CAPITAL FÍSICO, CAPITAL HUMANO: UN JUEGO DIFERENCIAL

Mª Dolores Soto Torres
Departamento de Economía Aplicada (Matemáticas)
Universidad de Valladolid
e-mail: lolasoto@eco.uva.es

Ramón Fernández Lechón
Departamento de Economía Aplicada (Matemáticas)
Universidad de Valladolid
e-mail: ramonfer@eco.uva.es

Resumen

Se plantea un juego entre dos agentes, uno se ocupa de determinar la acumulación de capital físico y el otro de la acumulación de capital humano. El juego se formula como un juego diferencial donde cada jugador intenta optimizar un funcional en cuya valoración instantánea se tiene en cuenta la necesidad, por parte de ambos jugadores, de capital físico, de capital humano y los costes necesarios para su acumulación. La formulación de la valoración instantánea no sigue las mismas características que presentan los juegos cuadráticos.

Utilizando la programación dinámica, lo que implica la búsqueda de las correspondientes funciones de valor, se encuentran las estrategias de inversión de los jugadores suponiendo que no cooperan entre sí. Las estrategias de inversión, función de los stocks de capital, sustituidas en las ecuaciones diferenciales de acumulación de capital determinan un sistema dinámico.

El trabajo analiza bajo qué condiciones el sistema dinámico así formulado admite una solución estacionaria y la dependencia de esta solución respecto a ciertos parámetros explícitos en el planteamiento del juego.

Palabras clave: Juegos diferenciales, equilibrio feedback de Nash, sistemas dinámicos.

1. Introducción.

La teoría de juegos suministra una herramienta poderosa para estudiar el comportamiento de distintos agentes que actúan dentro de un contexto económico y/o político al permitirnos tener en cuenta el grado de cooperación, o bien de antagonismo que surge entre ellos. Distintas aplicaciones dentro del campo de la macroeconomía, de la economía pública o de la economía política, utilizan los desarrollos de la teoría de juegos para rechazar o asegurar ciertas tesis. Algunos modelos planteados en estos campos, considerando juegos diferenciales en los que aparecen operaciones de acumulación de capital, pueden encontrarse en Shimomura (1991), Docker et al. (1996) y Figuieres (2002), entre otros.

Planteado un juego diferencial, su formulación conlleva un proceso de análisis si se pretende encontrar equilibrios que gocen de la propiedad de ser equilibrios perfectos en los subjuegos. Así, en ciertas ocasiones, la formulación de los juegos diferenciales propuestos se adaptan para que los funcionales que tratan de optimizar los jugadores se ajusten a funciones cuadráticas en las variables de estado y control, y si además la dinámica de las variables de estado se rige por un comportamiento lineal, la solución de equilibrio feedback del juego que implica resolver la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman, puede obtenerse resolviendo, en último término, una ecuación de Ricatti, desarrollo que no está exento de dificultades.

En este trabajo plantearemos y formularemos un juego diferencial entre dos jugadores en un horizonte infinito. Un jugador se ocupa de la acumulación de capital físico y el otro de acumular capital humano. La formulación de los funcionales de los jugadores se aleja de un planteamiento cuadrático, hecho que va a venir condicionado por la expresión que determina el crecimiento del capital humano, en un intento de utilizar la aproximación propuesta por Lucas (1988) para la evolución de este capital. Para este autor, el comportamiento dinámico del capital físico y del capital humano es distinto, ya que si el primero se incrementa mediante inversión física con una formulación lineal, el crecimiento del segundo debe de tener en cuenta tanto el esfuerzo como el contacto entre personas con suficientes conocimientos.

