SISTEMAS DE TARIFICACIÓN BONUS-MALUS EN LOS MODELOS JERÁRQUICOS.

José María Pérez Sánchez

Departamento de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa

Universidad de Granada

e-mail: josemag@ugr.es

Emilio Gómez Déniz

Departamento de Métodos Cuantitativos en Economía y Gestión

Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

e-mail: emilio@empresariales.ulpgc.es

Francisco José Vázquez Polo

Departamento de Métodos Cuantitativos en Economía y Gestión

Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

e-mail: polo@empresariales.ulpgc.es

Resumen

Analizamos los Sistemas de Tarificación *Bonus-Malus* considerando la metodología bayesiana aplicada a los modelos jerárquicos. Esto es, modelizamos las creencias del actuario a través de lo que se denomina distribución a *priori* o función estructura, y ésta la combinamos con los datos muestrales para obtener la distribución a *posteriori*. Además, la metodología jerárquica supone que uno de los parámetros de la distribución a *priori* es, a su vez, una variable aleatoria, por lo que proponemos una distribución para éste y obtenemos los resultados.

En este trabajo, se analiza el caso de función estructura tipo Gamma combinada con una verosimilitud Poisson, siguiendo la línea de numerosos trabajos en el contexto actuarial. Además, se considera una distribución Gamma para el parámetro aleatorio de la distribución a *priori*. Por último, se analizarán los resultados obtenidos a través de una ilustración práctica.

Palabras clave: Sistemas de Tarificación *Bonus-Malus*, Modelos Jerárquicos, Inferencia bayesiana, Prima *bonus-malus*.

1. Introducción.

En los sistemas de seguros de automóviles, a pesar de la consideración de numerosas variables (edad, sexo, potencia del coche,...) para clasificar a los asegurados en “celdas de tarificación”, siguen observándose conductas muy diferentes dentro de cada una de ellas. Las características individuales de cada conductor, tales como agresividad, paciencia, conocimiento de la carretera, etc., son muy importantes en el número de reclamaciones que se producen anualmente, pero no medibles en términos de coste-efectividad. Estudios anteriores (Lemaire 1977 y 1985; entre otros) han demostrado que la mejor predicción sobre el número de reclamaciones que se cometerán no es la edad del conductor, ni su sexo, sino su comportamiento pasado. Por tanto, se trata de utilizar un sistema que permita modificar la prima a medida que se observe la experiencia de reclamaciones de cada asegurado; o lo que es lo mismo, un sistema *merit-rating*, sistema a *posteriori* de descuento, o también denominado Sistema *Bonus-Malus*.

El Sistema *Bonus-Malus*, SBM en adelante, es un método de tarificación en el que los asegurados se agrupan en clases según el número de reclamaciones que hayan realizado hasta el período actual. Por lo tanto, se calculan las primas de seguro aplicables para cada póliza individual, ajustadas por una cantidad que depende de la experiencia pasada de cada asegurado, penalizando a los contratantes de pólizas, en caso de reclamaciones, mediante subidas en la prima que éstos deben de pagar. Así, los SBM penalizan a los asegurados que realizan reclamaciones mediante aumentos en la prima que éstos deben pagar (cantidades *malus*). Por contra, recompensan a los conductores que no realizan ningún tipo de reclamación con descuentos sobre la prima (cantidades *bonus*). De esta forma, los asegurados se ven motivados a realizar una conducción más cuidadosa. El objetivo principal del SBM es que todos los asegurados paguen, en el largo plazo, una prima que se corresponda con su propia frecuencia de reclamaciones. Han sido numerosos los estudios realizados sobre este método de tarificación, entre los que destacan De Pril, (1978), Lemaire (1979), (1985), (1995), (1998), Tremblay (1992), Coene y Doray (1996), Meng y Whitmore

(1999), Frangos y Vrontos (2001) y, más recientemente, Baione *et al.* (2002) y Verico (2002).

El método de fijación bayesiano basa su decisión final en minimizar la pérdida esperada, esto es, el valor medio de la pérdida con respecto a una distribución *a priori*, función estructura en términos actuariales, del parámetro de riesgo. La elección de esta distribución *a priori* depende únicamente de las creencias y experiencias que tenga el actuario. Por lo tanto, bajo esta metodología, el parámetro de riesgo es tratado como una variable aleatoria al que se le asigna una distribución de probabilidad. Esto ha supuesto gran parte de las críticas al modelo bayesiano como podemos observar, por ejemplo, en Margolin (1975). Sin embargo, el uso de la metodología bayesiana es un hecho indiscutible hoy en día en la estadística actuarial. Buena prueba de ello lo constituye los numerosos artículos y libros existentes sobre la materia; algunos ejemplos son Herzog (1994), Klugman *et al.* (1988), Kuen y Yang (1999) y Gómez *et al.* (2000), (2002); entre muchos otros.

