

# **PREDICCIÓN DE LA VOLATILIDAD DE LOS RENDIMIENTOS DEL ÍNDICE GENERAL DE LA BOLSA DE MADRID: EL PAPEL DE LAS ASIMETRÍAS**

**Israel Senra Díaz\***

Departamento de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.

Universidad de Alcalá

e-mail: israel.senra@uah.es

**J. Bernardo Pena Trapero\***

Departamento de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.

Universidad de Alcalá

e-mail: bernardo.pena@uah.es

## **RESUMEN**

En este artículo se examina la capacidad predictiva de distintos modelos de la familia GARCH, para caracterizar la volatilidad de los rendimientos del Índice General de la Bolsa de Madrid (IGBM). Dado que la volatilidad es un componente inobservable, se toma un estimador insesgado de la misma como es el cuadrado de los rendimientos. Los distintos modelos de la familia GARCH se comparan individualmente frente al modelo GARCH(1,1) mediante el contraste de Diebold y Mariano (1995).

*Palabras Clave:* Volatilidad, asimetría, evaluación de predicciones, GARCH.

*Clasificación JEL:* C52; C53

---

\* Los autores agradecen la financiación recibida a través del Proyecto de Investigación PIUAH 2004/012 de la Universidad de Alcalá.

## **1. INTRODUCCIÓN.**

La modelización y predicción de la volatilidad del mercado ha sido un punto central de la investigación empírica y teórica durante la última década por parte de investigadores y profesionales del sector. La volatilidad es uno de los conceptos más importantes en el análisis de datos financieros. La volatilidad medida como la desviación típica o la varianza de los rendimientos, se utiliza frecuentemente como una medida del riesgo total del activo financiero. Muchos modelos de valoración de activos requieren la estimación o predicción de la volatilidad (inobservada). La volatilidad de los precios de mercado también es parte fundamental de la fórmula de Black-Scholes para valorar el precio de las opciones negociadas.

Existe un gran número de diferentes tipos de modelos no lineales, pero sólo un pequeño número de ellos han resultado útiles para modelizar datos financieros. De estos modelos los más populares son los ARCH de Engle (1982) y los GARCH de Bollerslev (1986), que utilizan una medida de volatilidad dependiente de los rendimientos al cuadrado. Los modelos de la familia ARCH-GARCH son capaces de recoger características habituales como la leptocurtosis o el agrupamiento de la volatilidad. No obstante, estos modelos necesitan ser ampliados para captar comportamientos asimétricos ante acontecimientos de distinto signo. En este artículo se consideran los modelos EGARCH de Nelson (1991), PARCH de Taylor (1986) y Schwert (1989) y los TARCH de Zakoian (1990) y Glosten, Jaganathan y Runkle (1993) como alternativas al modelo GARCH tradicional para captar las asimetrías. En el artículo de Núñez y Senra (2003) se recoge una amplia revisión de la literatura sobre modelización de índices bursátiles. Las alternativas asimétricas ya han sido demostradas útiles en predicción en otros trabajos, como el reciente de Awartani y Corradi (2005).

Generalmente estos modelos se evalúan por sus características en el período muestral disponible, pero ello no garantiza el mejor comportamiento predictivo. Así, el objetivo del artículo es caracterizar el modelo que mejor predice la volatilidad del Índice General de la Bolsa de Madrid (IGBM en adelante) de entre de los modelos

previamente mencionados y detectar así si la consideración de la presencia de asimetrías es útil frente al tradicional modelo GARCH.

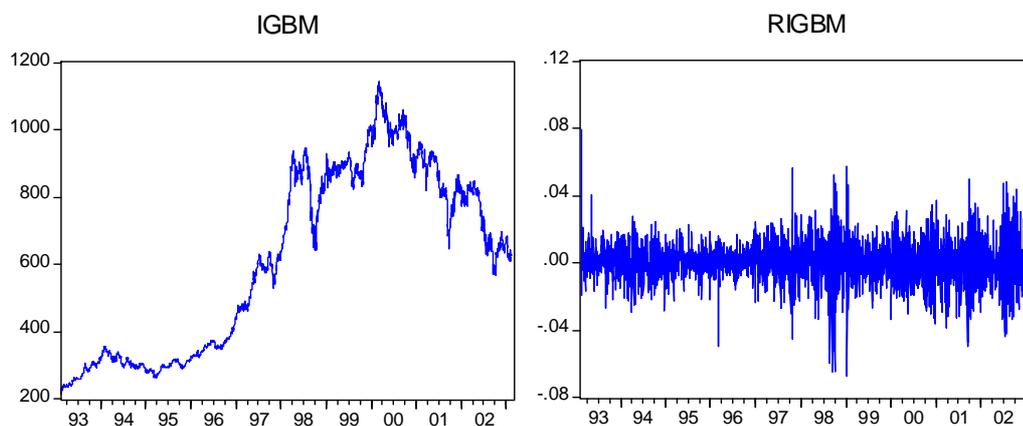
El artículo se estructura como sigue. En la sección 2 se realiza una estimación de la volatilidad del Índice General de la Bolsa de Madrid que será utilizado como referencia para evaluar los resultados en predicción de los distintos modelos. En la sección 3 se presentan los modelos que se van a utilizar para predecir la volatilidad. En la sección 4 se presentan los resultados de la estimación y la evaluación de las predicciones y por último en la sección 5 se ofrecen las principales conclusiones.

