

INTENSIDAD DE LAS PREFERENCIAS EN VOTACIONES. VISUALIZACIÓN GRÁFICA DE SU IMPORTANCIA*

Alberto Turón Lanuza

Grupo Decisión Multicriterio Zaragoza
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales.
Universidad de Zaragoza
e-mail: turon@unizar.es

José María Moreno Jiménez

Grupo Decisión Multicriterio Zaragoza
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales.
Universidad de Zaragoza
e-mail: moreno@unizar.es

Manuel Salvador Figueras

Grupo Decisión Multicriterio Zaragoza
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales.
Universidad de Zaragoza
e-mail: salvador@unizar.es

Resumen

Este trabajo analiza gráficamente la importancia de la intensidad de las preferencias de los individuos que participan en los procesos de votación tradicionalmente seguidos en España. Utilizando el *Proceso Analítico Jerárquico (AHP)* como soporte metodológico en la resolución de un problema de elección discreta, se estudian las diferentes estructuras de preferencia asociadas al grupo encargado de la Toma de Decisiones. Para ello se han desarrollado diferentes herramientas de visualización gráfica que permiten identificar los patrones de comportamiento asociados a las distintas posturas, tanto individuales como colectivas. Estos desarrollos se han aplicado a los resultados obtenidos en una encuesta sobre el Tratado por el que se establece la Constitución Europea, realizada por los alumnos de segundo curso de la Facultad de Económicas de Zaragoza.

Palabras clave: Votación, Democracia, AHP, Preferencias, Visualización Gráfica.

Área temática: 7. Métodos Cuantitativos.

* Este trabajo está parcialmente sufragado por el proyecto multidisciplinar del Gobierno de Aragón “Gobierno electrónico. Toma de decisiones complejas basadas en Internet: e-democracia y e-cognocracia” (ref. PM2004-052).

1. Introducción.

Uno de los tópicos que más interés está despertando en el ámbito de la toma de decisiones públicas es el gobierno electrónico de los ciudadanos. La *e-cognocracia*, novedoso sistema democrático orientado a la creación y difusión social del conocimiento derivado de la toma científica de decisiones públicas (Moreno, 2003; Moreno y Polasek, 2003), permite la participación directa de los ciudadanos en el gobierno de la sociedad, mejorando la transparencia, la creatividad y el aprendizaje social.

En el ámbito del gobierno electrónico de la sociedad son de aplicación las diferentes herramientas decisionales que durante los últimos diez años ha venido desarrollando el Grupo Decisión Multicriterio Zaragoza para una de las técnicas multicriterio más extendidas, el *Proceso Analítico Jerárquico* (AHP).

Utilizando esta técnica multicriterio en la resolución de un problema de elección discreta con un elevado número de decisores, el trabajo se centra en el estudio de la importancia de la intensidad de las preferencias de cada uno de los decisores. Con esta finalidad, se analiza la existencia de patrones de comportamiento representativos de las diferentes posturas que adoptan ante un conjunto de alternativas. Para facilitar este análisis se han desarrollado algunas herramientas de visualización gráfica adecuadas a las dimensiones del problema considerado que facilitan la labor de interpretación de los resultados y la extracción de conclusiones.

El trabajo se ha estructurado como sigue: La Sección 2 (§2) presenta el Proceso Analítico Jerárquico, enumera las etapas del mismo y destaca las posibilidades que ofrecen las técnicas de representación gráfica. En la Sección 3 (§3) se detalla el algoritmo utilizado para la localización de los grupos de consenso existentes en el conjunto de decisores e identificar las posturas existentes en el mismo. En la Sección 4 (§4) se muestran los resultados correspondientes a la aplicación considerada y se analiza el comportamiento de las estructuras de preferencia asociadas. Por último, la Sección 5 (§5) destaca las conclusiones más importantes del trabajo.

2. Antecedentes.

2.1 El Proceso Analítico Jerárquico (AHP)

El Proceso Analítico Jerárquico (Saaty, 1980; Moreno, 2002b) es una técnica de decisión multicriterio discreta, flexible, abierta y realista, que permite la elección de la mejor alternativa considerando tanto factores objetivos como subjetivos. Mediante una modelización jerárquica de los problemas complejos que se plantean en el ámbito de las ciencias sociales, la adecuada modelización de problemas con una alta complejidad, su aplicación práctica a los problemas concretos obliga a considerar la participación en el proceso de múltiples actores, dando lugar a diferentes situaciones (Moreno-Jiménez y otros, 2002): i) Toma de Decisiones en Grupo, donde los decisores actúan como un grupo tratando de alcanzar una única decisión bajo consenso; ii) Toma de Decisiones Negociada, donde los decisores actúan de forma individual tratando de llegar a acuerdos entre sus intereses personales; y iii) Toma de Decisiones Sistémica, en la que los decisores actúan como una red en busca de una decisión holística bajo una perspectiva de tolerancia.

La primera de estas situaciones, la Toma de Decisiones en Grupo, ha visto aumentar su interés en los últimos años debido, entre otras causas, a la globalización de la sociedad y los mercados. En Moreno-Jiménez y otros (2002) se desarrolla una técnica para facilitar el consenso entre los distintos actores basándose en la identificación de un “núcleo de consistencia” común a todos ellos. El *Índice de Inconsistencia Geométrica* (Aguarón y Moreno-Jiménez, 2002) proporciona una medida de la inconsistencia de los juicios así obtenidos.

La *Distribución de Estructuras de Preferencia* de un conjunto de alternativas $A_1, \dots, A_n$ es la distribución de probabilidades de las $n!$ Estructuras de Preferencia distintas, o posibles ordenaciones de las n alternativas, que se pueden obtener al incorporar la incertidumbre en el modelo mediante intervalos de juicios (Moreno-Jiménez y Vargas, 1993; Moreno-Jiménez y otros, 1999). Estas estructuras de preferencia dependen de cuál es el valor del Índice de Inconsistencia y el estudio de

la relación con dicho índice proporciona un valioso conocimiento sobre las tendencias, patrones y puntos críticos del proceso de toma de decisiones.

La metodología de AHP consta de cuatro etapas: (1) modelización; (2) valoración; (3) priorización y (4) síntesis.

