# ESTADÍSTICOS EXTREMOS EN LOS MÉTODOS DE VALORACIÓN DE LAS DOS FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN Y DE LAS DOS FUNCIONES DE SUPERVIVENCIA

**José Callejón Céspedes[1], Manuel Franco Nicolás[2],**
**Rafael Herrerías Pleguezuelo[3], Juana María Vivo Molina[4]**

[1] Departamento de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa
Universidad de Granada. e-mail: callejon@ugr.es

[2] Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Universidad de Murcia. e-mail: mfranco@um.es

[3] Departamento de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa
Universidad de Granada. e-mail: rherreri@ugr.es

[4] Departamento de Métodos Cuantitativos para la Economía
Universidad de Murcia. e-mail: jmvivomo@um.es

## Resumen

En este trabajo estudiamos la utilización de los estadísticos extremos, mínimo y máximo, en los métodos de valoración de las dos funciones de distribución y de las dos funciones de supervivencia. En primer lugar, analizamos las propiedades de acotación del valor de mercado del bien a través de los estadísticos ordenados mínimo y máximo del índice de calidad bidimensional de dicho bien, utilizando ambos métodos de valoración, MVDFD y MVDFS. Además, se determinan propiedades de logconcavidad de los extremos mínimo y máximo correspondientes a modelos bivariantes usuales en la práctica valorativa

*Palabras clave*: Valoración, MVDFD, MVDFS, mínimo, máximo, logconvavidad.

*Área temática*: Métodos cuantitativos.

## 1. Introducción.

El método de las dos funciones de distribución (MVDFD) introducido por Ballestero (1971) y (1973), y ampliado por Caballer (1975) y Romero (1977), es bien conocido en Teoría de Valoración, así como la utilidad práctica de esta metodología cuando se disponen de pequeñas cantidades de datos, véase Alonso y Lozano (1985) y Lozano (1996). Recientemente, ha resurgido el interés de diversos autores por este método, entre otros véase García, Cruz y Rosado (2000) y (2002), Palacios, Callejón y Herrerías (2000), Herrerías, García, Cruz y Herrerías (2001), Cruz, García y García (2002), García, Cruz y García (2002), Herrerías (2002), Herrerías, Palacios y Herrerías (2002), García y García (2003) y García, Herrerías y García (2003). Asimismo, esta metodología valorativa ha sido utilizada en diversas aplicaciones, tales como bienes urbanos (inmuebles), agua de riego, árboles, empresas, ... véase Caballer (1994) y (1998), Cañas, Domingo y Martínez (1994), Caballer y Moya (1997), Guadalajara (1996), Caballer y Guadalajara (1998) y Ballestero y Rodríguez (1999). Además, Callejón, Franco, Herrerías y Vivo (2005) estudian el método de valoración de las dos funciones de supervivencia como una alternativa al de las dos funciones de distribución.

Por otro lado, en los modelos de riesgo clásicos es usual la suposición de independencia de riesgos. Sin embargo, debido a la creciente complejidad de los productos de seguros y reaseguros, los actuariales han prestado mayor atención a la modelización de riesgos dependientes, como Dhaene y Goovaerts (1997), Müller (1997), Ambagaspitiya (1999), Denuit, Genest y Marceau (1999), Albrecher y Teugels (2004) y Cai y Li (2004). Un procedimiento habitual en modelización económica en riesgo multidimensional, tanto en caso de independencia o no entre los diferentes tipos de riesgos, consiste en la agregación de los múltiples parámetros de información en un estadístico agregado unidimensional que combina las distintas componentes en una medida de información univariante de dicho modelo, para la obtención de cotas o de propiedades o rasgos característicos (Blackorby y Schworm (1984), Miravete (2001), Baron y Besanko (1999), Biais, Martimort y Rochet (2000) y Chan, Yang y Zhang (2003)). Además, diversos autores estudian o hacen uso de algunas propiedades sobre estadísticos agregados determinados, como densidad logcóncava y supervivencia logcóncava (An (1998), Chakraborty (1999), Miravete (2001) y (2002), Biais, Martimort y Rochet (2000)).

En este sentido, los estadísticos extremos mínimo y máximo, además de otras numerosas aplicaciones estadísticas, pueden utilizarse como estadísticos agregados en el estudio de los modelos económicos multidimensionales. Por ejemplo, en modelos de riesgo de supervivencia el mínimo representa el tiempo observable de defunción. Así, Baggs y Nagaraja (1996), Gupta y Gupta (2001) y Franco y Vivo (2004a) estudian la logconcavidad de la función de supervivencia para los extremos de diferentes modelos probabilísticos, y Franco y Vivo (2002), Franco y Vivo (2004b) y Vivo y Franco (2004), estudian la logconcavidad de la función de densidad para los extremos de los modelos probabilísticos analizados por Baggs y Nagaraja (1996).

En particular, para la valoración en un ambiente de incertidumbre a través de un índice de calidad bidimensional del bien, puede resultar de interés el uso de sus estadísticos extremos, mínimo y máximo, como estadísticos agregados que reducen la dimensionalidad del índice de calidad; proporcionando valores de mercado mediante los métodos de valoración de las dos funciones, a través de sus modelos de distribución univariantes, que reducen la depreciación (apreciación) del bien, o acotaciones para las anteriores valoraciones basadas en la variable bidimensional del índice de calidad. Asimismo, el método de valoración de las dos funciones de distribución requiere un comportamiento estocástico similar entre el valor de mercado y el índice de calidad en el caso unidimensional; para comparar el comportamiento estocástico de la variable unidimensional del valor de mercado con el índice de calidad bidimensional, las propiedades estocásticas de logconcavidad de sus estadísticos extremos mínimo y máximo pueden ser de utilidad para estudiar la idoneidad de la aplicación del método de valoración de las dos funciones o seleccionar una distribución o familia de distribuciones para el valor de mercado.