## **2. ESTIMACIÓN DE LA VOLATILIDAD DEL IGBM.**

El IGBM es el índice al que se refiere el presente trabajo. Con este índice se pretende obtener un visión lo más comprensiva posible del mercado de acciones español y cada año actualiza su composición teniendo en cuenta la capitalización bursátil de los valores admitidos o negociación en la Bolsa de Madrid a 31 de diciembre de cada ejercicio, y su composición y ponderación permanecen inalterados durante todo el año.

Se dispone de 10 años de observaciones de los datos diarios de cierre del Índice General de la Bolsa de Madrid, desde el 17 de febrero de 1993 hasta el 24 de febrero de 2003. El objetivo es caracterizar y predecir la volatilidad de los rendimientos del IGBM (RIGBM) calculados a partir de la primera diferencia del logaritmo del índice. La figura 1 muestra la evolución temporal tanto del índice IGBM como de sus rendimientos para el período muestral considerado.

**Figura 1:** *Evolución del índice IGBM y de sus rendimientos para el período 1993-2003.*



Los gráficos son suficientemente elocuentes para comprender el comportamiento de este índice desde 1993, no obstante es conveniente señalar algunos rasgos históricos para la mejor comprensión de lo acaecido en este lapso de tiempo. El periodo comprendido entre los años 1993 y 1996 se presenta una etapa de relativa atonía en la actividad económica española. Este último año representa el inicio de un periodo de dicha actividad en el marco de una economía europea en expansión, además se intensifican las inversiones de empresas españolas cotizadas en América Latina, registrándose tasas de crecimiento económico importantes también en dicha área.

La estabilidad alcista controlada por el indicador hasta el verano de 1998 parece interrumpirse como consecuencia de la crisis de las economías emergentes. Desde septiembre de 2000 –crisis de los mercados tecnológicos-, los mercados bursátiles de los países desarrollados inician una tendencia bajista que afecta a la generalidad de las empresas cotizadas en un contexto económico menos dinámico. En 2001 los países latinoamericanos vieron truncada la recuperación registrada por el adverso contexto externo aunque sus efectos fueron absorbidos sin pasar por crisis internas, a excepción de Argentina. Su impacto fue indudable en la bolsa española debido a los vínculos existentes entre las empresas españolas cotizadas y el tejido productivo y financiero argentino. La fase expansiva de la economía española se frenó en 2001. La

desaceleración fue menor que la registrada como promedio en la zona euro por lo que el diferencial de crecimiento se mantuvo positivo en relación con dichas economías. No obstante, la pauta inversora de las familias españolas en activos financieros se iba haciendo más conservadora en consonancia con el empeoramiento de las perspectivas económicas.

El ejercicio de 2001 se caracteriza por la incertidumbre –que crece a raíz de los acontecimientos del 11 de septiembre, que llevan a cuestionar las perspectivas de rentabilidad empresarial, especialmente en actividades turísticas y aseguradoras- y su reflejo en los mercados financieros es notable. El comportamiento del IGBM acusa la incertidumbre. Asimismo, crece la desconfianza de los inversores en el funcionamiento de los mercados, en particular los norteamericanos como consecuencia de la suspensión de pagos de la empresa de energía Enron. Sin embargo, en el último trimestre del ejercicio se produce una recuperación gradual de las cotizaciones bursátiles, que probaría que la percepción del impacto sobre los resultados empresariales no iba a ser tan negativa como inicialmente se había previsto. Además, las autoridades monetarias y económicas reaccionaron con la adopción de medidas, tanto en USA como en la zona euro, contribuyendo a mejorar la confianza en los mercados<sup>1</sup>.