1. La *modelización* del problema mediante la construcción de una jerarquía en la que se incorporan los elementos principales del mismo, siendo el nodo más elevado de la jerarquía la misión perseguida, los nodos intermedios los criterios, subcriterios..., y atributos, y los nodos de nivel más bajo las alternativas.
2. La etapa de *valoración* consiste en la incorporación de las preferencias del decisor a través de la emisión de juicios en comparaciones pareadas. Estos juicios, medidos en la escala fundamental propuesta por Saaty (Saaty, 1980), reflejan la importancia relativa para el decisor de los elementos que cuelgan de un nodo de la jerarquía, con respecto al nodo del que dependen. El resultado es una serie de matrices de comparaciones pareadas en la que se reflejan las intensidades de las preferencias y, a partir de las cuales, se obtienen las prioridades locales de cada elemento de la jerarquía.
3. *Priorización*. En esta etapa, se calculan las *prioridades locales* por cualquiera de los procedimientos de priorización existentes en la literatura (Aguarón y Moreno-Jiménez, 2003). A partir de éstas, aplicando el principio de composición jerárquica, se obtienen las *prioridades globales*.
4. *Síntesis*. Las prioridades globales de las diferentes alternativas son sintetizadas. Utilizando cualquiera de los procedimientos de agregación existentes, habitualmente la media geométrica ponderada, para obtener las *prioridades totales* o finales de las alternativas., por cualquiera de los procedimientos de agregación existentes.

El proceso analítico jerárquico permite evaluar la inconsistencia del decisor al emitir los juicios correspondientes a la matriz recíproca de comparaciones pareadas (Aguarón y Moreno-Jiménez, 2003). Definiendo la consistencia como la transitividad

cardinal de los juicios ($a_{ik} = a_{ij} a_{jk} \quad \forall i, j, k$), cuando la medida de inconsistencia fijada para el procedimiento de priorización supera un determinado umbral, se revisan los juicios más discrepantes con el fin de reducir dicha inconsistencia.

Siguiendo el enfoque marcado por el *constructivismo cognitivo* en el paradigma de la racionalidad procedimental multicriterio, la metodología seguida en la aplicación de esta metodología en este contexto consta de 6 etapas: 1) formulación y descripción del problema, 2) modelización jerárquica, 3) valoración y emisión de juicios, 4) priorización, agregación y síntesis, estudio de la inconsistencia, 5) incertidumbre, robustez y retroalimentación, 6) explotación del modelo, aprendizaje y negociación.

2.2 Las técnicas de visualización gráfica de información

A lo largo de los últimos años se han desarrollado diversas técnicas de representación gráfica de conjuntos multidimensionales de datos. Con ellas se pretende dar una visión de éstos que de alguna manera facilite al cerebro humano las tareas de exploración, interacción con ellos y extracción de información y de conocimiento. La visualización gráfica de información proporciona mayor rapidez y mejores resultados que otras técnicas a la hora de extraer conocimiento de conjuntos de datos cuya extensión o complejidad los hace difíciles de tratar analíticamente, y además proporcionan una mayor confianza en las conclusiones obtenidas (Keim, 2002).

En el caso concreto del Proceso Analítico Jerárquico, durante los últimos años el GDMZ ha venido desarrollando diversas herramientas decisionales que muestran el potencial de las técnicas de visualización gráfica. Algunas aplicaciones pueden encontrarse en Asahi (1994); Turón y otros (2003) y Moreno-Jiménez y otros (2004) proponen el *gráfico de evolución de las estructuras de preferencia*; Turón y Moreno-Jiménez (2004) muestran el *diagrama de densidad de la inconsistencia de los juicios* y el *diagrama de localización de las estructuras de preferencia*.

3. Búsqueda de grupos de consenso.

En esta sección se describe el algoritmo seguido para encontrar grupos de consenso en el conjunto de decisores del problema. Este algoritmo es una variación del

algoritmo de las k -medias en el que el papel de los centroides lo realiza la distribución de consenso del vector de prioridades del grupo definida en Gargallo y otros (2005).

3.1. Planteamiento

Suponiendo un contexto local (un único criterio), sea $\mathbf{D} = \{D_1, \dots, D_r\}$, $r \geq 2$ un grupo de r decisores que emiten r matrices recíprocas de comparaciones pareadas $\{R_{n \times n}^{(k)}; k = 1, \dots, r\}$ correspondientes a la comparación, respecto al criterio considerado, de un conjunto de n alternativas de decisión $\{A_1, \dots, A_n\}$, donde $R_{n \times n}^{(k)} = (r_{ij}^{(k)})$ es una matriz cuadrada positiva que verifica que $r_{ii}^{(k)} = 1, r_{ji}^{(k)} = \frac{1}{r_{ij}^{(k)}} > 0$ para $i, j = 1, \dots, n$. Los juicios $r_{ij}^{(k)}$ representan la importancia relativa de la alternativa i frente a la alternativa j para el decisor D_k , conforme a la escala fundamental propuesta por Saaty (1980).

Sean $\{\mathbf{v}^{(k)} = (v_1^{(k)}, \dots, v_n^{(k)}); k = 1, \dots, r\}$ ($v_1^{(k)} > 0, \dots, v_n^{(k)} > 0$) las prioridades (sin normalizar) de las alternativas para cada decisor D_k , y sean $\{\mathbf{w}^{(k)} = (w_1^{(k)}, \dots, w_n^{(k)}); k = 1, \dots, r\}$ sus valores normalizados a modo distributivo ($\sum_{i=1}^n w_i^{(k)} = 1$), esto es, $w_i^{(k)} = \frac{v_i^{(k)}}{\sum_{i=1}^n v_i^{(k)}}$ para $i = 1, \dots, n$.

El algoritmo utiliza una aproximación bayesiana al problema de obtención de grupos y supone que el proceso de emisión de juicios para cada decisor D_k viene dado por un modelo multiplicativo con errores logarítmico-normales ampliamente utilizado en la literatura de *AHP*, dado por la expresión

$$r_{ij}^{(k)} = \frac{w_i^{(k)}}{w_j^{(k)}} e_{ij}^{(k)}, \quad i = 1, \dots, n-1; j = i+1, \dots, n; k = 1, \dots, r \quad (3.1)$$

Tomando logaritmos se llega a un modelo de regresión con errores normales dado por las ecuaciones:

$$y_{ij}^{(k)} = \mu_i^{(k)} - \mu_j^{(k)} + \varepsilon_{ij}^{(k)}; i = 1, \dots, n-1; j = i+1, \dots, n; k = 1, \dots, r \quad (3.2)$$

donde $y_{ij}^{(k)} = \log(r_{ij}^{(k)})$, $\mu_i^{(k)} = \log(v_i^{(k)})$ y $\varepsilon_{ij}^{(k)} \sim N(0, \sigma^{(k)2})$ son independientes para $k = 1, \dots, r$. Además, y con el fin de evitar problemas de identificabilidad, se ha tomado $\mu_n = 0$, es decir se toma la alternativa A_n como alternativa de referencia. Como distribución a priori sobre $\boldsymbol{\mu}^{(k)} = (\mu_1^{(k)}, \dots, \mu_{n-1}^{(k)})'$ se toma la distribución uniforme en $\mathbf{R}^{n-1}$ que es la distribución no informativa habitualmente utilizada en la literatura bayesiana.