En este trabajo estudiamos la utilización de los estadísticos ordenados extremos, mínimo y máximo, en los métodos de valoración de las dos funciones de distribución y de las dos funciones de supervivencia. En primer lugar, analizamos las propiedades de acotación del valor de mercado del bien a través de los estadísticos ordenados mínimo y máximo del índice de calidad bidimensional de dicho bien, utilizando ambos métodos de valoración, MVDFD y MVDFS. Además, se determinan propiedades de logconcavidad de los extremos mínimo y máximo correspondientes a modelos bivariantes usuales en la práctica valorativa, las cuales resultan de utilidad para estudiar el comportamiento estocástico de la función de distribución del valor de mercado. Finalizando con una aplicación práctica de valoración en un caso relevante de la literatura especializada.

## 2. Métodos de valoración de las dos funciones.

En la metodología de valoración de las dos funciones, para la obtención del valor de mercado de un bien o activo, es usual la suposición de unas condiciones o reglas lógicas de juego en el mercado. En particular, si se desea estudiar el valor de mercado de un bien a través de un índice de calidad del mismo, se asume el siguiente principio básico de valoración: Sea $I_i$ el valor del índice de calidad del bien $i$, siendo $V_i$ su valor de mercado, e $I_j$ el índice de calidad del bien $j$ siendo $V_j$ su valor de mercado. Si $I_i<I_j$ entonces $V_i<V_j$, es decir, el bien con mayor medición del índice de calidad tendrá mayor valor de mercado.

En este sentido, el método de valoración de las dos funciones de distribución (MVDFD) se basa en la igualdad entre la función de distribución $G$ del valor de mercado $V$ del bien y la función de distribución $F$ del índice de calidad del mismo, obteniéndose el valor de mercado

$$V_D = G^{-1}\left(F\left(I\right)\right) \tag{2.1}$$

Asimismo, otra técnica valorativa en la que prevalece el principio básico es el método de valoración de las dos funciones de supervivencia (MVDFS), véase Callejón, Franco, Herrerías y Vivo (2005), que se basa en la igualdad entre la función de supervivencia $S_V$ del valor de mercado $V$ del bien y la función de supervivencia $S_I$ del índice de calidad del mismo, obteniéndose el valor de mercado

$$V_S = S_V^{-1}\left(S_I\left(I\right)\right) \tag{2.2}$$

donde las funciones de supervivencia están definidas por $S_V(v) = 1 - G(v)$ y $S_I(i) = 1 - F(i)$.

Además, ambas técnicas de valoración de un bien son equivalentes en el caso de un índice de calidad unidimensional, véase Callejón, Franco, Herrerías y Vivo (2005). Sin embargo, estas dos metodologías producen resultados diferentes en la valoración del bien cuando se dispone de más de un índice de calidad (índice de calidad multidimensional), para más detalle ver Callejón, Franco, Herrerías y Vivo (2005). Para ambas técnicas valorativas a través de un índice de calidad bidimensional del bien se asume el siguiente principio básico de valoración de que a un bien con mayor índice de calidad le corresponde un mayor valor de mercado, en donde se entenderá que un índice de calidad es mayor que otro si así lo son cada una de sus componentes: Sea $(I_{1i},I_{2i})$ el valor del índice de calidad del bien $i$, siendo $V_i$ su valor de mercado, e $(I_{1j},I_{2j})$ el índice de calidad del bien $j$ siendo $V_j$ su valor de mercado. Si $(I_{1i},I_{2i})<(I_{1j},I_{2j})$ entonces $V_i<V_j$.

En este contexto, el método de valoración de las dos funciones de distribución (MVDFD) se basa en la igualdad entre la función de distribución $G$ del valor de mercado $V$ del bien y la función de distribución $F$ del índice de calidad bidimensional del mismo, obteniéndose el valor de mercado

$$V_D = G^{-1}\left(F\left(I_1, I_2\right)\right) \tag{2.3}$$

el cual produce un valor de mercado inferior a los obtenidos individualmente a través de cada una de las componentes del índice de calidad, ver García, Cruz y Rosado (2000) y (2002), Herrerías (2002) y García y García (2003), lo que puede interpretarse como una depreciación en el valor de mercado del bien o activo al considerar una mayor información mediante más de un índice de calidad de dicho bien.

Análogamente, el método de valoración de las dos funciones de supervivencia (MVDFS) se basa en la igualdad entre la función de supervivencia $S_V$ del valor de mercado $V$ del bien y la función de supervivencia $S_I$ del índice de calidad bidimensional del mismo, obteniéndose el valor de mercado

$$V_S = S_V^{-1}\left(S_I\left(I_1, I_2\right)\right) \tag{2.4}$$

donde las funciones de supervivencia están definidas por $S_V(v) = 1 - G(v)$ y

$$S_I\left(i_1, i_2\right) = P\left(I > \left(i_1, i_2\right)\right) = 1 + F\left(i_1, i_2\right) - F_1\left(i_1\right) - F_2\left(i_2\right) \tag{2.5}$$

este valor de mercado del bien es superior a las valoraciones obtenidas individualmente con cada componente del índice de calidad del bien, ver Callejón, Franco, Herrerías y Vivo (2005), lo que puede interpretarse como una apreciación en el valor de mercado del bien o activo al considerar una mayor información mediante más de un índice de calidad de dicho bien.

En la dirección de reducir la depreciación que produce el MVDFD con respecto a las valoraciones de mercado del bien con cada una de las componentes del índice de calidad, en García (2002), Herrerías (2002) y García y García (2003) se estudian técnicas basadas en la ponderación de las funciones de distribución de dichas componentes.