Una metodología que presupone cierta incertidumbre sobre la distribución *a priori* es la propuesta por el modelo jerárquico o individual, que analiza el riesgo de cada asegurado o póliza dentro de la cartera de asegurados. Normalmente, la metodología bayesiana aplicada presupone conocidos los parámetros de nuestra distribución *a priori* (a, b), denominados "hiperparámetros". Pero cuando alguno de estos parámetros, o los dos, son aleatorios, tenemos que analizar una segunda fase en la que necesitamos las denominadas distribuciones "hiper- *priori*", $\mathbf{p}(a)$ y $\mathbf{p}(b)$, que expresan nuestras creencias acerca de los valores adoptados por a y b . Entonces, la función de densidad que modeliza nuestras creencias iniciales se denomina distribución *a priori* jerárquica. Esta metodología es una generalización del modelo de Bühlmann-Straub que aparece en Goodvaerts y Hoogstad (1987).

En particular, utilizaremos el modelo jerárquico denominado *One-way* que supone a la cartera de seguros dividida en pólizas o contratos más o menos similares, aunque nunca completamente idénticas. Esta diferencia entre los contratos viene recogida

por los parámetros de riesgo $\mathbf{q}_{11}, \mathbf{q}_{12}, \dots, \mathbf{q}_{kt}$, donde $\mathbf{q}_{js}$ describe totalmente las características del riesgo j en el período de tiempo s . Para un análisis pormenorizado, consultar Klugman (1992).

Por tanto, el modelo jerárquico general consta de los siguientes estados:

- Primer estado: $f(x|\mathbf{q}, F)$.
- Segundo estado: $\mathbf{p}_1(\mathbf{q}|\mathbf{m}G)$.
- Tercer estado: $\mathbf{p}_2(\mathbf{m})$.

El primer estado indica que los datos dependen de los parámetros de interés y algún otro parámetro F . El segundo estado indica cómo varían los parámetros de interés en función del parámetro conocido G y del parámetro desconocido $\mathbf{m}$. Finalmente, se incorpora un tercer estado donde se considera la distribución del parámetro aleatorio $\mathbf{m}$.

La estructura de este trabajo es la que sigue. La sección 2 analiza el cálculo de la prima *Bonus-Malus* considerando una función estructura Gamma y una verosimilitud de los datos Poisson. En la sección 3 analizaremos la misma prima considerada bajo la metodología jerárquica. En la sección 4, exponemos los resultados obtenidos en el trabajo mediante una ilustración práctica. Por último, en la sección 5 se exponen conclusiones, comentarios y posibles vías de investigación que pueden derivarse del análisis.

2. Cálculo de la Prima Bonus-Malus.

En los SBM, usualmente, se asume que el número de reclamaciones, $\mathbf{I}$, de cada póliza se distribuye de acuerdo a una Poisson, es decir,

$$p(x|\mathbf{I}) = \frac{1}{x!} e^{-\mathbf{I}} \mathbf{I}^x, \quad \mathbf{I} > 0,$$

suponiendo que la distribución estructura (*a priori*) de $\mathbf{I}$ es Gamma,

$$\mathbf{p}_0(\mathbf{I}) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \mathbf{I}^{a-1} e^{-\mathbf{I}b}, \quad a, b > 0.$$

Si elegimos aleatoriamente un asegurado de la cartera de seguros, podremos observar su experiencia de reclamaciones $k_1, k_2, \dots, k_t$ sobre t períodos. Sea $\bar{k} = (1/t) \sum_{i=1}^t k_i$, y suponiendo que las k_i son independientes y equidistribuidas, la función de verosimilitud viene dada por la expresión

$$f(\bar{k} | \mathbf{I}) = \frac{e^{-\mathbf{I}t\bar{k}}}{\prod_{i=1}^t k_i!},$$

y la distribución a *posteriori* de $\mathbf{I}$, $\mathbf{p}_0(\mathbf{I} | \bar{k})$, sigue siendo una Gamma pero ahora con los parámetros revisados, Gamma $(a + \sum_{i=1}^t k_i, b + t)$.