Sea $\mathbf{y}^{(k)} = (y_{12}^{(k)}, y_{13}^{(k)}, \dots, y_{n-1n}^{(k)})'$ el vector de juicios emitidos por el decisor D_k ; $k = 1, \dots, r$ y sea $J = \frac{n(n-1)}{2}$ el número de juicios emitidos por él. Sea $\mathbf{X} = (x_{ij})$ matriz $J \times (n-1)$ de forma que si la i -ésima componente de los vectores $\{\mathbf{y}^{(k)}; k = 1, \dots, r\}$ corresponde a la comparación entre las alternativas A_j y A_ℓ con $1 \leq j < \ell < n$ entonces $x_{ij} = 1$, $x_{i\ell} = -1$ y $x_{is} = 0$ para $s \neq j, \ell$ y si corresponde a una comparación entre las alternativas A_j $1 \leq j < n$ y A_n entonces $x_{ij} = 1$ y $x_{is} = 0$ para $s \neq j$.

Las ecuaciones (3.2) del modelo se podrán poner en forma matricial como

$$\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{X}\boldsymbol{\mu}^{(k)} + \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}; k = 1, \dots, r \quad (3.3)$$

con $\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} = (\varepsilon_{12}^{(k)}, \varepsilon_{13}^{(k)}, \dots, \varepsilon_{n-1n}^{(k)})' \sim N_J(\mathbf{0}_J, \sigma^{(k)2} \mathbf{I}_J)$.

Las distribuciones a posteriori de $\{\boldsymbol{\mu}^{(k)}; k = 1, \dots, r\}$ vendrán dadas por

$$\boldsymbol{\mu}^{(k)} | \mathbf{y}^{(k)} \sim N_{n-1}(\hat{\boldsymbol{\mu}}^{(k)}, \sigma^{(k)2} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}) \quad (3.4)$$

donde $\hat{\boldsymbol{\mu}}^{(k)} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{y}^{(k)})$ es el *MLE* de $\boldsymbol{\mu}^{(k)}$.

3.2. Distribución de consenso del grupo

Sean $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)'$ y $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)'$ los vectores de prioridades sin normalizar y normalizadas de las alternativas para el grupo, respectivamente. Sea $\boldsymbol{\mu} = \log(\mathbf{v})$ el vector de log-prioridades del grupo

Sean $\{\alpha_k; k=1, \dots, r\}$ ($\alpha_1 > 0, \dots, \alpha_r > 0; \sum_{k=1}^r \alpha_k = 1$) un conjunto de pesos que ponderan la importancia de cada uno de los decisores $D_1, \dots, D_r$ en el proceso de toma de decisiones conjunta.

Tal y como muestran Gargallo y otros (2005), la distribución de consenso del grupo de decisores viene dada por

$$\boldsymbol{\mu} | \mathbf{y} \sim N_{n-1}(\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\text{consenso}}, \sigma_{\text{consenso}}^2 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}) \quad (3.5)$$

$$\text{donde } \hat{\boldsymbol{\mu}}_{\text{consenso}} = \frac{\sum_{k=1}^r \frac{\alpha_k}{\sigma^{(k)2}} \hat{\boldsymbol{\mu}}^{(k)}}{\sum_{k=1}^r \frac{\alpha_k}{\sigma^{(k)2}}} \text{ y } \sigma_{\text{consenso}}^2 = \frac{1}{\sum_{k=1}^r \frac{\alpha_k}{\sigma^{(k)2}}}. \text{ Tal y como demuestran}$$

Gargallo y otros (2005) esta distribución minimiza una media ponderada de las distancia de Kullback-Leibler de dicha distribución a las distribuciones de probabilidad a posteriori (3.4).

Utilizando esta distribución se estima el nivel de consistencia del grupo mediante el estimador insesgado tradicionalmente utilizado en la literatura de *AHP* y que viene dado por

$$\hat{\sigma}_D^2 = \frac{1}{Jr - n + 1} \sum_{k=1}^r (\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\text{consenso}})' (\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\text{consenso}}) \quad (3.6)$$

Este estimador se utiliza para evaluar el grado de consenso existente dentro de un grupo. Para ello se establece límite superior de consistencia del grupo $\sigma_{\text{límite}}^2$ de forma que si se estima que el nivel de consistencia de un grupo es superior a dicho límite,

no existe consenso suficiente en el mismo al haber gran heterogeneidad en las preferencias de sus miembros.

3.3. El algoritmo

Una vez planteados los fundamentos estadísticos del algoritmo, se pasa a continuación a describir el mismo. El método utilizado consta de los pasos siguientes:

PASO 0 (ESTABLECIMIENTO DEL LÍMITE SUPERIOR DE CONSISTENCIA)

Se establece el límite superior de consistencia $\sigma_{\text{límite}}^2$. Para ello se ha utilizado el propuesto de Altuzarra y otros (2005) que fija dicho límite de forma que

$$P \left[\frac{1}{1 + \frac{e_{\max}}{100}} \leq \varepsilon_{ij} \leq 1 + \frac{e_{\max}}{100} \right] \geq 1 - \alpha \text{ para } \varepsilon_{ij} \sim \text{LN}(0, \sigma_{\text{límite}}^2) \quad (3.7)$$

donde $e_{\max} > 0$ es el error máximo que se está dispuesto a soportar en el modelo (3.1) con un nivel de confianza del $100(1-\alpha)\%$ ($0 < \alpha < 1$).

PASO 1 (INICIALIZACIÓN DEL ALGORITMO)

1A) (CONSTRUCCIÓN DE GRUPOS)

Se construye una partición inicial del conjunto de decisores $\mathbf{D}$, $\{G_1^{(0)}, \dots, G_{k^{(0)}}^{(0)}\}$. En el algoritmo utilizado en el ejemplo se ha optado por tomar $k^{(0)} = n$ y

$$G_i^{(0)} = \{D_k \in \mathbf{D} : \hat{\mu}_i^{(k)} = \max_{1 \leq j \leq n} \hat{\mu}_j^{(k)}\}; i=1, \dots, n$$

donde $\hat{\mathbf{\mu}}^{(k)} = (\hat{\mu}_1^{(k)}, \dots, \hat{\mu}_{n-1}^{(k)})'$ y $\hat{\mu}_n^{(k)} = 0$. Se eliminan los grupos vacíos.

1B) (CÁLCULO DE LA DISTRIBUCIÓN DE CONSENSO DE CADA GRUPO)

Se calcula, para cada grupo, la distribución de consenso aplicando la expresión (3.5), de forma que $\mu|G_i^{(0)} \sim N_{n-1}(\hat{\mu}_{consenso}^{(i)}, \sigma_{consenso}^{(i)2} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1})$, $i=1, \dots, k^{(0)}$. Se pone $it = 1$ (numero de iteraciones).