Siendo obvio que capital y conocimientos interactúan con objeto de obtener un resultado físico, en este trabajo pretendemos determinar la evolución de capital físico y capital humano si los agentes representativos no cooperan. De este modo, nuestro objetivo con el desarrollo del juego diferencial, es encontrar controles feedback Nash para los agentes, lo que nos permitirá determinar la evolución dinámica de los dos capitales si tales controles son adoptados. La búsqueda de la solución de equilibrio del juego propuesto conlleva una gran cantidad de operaciones y para asegurarnos de su buen hacer todo el proceso se realiza utilizando la versión ocho de Maple.

2. El modelo.

El juego que proponemos considera dos agentes que viven infinitamente. Supondremos que ambos jugadores saben que el otro jugador conoce los objetivos a conseguir y las formulaciones utilizadas, el comportamiento de las acumulaciones de los respectivos stock de capital y los valores de estos stocks en el momento inicial.

Cada uno de los jugadores pretende optimizar un funcional cuya valoración instantánea depende de los stocks de capital físico y de capital humano y donde también se incluyen los costes percibidos por cada uno de los jugadores, necesarios para generar los crecimientos de los correspondientes capitales. Un agente determina la inversión en capital físico, mientras que el otro agente trata de encontrar la inversión en capital humano, medida por el esfuerzo que conlleva el proceso de aprendizaje.

El problema que trata de resolver el agente que actúa sobre el capital humano, puede expresarse:

$$\max \quad J_1(z(.),k(.),h(.),i(.)) = \int_0^\infty e^{-rt} L_1(z(t),k(t),h(t),i(t))\, dt$$
$$s.a: \quad \dot{z}(t) = g\, h(t)\sqrt{z(t)} - d\, z(t),$$

donde

$$L_1(z(t),k(t),h(t),i(t)) = m_0\sqrt{z(t)} + k(t) + m_1 k(t)^2 - m_2 h(t)^2 - m_3 i(t)\ ,$$

constituye la utilidad instantánea de este jugador, valorada en unidades de capital físico, siendo $z(t)$ el stock de capital humano en el momento t, que sólo podrá tomar valores no negativos y su valor inicial $z(0) = z_0 > 0$ es conocido. El stock de capital físico en el momento t viene denotado por $k(t)$. El parámetro d recoge el tanto de depreciación de capital humano y se supone constante durante el desarrollo del juego. El tanto de preferencia r, considerado constante y positivo, se supondrá idéntico para ambos jugadores. El término $h(t)$ mide el esfuerzo instantáneo de aprendizaje, que tiene una ponderación cuadrática en la utilidad instantánea y participa en el crecimiento del capital humano siguiendo ideas propuestas por Lucas. El resto de los parámetros que surgen en la expresión que determina la utilidad instantánea y en la evolución del capital humano se considerarán positivos y todos ellos poseen una dimensión apropiada para que las expresiones tengan sentido desde un punto de vista dimensional.

Por su parte, el otro jugador trata de resolver el problema:

$$\max \quad J_2(z(.),k(.),h(.),i(.)) = \int_0^{\infty} e^{-rt} L_2(z(t),k(t),h(t),i(t))\, dt$$
$$s.a: \quad \dot{k}(t) = i(t) - \alpha\, k(t),$$

estando su utilidad instantánea determinada por la expresión:

$$L_2(z(t),k(t),h(t),i(t)) = q_0\sqrt{z(t)} + k(t) + q_1 k(t)^2 - q_2 i(t)^2 - q_3 h(t)^2 - q_4 i(t)h(t)),$$

siendo $k(t)$ no negativo y $k(0) = k_0 > 0$ conocido. El parámetro α corresponde al tanto de depreciación del capital físico, supuesto constante en el horizonte del juego. El término $i(t)$, que también aparecía en el planteamiento del problema a resolver por el otro agente, recoge la inversión instantánea en capital físico y el resto de los parámetros que surgen en el funcional objetivo se suponen positivos y con la dimensión apropiada para que la utilidad instantánea tenga unidades de capital físico.