No obstante, las distintas técnicas de ponderación son procedimientos para obtener valores de mercado del bien acotados por las valoraciones obtenidas a través de cada una de las componentes del índice de calidad; los cuales se basan en considerar pesos para las componentes del índice de calidad y el uso del modelo ponderado como modelo de probabilidad del índice de calidad en los métodos de valoración de las dos funciones de distribución (supervivencia), es decir, constituyen desviaciones del verdadero modelo de probabilidad bivariante del índice de calidad, para el que a partir de un índice de calidad concreto de un bien, su valor de mercado real puede ser tanto superior como inferior a los valores que se obtendrían con los métodos de valoración para cada una de las componentes del índice. Más aún, los modelos ponderados considerados bajo dependencia entre las componentes del índice de calidad no son verdaderos modelos de probabilidad bivariantes.

En este sentido, cabe pensar en otras técnicas que permitan aplicar los métodos de valoración de las dos funciones de distribución (supervivencia) para reducir la depreciación (apreciación) del bien en el mercado y basados en verdaderos modelos de probabilidad. Un procedimiento habitual en modelización económica en riesgo multidimensional consiste en la agregación de los múltiples parámetros de información en un estadístico agregado unidimensional que combina las distintas componentes en una medida de información univariante de dicho modelo. En particular, para la valoración en un ambiente de incertidumbre a través de un índice de calidad bidimensional del bien, puede resultar de interés el uso de los estadísticos extremos, mínimo y máximo, como estadísticos agregados que reducen la dimensionalidad del índice de calidad; proporcionando valores de mercado mediante los métodos de valoración de las dos funciones, a través de sus modelos de distribución univariantes, que reducen la depreciación (apreciación) del bien, o acotaciones para las anteriores valoraciones basadas en la variable bidimensional del índice de calidad.

Además, la reducción de la dimensionalidad a través de los estadísticos extremos, permite ampliar el principio básico de valoración a todo el conjunto de posibles valores para sus índices, utilizando como ordenación de los pares de índices la correspondiente a sus medidas agregadas mediante los extremos; dado que el principio básico de valoración para un índice de calidad bidimensional no establece la ordenación entre los valores de mercado de dos bienes con índices $(I_{1i},I_{2i})$ e $(I_{1j},I_{2j})$ tales que $I_{1i}<I_{1j}$ e $I_{2i}>I_{2j}$. Obviamente, si el estadístico extremo del índice de calidad de un bien es mayor, los métodos de valoración de las dos funciones le asocian un mayor valor de mercado. Así, a partir de los estadísticos extremos del índice de calidad bidimensional, se puede asegurar previamente la ordenación entre los valores de mercado correspondientes a dos bienes para cualesquiera que sean sus índices de calidad.

## 3. Estadísticos extremos en los métodos de valoración.

En esta sección analizamos los estadísticos extremos, mínimo y máximo de un índice de calidad bidimensional del bien, como estadísticos agregados unidimensionales que combinan las distintas componentes del índice en una medida de información univariante del mismo, que permiten obtener valores de mercado del bien a través de los métodos de valoración de las dos funciones distribución. De este modo, estudiamos el comportamiento de las valoraciones obtenidas a partir de los estadísticos mínimo y máximo correspondientes al índice de calidad bidimensional, y su comparación con los métodos de valoración de las dos funciones de distribución y de las dos funciones de supervivencia del propio índice bivariante.

Sea $(I_1,I_2)$ una variable aleatoria bivariante con función de distribución $F(i_1,i_2)$, representamos los estadísticos extremos por $I_{(2)}=máx(I_1,I_2)$ al máximo e $I_{(1)}=mín(I_1,I_2)$ al mínimo, cuyas funciones de distribución están determinadas por

$$F_{(2)}(i) = F(i,i) \tag{3.1}$$

y

$$F_{(1)}(i) = F_1(i) + F_2(i) - F_{(2)}(i) \tag{3.2}$$

o equivalentemente

$$S_{(1)}(i) = S_I(i,i) \tag{3.3}$$

y

$$S_{(2)}(i) = S_1(i) + S_2(i) - S_{(1)}(i) \tag{3.4}$$

donde $S_{(j)}(i) = 1 - F_{(j)}(i)$, $j=1,2$, son las funciones de supervivencia de estos estadísticos extremos. Observar que estos modelos de distribución están determinados por el modelo de distribución bivariante y sus marginales.

En este sentido, a partir del índice de calidad bidimensional de un bien $(I_1, I_2) = (i_1, i_2)$, el método de valoración de las dos funciones de distribución (supervivencia) con el estadístico mínimo nos proporciona las siguientes valoraciones:

$$V_{(1)m} = G^{-1}\left(F_{(1)}\left(i_m\right)\right)$$

y

$$V_{(1)M} = G^{-1}\left(F_{(1)}\left(i_M\right)\right)$$

donde $i_m$ e $i_M$ representan la mínima y máxima componente del punto $\left(i_1, i_2\right)$, respectivamente. Análogamente, el MVDFD para el estadístico máximo proporciona las siguientes valoraciones:

$$V_{(2)m} = G^{-1}\left(F_{(2)}\left(i_m\right)\right)$$

y

$$V_{(2)M} = G^{-1}\left(F_{(2)}\left(i_M\right)\right)$$

entre las que se verifica trivialmente las desigualdades: $V_{(1)m} \leq V_{(1)M}$ y $V_{(2)m} \leq V_{(2)M}$, por ser cada $F_{(j)}$ una función de distribución. Además, estas valoraciones no tienen por que coincidir con los valores de mercado mínimo y máximo del bien, simplemente son valoraciones de dicho bien con índice de calidad $\left(i_1, i_2\right)$ correspondientes a los estadísticos extremos de su modelo de distribución bivariante $F\left(i_1, i_2\right)$.

En este contexto, los valores de mercado del bien correspondientes al estadístico máximo mediante los métodos de valoración de las dos funciones nos proporcionan la acotación de la valoración de dicho bien mediante MVDFD correspondiente al modelo de distribución bivariante del índice de calidad, es decir, las dos cotas obtenidas a través del máximo estadístico ordenado puede interpretarse como un aumento y una reducción, respectivamente, de la depreciación en el mercado sufrida por el bien mediante el MVDFD cuando se dispone de más de un índice de calidad del mismo.