PASO 2 (ASIGNACIÓN DE GRUPOS)

Se calcula, para cada decisor D_k las distancias de Kullback-Leibler de su distribución a posteriori (3.4) a cada una de las distribuciones de consenso de los grupos calculadas en el paso anterior. Cada decisor se asigna al grupo cuya distancia sea mínima. Una vez finalizado el proceso de asignación se eliminan los grupos vacíos y se obtiene una nueva partición $\{G_1^{(it)}, \dots, G_{k^{(it)}}^{(it)}\}$ del conjunto de decisores, $\mathbf{D}$.

PASO 3 (CÁLCULO DE LA DISTRIBUCIÓN DE CONSENSO DE CADA GRUPO)

Se calcula, para cada grupo, la distribución de consenso aplicando la expresión (3.5), de forma que $\mu|G_i^{(it)} \sim N_{n-1}(\hat{\mu}_{consenso}^{(i)}, \sigma_{consenso}^{(i)2} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1})$, $i=1, \dots, k^{(it)}$.

PASO 4 (DIVISIÓN DE GRUPOS)

Se analiza si algún grupo se debe dividir. Para ello se calcula, para cada grupo, un estimador de su nivel de inconsistencia, $\hat{\sigma}_{G_i^{(it)}}^2$ utilizando la expresión (3.6). Se determina el conjunto

$$G_{dividir} = \left\{ i \in \{1, \dots, k^{(it)}\} : \hat{\sigma}_{G_i^{(it)}}^2 \geq \sigma_{limite}^2 \frac{\chi_{|G_i^{(it)}|J-n+1, 1-0.5\alpha}^2}{|G_i^{(it)}|J-n+1, 1-0.5\alpha} \text{ y } |G_i^{(it)}| > 1 \right\}$$

donde los límites superiores de consistencia se determinan a partir de la distribución χ^2 dado que $\hat{\sigma}_{G_i^{(it)}}^2$ es un estimador del nivel de consistencia del grupo. Si $G_{dividir} = \emptyset$

se va al Paso 5. En caso contrario se determina el grupo $G_{i_{max}}^{(it)}$ tal que $\hat{\sigma}_{G_{i_{max}}^{(it)}}^2 =$

$\max_{i \in G_{\text{dividir}}} \hat{\sigma}_{G_i^{(it)}}^2$. Sea D_k el decisor de $G_{i_{\max}}^{(it)}$ tal que $\sigma^{(k)2} = \max_{D_j \in G_{i_{\max}}^{(it)}} \sigma^{(j)2}$. Se divide $G_{i_{\max}}^{(it)}$ en dos subgrupos: $\{D_k\}$ y $G_{i_{\max}}^{(it)} - \{D_k\}$ y se calculan, utilizando (3.5), las distribuciones de consenso de cada grupo. Se pone $k^{(it+1)} = k^{(it)} + 1$, $it = it + 1$ y se va al Paso 2.

PASO 5 (AGRUPAMIENTO DE GRUPOS)

Se calcula el par $(i_{\min}, j_{\min}) \in C$ tal que $\hat{\sigma}_{G_{i_{\min}}^{(it)} \cup G_{j_{\min}}^{(it)}}^2 = \min_{(i,j) \in C} \hat{\sigma}_{G_i^{(it)} \cup G_j^{(it)}}^2$, donde $C =$

$$\{(i,j) \in \{1, \dots, k^{(it)}\} \times \{1, \dots, k^{(it)} \mid 1 \leq i < j \leq k^{(it)}, \hat{\sigma}_{G_i^{(it)} \cup G_j^{(it)}}^2 \geq \sigma_{\text{limite}}^2 \frac{\chi_{|G_i^{(it)}| J - n + 1, 1 - 0.5\alpha}^2}{|G_i^{(it)} \cup G_j^{(it)}| J - n + 1, 1 - 0.5\alpha}\} \}$$

Si $C = \emptyset$ se va al paso 6. En caso contrario se reemplazan $G_{i_{\min}}^{(it)}$ y $G_{j_{\min}}^{(it)}$ por $G_{i_{\min}}^{(it)} \cup G_{j_{\min}}^{(it)}$ y se calcula la distribución de consenso de este grupo. Se pone $k^{(it+1)} = k^{(it)} - 1$, $it = it + 1$ y se vuelve al paso 2.

PASO 6 (CONDICIÓN DE FINALIZACIÓN)

El algoritmo acaba si dos particiones consecutivas de $\mathbf{D}$ son iguales o si

$$G = \left\{ i \in \{1, \dots, k^{(it)}\} : \hat{\sigma}_{G_i^{(it)}}^2 \geq \sigma_{\text{limite}}^2 \frac{\chi_{|G_i^{(it)}| J - n + 1, 1 - 0.5\alpha}^2}{|G_i^{(it)}| J - n + 1, 1 - 0.5\alpha} \right\} = \emptyset$$

□

Si los niveles de consistencia individuales $\{\sigma^{(k)2}; k=1, \dots, r\}$ son desconocidos se estiman a partir de los juicios individuales emitidos por cada decisor mediante el

$$\text{estimador insesgado } \hat{\sigma}^{(k)2} = \frac{1}{J - n + 1} (\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\mu}}^{(k)})' (\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\mu}}^{(k)}).$$

4. Ejemplo.

Los desarrollos anteriores se aplicaron a los resultados de una encuesta realizada entre los alumnos de segundo curso de la Facultad de Económicas de Zaragoza. En ella se pedía que expresaran la intensidad de sus preferencias entre tres opciones relativas al Tratado de la Nueva Constitución Europea, que fue refrendado por los españoles el día 20 de febrero de 2005. Las opciones propuestas eran las siguientes:

- A:** Aceptar este tratado por el que se establece una Constitución para Europa
- B:** Rechazar este tratado por el que se establece una Constitución para Europa
- C:** Volver a convocar otro referéndum más adelante, que sea vinculante

A partir de los resultados, mediante *AHP* se obtuvieron las estructuras de preferencia de cada uno de ellos, y a ellas se aplicaron las técnicas de visualización gráfica mencionadas en este artículo. Los vectores de prioridades de cada uno se muestran en la Tabla 1.