Lemaire (1979) define un SBM mediante el ratio

$${}^P \mathbf{p}_{BM}^b(\bar{k}) = 100 \times \frac{\int_{\Lambda} \mathbf{I} \mathbf{p}_0(\mathbf{I} | \bar{k}) d\mathbf{I}}{\int_{\Lambda} \mathbf{I} \mathbf{p}_0(\mathbf{I}) d\mathbf{I}} = 100 \times \frac{E_{\mathbf{p}_0}[\mathbf{I} | \bar{k}]}{E_{\mathbf{p}_0}[\mathbf{I}]}. \quad (1)$$

Esta expresión no es más que el ratio entre una cantidad media a *posteriori* y una cantidad media a *priori*, expresado en tanto por ciento. Obsérvese que la prima inicial ($t=0, k=0$) que un asegurado tiene que pagar es 100.

Teniendo en cuenta las suposiciones anteriores, el ratio (1) queda

$${}^P \mathbf{p}_{BM}^b(\bar{k}) = 100 \frac{a+k}{b+t} \frac{b}{a}, \quad k = \sum_{i=1}^t k_i = t\bar{k}. \quad (2)$$

Podemos utilizar otros mecanismos para la determinación de un SBM: el principio de utilidad exponencial (Lemaire, 1979, 1995), el principio del valor

esperado (Tremblay, 1992) y el principio de desviación típica (Meng y Whitmore, 1999); entre otros.

3. Modelo Jerárquico.

En este apartado, seguiremos suponiendo que el número de reclamaciones se modeliza con una distribución de Poisson. La metodología bayesiana especifica que $\mathbf{I} = (\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \dots, \mathbf{I}_k)$ es una realización de la distribución a *priori* $\mathbf{p}(\mathbf{I})$ y la aproximación bayesiana jerárquica requiere de la aplicación de una distribución subjetiva de segundo estado sobre los parámetros de $\mathbf{p}(\mathbf{I})$. Además, la información a *priori* se modeliza según una distribución Gamma de parámetros a y b , uno de los cuales supondremos que es aleatorio, concretamente el parámetro b . De esta forma, el modelo jerárquico que vamos a analizar queda

- Primer estado: $f(\bar{k} | \mathbf{I}) = \frac{e^{-t\mathbf{I}} \mathbf{I}^{t\bar{k}}}{\prod_{i=1}^t k_i!}$.
- Segundo estado: $\mathbf{p}_1(\mathbf{I}|b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \mathbf{I}^{a-1} e^{-\mathbf{I}b}$, $a > 0$.
- Tercer estado: $\mathbf{p}_2(b|\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{b}^a}{\Gamma(\mathbf{a})} b^{\mathbf{a}-1} e^{-b\mathbf{b}}$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} > 0$.

Como puede observarse, la estructura jerárquica consiste en suponer una distribución $\mathbf{p}_2(b|\mathbf{a}, \mathbf{b})$, densidad “hiper-*priori*”, sobre los hiper-parámetros desconocidos. Así, la distribución a *priori* de $\mathbf{I}$ puede ser escrita como

$$\mathbf{p}(\mathbf{I}) = \int_{\mathbf{b}} \mathbf{p}_1(\mathbf{I}|b) \mathbf{p}_2(b|\mathbf{a}, \mathbf{b}) db \propto \frac{\mathbf{I}^{a-1} \mathbf{b}^a}{(\mathbf{I} + \mathbf{b})^{a+a}},$$

por lo que la media a *priori* queda

$$E_{\mathbf{p}}[\mathbf{I}] = \int_{\Lambda} \mathbf{I} \mathbf{p}(\mathbf{I}) d\mathbf{I} = \frac{a\mathbf{b}}{\mathbf{a}-1}. \quad (3)$$

La distribución a *posteriori* puede ser calculada como sigue

$$\mathbf{p}(\mathbf{I}|\bar{k}) = \frac{f(\bar{k}|\mathbf{I}) \int_{\mathbf{b}} \mathbf{p}_1(\mathbf{I}|\mathbf{b}) \mathbf{p}_2(\mathbf{b}|\mathbf{a}, \mathbf{b}) d\mathbf{b}}{\int_{\Lambda} \int_{\mathbf{b}} f(\bar{k}|\mathbf{I}) \mathbf{p}_1(\mathbf{I}|\mathbf{b}) \mathbf{p}_2(\mathbf{b}|\mathbf{a}, \mathbf{b}) d\mathbf{b} d\mathbf{I}} = \frac{g(\mathbf{I})}{\int_{\Lambda} g(\mathbf{I}) d\mathbf{I}},$$

donde $g(\mathbf{I}) = \frac{e^{-t\mathbf{I}} \mathbf{I}^{a+k-1}}{(\mathbf{I} + \mathbf{b})^{a+\mathbf{a}}}$.