Dado que la volatilidad no es una variable observable, se necesita una buena aproximación de la misma. Si la media condicional es cero, los rendimientos al cuadrado proporcionan un estimador insesgado del verdadero proceso subyacente que sigue la volatilidad. Si la media condicional no es cero, entonces se deben utilizar los residuos al cuadrado de la regresión de los rendimientos sobre una constante, su pasado y otros regresores si fueran necesarios. Si la media condicional estuviera mal especificada, los residuos al cuadrado no serían un estimador insesgado de la varianza condicional. En el caso de los rendimientos del IGBM, la media condicional sí que presenta estructura. De acuerdo con los modelos analizados el

---

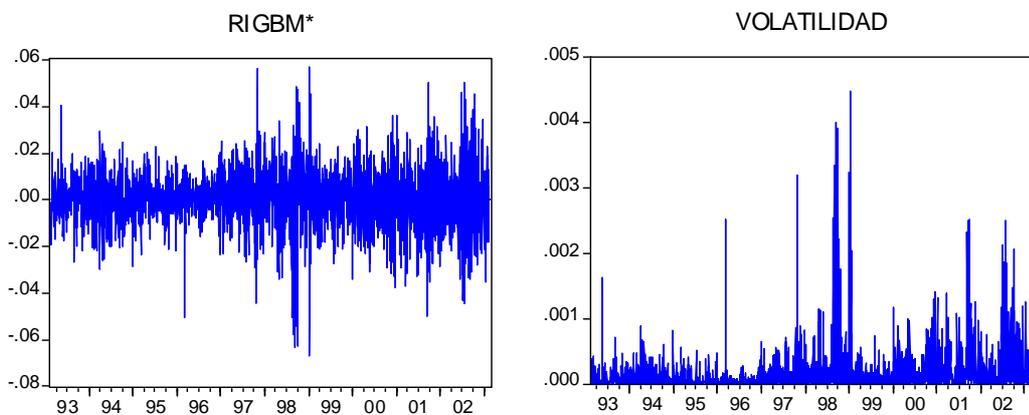
<sup>1</sup> Un tratamiento más exhaustivo sobre la evolución económica en este período puede verse, por ejemplo en [www.cmnv.es](http://www.cmnv.es)

siguiente modelo ARIMA(2,0,0) se presenta adecuado para modelizar la media condicional.

$$\left(1 - \underset{(-2.59)}{0.05 L} + \underset{(-2.06)}{0.04 L^2}\right) rigbm_t = \underset{(1.54)}{0.00035} + a_t$$

Por este motivo, se considera de ahora en adelante la serie  $rigbm_t^*$  que no presenta dinámica en su media, es decir, se considera la serie de residuos del modelo AR(2) previamente estimado. Así la estimación de la volatilidad en el momento t se realiza a partir del cuadrado de la serie  $rigbm_t^*$ . La figura 2 muestra la serie  $rigbm_t^*$  y la volatilidad estimada.

**Figura 2:** Serie de rendimientos descontada la dependencia en la evolución de su media ( $rigbm_t^*$ ) y estimación de la volatilidad.



A pesar de la insesgadez de la estimación de la volatilidad mediante los rendimientos al cuadrado, la capacidad predictiva de la misma es muy baja (el coeficiente de determinación en la regresión de los rendimientos al cuadrado frente a la volatilidad, no puede exceder 1/3), tal y como señalan Andersen y Bollerslev (1998). No obstante, Awartani y Corradi (2005) señalan la validez de esta aproximación cuando el objetivo es la comparación de la capacidad predictiva de distintos modelos, basándose en que si la función de pérdida es cuadrática, el uso de los rendimientos al

cuadrado asegura que se obtiene una ordenación correcta de los modelos respecto a su capacidad predictiva.

A partir de este momento, cuando el artículo se refiera a *volatilidad observada* se considerarán las estimaciones de la volatilidad condicional realizadas en este apartado.

### 3. MODELOS PARA CARACTERIZAR LA VOLATILIDAD CONDICIONAL.

Se dispone de la serie de rendimientos, descontada la dependencia en la media, por lo que

$$rigbm_t^* = \varepsilon_t \sigma_t$$

y se procede a continuación a analizar los modelos para caracterizar la evolución de la volatilidad condicional.

$$\sigma_t^2 = f(\varepsilon_{t-1}, \sigma_{t-1})$$

El modelo GARCH(1,1) fue originalmente propuesto por Bollerslev (1986) y es el que va a actuar como modelo de referencia a la hora de comparar los ajustes dentro de la muestra y las predicciones fuera de la muestra. En este modelo, la varianza condicional viene dada por la expresión:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

donde la varianza condicional depende de tres términos: (1) la media  $\omega$ , (2) las innovaciones sobre la volatilidad del período anterior, medidas mediante el residuo de la media retardado un período y (3) la varianza del período anterior.