4.1 Diagramas triangulares

En los diagramas triangulares se representan las prioridades individuales estimadas

mediante $\{\hat{\mathbf{w}}^{(k)} = (\hat{w}_1^{(k)}, \dots, \hat{w}_n^{(k)}); k=1, \dots, r\}$ donde $\hat{w}_i^{(k)} = \frac{\exp(\hat{\mu}_i^{(k)})}{\sum_{j=1}^n \exp(\hat{\mu}_j^{(k)})}; i=1, \dots, n$ y las

prioridades de consenso de cada grupo estimadas mediante

$\hat{\mathbf{w}}_{\text{consenso}}^{(i)} = (\hat{w}_{\text{consenso},1}^{(i)}, \dots, \hat{w}_{\text{consenso},n}^{(i)})$ donde $\hat{w}_{\text{consenso},j}^{(i)} = \frac{\exp(\hat{\mu}_{\text{consenso},j}^{(i)})}{\sum_{\ell=1}^n \exp(\hat{\mu}_{\text{consenso},\ell}^{(i)})}$. Los grupos

asignados se representan con colores diferentes y las prioridades de consenso de los mismos con círculos. En cada gráfico se representan los resultados de aplicar el algoritmo de la Sección 3 con valores diferentes de $e_{\max}$ y tomando $\alpha = 0.05$. Se observa que, cuanto mayor es $e_{\max}$ menor es el número de grupos al aumentar el valor de σ_{limite}^2 . Además, los grupos tienden a localizarse en las zonas del diagrama en las que se elige una de las alternativas por encima de las otras dos y, dentro de las zonas triangulares correspondientes en aquellas subzonas en las que se encuentran las es-

Tabla 1. Vectores de prioridades del problema de votación.

decisor	a_{12}	a_{13}	a_{23}	w_1	w_2	w_3
1	3	3	3	0,5842	0,2808	0,1350
2	3	1/3	1/3	0,2808	0,1350	0,5842
3	1/7	1/5	3	0,0719	0,6491	0,2790
4	3	1/3	1/3	0,2808	0,1350	0,5842
5	1	1	1	0,3333	0,3333	0,3333
6	9	7	1/9	0,7511	0,0436	0,2053
7	5	1	1	0,5190	0,1775	0,3035
8	3	1/7	1/7	0,1579	0,0759	0,7662
9	5	3	9	0,6141	0,3029	0,0830
10	5	5	1/3	0,7007	0,0972	0,2021
11	3	1/3	3	0,3333	0,3333	0,3333
12	3	1/9	3	0,2211	0,3189	0,4600
13	5	5	1/9	0,6613	0,0636	0,2751
14	5	1/3	1/7	0,2790	0,0719	0,6491
15	1/7	1/3	7	0,0759	0,7662	0,1579
16	1/7	1/5	1	0,0778	0,4869	0,4353
17	3	1/5	1/9	0,1782	0,0704	0,7514
18	7	5	5	0,7258	0,1983	0,0759
19	1	1	1	0,3333	0,3333	0,3333
20	3	1/5	1/5	0,2021	0,0972	0,7007
21	5	7	1/5	0,7258	0,0759	0,1983
22	3	1/9	3	0,2211	0,3189	0,4600
23	7	1	1/7	0,4667	0,0667	0,4667
24	3	1/3	1/5	0,2583	0,1047	0,6370
25	7	1/3	1/5	0,3236	0,0746	0,6018
26	5	5	5	0,6854	0,2344	0,0802
27	7	9	1/5	0,7792	0,0599	0,1610
28	5	3	9	0,6141	0,3029	0,0830
29	5	1/7	1/9	0,1734	0,0545	0,7720
30	1/7	1/9	1/3	0,0549	0,2897	0,6554
31	7	5	1/7	0,7015	0,0586	0,2399
32	3	1/3	1	0,3189	0,2211	0,4600
33	7	9	1/3	0,7903	0,0720	0,1377
34	1/3	1/5	1/5	0,0972	0,2021	0,7007
35	9	7	1/9	0,7511	0,0436	0,2053
36	5	1/3	1/9	0,2654	0,0629	0,6716
37	7	9	1/5	0,7792	0,0599	0,1610
38	1/3	1/7	3	0,0962	0,5519	0,3519
39	1/9	1	9	0,0909	0,8182	0,0909
40	1/5	1/7	1/9	0,0599	0,1610	0,7792
41	3	1	1/3	0,4286	0,1429	0,4286
42	5	5	3	0,7007	0,2021	0,0972
43	5	3	1/5	0,6175	0,0856	0,2969
44	7	1	1	0,5568	0,1522	0,2911
45	3	1/5	1/5	0,2021	0,0972	0,7007
46	5	1/5	1/9	0,2067	0,0581	0,7352
47	3	1/5	1/5	0,2021	0,0972	0,7007
48	3	3	3	0,5842	0,2808	0,1350
49	1	1	1	0,3333	0,3333	0,3333
50	7	1/7	1/9	0,1912	0,0480	0,7608
51	7	5	1/7	0,7015	0,0586	0,2399
52	1	1	1	0,3333	0,3333	0,3333
53	1	1/9	1/9	0,0909	0,0909	0,8182
54	7	1/7	1/7	0,2027	0,0554	0,7419
55	1/3	1	3	0,2000	0,6000	0,2000
56	1	1	1	0,3333	0,3333	0,3333
57	7	7	1/9	0,7322	0,0503	0,2176
58	5	7	1/3	0,7383	0,0915	0,1702
59	1	1/9	1/9	0,0909	0,0909	0,8182
60	5	3	1/7	0,6018	0,0746	0,3236
61	1	1	1	0,3333	0,3333	0,3333
62	9	9	1/5	0,7968	0,0518	0,1514
63	3	3	1/3	0,5842	0,1350	0,2808
64	1	1/5	1/5	0,1429	0,1429	0,7143
65	3	1/3	1/5	0,2583	0,1047	0,6370
66	5	3	1/5	0,6175	0,0856	0,2969
67	1/3	1/3	1/3	0,1350	0,2808	0,5842
68	5	1	1/5	0,4545	0,0909	0,4545
69	1/9	1/9	1/9	0,0416	0,1799	0,7785
70	1/3	1/7	1/5	0,0810	0,1884	0,7306
71	5	3	1/9	0,5887	0,0671	0,3442
72	1	1/7	1/7	0,1111	0,1111	0,7778
73	3	1	1/5	0,4054	0,1140	0,4806
74	3	1/7	1/9	0,1488	0,0658	0,7854
75	1/9	1	9	0,0909	0,8182	0,0909
76	9	9	1/9	0,7785	0,0416	0,1799
77	9	9	1/9	0,7785	0,0416	0,1799
78	5	1/3	1/3	0,3230	0,1104	0,5666
79	3	3	3	0,5842	0,2808	0,1350
80	7	1/5	1/5	0,2573	0,0703	0,6724
81	1	1	3	0,3189	0,4600	0,2211

estructuras de preferencia más preferidas por el grupo de individuos. Este hecho se aprecia muy claramente en los gráficos perceptuales mostrados en la Figura 1, en los que se observa que los grupos tienden a situarse en torno a los puntos correspondientes a las estructuras de preferencia más preferidas por los individuos. Por ejemplo, en el caso $e_{max}=75$ puede verse cómo aparecen 7 grupos, representando los individuos con una estrella y el centro de masas de cada grupo mediante un círculo, lo que permite caracterizar el comportamiento general del grupo. En el caso

$e_{max}=250$ los grupos se reducen a tres, lo que hace que algunos individuos se hayan reubicado situándose en los grupos más cercanos.