A partir de esta densidad a *posteriori*, podemos calcular la prima media a *posteriori*,

$$E_{\mathbf{p}}[\mathbf{I}|\bar{k}] = \int_{\Lambda} \mathbf{I} \mathbf{p}(\mathbf{I}|\bar{k}) d\mathbf{I} = \int_{\Lambda} \mathbf{I} \frac{g(\mathbf{I})}{\int_{\Lambda} g(\mathbf{I}) d\mathbf{I}} d\mathbf{I}. \quad (4)$$

La prima *bonus-malus* para el modelo jerárquico propuesto puede calcularse sustituyendo las esperanzas calculadas en (3) y (4) en el ratio expresado en (1),

$$P_{BM}^b(\bar{k}) = 100 \times \frac{\int_{\Lambda} \mathbf{I} \frac{g(\mathbf{I})}{\int_{\Lambda} g(\mathbf{I}) d\mathbf{I}} d\mathbf{I}}{\frac{a\mathbf{b}}{a-1}}. \quad (5)$$

4. Ilustración numérica.

Consideremos una ilustración específica. La información que se dispone de la cartera aparece en la tabla 1, que muestra los datos extraídos de un ejemplo de Lemaire (1979) correspondiente a la distribución del número de reclamaciones de una cartera de seguros de automóviles con cobertura de responsabilidad a terceros, de una compañía aseguradora belga. De esta forma, por ejemplo, de los 10000 asegurados que componen la cartera, en el primer año ($t=1$) 9059 no han realizado ninguna reclamación, 877 realizaron 1 reclamación, 58 efectuaron 2 reclamaciones y 6 demandaron hasta 3 reclamaciones.

Tabla 1. Información de la cartera

Número de reclamaciones (k)							
t	0	1	2	3	4	5	6
0	10000						
1	9059	877	58	6	0	0	0
2	8297	1472	197	31	2	1	0
3	7584	1947	381	73	12	2	1
4	6991	2238	600	130	29	8	4

La tabla 2 muestra en la columna de las frecuencias absolutas observadas el número de asegurados con 0, 1, 2, 3, 4 y más de 4 reclamaciones. La media y varianza muestrales son, respectivamente, 0.1011 y 0.1074.

Analicemos, en primer lugar, la prima *bonus-malus* sin tener en consideración la metodología jerárquica. Es fácil comprobar que la distribución del número de reclamaciones para toda la cartera, independientemente del parámetro de riesgo $\mathbf{I}$, sigue una distribución binomial negativa de la forma:

$$p_k = \int_{\Lambda} f(k|\mathbf{I})\mathbf{p}(\mathbf{I})d\mathbf{I} = \binom{k+a-1}{k} \left(\frac{b}{1+b}\right)^a \left(\frac{1}{1+b}\right)^k.$$

Aplicando el método de estimación de los momentos, los parámetros de la distribución *a priori* estimados son $a=1.6049$ y $b=15.8778$. Puede observarse en la tabla 2 que, con estos datos, las frecuencias ajustadas mediante la distribución binomial negativa son bastante buenos.

Tabla 2. Distribución del número de reclamaciones

Número de reclamaciones	Frecuencias absolutas	
	Observadas	Ajustadas
0	96978	96895
1	9240	9222.5
2	704	711.7
3	43	50.7
4	0	0
Más de 4	0	0
Total	106974	106974

Suponiendo un coste fijo por reclamación de 100 unidades monetarias, las primas *bonus-malus* a cobrar, teniendo en cuenta (2) se recogen en la tabla 3.