**Teorema 3.1.** *Sea $I=(I_1,I_2)$ el valor del índice de calidad bidimensional del bien, siendo $V_D$ su valor de mercado a través del MVDFD y $V_{(2)m}$ y $V_{(2)M}$ sus valores de mercado a través del estadístico ordenado máximo en cada una de las dos componentes del índice, entonces* $V_{(2)m} \leq V_D \leq V_{(2)M}$.

**Conclusión 3.1.** *El estadístico máximo de un índice de calidad bidimensional proporciona un valor de mercado del bien inferior y otro superior al del método de valoración de las dos funciones de distribución mediante el modelo bivariante del índice de calidad del mismo.*

Además, se obtienen las siguientes desigualdades entre los valores de mercado del bien correspondientes al estadístico máximo y las valoraciones del mismo obtenidas a través de cada una de las componentes del índice de calidad bidimensional.

**Teorema 3.2.** *Sea $I=(I_1,I_2)$ el valor del índice de calidad bidimensional del bien, siendo $V_1$ y $V_2$ sus valores de mercado a través del MVDFD para las componentes $I_1$ e $I_2$, respectivamente. Sean $V_{(2)m}$ y $V_{(2)M}$ los valores de mercado a través del estadístico ordenado máximo en cada una de las dos componentes del índice, entonces* $V_{(2)m} \leq \inf\{V_1, V_2\}$ *y* $V_{(2)M} \leq \sup\{V_1, V_2\}$.

**Conclusión 3.2.** *El estadístico máximo de un índice de calidad bidimensional proporciona en su menor componente una mayor depreciación del valor de mercado, y en su mayor componente produce una valoración que no supera a la mayor de las obtenidas individualmente con las distribuciones univariantes de cada una de las componentes del índice de calidad mediante el método de valoración de las dos funciones de distribución.*

A partir de estos resultados, surge la siguiente cuestión: la reducción de la depreciación del bien en el mercado al utilizar el estadístico máximo en lugar del índice de calidad bidimensional mediante el MVDFD llega a incluirse entre las valoraciones obtenidas a través de cada una de las componentes del índice de calidad, es decir, $\inf\{V_1, V_2\} \leq V_{(2)M}$. En general, no se puede asegurar esta acotación, por lo que la valoración máxima producida por el estadístico máximo no siempre está entre los valores de mercado obtenidos por cada componente del índice de calidad.

Por otro lado, a partir del estadístico mínimo se obtienen valores de mercado del bien mediante los métodos de valoración de las dos funciones mayores que la valoración del mismo mediante el MVDFD utilizando el modelo de distribución bivariante del índice de calidad, lo que puede interpretarse como reducciones de la depreciación en el mercado sufrida por el bien mediante el MVDFD cuando se dispone de más de un índice de calidad del mismo, es decir, ambos valores de mercado obtenidos mediante el mínimo estadístico ordenado reducen la depreciación del MVDFD en el caso bidimensional.

**Teorema 3.3.** *Sea $I=(I_1,I_2)$ el valor del índice de calidad bidimensional del bien, siendo $V_D$ su valor de mercado a través del MVDFD y $V_{(1)m}$ y $V_{(1)M}$ sus valores de mercado a través del estadístico ordenado mínimo en cada una de las dos componentes del índice, entonces* $V_D \leq V_{(1)m} \leq V_{(1)M}$ .

**Conclusión 3.3.** *El estadístico mínimo de un índice de calidad bidimensional proporciona valores de mercado del bien superiores al del método de valoración de las dos funciones de distribución mediante el modelo bivariante del índice de calidad del mismo.*

Además, se obtienen las siguientes desigualdades entre los valores de mercado del bien correspondientes al estadístico mínimo y las valoraciones del mismo obtenidas a través de cada una de las componentes del índice de calidad bidimensional.

**Teorema 3.4.** *Sea $I=(I_1,I_2)$ el valor del índice de calidad bidimensional del bien, siendo $V_1$ y $V_2$ sus valores de mercado a través del MVDFD para las componentes $I_1$ e $I_2$, respectivamente. Sean $V_{(1)m}$ y $V_{(1)M}$ los valores de mercado a través del estadístico ordenado mínimo en cada una de las dos componentes del índice, entonces* $V_{(1)m} \geq \inf\{V_1, V_2\}$ *y* $V_{(1)M} \geq \sup\{V_1, V_2\}$.

**Conclusión 3.4.** *El estadístico mínimo de un índice de calidad bidimensional proporciona en su mayor componente un valor de mercado superior a las valoraciones obtenidas individualmente con las distribuciones univariantes de cada una de las componentes del índice de calidad mediante el método de valoración de las dos funciones de distribución, es decir una apreciación del bien en el mercado.*

*Además, en su menor componente del índice de calidad del bien, el mínimo produce una valoración que no rebaja la peor de las valoraciones obtenidas con cada componente.*

De forma análoga al máximo estadístico, las anteriores desigualdades de los valores de mercado basados en el mínimo estadístico ordenado del índice de calidad bidimensional, conducen a la siguiente cuestión: la menor valoración del bien en el mercado al utilizar el estadístico mínimo en lugar del índice de calidad bidimensional mediante el MVDFD llega a incluirse entre las valoraciones obtenidas a través de cada una de las componentes del índice de calidad, es decir, $V_{(1)m} \leq \sup\{V_1, V_2\}$. En general, no se puede asegurar esta acotación, por lo que la valoración mínima producida por el estadístico mínimo no siempre está entre los valores de mercado obtenidos por cada componente del índice de calidad.