Observando el comportamiento de algunos individuos se concluye que el diagrama triangular no representa de manera intuitiva esta “cercanía”, pues al pasar de $e_{max}=75$ a $e_{max}=250$ algunos de ellos no se recolocan en los grupos más próximos, si nos atenemos a la distancia euclídea sobre el plano del simplex. Los gráficos tridimensionales que se presentan en §4.3 permiten obtener una visión más clara de la cercanía entre individuos y grupos.

4.2 Gráficos MDS

Los gráficos correspondientes a las estructuras de preferencia (Figura 2) se han elaborado a partir de los resultados obtenidos al aplicar un Multidimensional Scaling a la matriz de distancias siguiente:

$$\text{Distancias} = (d_{k\ell}) \text{ (Matriz } (r+n\text{grupos}+n!) \times (r+n\text{grupos}+n!))$$

$$\text{donde } d_{k\ell} = \sum_{i=1}^{n!} \sum_{j=1}^{n!} p_{Ranking_i}^{(k)} p_{Ranking_j}^{(\ell)} \text{Distancia}(Ranking_i, Ranking_j), \text{ siendo}$$

$p_{Ranking}^{(k)} = P[Ranking \mid \boldsymbol{\mu}^{(k)} \sim N_{n-1}(\mathbf{m}^{(k)}, \sigma^{(k)}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1})]$ la probabilidad de la estructura de preferencia sobre las alternativas $\{A_1, \dots, A_n\}$ obtenidas a partir de la distribución a posteriori del vector de log-prioridades $\boldsymbol{\mu}^{(k)}$

$$\text{Distancia}(Ranking_i, Ranking_j) = 1 - \rho_{Ranking_i, Ranking_j}$$

siendo $\rho_{Ranking_i, Ranking_j}$ el coeficiente de rangos de Spearman.

Los puntos representados son los decisores (dibujados con *) que utilizan las distribuciones a posteriori (3.4), los grupos (dibujados con o) que utilizan sus distribuciones de consenso (3.5) y los rankings (dibujados con triángulos) que utilizan sus distribuciones degeneradas. La etiqueta de cada ranking representa el

orden de preferencia de las alternativas (*e.g.* 312 es la estructura de preferencia $\{A_3, A_1, A_2\}$).

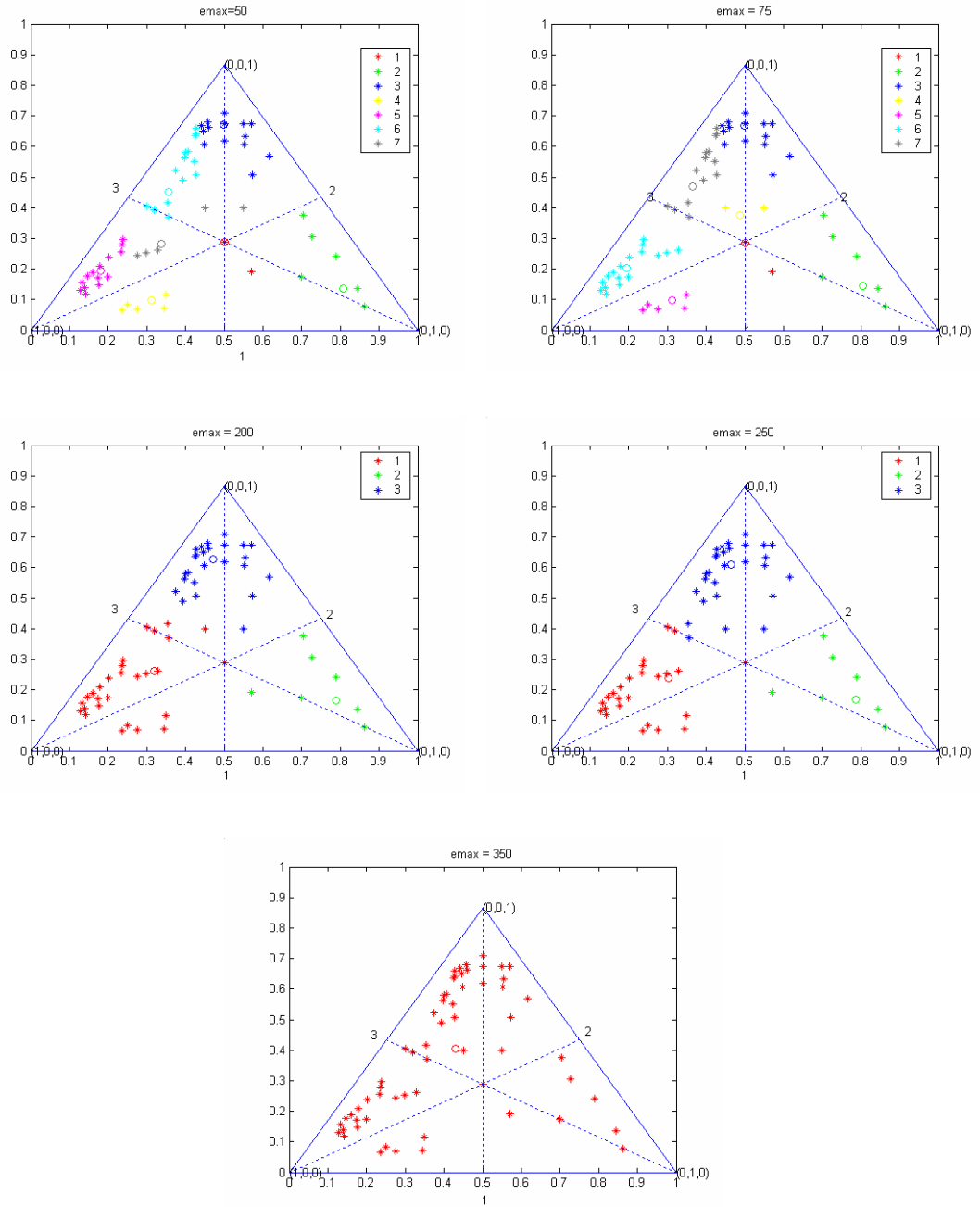


Figura 1. Diagramas triangulares representando las prioridades de consenso de los grupos para distintos valores de e_{max} .