Observemos que la valoración de las utilidades instantáneas por ambos jugadores no es la misma; además, ninguno de ellos supone que estas funciones son cuadráticas respecto a los stocks de capital y ambos consideran valoraciones de costes de inversión distintas, siendo los costes marginales de inversión dependientes de las inversiones realizadas por el otro agente; por otro lado, las utilidades instantáneas no son simétricas respecto a las variables de estado.

Encontrar una estrategia de equilibrio feedback equivale a determinar valores de inversión en capital físico $i^* = i(z,k)$ y en capital humano, esto es, en esfuerzo $h^* = h(z,k)$, lo que nos permitirá encontrar la evolución de los dos stocks de capital. La utilidad de cada jugador, a cada resultado, $(z(t),k(t),h^*(t),i^*(t))$ se evalúa por la cuantía que alcanza el correspondiente funcional objetivo $J_i(z(.),k(.),h(.),i(.))$ con $i \in \{1,2\}$. Una estrategia de equilibrio feedback verifica la propiedad de que sigue siendo una estrategia de equilibrio para cualquier subjuego comenzando en cualquier $t \in [0, \infty)$.

Para encontrar un equilibrio feedback Nash, utilizando programación dinámica, necesitamos encontrar las funciones de valor de los dos jugadores. Así, para el primer jugador buscamos $V_1(z,k)$ que resuelva la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman,

$$-\left[\frac{\partial V_1}{\partial t} - rV_1\right] = \max_h \left\{L_1(z,k,h,i) + \frac{\partial V_1}{\partial z}(gh\sqrt{z} - \boldsymbol{d}\, z) + \frac{\partial V_1}{\partial k}(i - \boldsymbol{a}\, k)\right\}$$

y para el segundo jugador, buscamos $V_2(z,k)$ para resolver

$$-\left[\frac{\partial V_2}{\partial t} - rV_2\right] = \max_i \left\{L_2(z,k,h,i) + \frac{\partial V_2}{\partial z}(gh\sqrt{z} - \boldsymbol{d}\, z) + \frac{\partial V_2}{\partial k}(i - \boldsymbol{a}\, k)\right\}.$$

Observamos que las expresiones entre llaves son cóncavas en los correspondientes controles para los jugadores, la primera es estrictamente cóncava en h, y la segunda también es estrictamente cóncava en i. Por tanto, las condiciones necesarias de óptimo, para el programa matemático a resolver, resultan suficientes de máximo global único. Considerando condiciones de primer orden para cada uno de los programas a resolver, encontramos los controles de cada uno de los jugadores:

$$h(z,k) = \frac{\frac{\partial V_1}{\partial z} g\sqrt{z}}{2m_2},$$

$$i(z,k) = \frac{-\frac{\partial V_1}{\partial z}\frac{g\, q_4\sqrt{z}}{2m_2} + \frac{\partial V_2}{\partial k}}{2q_2}.$$

Sustituyendo en las ecuaciones de H-J-B estos valores de inversión física y esfuerzo, tenemos planteada una ecuación en derivadas parciales y para resolverla proponemos como solución, para cada uno de los jugadores, a funciones de valor con cuatro indeterminadas. Para el primer jugador proponemos

$$V_1(z,k) = a_0\sqrt{z} + a_1 k^2 + a_2 k + a_3,$$

teniendo en cuenta la formulación de las utilidades instantáneas y, por el mismo motivo, proponemos para el segundo jugador una función de valor que sigue la expresión:

$$V_2(z,k) = b_0\sqrt{z} + b_1 k^2 + b_2 k + b_3 .$$

Si ahora realizamos operaciones y sustituimos en la ecuación de H-J-B, encontramos las expresiones de las ecuaciones que deben satisfacer las indeterminadas que afectan a las correspondientes funciones de valor, para que las funciones de valor propuestas sean solución de la correspondiente ecuación en derivadas parciales. De este modo, para el primer jugador obtenemos:

$$a_0 = \frac{2m_0}{\delta + 2r}$$
$$a_1 = \frac{m_1 q_2}{rq_2 - 2b_1 + 2\alpha q_2}$$
$$a_2 = \frac{4m_2 q_2 - 4b_1 m_2 m_3 - a_1 q_4 a_0 g + 4a_1 b_2 m_2}{4m_2(rq_2 - b_1 + \alpha q_2)}$$
$$a_3 = \frac{2m_3 q_4 a_0 g - 8b_2 m_2 m_3 + a_0^2 g^2 q_2 - 2a_2 q_4 a_0 g + 8a_2 b_2 m_2}{16 m_2 q_2 r}.$$

Notemos que estas indeterminadas, salvo a_0, dependen de la indeterminada b_1, y también el valor de b_2 tiene que ser considerado para encontrar a_2 y a_3. Del mismo modo, si realizamos operaciones en la ecuación para el segundo jugador, encontramos:

$$b_0 = \frac{2q_0}{\delta + 2r}$$
$$b_2 = \frac{4m_2 q_2 - a_0 g b_1 q_4}{4m_2(rq_2 - b_1 + \alpha q_2)}$$
$$b_3 = \frac{8b_0 g^2 a_0 m_2 q_2 - 8q_4 a_0 g b_2 m_2 + 16 b_2^2 m_2^2 - 4a_0^2 g^2 q_2 q_3 + a_0^2 g^2 q_4^2}{64 q_2 m_2^2 r}.$$

Observemos que si conocemos el valor de la indeterminada b_1, habremos encontrado todas las demás, tanto para un jugador como para el otro; ahora bien, la indeterminada b_1 satisface una ecuación de segundo grado cuyas soluciones son:

$$\alpha q_2 + \frac{rq_2}{2} \pm \frac{\sqrt{(2\alpha + r)^2 q_2^2 - 4q_1 q_2}}{2} ,$$

y cuya existencia está garantizada siempre que se verifique la relación $(2\boldsymbol{a}+r)^2 q_2 \geq 4q_1$. Los parámetros que intervienen en la última desigualdad, sin considerar el tanto de preferencia, forman parte de la definición de la utilidad instantánea del jugador que se ocupa de la acumulación de capital físico.

Suponiendo que la última relación es cierta, podemos aceptar los dos posibles valores para b_1, en cuyo caso, tendremos garantizada la existencia de dos funciones de valor que resuelven las correspondientes ecuaciones en derivadas parciales y tendríamos asegurada la existencia del equilibrio feedback aunque no su unicidad. Este resultado, que no es inusual en la búsqueda de estrategias de Nash, puede presentar numerosos inconvenientes. Más adelante comprobaremos las diferencias que surgen al considerar uno u otro valor para la indeterminada b_1.

3. El sistema dinámico.

Suponiendo que hemos seleccionado un valor de b_1, los controles feedback son $h^*(z,k) = \dfrac{a_0 g}{4m_2}$, por tanto, constante e independiente de b_1 y la inversión en capital físico $i^*(z,k) = \dfrac{4b_2 m_2 - q_4 a_0 g}{8m_2 q_2} + \dfrac{b_1}{q_2} k$, dependiente del stock de capital físico y de la indeterminada b_1.

Determinados los controles feedback de los jugadores, y suponiendo que ambos agentes les siguen, las acumulaciones de los stocks de capital verificarán el sistema dinámico no lineal:

$$\dot{z} = \frac{g^2 a_0}{4m_2}\sqrt{z} - \boldsymbol{d}\, z,$$
$$\dot{k} = \frac{4b_2 m_2 - q_4 a_0 g}{8m_2 q_2} + \frac{b_1 - \boldsymbol{a} q_2}{q_2} k.$$