Asimismo, tenemos que no siempre se verifica que $\inf\{V_1, V_2\} \leq V_{(2)M}$ y que $V_{(1)m} \leq \sup\{V_1, V_2\}$, por lo que si no se verifica alguna de estas desigualdades, evidentemente se tiene que $V_{(2)M} \leq V_{(1)m}$, es decir, la valoración máxima que proporciona el estadístico máximo es inferior al menor valor de mercado que produce el mínimo estadístico. No obstante, no podemos asegurar dicha desigualdad para cualquier par de índices de calidad del bien a valorar, es decir, puede darse la desigualdad $V_{(1)m} \leq V_{(2)M}$, es decir, el menor valor de mercado a partir del mínimo estadístico es inferior al mayor valor de mercado a través del máximo, en cuyo caso ambos se encuentran acotados por las valoraciones obtenidas individualmente con cada una de las componentes del índice de calidad.

Finalmente, los valores de mercado del bien correspondientes a los estadísticos extremos mediante los métodos de valoración de las dos funciones nos proporcionan acotaciones para la valoración de dicho bien mediante MVDFS correspondiente al modelo de distribución bivariante del índice de calidad. En primer lugar, las valoraciones obtenidas por el mínimo estadístico ordenado constituyen cotas inferiores y superiores del valor de mercado a través del método de valoración de las dos funciones de supervivencia, lo que puede interpretarse como una reducción y un aumento, respectivamente, de la apreciación en el mercado sufrida por el bien mediante el MVDFS cuando se dispone de más de un índice de calidad del mismo.

**Teorema 3.5.** *Sea $I=(I_1,I_2)$ el valor del índice de calidad bidimensional del bien, siendo $V_S$ su valor de mercado a través del MVDFS y $V_{(1)m}$ y $V_{(1)M}$ sus valores de mercado a través del estadístico ordenado mínimo en cada una de las dos componentes del índice, entonces* $V_{(1)m} \leq V_S \leq V_{(1)M}$ .

**Conclusión 3.5.** *El estadístico mínimo de un índice de calidad bidimensional proporciona un valor de mercado del bien inferior y otro superior al del método de valoración de las dos funciones de supervivencia para el modelo bivariante del índice de calidad del mismo.*

Asimismo, a partir del estadístico máximo se obtienen valores de mercado del bien, mediante los métodos de valoración de las dos funciones, inferiores a la valoración del mismo mediante el MVDFS utilizando el modelo de distribución bivariante del índice de calidad, lo que puede interpretarse como reducciones de la apreciación en el mercado sufrida por el bien mediante el MVDFS cuando se dispone de más de un índice de calidad del mismo, es decir, ambos valores de mercado obtenidos mediante el máximo estadístico ordenado reducen la apreciación del MVDFS en el caso bidimensional.

**Teorema 3.6.** *Sea $I=(I_1,I_2)$ el valor del índice de calidad bidimensional del bien, siendo $V_S$ su valor de mercado a través del MVDFS y $V_{(2)m}$ y $V_{(2)M}$ sus valores de mercado a través del estadístico ordenado máximo en cada una de las dos componentes del índice, entonces* $V_{(2)m} \leq V_{(2)M} \leq V_S$ .

**Conclusión 3.6.** *El estadístico máximo de un índice de calidad bidimensional proporciona valores de mercado del bien inferiores al del método de valoración de las dos funciones de supervivencia mediante el modelo bivariante del índice de calidad del mismo.*

## 4. Logconcavidad de extremos de algunos modelos bivariantes.

En esta sección se determinan propiedades de logconcavidad de los extremos mínimo y máximo correspondientes a modelos bivariantes usuales en la práctica valorativa. En el caso de un índice de calidad unidimensional, el método de valoración de las dos funciones requiere un comportamiento estocástico similar entre el valor de mercado y el índice de calidad. En el caso bidimenisonal, para comparar el comportamiento estocástico de la variable unidimensional del valor de mercado con el índice de calidad, podemos analizar las propiedades estocásticas de logconcavidad de sus estadísticos extremos, las cuales pueden ser de utilidad para estudiar la idoneidad de la aplicación del método de valoración de las dos funciones o seleccionar una distribución o familia de distribuciones para el valor de mercado.

Observar que en la práctica valorativa resulta común la utilización de variables estandarizadas, sin pérdida de generalidad. En particular, vamos a considerar que ambas componentes del modelo de distribución bivariante tienen el mismo soporte para estudiar estas propiedades de logconcavidad de sus estadísticos extremos mínimo y máximo.

**Definición 4.1.** Sea *(X,Y)* una variable aleatoria bidimensional, se dice que sigue un modelo de distribución cúbico o uniforme bivariante si su función de densidad viene dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{(b-a)^2} & si\ a < x < b,\ a < y < b \\ 0 & en\ el\ resto \end{cases}$$

**Proposición 4.2.** *Los estadísticos extremos mínimo y máximo de un modelo de distribución cúbico tienen funciones de supervivencia logcóncavas.*

**Proposición 4.3.** *Los estadísticos extremos mínimo y máximo de un modelo de distribución cúbico tienen funciones de densidad logcóncavas.*

Asimismo, para otros modelos bivariantes usuales en la metodología valorativa, como *(X,Y)* con componentes independientes y distribuciones triangulares, *(X,Y)* con componentes independientes y distribuciones Beta, y *(X,Y)* con distribución piramidal, se obtienen las mismas propiedades de logconcavidad para las funciones de supervivencia y de densidad de los estadísticos mínimo y máximo. Por consiguiente, si el índice de calidad bidimensional $(I_1,I_2)$ sigue uno de estos modelos de distribución, deberíamos utilizar como modelo de distribución del valor de mercado aquellos que tengan esta misma propiedad, es decir, cuyas funciones de supervivencia y de densidad en el soporte sean logcóncavas.