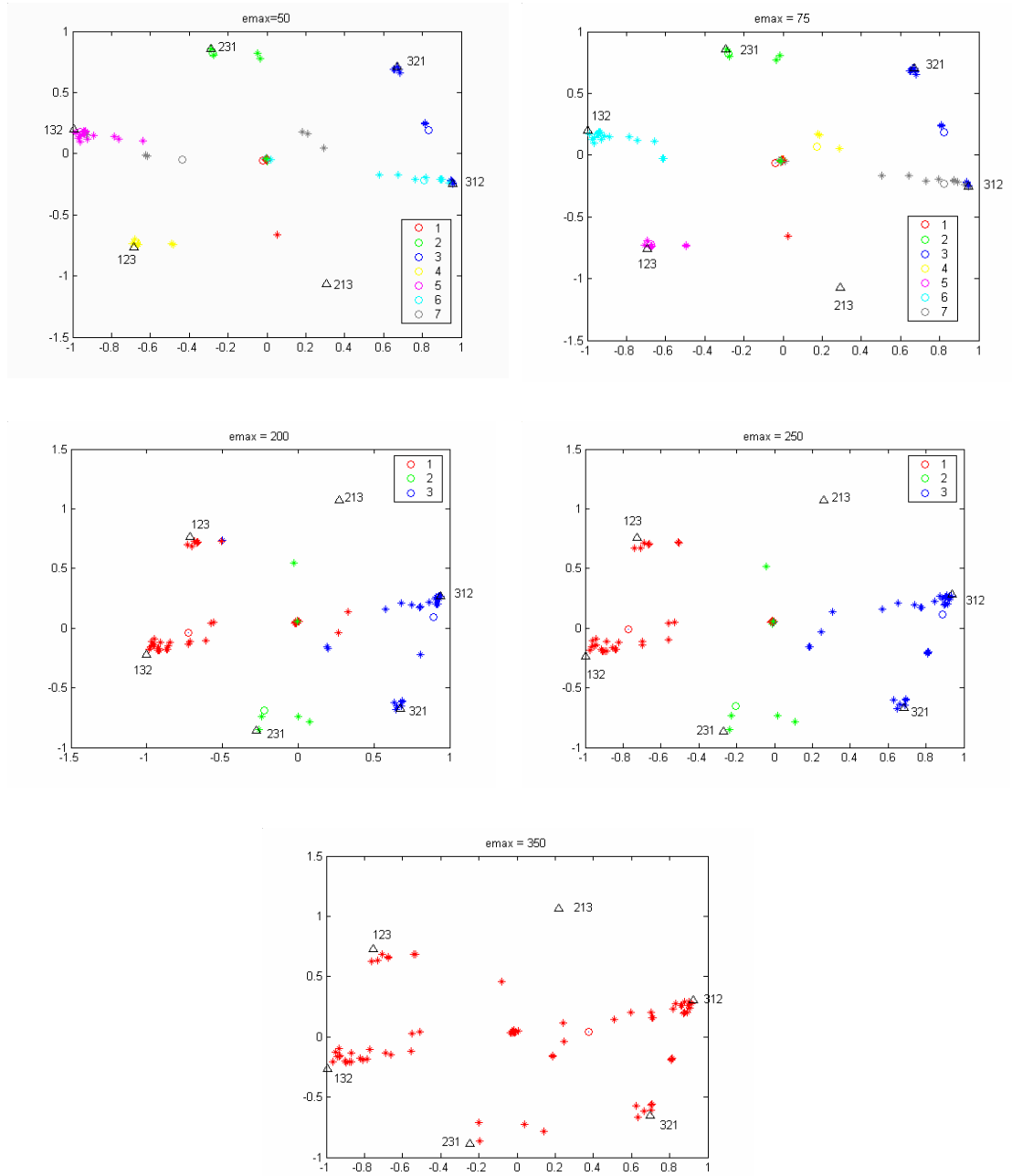


Figura 2. Diagramas MDS representando las estructuras de preferencia por grupos para distintos valores de e_{max} .

4.3 Diagramas de densidades de consenso

Los *diagramas de densidades de consenso* representan la densidad de la distribución espacial de las distintas estructuras de preferencia; para ello utilizan la distribución de consenso expresada en (3.5), generando a partir de ella mediante simulación por

ordenador un conjunto de valores de la distribución y obteniendo a continuación las prioridades individuales estimadas como se ha hecho en §4.1. El número de valores ha de ser lo suficientemente grande como para poder calcular la densidad de las prioridades en cada punto del simplex, de manera que se puede obtener la distribución de densidades sobre éste. Dicha distribución puede representarse bien mediante un gráfico tridimensional o bien por medio de un diagrama que asigne distinta intensidad de color a cada punto en función de la densidad de éste.

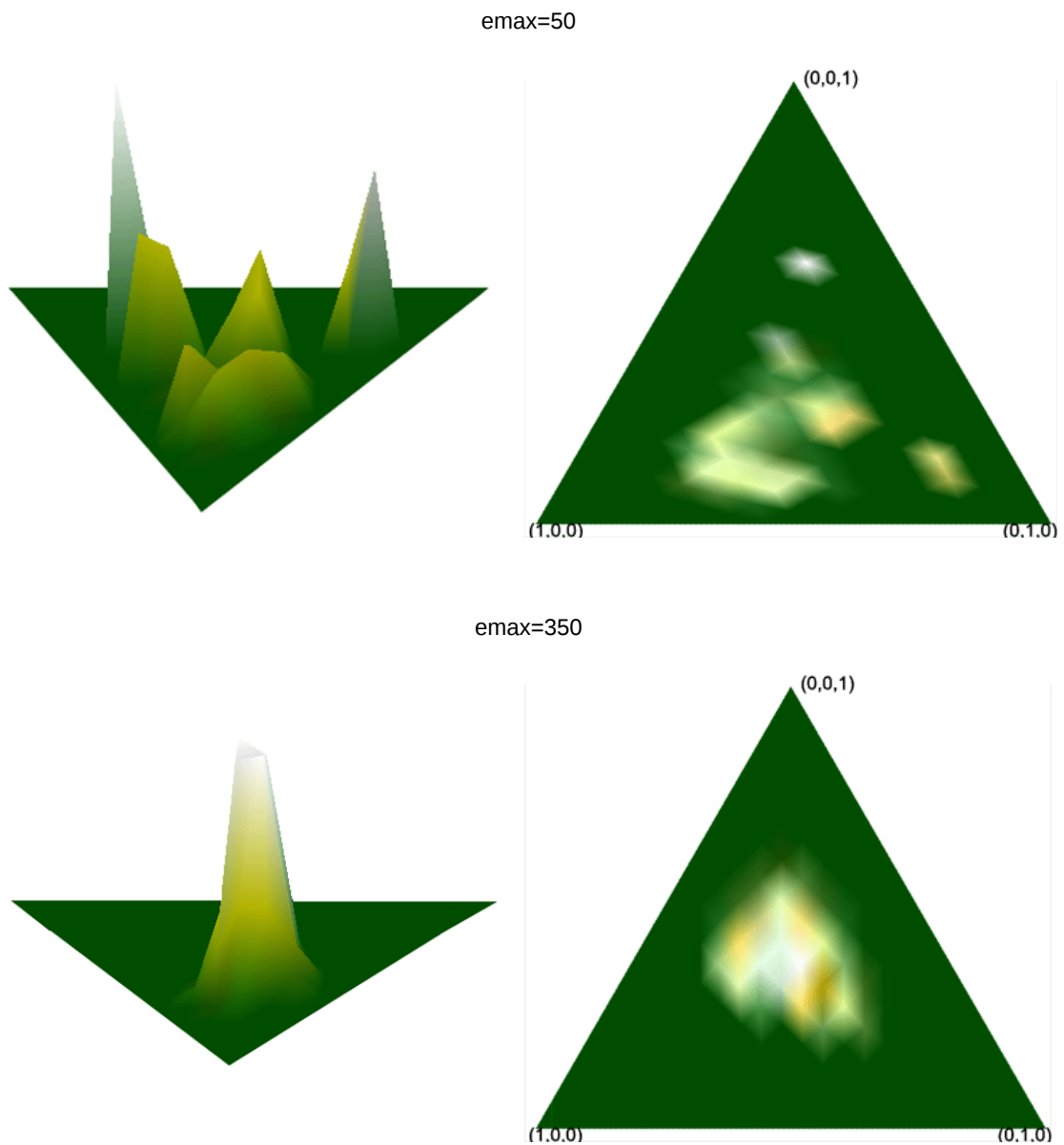


Figura 3. Diagramas triangulares representando las prioridades de consenso de los grupos para distintos valores de $e_{\max}$.