La segunda ecuación es lineal en el stock de capital físico e independiente del capital humano, mientras que la primera solamente depende del capital humano y para poder operar en esta última de una forma más simplificada, podemos realizar el cambio de variable $\boldsymbol{w} = \sqrt{z}$. Operando, encontramos el nuevo sistema dinámico lineal:

$$\dot{w} = \frac{g^2 a_0}{8m_2} - \frac{d}{2}w,$$
$$\dot{k} = \frac{4b_2 m_2 - q_4 a_0 g}{8m_2 q_2} + \frac{b_1 - a q_2}{q_2}k,$$

que admite un único estado de equilibrio

$$(w^e, k^e) = \left(\frac{g^2 a_0}{4d m_2}, \frac{4b_2 m_2 - q_4 a_0 g}{8m_2 (a q_2 - b_1)} \right)$$

si $a q_2 - b_1 \neq 0$. Para estudiar la estabilidad del estado de equilibrio determinamos la matriz Jacobiana de las ecuaciones del sistema dinámico en dicho punto

$$\begin{pmatrix} -\frac{d}{2} & 0 \\ 0 & \frac{b_1}{q_2} - a \end{pmatrix}$$

y, por tanto, si $\frac{b_1}{q_2} < a$, el estado de equilibrio será asintóticamente estable y cualquier trayectoria convergerá hacia él. Por el contrario, si $\frac{b_1}{q_2} > a$ la ecuación característica asociada a la matriz Jacobiana admitirá dos raíces, una positiva y otra negativa y, en este caso, el estado de equilibrio sería un punto de silla, luego solamente la trayectoria situada sobre la variedad estable tendería hacia él.

La evolución de los capitales, en función del tiempo, podemos obtenerlas resolviendo el sistema dinámico lineal, tenemos

$$z(t) = \left[\left(\sqrt{z(0)} - w^e\right) e^{-\frac{d}{2}t} + w^e \right]^2,$$

$$k(t) = \left[k(0) - k^e\right] e^{-(a - \frac{b_1}{q_2})t} + k^e,$$

4. Análisis del estado de equilibrio.

Hay que tener en cuenta que debido al significado de las variables, las componentes del estado de equilibrio tendrán que ser positivas y, por tanto, requeriremos que $k^e > 0$.

Para garantizar que el estado de equilibrio es un punto de silla, podemos elegir las dos posibilidades para b_1. Si elegimos $b_1 = \alpha q_2 + \frac{rq_2}{2} - \frac{\sqrt{(2\alpha + r)^2 q_2^2 - 4q_1 q_2}}{2}$, necesitaremos que $q_1 > \alpha(\alpha + r)q_2$ y $4m_2 < q_4 a_0 g(r + \alpha)$. Si seleccionamos $b_1 = \alpha q_2 + \frac{rq_2}{2} + \frac{\sqrt{(2\alpha + r)^2 q_2^2 - 4q_1 q_2}}{2}$, para que tenga sentido la componente de capital físico requeriremos adicionalmente que $q_1 < \alpha(\alpha + r)q_2$ y, además, $4m_2 < q_4 a_0 g(r + \alpha)$, o bien $q_1 > \alpha(\alpha + r)q_2$ y, además, $4m_2 > q_4 a_0 g(r + \alpha)$. En cualquiera de los dos casos, solamente suponiendo que $k(0) = k^e$, tendremos garantizada la convergencia del capital físico, resultado que se obtiene sin más que observar la solución del sistema dinámico. Por su parte, el capital humano tiende monótonamente hacia su valor de equilibrio.