Por ejemplo, si reducimos el modelo de distribución trapezoidal generalizado de van Dorp y Kotz (2003), al modelo triangular generalizado cuya función de densidad viene dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{n_1 n_2}{n_1(b-m)+n_2(m-a)}\left(\dfrac{x-a}{m-a}\right)^{n_1-1} & si\ a \leq x < m \\ \dfrac{n_1 n_2}{n_1(b-m)+n_2(m-a)}\left(\dfrac{b-x}{b-m}\right)^{n_2-1} & si\ m \leq x < b \\ 0 & en\ el\ resto \end{cases}$$

con $n_1>0$ y $n_2>0$, se deduce que su función de supervivencia

$$S(x) = \begin{cases} 1 & si\ x < a \\ 1-\dfrac{n_2(m-a)}{n_1(b-m)+n_2(m-a)}\left(\dfrac{x-a}{m-a}\right)^{n_1} & si\ a \leq x < m \\ \dfrac{n_1(b-m)}{n_1(b-m)+n_2(m-a)}\left(\dfrac{b-x}{b-m}\right)^{n_2} & si\ m \leq x < b \\ 0 & si\ b \leq x \end{cases}$$

es logcóncova en el soporte, si $n_1 \geq 1$. Por tanto, la asignación del modelo triangular generalizado al valor de mercado debería restringirse a la subfamilia de triangulares generalizadas con $n_1 \geq 1$ para que posea la misma propiedad de función de supervivencia logcóncava que los estadísticos extremos del índice de calidad bidimensional.

Además, para que *f(x)* sea logcóncava, es decir, *log(f(x))* cóncava, se requiere que ambos $n_1 \geq 1$ y $n_2 \geq 1$. Consecuentemente, para usar este modelo de distribución triangular generalizado como modelo del valor de mercado en el método de valoración de las dos funciones, tendríamos que restringirnos a la subfamilia con $n_1 \geq 1$ y $n_2 \geq 1$, para mantener las mismas propiedades de logconcavidad que los estadísticos extremos del modelo bivariante del índice de calidad.

Para concluir este trabajo, presentamos el caso práctico nº 2 de Guadalajara (1996), obteniendo las valoraciones con los métodos de las dos funciones a través de los estadísticos extremos y donde se aprecian las desigualdades establecidas en las secciones anteriores. En este caso se valora una finca dedicada al cultivo de uva de mesa en la comarca del Vinalopó Medio de la provincia de Alicante, los índices de calidad considerados para explicar el valor de mercado (ptas/jornal) son los kilogramos por jornal de la producción bruta de uva y el porcentaje de contenido de arena en la tierra de la finca. Notar que para una mejor comparación entre las valoraciones se mantienen las mismas unidades de medida originales también usadas en Herrerías (2002), siendo un jornal aproximadamente 0.48 hectáreas.

En la siguiente tabla se recogen los datos correspondientes a los valores mínimo, máximo y moda para cada variable:

| | Mínimo | Máximo | Moda |
|---|---|---|---|
| $V$=Valor de mercado (ptas/jornal) | 650000 | 1200000 | 850000 |
| $I_1$=Producción bruta (kg/jornal) | 7500 | 12500 | 9000 |
| $I_2$=Contenido de arena (%) | 15 | 50 | 25 |

Tabla 1. Valoración de una finca de uva de mesa

siendo el objetivo la valoración de una finca de 2.5 jornales con una producción bruta de 9800 kg/jornal y un contenido de arena del 32% en su tierra.

Aquí nos vamos a centrar en la aplicación de los estadísticos extremos en los métodos de valoración de las dos funciones a través de un modelo de distribución del valor de mercado en la familia triangular generalizada. Por ello, suponiendo que el índice de calidad formado por la producción bruta uva y el contenido de arena en la tierra siguen un modelo de distribución piramidal (como en Herrerías (2002)), y teniendo en cuenta la logconcavidad de los estadísticos extremos de este modelo, debemos utilizar para el valor de mercado una distribución triangular generalizada con $n_1 \geq 1$ y $n_2 \geq 1$. En particular, podemos utilizar como distribución del valor de mercado el modelo triangular, donde $n_1 = 2$ y $n_2 = 2$, o por ejemplo el modelo triangular generalizado con $n_1 = 3$ y $n_2 = 3$, cuyas valoraciones (multiplicadas por los 2.5 jornales que tiene la finca) se muestran en la siguiente tabla:

| *G(V)* | $V_{(2)m}$ | $V_D$ | $V_{(2)M}$ | $inf\{V_1,V_2\}$ | $sup\{V_1,V_2\}$ | $V_{(1)m}$ | $V_S$ | $V_{(1)M}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (2,2) | 2079472 | 2094272 | 2110072 | 2252694 | 2287350 | 2482428 | 2501413 | 2518954 |
| (3,3) | 2094168 | 2104299 | 2114998 | 2212347 | 2236890 | 2383429 | 2398600 | 2412789 |

Tabla 2. Índice de calidad con distribución piramidal

Asimismo, como menciona Herrerías (2002), es lógico pensar que la producción bruta de uva esté correlada con el contenido de arena en la tierra, aunque esta correlación no debe ser elevada. En cualquier caso, si se asume la independencia entre ambos índices de calidad utilizados para la valoración de la finca, y ambos según un modelo triangular, a partir de la logconcavidad de sus estadísticos extremos, se debería restringir la asignación de un modelo triangular generalizado para el valor de mercado a los parámetros $n_1 \geq 1$ y $n_2 \geq 1$. Al igual que el caso anterior, si consideramos los mismos modelos triangulares generalizados con $(n_1, n_2) = (2,2)$ y $(n_1, n_2) = (3,3)$ e obtienen los siguientes valores de mercado:

| *G(V)* | $V_{(2)m}$ | $V_D$ | $V_{(2)M}$ | $inf\{V_1,V_2\}$ | $sup\{V_1,V_2\}$ | $V_{(1)m}$ | $V_S$ | $V_{(1)M}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (2,2) | 2112195 | 2127587 | 2144569 | 2292054 | 2332542 | 2547667 | 2569207 | 2589721 |
| (3,3) | 2116427 | 2126725 | 2138095 | 2240252 | 2269503 | 2436395 | 2454433 | 2471893 |

Tabla 3. Índice de calidad de componentes independientes con distribuciones triangulares

## 5. Conclusiones.

Finalmente exponemos las conclusiones obtenidas a lo largo del trabajo:

El estadístico máximo de un índice de calidad bidimensional proporciona un valor de mercado del bien inferior y otro superior al del método de valoración de las dos funciones de distribución mediante el modelo bivariante del índice de calidad del mismo.