Tabla 3. Primas a cobrar según SBM

Número de reclamaciones (k)							
t	0	1	2	3	4	5	6
0	10000	-	-	-	-	-	-
1	9407	15269	21131	26993	-	-	-
2	8881	14415	19949	25483	31017	36551	-
3	8411	13651	18892	24133	29374	34614	39855
4	7988	12965	17942	22919	27896	32873	37850

Como podemos observar, por ejemplo, un asegurado que en el período 2 no presenta reclamación paga 8881 u.m., mientras que si, en el siguiente período, realiza una reclamación pasar a pagar 13651 u.m. Por el contrario, si en el siguiente período no efectúa reclamación su prima disminuye en 470 u.m.

Si consideramos el modelo jerárquico, necesitamos estimar tres parámetros de la distribución a priori de $\mathbf{I}$; que son a , $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. Seguiremos haciendo uso del método de los momentos para obtener dichas estimaciones:

- Momentos poblacionales de orden 1, 2 y 3:

Como sabemos, $E(X^r) = \sum_x x^r f(x)$, siendo el valor de $f(x)$, en nuestro caso,

$$f(x) = \frac{\Gamma(a + \mathbf{a})}{\Gamma(a)\Gamma(\mathbf{a})} \mathbf{b}^{\mathbf{a}} \int_{\Lambda} \frac{1}{x!} \frac{\mathbf{I}^{a+x-1} e^{-\mathbf{I}}}{(\mathbf{I} + \mathbf{b})^{a+\mathbf{a}}} d\mathbf{I}.$$

Por lo tanto, los momentos poblacionales de interés quedan

$$E(X) = \frac{a\mathbf{b}}{\mathbf{a}-1},$$

$$E(X^2) = \frac{a\mathbf{b}}{\mathbf{a}-1} + \mathbf{b}^2 \frac{(a+1)a}{(\mathbf{a}-1)(\mathbf{a}-2)},$$

$$E(X^3) = \frac{a\mathbf{b}}{\mathbf{a}-1} + 3\mathbf{b}^2 \frac{(a+1)a}{(\mathbf{a}-1)(\mathbf{a}-2)} + \mathbf{b}^3 \frac{(a+2)(a+1)a}{(\mathbf{a}-1)(\mathbf{a}-2)(\mathbf{a}-3)}.$$

- Momentos muestrales de orden 1, 2 y 3:

$$E(x) = 0.1011,$$

$$E(x^2) = 0.1176,$$

$$E(x^3) = 0.1552.$$

Igualando cada uno de estos momentos poblacionales a su correspondiente momento muestral, obtendremos un sistema de ecuaciones a partir del cual calculamos las estimaciones de los parámetros de la distribución *a priori*:

$$a = 3.2558,$$

$$\mathbf{a} = 6.1373,$$

$$\mathbf{b} = 0.1595.$$

Calculamos, ahora, las primas *bonus-malus* según la expresión (5) y obtenemos la tabla 4:

Tabla 4. Primas a cobrar según Modelo Jerárquico

Número de reclamaciones (k)							
t	0	1	2	3	4	5	6
0	10000	-	-	-	-	-	-
1	9432	14835	22731	34771	-	-	-
2	8958	13790	20440	29732	42723	60519	-
3	8550	12951	18767	26484	36646	49741	66057
4	8193	12251	17457	24123	32566	43042	55678

5. Conclusiones.

El planteamiento del modelo jerárquico presentado en este trabajo permite fijar el riesgo correspondiente a cada póliza o asegurado dentro de la cartera o colectivo de asegurados. Además, el modelo provee de un mecanismo natural en el que la información *a priori* puede ser licitada e incorporada al análisis.

Los resultados obtenidos se muestran en la tabla 4. Podemos observar como las primas *bonus-malus* calculadas mediante el modelo jerárquico difieren significativamente con respecto a las enumeradas en la tabla 3, que no tienen en cuenta tal metodología. Destacar que mediante pequeños aumentos en la zona de los

buenos asegurados ($k=0$) y muy grandes en la de los malos ($k=4, k=5, k=6$), la compañía aseguradora puede mostrarse más competitiva en clases de asegurados intermedias ($k=1, k=2, k=3$). Recordemos que la mayor parte de los asegurados se concentran en torno a las clases $k=0$ y $k=1$ (ver tabla 1). Esto permite que ligeros incrementos en la prima a cobrar en $k=0$ produzcan suficientes ingresos para contrarrestar la disminución de las tarifas para los situados en $k=1$. Por el contrario, podemos observar, que existen muy pocos asegurados en las clases con mayor número de reclamaciones de la cartera. El modelo planteado aquí penaliza a estos asegurados mediante fuertes incrementos en la prima que contribuyen también a compensar la disminución de la prima para las zonas intermedias de asegurados, además de motivar a los asegurados en general a realizar una conducción más cuidadosa, objetivo fundamental de todo sistema de tarificación.