Para garantizar que el estado de equilibrio encontrado es asintóticamente estable sólo podemos considerar que $b_1 = \alpha q_2 + \frac{rq_2}{2} - \frac{\sqrt{(2\alpha + r)^2 q_2^2 - 4q_1 q_2}}{2}$ suponiendo que adicionalmente se verifica $q_1 < \alpha(\alpha + r)q_2$, relación que además nos garantiza que b_1 es un número real. El estado de equilibrio tiene sentido si además $4b_2 m_2 - q_4 a_0 g > 0$ y realizando operaciones, la desigualdad anterior es cierta si $q_4 a_0 g(r + \alpha) < 4m_2$. Con esta selección de b_1, encontramos

$$(z^e, k^e) = \left(\frac{g^4 m_0^2}{4\delta^2 (\delta + 2r)^2 m_2^2}, \frac{m_0 g q_4 (r + \alpha) - 2m_2 (\delta + 2r)}{4m_2 (q_1 - \alpha(\alpha + r)q_2)(\delta + 2r)} \right)$$

y tenemos los siguientes resultados:

- En estado estacionario, el capital físico decrece y el capital humano crece si se modifica la efectividad de la interacción entre el esfuerzo y el contacto entre personas con conocimientos:

$$\frac{\partial z^e}{\partial g} > 0, \qquad \frac{\partial k^e}{\partial g} < 0.$$

- En estado estacionario, el capital físico crece y el capital humano decrece si se modifica la ponderación del esfuerzo en el sector del conocimiento:

$$\frac{\partial z^e}{\partial m_2} < 0, \qquad \frac{\partial k^e}{\partial m_2} > 0\,.$$

- En estado estacionario, el capital físico decrece y el capital humano no se altera si se modifica la ponderación de la interacción entre el esfuerzo y la inversión física en el sector del capital físico:

$$\frac{\partial z^e}{\partial q_4} = 0, \qquad \frac{\partial k^e}{\partial q_4} < 0\,.$$

- En estado estacionario, el capital físico decrece y el capital humano crece si se modifica la ponderación del capital humano en la utilidad instantánea de este sector:

$$\frac{\partial z^e}{\partial m_0} > 0, \qquad \frac{\partial k^e}{\partial m_0} < 0\,.$$

- En estado estacionario, el capital físico crece y el capital humano no se modifica si se modifica la ponderación del término cuadrático de capital físico en la utilidad instantánea de este sector:

$$\frac{\partial z^e}{\partial q_1} = 0, \qquad \frac{\partial k^e}{\partial q_1} > 0\,.$$

- En estado estacionario, el capital físico decrece y el capital humano no se modifica si se modifica la ponderación del término cuadrático de la inversión en capital físico en la utilidad instantánea de este sector:

$$\frac{\partial z^e}{\partial q_2} = 0, \qquad \frac{\partial k^e}{\partial q_2} < 0\,.$$

- En estado estacionario, el capital físico decrece y el capital humano no se modifica si varía la depreciación del capital físico:

$$\frac{\partial z^e}{\partial \boldsymbol{a}} = 0, \qquad \frac{\partial k^e}{\partial \boldsymbol{a}} < 0\,.$$

- En estado estacionario, el capital físico crece y el capital humano decrece si varía la depreciación del capital humano:

$$\frac{\partial z^{e}}{\partial \boldsymbol{d}} < 0, \qquad \frac{\partial k^{e}}{\partial \boldsymbol{d}} > 0 .$$

En las gráficas siguientes se muestra el comportamiento del capital físico y del capital humano, considerando distintas condiciones iniciales y dando valores específicos a los parámetros.