El estadístico máximo de un índice de calidad bidimensional proporciona en su menor componente una mayor depreciación del valor de mercado, y en su mayor componente produce una valoración que no supera a la mayor de las obtenidas individualmente con las distribuciones univariantes de cada una de las componentes del índice de calidad mediante el método de valoración de las dos funciones de distribución.

El estadístico mínimo de un índice de calidad bidimensional proporciona valores de mercado del bien superiores al del método de valoración de las dos funciones de distribución mediante el modelo bivariante del índice de calidad del mismo.

El estadístico mínimo de un índice de calidad bidimensional proporciona en su mayor componente un valor de mercado superior a las valoraciones obtenidas individualmente con las distribuciones univariantes de cada una de las componentes del índice de calidad mediante el método de valoración de las dos funciones de distribución, es decir una apreciación del bien en el mercado. Además, en su menor componente del índice de calidad del bien, el mínimo produce una valoración que no rebaja la peor de las valoraciones obtenidas con cada componente.

No obstante, no podemos asegurar que el menor valor de mercado a partir del mínimo estadístico sea inferior al mayor valor de mercado a través del máximo para cualquier par de índices de calidad del bien a valorar. En el caso de que el menor valor de mercado a partir del mínimo estadístico sea inferior al mayor valor de mercado a través del máximo, ambos estarán acotados por las valoraciones obtenidas individualmente con cada una de las componentes del índice de calidad.

El estadístico mínimo de un índice de calidad bidimensional proporciona un valor de mercado del bien inferior y otro superior al del método de valoración de las dos funciones de supervivencia para el modelo bivariante del índice de calidad del mismo.

El estadístico máximo de un índice de calidad bidimensional proporciona valores de mercado del bien inferiores al del método de valoración de las dos funciones de supervivencia mediante el modelo bivariante del índice de calidad del mismo.

Los estadísticos extremos mínimo y máximo de los modelos bivariantes usuales en la metodología valorativa, cúbico, piramidal, componentes independientes y triangulares, componentes independientes y beta, tienen funciones de supervivencia logcóncavas y funciones de densidad logcóncavas. Por consiguiente, si el índice de calidad bidimensional sigue uno de estos modelos de distribución, deberíamos utilizar como modelo de distribución del valor de mercado aquellos que tengan esta misma propiedad, es decir, cuyas funciones de supervivencia y de densidad en el soporte sean logcóncavas.

**Bibliografía.**


1. Albrecher, H. y Teugels, J.L. (2004). "Exponential behavior in the presence of dependence in risk theory", *EURANDOM Research Report* 2004-011.

2. Alonso, R. y Lozano, J. (1985). "El método de las dos funciones de distribución: Una aplicación a la valoración de fincas agrícolas en las comarcas Centro y Tierra de Campos (Valladolid)", *Anales del INIA, Economía,* **9**, pp. 295-325.

3. Ambagaspitiya, R.S. (1999). "On the distributions of two classes of correlated aggregate claims", *Insurance: Mathematics and Economics*, **24**, pp. 301-308.

4. An, M.Y. (1998). "Logconcavity versus logconvexity: A complete characterization", *Journal of Economic Theory,* **80**, pp. 350-369.

5. Baggs, G.E. y Nagaraja, H.N. (1996). "Reliability properties of order statistics from bivariate exponential distributions", *Communications in Statistics -- Stochastic Models,* **12**, pp. 611-631.

6. Ballestero, E. (1971). "Sobre valoración sintética de tierras y un nuevo método aplicable a la concentración parcelaria", *Revista de Economía Política,* **57**, pp. 225-238.

7. Ballestero, E. (1973). "Nota sobre un nuevo método rápido de valoración", *Revista de Estudios Agrosociales,* **85**, pp. 75-78.

8. Ballestero, E. y Rodríguez, J.A. (1999). *El precio de los inmuebles urbanos*, CIE Inversiones, Ed. DOSSAT 2000, Madrid.

9. Baron, D.P. y Besanko, D. (1999). "Informational alliances", *Review of Economic Studies,* **66**, pp. 743-768.

10. Biais, B.; Martimort, D. y Rochet, J.C. (2000). "Competing mechanisms in a common value environment", *Econometrica,* **68**, pp. 799-837.

11. Blackorby, C. y Schworm, W. (1984). "The structure of economies with aggregate measures of capital: A complete characterization", *Review of Economic Studies,* **51**, pp. 633-650.

12. Caballer, V. (1975). *Concepto y métodos de valoración agraria*, Ed. Mundi-Prensa, Madrid.

13. Caballer, V. (1994). *Métodos de valoración de empresas*, Ed. Pirámide, Madrid.

14. Caballer, V. (1998). *Valoración agraria. Teoría y práctica*, Ed. Mundi –Prensa, Madrid.

15. Caballer, V. y Guadalajara, N. (1998). *Valoración económica del agua de riego*, Ed. Mundi-Prensa, Madrid.

16. Caballer, V. y Moya, I. (1997). *La valoración de las empresas españolas*, Ed. Pirámide, Madrid.

17. Cai, J. y Li, H. (2004). "Multivariate risk model of phase type", *Technical Report 2004-11, Department of Mathematics, Washintong State University*. To appear in *Insurance: Mathematics and Economics*.

