C^\infty$ con soporte compacto, entonces $D(B)$ es denso en $L^p(\mathbf{R})$, ya que $D(B)$ contiene a C_0^∞.

En virtud de la Definición 3.3 debemos ver que

$$\|R(\lambda : B)f\|_p \leq \frac{C_1}{|\lambda|}\|f\|_p,$$

donde C_1 es una constante positiva.

Inicialmente analicemos quién es $R(\lambda : B)$.

Sea $g \in D(B)$ tal que $g = R(\lambda : B)f = (\lambda I - B)^{-1} f$, es decir, $f = (\lambda I - B)g = \lambda g - \frac{d^2 g}{dx^2}$.

Aplicando la transformación de Fourier [2] y teniendo en cuenta que $\Im\left(\frac{d^2g}{dx^2}\right)(y) = -y^2\Im g(y)$, tenemos

$\Im f(y) = \lambda \cdot \Im g(y) + y^2\Im g(y) = (\lambda + y^2)\Im g(y)$, entonces

(4.19) $\Im g(y) = \frac{1}{\lambda + y^2}\Im f(y)$.

Si aplicamos en (4.19) la transformación inversa de Fourier obtenemos

$g(x) = (H * f)(x)$, siendo * la convolución de Fourier (ver [2]) y

$H = \Im^{-1}\left(\frac{1}{\lambda + y^2}; y \to x\right) = (\pi/2)^{1/2}\frac{1}{\lambda^{1/2}}e^{-\lambda^{1/2}\operatorname{abs}(x)}$, donde $\operatorname{abs}(x)$ es la función valor absoluto de x y $\lambda \in \mathbf{C} - (-\infty, 0]$ y $c > 0$.

Entonces un simple cálculo nos da la siguiente acotación

$\|H\|_1 = \left\|\Im^{-1}\left(\frac{1}{\lambda + y^2}; y \to x\right)\right\|_1 \le \frac{c}{|\lambda|}$, si $\lambda \in \mathbf{C} - (-\infty, 0]$ y $c > 0$.

Por lo tanto, si $\lambda \in \mathbf{C} - (-\infty, 0]$, aplicando la desigualdad de Young [5, p. 232] tenemos

(4.20) $\|f * H\|_p \le \|f\|_p \cdot \|H\|_1 \le \frac{c}{|\lambda|} \cdot \|f\|_p$.

Consideramos $\lambda \in \mathbf{C}$ tal que $\operatorname{Re}\lambda \le 0$ y $\frac{|\operatorname{Re}\lambda|}{|\operatorname{Im}\lambda|} < \frac{1}{2c_1}$, $c_1 > 1$. Entonces elegimos un $\lambda_0 \in \mathbf{C}$ con $\operatorname{Im}\lambda_0 = \operatorname{Im}\lambda$ y $\operatorname{Re}\lambda_0 \in \left(0, \frac{1}{4c_1}|\operatorname{Im}\lambda_0|\right)$. Como consecuencia $|\lambda_0 - \lambda| \le \frac{3}{4c_1}|\lambda_0| = c_2|\lambda_0|$ y por lo tanto $\frac{|\lambda_0 - \lambda|}{c_2|\lambda_0|} < 1$. Procediendo de igual forma que [17, p. 255], $R(\lambda : B)$ existe y viene dada por

$$R(\lambda : B) = \sum_{N=0}^{\infty}(\lambda_0 - \lambda)^N R(\lambda_0 : B)^{N+1},$$

además tomando normas

$$\|R(\lambda : B)\|_p \le \frac{1}{\left(1 - \frac{c_2|\lambda_0 - \lambda|}{|\lambda_0|}\right)}\|R(\lambda_0 : B)f\|_p,$$

teniendo presente como está definido λ_0 y que verifica (4.20) obtenemos $\left\| R(\lambda : B)f \right\|_p \leq \frac{c}{|\lambda|} \cdot \left\| f \right\|_p$.