La complejidad matemática del modelo jerárquico puede obligar, para la consideración de otras combinaciones de distribuciones distintas a la Poisson-Gamma-Gamma utilizada aquí, a la aplicación de métodos numéricos de aproximación, tales como el de *Markov Chain Monte Carlo* (ver Scollnik, 1996).

Bibliografía.

1. Baione, F.; Levantesi, S. y Menziatti, M. (2002): “The development of an optimal Bonus-Malus system in a competitive market”, *Astin Bulletin*, **32**, 1, pp. 159-169.
2. Coene, G. y Doray, L. (1996): “A financially balanced Bonus-Malus System”, *Astin Bulletin*, **26**, pp. 107-116.
3. De Pril, N. (1978): “The Efficiency of a Bonus-Malus System”, *Astin Bulletin*, **10**, 1, pp. 59-72.
4. Frangos, N. y Vrontos, S. (2001): “Design of optimal Bonus-Malus systems with a frequency and severity component on an individual basis in automobile insurance”, *Astin Bulletin*, **31**, 1, pp. 1-22.

5. Gómez, E., Hernández, A y Vázquez, F. (2000): “Robust Bayesian Premium Principles in Actuarial Science”, *Journal of the Royal Statistical Society (Series D. The Statistician)*, **49**, 2, pp. 241-252.
6. Gómez, E.; Pérez, J., Hernández, A. y Vázquez, F. (2002): “Measuring sensitivity in a Bonus-Malus system”, *Insurance: Mathematics and Economics*, **31**, 1, pp. 105-113.
7. Goodvaerts, M. y Hoogstad, W. (1987): “Credibility Theory”, *Surveys of Actuarial Studies*, **4**, pp. 19-52.
8. Herzog, T. (1994): *Introduction to Credibility Theory*, ACTEX Publications, Winsted.
9. Klugman, S., Panjer, H. y Willmot, G. (1988): *Loss Models: From Data to Decisions*, John Wiley & Sons, Inc. New York.
10. Klugman, S. (1992): *Bayesian Statistics in Actuarial Science*, Kluwer Academic Publisher.
11. Kuen, S. y Yang, H. (1999): “Subjective Risk Measures: Bayesian Predictive Scenarios Analysis”, *Insurance: Mathematics and Economics*, **25**, pp. 157-169.
12. Lemaire, J. (1977): “Selection Procedures of Regression Analysis Applied to Automobile Insurance”, *Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker*, **I**, pp. 143-160.
13. Lemaire, J. (1979): “How to define a Bonus-Malus system with an exponential utility function”, *Astin Bulletin*, **10**, pp. 274-282.
14. Lemaire, J. (1985): *Automobile Insurance (Actuarial Models)*, Kluwer-Nijhoff Publishing, Boston/Dordrecht/Lancaster.
15. Lemaire, J. (1995): *Bonus-Malus Systems in Automobile Insurance*, Kluwer Academic Publishers, Boston/Dordrecht/Londres.
16. Lemaire, J. (1998): “Bonus-Malus system: The European and Asian approach to merit-rating (with discussion by Krupa Subramanian, “Bonus-Malus system in a competitive environment”)”, *North American Actuarial Journal*, **2**, 1, pp. 1-22.
17. Margolin, M. (1975): “Are the Classical and Bayesian Approaches to Credibility Empirically Valid?”, *Credibility: Theory and Applications*, pp. 281-288.

18. Meng, Y.W. y Whitmore, G.A. (1999): "Accounting for individual over-dispersion in a Bonus-Malus automobile insurance system", *Astin Bulletin*, **29**, 2, pp. 327-337.
19. Scollnik, D. (1996): "An Introduction to Markov Chain Monte Carlo Method and their Actuarial Applications", *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, **LXXXIII**, pp. 114-165.
20. Tremblay, L. (1992): "Using the Poisson inverse Gaussian in Bonus-Malus systems", *Astin Bulletin*, **22**, 1, pp. 97-106.
21. Verico, P. (2002): "Bonus-Malus Systems: Lack of transparency and adequacy measure", *Astin Bulletin*, **32**, 2, pp. 315-318.