Esta especificación se interpreta en el contexto financiero de forma que un agente predice la volatilidad del período actual mediante una media ponderada de la media a largo plazo, la información sobre la volatilidad del período anterior y la estimación que disponía en el último período. De esta forma, un rendimiento inesperadamente grande en cualquier dirección (al alza o a la baja) le llevará a revisar al alza la volatilidad el período siguiente. Este modelo es capaz de recoger los agrupamientos

de volatilidad que se observan en las series de rendimientos financieros, pero no es útil para captar comportamientos asimétricos ante innovaciones de carácter positivo o negativo.

No obstante, es frecuente observar en los rendimientos financieros que los movimientos a la baja en el mercado vienen seguidos de mayores volatilidades que los movimientos en dirección contraria. Es por eso, que se propone el uso de modelos capaces de recoger asimetrías como los modelos TARARCH, EGARCH o PARARCH, tal y como se ve a continuación.

El modelo TARARCH, o ARCH por umbrales, fue propuesto de forma independiente por Zakoian (1990) y Glosten, Jaganathan y Runkle (1993). La especificación de la varianza condicional viene dada por:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma \varepsilon_{t-1}^2 d_{t-1} + \beta \sigma_{t-1}^2$$

donde  $d_t = 1$ , si  $\varepsilon_t < 0$ , y 0 en otro caso. En este modelo, las buenas noticias ( $\varepsilon_t < 0$ ) y las malas noticias ( $\varepsilon_t > 0$ ) tienen un efecto diferente sobre la varianza condicional. Las buenas noticias tienen un impacto de magnitud  $\alpha$ , mientras que las malas noticias tienen un impacto de  $\alpha + \gamma$ . Si  $\gamma \neq 0$ , existe un efecto asimétrico, y si  $\gamma > 0$  se dice que existe efecto apalancamiento (*leverage*).

Se pueden estimar modelos TARARCH de orden mayor de la forma:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \gamma \varepsilon_{t-1}^2 d_{t-1} + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

Otro modelo capaz de recoger asimetrías es el modelo EGARCH ó modelo GARCH exponencial, propuesto por Nelson (1991). La especificación de la varianza condicional viene dada por:

$$\log(\sigma_t^2) = \omega + \beta \log(\sigma_{t-1}^2) + \alpha \left| \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right| + \gamma \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}}$$

Se puede observar que la varianza condicional viene transformada en logaritmos, y esta representación garantiza la no negatividad de la misma e implica que el efecto

apalancamiento es exponencial, en lugar de cuadrático. La presencia de efectos asimétricos ocurre cuando  $\gamma \neq 0$  y se puede hablar de efecto apalancamiento cuando  $\gamma < 0$ . Especificaciones de orden mayor son de la forma:

$$\log(\sigma_t^2) = \omega + \sum_{j=1}^p \beta_j \log(\sigma_{t-j}^2) + \sum_{i=1}^q \left( \alpha_i \left| \frac{\varepsilon_{t-i}}{\sigma_{t-i}} \right| + \gamma_i \frac{\varepsilon_{t-i}}{\sigma_{t-i}} \right)$$

El modelo PARCH, o ARCH potencial, modeliza las potencias de la desviación típica. Originalmente fue propuesto por Taylor (1986) y Schwert (1989) para modelizar las desviaciones típicas y posteriormente fue generalizado por Ding et al. (1993).

$$\sigma_t^\delta = \omega + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^\delta + \sum_{i=1}^p \left( \alpha_i \left| \varepsilon_{t-j} \right| - \gamma_i \varepsilon_{t-j} \right)^\delta$$

donde  $\delta > 0$ ,  $|\gamma_i| \leq 1$ ,  $i = 1, \dots, r$ ,  $\gamma_i = 0$ ,  $i > r$  y  $r \leq p$ . Obsérvese que si  $\delta = 2$  y todos los coeficientes  $\gamma_i$  son nulos, se tiene la especificación del modelo GARCH simétrico.

#### **4. RESULTADOS DE LA ESTIMACIÓN Y EVALUACIÓN DE LAS PREDICCIONES.**

Los modelos han sido estimados con el programa econométrico EViews versión 5.1 para el período muestral que abarca desde el 17 de febrero de 1993 hasta el 31 de diciembre de 2002, reservando las observaciones de 2003 restantes (hasta el 10 de febrero de 2003) para la evaluación de las predicciones.

La estimación se ha realizado utilizando el método de la máxima verosimilitud, suponiendo que una distribución de errores generalizados, de acuerdo con la propuesta de Nelson(1991) teniendo en cuenta que no puede admitirse que los datos considerados estén normalmente distribuidos.