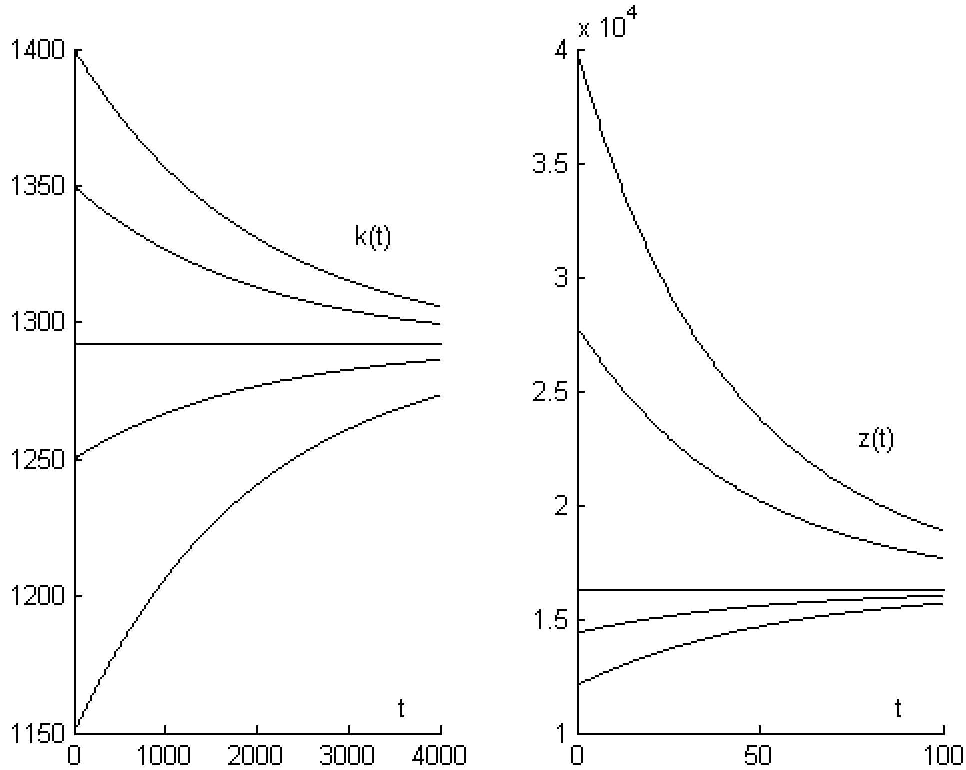

Figura 1. Evolución del capital físico y humano

En ellas se puede observar el comportamiento monótono de las trayectorias hacia los correspondientes estados de equilibrio, siendo la convergencia del capital humano mucho más rápida que la del capital físico.

5. Conclusiones.

Este trabajo desarrolla un juego diferencial entre dos agentes que se ocupan de la acumulación del capital físico y de la acumulación del capital humano, cuya dinámica sigue ideas propuestas por Lucas. Buscamos una solución de equilibrio feedback

Nash para el juego propuesto, obteniendo explícitamente la acumulación dinámica de ambos capitales si los dos jugadores aceptan seguir la solución de equilibrio encontrada. El comportamiento dinámico de los capitales se caracteriza por la existencia de un estado de equilibrio que, bajo ciertas restricciones sobre valores paramétricos, resulta ser asintóticamente estable. En este caso, es posible determinar las variaciones de capital físico y humano, respecto a los parámetros que intervienen en la formulación de las acumulaciones de capital y respecto a los parámetros que intervienen en la definición de las utilidades instantáneas.

6. Bibliografía.

1. Basar, T. and G.J. Olsder (1995): *Dynamic Non Cooperative Game Theory*. Academic Press.

2. Dockner, E. J., N. V. Long and G. Sorger (1996): "Analysis of Nash Equilibria in a Class of Capital Accumulation Games". *Journal Economic Dynamics and Control.* Vol. 20, pp. 1209-1235.

3. Figuieres, C. (2002): "Complementarity, Substitutability and Strategic Accumulation of Capital". *International Game Theory Review*. Vol. 4, nº 4, pp. 371-390.

4. Lucas, R. E. (1988): "On the Mechanics of Economic Development". *Journal of Monetary Economics.* Vol. 22, pp. 3-42.

5. Shimomura, K. (1991): "The Feedback Equilibria of a Diferential Game of Capitalism". *Journal of Economic Dynamics and Control.* Vol. 15, nº 2, pp. 317-338.

6. Yeung, D.W.K. and M.T. Cheung (1994): "Capital Accumulation Subject to Pollution Control" en *Advances in Dynamic Games and Applications* (T. Basar and A. Haurie, Editors), pp. 289-300, Birkhäuser, Boston.