En la Figura 3 se muestran los gráficos de ambos tipos correspondientes a dos de los casos del ejemplo; puede observarse cómo la vista tridimensional proporcionan información más amplia sobre la posición relativa de cada decisor con respecto a su grupo de consenso, información en que los diagramas triangulares de §4.1 no es perceptible.

Los gráficos tridimensionales se han obtenido a partir de un modelo geométrico de los datos simulados generado por ordenador, lo que permite que el punto de vista pueda ser modificado de manera interactiva mediante una herramienta de visualización 3D, posibilidad de gran ayuda en la etapa de interpretación del gráfico y comprensión de los resultados por lo que supone de facilidad para identificar los patrones de comportamiento asociados a las distintas posturas, tanto individuales como colectivas, del conjunto de decisores.

5. Conclusiones.

A lo largo de este trabajo, se han presentado distintas representaciones gráficas que recogen el comportamiento de las estructuras de preferencia derivadas de la resolución del problema. Estas representaciones, entre las que se encuentran los *diagramas triangulares*, los *gráficos MDS* y los *diagramas de densidades de consenso*, capturan la evolución de los diferentes patrones de comportamiento detectados en la resolución del problema. A partir de las mismas se establecen diferentes caminos de consenso entre las opiniones de los actores implicados en la toma de decisiones.

Destacar, por último, que se ha presentado un nuevo gráfico tridimensional en el que se incorpora la distribución de los conglomerados representados por sus respectivos centroides. Dicho gráfico muestra la densidad de la distribución espacial de las distintas estructuras de preferencia, permitiendo así detectar los patrones presentes en el conjunto de las decisiones, y destacando además la importancia de los decisores en sus correspondientes grupos de consenso. La importancia de estos gráficos tridimensionales radica por un lado en la posibilidad de ser examinados de manera interactiva desde diferentes puntos de vista, mediante una herramienta de

visualización adecuada, y por otro en el aporte de información que representan con respecto a los diagramas triangulares al proporcionar, para cada grupo de consenso, información sobre la posición relativa de cada decisor en el mismo, dando una idea más clara de dónde se encuentran situados los individuos más próximos al consenso (en términos de las densidades de consenso) y cuáles son los más lejanos a éste.

Bibliografía:

Aguarón, J. y Moreno-Jiménez, J. M. (2003): “The Geometric Consistency Index: Approximated Thresholds”. *European Journal of Operational Research*, **147**(1), pp. 137-145.

Altuzarra, A.; Moreno-Jiménez, J. M. y Salvador, M. (2005): “Group Decision Making with AHP: A Bayesian Approach”. *Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad de Zaragoza* (en evaluación).

Asahi, T.; Turo, D.; Shneiderman, B. (1994): “Using treemaps to visualize the Analytic Hierarchy Process”. Technical Report CS-TR-3293, University of Maryland, Department of Computer Science.

Gargallo, P.; Moreno-Jiménez, J. M. y Salvador, M. (2005): “Una aproximación bayesiana para la búsqueda de consenso en AHP-GDM”. *XIX Reunión Asepelt-España*. Badajoz (CD).

Keim, D. A. (2002): “Information Visualization and Visual Data Mining”. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, **8**(1), pp. 1-8.

Moreno-Jiménez, J. M. (2002a): *Constructivismo Cognitivo en Decisiones Públicas* (documento privado).

Moreno-Jiménez, J. M. (2002b): “El Proceso Analítico Jerárquico. Fundamentos. Metodología y Aplicaciones”. En Caballero, R. y Fernández, G.M. Toma de decisiones con criterios múltiples. *RECT@ Revista Electrónica de Comunicaciones y Trabajos de ASEPUMA*, Serie Monografías **1**, 21-53.

- Moreno-Jiménez, J. M. y Vargas, L. G. (1993): "A Probabilistic Study of Preference Structures in the Analytic Hierarchy Process with Interval Judgements". *Mathematical Computer Modelling*, **17**(4/5), pp. 73-81.
- Moreno-Jiménez, J. M. (2003): "Las Nuevas Tecnologías y la Representación Democrática del Inmigrante". En ARENERE, J.: *IV Jornadas Jurídicas de Albarracín*. Consejo General del Poder Judicial. TSJA.
- Moreno-Jiménez, J. M.; Aguarón, J. y Escobar, M. T. (2002): "Decisional Tools for Consensus Building in AHP-Group Decision Making". *12th Mini-EURO Conference*, Bruselas.
- Moreno-Jiménez, J. M.; Aguarón, J.; Escobar, M. T. y Turón, A. (1999): "The Multicriteria Procedural Rationality on Sisdema". *European Journal of Operational Research*, **119**(2), pp. 388-403.
- Moreno-Jiménez, J. M.; Aguarón, J.; Raluy, A. y Turón, A. (2004): "A Spreadsheet Module for Consistent Consensus Building in AHP-Group Decision Making". Aceptado para su publicación en *Group Decision and Negotiation Journal*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (Holanda).
- Moreno-Jiménez, J. M. y Polasek, W. (2003): "E-Democracy and Knowledge. A Multicriteria Framework for the New Democratic Era". *Journal Multi-criteria Decision Analysis* **12**, 163-176.
- Saaty, T. L. (1980): *Multicriteria Decision Making: The Analytic Hierarchy Process*. McGraw Hill. New York.
- Shneiderman, B. (1996): "The Eye Have It: A Task by Data Type Taxonomy for Information Visualizations". *Visual Languages*.
- Turón, A.; Aguarón, J.; Moreno-Jiménez, J. M. y Raluy, A. (2003): "Visualización gráfica de las estructuras de preferencias en AHP". *Actas de la XVII Reunión ASEPELT-España*, Almería.

Turón, A. y Moreno-Jiménez, J. M. (2004): “Visualización de información en el Proceso Analítico Jerárquico (AHP)”. *Actas de la XVIII Reunión ASEPELT-España*, León.