Por lo tanto para $\lambda \in \mathbf{C}$ y $\left|\operatorname{Arg} \lambda\right| < \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2\, c_1}$ tenemos

$\left\| R(\lambda : B)f \right\|_p \leq \frac{c^*}{|\lambda|} \cdot \left\| f \right\|_p$, siendo c^* una constante positiva.

En virtud de la Definición 3.3 concluimos que *B* es un operador sectorial en L^p dado por (4.17).

Por consiguiente $A \equiv -\frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} - (r-d)s\frac{\partial}{\partial s} + r$ es un operador sectorial en L^p_α.

En virtud de la Proposición 3.1 y el Teorema 4.1 tenemos

Teorema 4.2. Para cada $g \in L^p_\alpha$ y F_ε que satisface (3.15), el problema de valores iniciales (2.10) tiene una única solución *V*, que satisface la ecuación integral

$$V(s,t) = e^{(T-t)A} g(s,T) + \int_t^T e^{(y-t)A} F_\varepsilon(s,y,V(s,y))dy,$$

siendo e^{tA} como en el Teorema 4.1 y $R(\lambda : A)$ como en (4.18). Es más, usando el resultado de regularidad dado en el Teorema 3.2 y [5, Corolario 6.16, p. 183], obtenemos que si F_ε es Lipschitz continua en las dos variables y $g \in D(A)$ entonces la solución débil *V* es una solución fuerte de (2.10).

Nótese que para los casos particulares de las opciones de venta y compra tenemos:

Teorema 4.3. Sea $d > r + \frac{\sigma^2}{2}$ y ε suficientemente grande, entonces los problemas de valor inicial

$$(4.21)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 C}{\partial s^2} + (r-d)s\frac{\partial C}{\partial s} - rC = -(ds - rk)^+ h_\varepsilon\big((s-k)^+ - C\big), \quad s \geq 0,\ t \in [0,T], \\ &C(s,T) = (s-k)^+, \end{aligned}$$

o

$$(4.22)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 P}{\partial s^2} + (r-d)s\frac{\partial P}{\partial s} - rP = -(rk - ds)^+ h_\varepsilon\big((k-s)^+ - P\big), \quad s \geq 0,\ t \in [0,T], \\ &P(s,T) = (k-s)^+. \end{aligned}$$

tienen una única solución.

Demostración.

Lo demostraremos para las opciones de compra, la demostración para las opciones de venta se obtiene de forma similar.

En virtud del Teorema 4.2 debemos obtener que $(s-k)^+ \in D(A)$ y que $(ds-rk)^+ h_\varepsilon\left((s-k)^+ - C\right)$ sea Lipschitz continua.

Si $\alpha > 1$, esto es, $d > r + \frac{\sigma^2}{2}$, tenemos que $(s-k)^+ \in D(A)$.

Por lo tanto debemos ver que $(ds-rk)^+ h_\varepsilon\left((s-k)^+ - C\right)$ es Lipschitz continua.

Con un sencillo cálculo tenemos que si ε es suficientemente grande

$$f(s,C_1) - f(s,C_2) \le -k_1 (ds-rk)^+ (C_1 - C_2).$$

Ahora, si tomamos normas,

$$\left\| f(s,C_1) - f(s,C_2) \right\|_{p,\alpha}^p \le k_2 \int_0^\infty \left((ds-rk)^+\right)^p \left|C_1(s,t) - C_2(s,t)\right|^p s^{-\alpha p - 1} ds.$$

Aplicando la desigualdad de Hölder [5, Teorema 6.8, p. 176] nos da

$$\left\| f(s,C_1) - f(s,C_2) \right\|_{p,\alpha}^p \le k_2 \left\| \left((ds-rk)^+\right)^p \right\|_\infty \int_0^\infty \left|C_1(s,t) - C_2(s,t)\right|^p s^{-\alpha p - 1} ds$$

$$\le k_3 \left\| C_1 - C_2 \right\|_{p,\alpha}^p.$$

siendo $k_i > 0 \ (i = 1, 2, 3)$ constantes.

Luego tenemos $(ds-rk)^+ h_\varepsilon\left((s-k)^+ - C\right)$ es Lipschitz continua y con ello finalizamos la demostración.