18. Callejón, J.; Franco, M.; Herrerías, R. y Vivo, J.M. (2005). "El método de valoración de las dos funciones de supervivencia como metodología alternativa al de las dos funciones de distribución", *Actas de la XIX Reunión ASEPELT-ESPAÑA (Badajoz).*

19. Cañas, J.A.; Domingo, J. y Martínez, J.A. (1994). "Valoración de tierras en las campiñas y la Subética de la provincia de Córdoba por el método de las funciones de distribución", *Investigación Agraria. Serie Economía*, **9**, pp. 447-467.

20. Chakraborty, I. (1999). "Bundling decisions for selling multiple objects", *Economic Theory*, **13**, pp. 723-733.

21. Chan, W.S.; Yang, H. y Zhang, L. (2003). "Some results on ruin probabilities in a two-dimensional risk model", *Insurance: Mathematics and Economics*, **32**, pp. 345-358.

22. Cruz, S. García, C.B. y García, J. (2002). "Statistical test for the method of the two distribution functions. An application in finance", *Actas del VI Congreso de Matemática Financiera y Actuarial y 5th Italian-Spanish Conference in Financial Mathematics (Valencia).*

23. Denuit, M.; Genest, C. y Marceau, E. (1999). "Stochastic bounds on sum of dependent risks", *Insurance: Mathematics and Economics*, **25**, pp. 85-104.

24. Dhaene, J. y Goovaerts, M.J. (1997). “On the dependency of risks in the individual life model”, *Insurance: Mathematics and Economics*, **19**, pp. 243-253.

25. Franco, M. y Vivo, J.M. (2002). “Reliability properties of series and parallel systems from bivariate exponential models”, *Communications in Statistics -- Theory and Methods*, **31**, pp. 2349-2360.

26. Franco, M. y Vivo, J.M. (2004a). “On hazard rate of the extreme order statistics from bivariate exponential models of Gumbel”, *Actas del 3rd International Symposium on extreme value analysis: Theory and Practice (Aveiro).*

27. Franco, M. y Vivo, J.M. (2004b). “Properties of minimun and maximun from bivariate exponential distributions”, *Actas del 6th World Congress of the Bernouilli Society for Mathematical Statistics and Probability and 67th Annual Meeting of the Institute of Mathematical Statistics (Barcelona).*

28. García, J.; Cruz, S. y García, L.B. (2002). “Generalización del método de las dos funciones de distribución (MDFD) a familias beta determinadas con lo tres valores habituales”, *Actas de la III Reunión Científica ASEPELT (Murcia): Análisis, Selección, Control de Proyectos y Valoración*, pp. 89-113.

29. García, J.; Cruz, S. y Rosado, Y. (2000). “Las familias de distribución multivariantes en la teoría general de valoración”, *Actas de la XIV Reunión ASEPELT-ESPAÑA (Oviedo).*

30. García, J.; Cruz, S. y Rosado, Y. (2002). “Extensión multi-índice del método beta en valoración agraria”, *Economía Agraria y Recursos Naturales*, **2** (2), pp. 3-26.

31. García, J. y García, L.B. (2003). *Teoría General de Valoración. Método de las dos funciones de distribución*, Ed. Fundación Unicaja, Málaga.

32. García, J.; Herrerías, R. y García, L.B. (2003). “Valoración agraria: Contrastes estadísticos para índices y distribuciones en el método de las dos funciones de distribución”, *Revista Española de Estudios Agrosociales y Pesqueros*, **199**, pp. 93-118.

33. Guadalajara, N. (1996). *Valoración Agraria. Casos Prácticos*, Ed. Mundi-Prensa, Madrid.

34. Gupta, P.L. y Gupta, R.C. (2001). "Failure rate of the minimum and maximum of a multivariate normal distribution", *Metrika*, **53**, pp. 39-49.

35. Herrerías, J.M. (2002). *Avances en la Teoría General de Valoración en Ambiente de Incertidumbre*, Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

36. Herrerías, R.; García, J.; Cruz, S. y Herrerías, J.M. (2001). "Il modello probabilistico trapezoidale nel metodo delle due distribuzione della teoria generale de valutazioni", *Genio Rurale. Estimo e Territorio. Rivista de Scienze Ambientali*, **LXIV, 4,** pp. 3-9**.**

37. Herrerías, R.; Palacios, F. y Herrerías, J.M. (2002). "Relaciones entre las familas de distribuciones beta de varianza constante, mesocúrticas y de tipo Caballer", *Actas del I Congreso Internacional de Valoración y Tasación (Valencia)*, pp. 73-80.

38. Lozano, J.J. (1996). *Tasación urbana: una metodología para informes de tasación masiva*, Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Madrid.

39. Miravete, E.J. (2001). "On preservation of increasing hazard rate under convolution", *CARESS Working Paper 01-05, University of Pennsylvania*.

40. Miravete, E.J. (2002). "Preserving log-concavity under convolution: Comment", *Econometrica*, **70**, pp. 1253-1254.

41. Müller, A. (1997). "Stop-loss order for portfolios of dependent risks", *Insurance: Mathematics and Economics*, **21**, pp. 219-223.

42. Palacios, F.; Callejón, J. y Herrerías, J.M. (2000). "Fundamentos probabilísticos del método de valoración de las dos distribuciones", *Anales de Economía Aplicada. Actas de la XIV Reunión ASEPELT-ESPAÑA (Oviedo).*

43. Romero, C. (1977). “Valoración por el método de las dos distribuciones beta: una extensión”, *Revista de Economía Política*, **75**, pp. 47-62

44. van Dorp, J.R. y Kotz, S. (2003). “Generalized trapezoidal distributions”, *Metrika*, **58**, pp. 85-97.

45. Vivo, J.M. y Franco, M. (2004). “Classification of generalized hyperexponential distributions. Application to the minimun and maximun from particular models”, *Actas del 3rd International Symposium on extreme value analysis: Theory and Practice (Aveiro).*