5 Conclusiones

Hemos resuelto y mejorado los problemas planteados en [8]. Estos resultados son aplicables a las aproximaciones del problema inicial con las funciones del tipo

$$h_\varepsilon(z) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Erf}(\varepsilon z)\right).$$

Es posible obtener otras aproximaciones a las funciones de Heaviside, por ejemplo

$$\overline{h}_{\varepsilon}(z)=\begin{cases} 0 & \text{si } z\le 0 \\ 1/\varepsilon\cdot z & \text{si } 0<z\le\varepsilon \\ 1 & \text{si } z\ge\varepsilon \end{cases}.$$

La primera aproximación verifica la convergencia dominada y la segunda el teorema de convergencia monótona. Se encuentra en estudio la aplicación de resultados de convergencia a la solución del problema real. Además, se está analizando la regularidad de las soluciones, aunque como primer resultado podemos aplicar [10, Proposición 7.1.10, p. 268]. Por otro lado, debemos señalar que en virtud de Teorema 4.3, los resultados son los aplicables con éxito en los importantes casos de las opciones de venta y compra americanas siempre que los dividendos están relacionados con la volatilidad y la tasa de interés de la siguiente forma $d>r+\frac{\sigma^2}{2}$, estando en este caso garantizada la existencia y unicidad del valor de una opción americana. Por último nuestros resultados mejoran y están en concordancia con el trabajo [8].

Bibliografía

[1] F. Black and M. S. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities, Journal of Political Economy, 81 (1973), pp. 637-654.

[2] R. N. Bracewell. The Fourier Transform and Its Applications, New York: McGraw-Hill Book Company, 1965.

[3] J.C. Cox, M. Rubinstein, Options Markets, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1985.

[4] D.I. Cruz-Báez, J.M. González-Rodríguez. Semigroup theory applied to options. J. Appl. Math. 2 (2002), no. 3, 131-139.

[5] G. B. Folland. Real analysis. Modern techniques and their applications. Pure and Applied Mathematics. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1984.

[6] F. Gozzi, R. Monte, V. Vespri. Generation of analytic semigroups and domain characterization for degenerate elliptic operators with unbounded coefficients arising in Financial Mathematics, Part I. To appear in Differential and Integral Equations.

[7] John C. Hull. Options, Futures and Other Derivatives 4th Edition. Prentice Hall, 2000.

[8] V.A. Kholodnyi. A nonlinear partial differential equation for American options in the entire domain of the state variable. Proceedings of the Second World Congress of Nonlinear Analysts, Part 8 (Athens, 1996). Nonlinear Anal. 30 (1997), no. 8, 5059--5070.

[9] N.N. Lebedev. Special functions and their applications. Revised edition, translated from the Russian and edited by Richard A. Silverman. Unabridged and corrected republication. Dover Publications, Inc., New York, 1972.

[10] A. Lunardi.Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems.Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 16. Birkhäuser Verlag, Basel, 1995.

[11] McKean : H.P. McKean, Jr. Appendix: A free boundary problem for the heat equation arising from a problem in mathematical economics. Industrial Management Review 6, 2 (Spring 1965), 32-39.

[12] Merton : R.C. Merton. Theory of rational option pricing. Bell Journal of Economics and Management Science 4 (1973), 141-183.

[13] Pazy : A. Pazy. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. Applied Mathematical Sciences, 44. Springer-Verlag, New York, 1983.

[14] Samuelson : P.A. Samuelson. Rational theory of warrant pricing. Industrial Management Review 6, 2 (Spring 1965), 13-31.

[15] SamuelsonMerton : P.A. Samuelson and R.C. Merton. A complete model of warrant pricing that maximizes utility. Industrial Management Review 10, 2 (Winter 1969), 17-46.

[16] Wilmott : P. Wilmott. Paul Wilmott introduces Quantitative Finance, John Wiley & Sons, 2001.

[17] Yosida : K. Yosida. Functional analysis. Sixth edition. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 123. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1980.