El cuadro 1 recoge los modelos estimados, así como los criterios AIC y BIC.

**Cuadro 1: Modelos estimados**

Modelo	Ecuación	AIC	BIC
GARCH(1,1)	$\sigma_t^2 = 2.5E-06 + \underset{(6.42)}{0.07} \varepsilon_{t-1}^2 + \underset{(120.98)}{0.91} \sigma_{t-1}^2$	-6.127	-6.120
TARCH(1,1)	$\sigma_t^2 = 2.74E-06 + \underset{(4.61)}{-0.039} \varepsilon_{t-1}^2 + \underset{(3.41)}{0.07} \varepsilon_{t-1}^2 d_{t-1} + \underset{(39.25)}{0.88} \sigma_{t-1}^2$	-6.139	-6.128
EGARCH	$\log(\sigma_t^2) = \underset{(-6.28)}{-0.29} + \underset{(8.18)}{0.14} \left  \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right  - \underset{(-4.19)}{0.05} \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} + \underset{(216.86)}{0.98} \log(\sigma_{t-1}^2)$	-6.151	-6.140
PARCH	$\sigma_t^{1.69} = 1.11 \times 10^{-5} + \underset{(0.72)}{0.91} \sigma_{t-1}^{1.69} + \left( \underset{(5.96)}{0.07} \left  \varepsilon_{t-1} \right  - \underset{(3.73)}{0.28} \varepsilon_{t-1} \right)^{1.69}$	-6.152	-6.138

Fuente: Elaboración propia.

Tal y como se observa, según los criterios AIC y BIC, los modelos con mejor ajuste dentro de la muestra son los modelos asimétricos.

El análisis de capacidad predictiva con cada uno de los modelos se realiza de acuerdo con el siguiente esquema:

- 1) Se estima el modelo con información hasta el 31 de diciembre de 2002.
- 2) Se generan predicciones con horizonte a 1, 2 y 5 períodos por delante.
- 3) Se añade una observación más al modelo y se vuelve a estimar y a generar nuevas predicciones.
- 4) Se calculan las series de errores de predicción a 1, 2 y 5 períodos por delante obtenidas con las distintas predicciones realizadas.
- 5) Se calculan los estadísticos descriptivos de los errores de predicción. En particular, se calcula la *Raíz Cuadrada del Error Cuadrático Medio (RECM)* para comparar la precisión de las predicciones con los distintos modelos.

El cuadro 2 recoge la comparación de los resultados en predicción en términos del ratio del RECM de los diferentes modelos asimétricos sobre el RECM del modelo GARCH (utilizado como referencia) para los distintos horizontes de predicción. Un

ratio menor que la unidad significa que el modelo en cuestión mejora las predicciones del modelo de referencia.

**Cuadro 2:** *Ratio del RECM de los distintos modelos sobre el RECM del modelo GARCH (1,1)*

<b>Horizonte de predicción</b>	<b>1 período</b>	<b>2 períodos</b>	<b>5 períodos</b>
EGARCH	1.0066	0.9969	0.9962
TARCH	1.0092	0.9978	0.9897
PARCH	1.0075	0.9971	0.9872

Fuente: Elaboración propia.

Como se puede observar en el cuadro 2, no existen ganancias en predicción mediante la utilización de modelos asimétricos, mas complejos que el GARCH(1,1), considerando un periodo por delante, no obstante se aprecian algunas ganancias en las predicciones realizadas por lo mismos modelos utilizados a dos y cinco periodos.

Por ultimo, para evaluar si las diferencias son estadísticamente significativas con respecto al modelo de referencia se aplica el contraste debido a Diebold y Mariano (1995) (DM de ahora en adelante). La hipótesis nula establece la igualdad de los dos procedimientos de predicción en términos de una función de pérdida cuadrática,  $g(e)$ , sobre sus errores, es decir,  $E(d_t) = 0$ , donde  $d_t = g(e_{GARCH_t}) - g(e_{ASIM_t})$ . El estadístico del contraste de Diebold y Mariano (1995) viene dado por:

$$DM = \frac{\bar{d}}{\sqrt{\text{var}(\bar{d})}}$$

donde  $\bar{d}$  es la media muestral de la serie  $d_t$  y  $\text{var}(\bar{d})$  se calcula teniendo en cuenta la correlación serial en  $d_t$ . El estadístico DM sigue una distribución normal estándar bajo la hipótesis nula y su corrección por muestras finitas sigue una t de Student con  $l-1$  grados de libertad, donde  $l$  es el número de predicciones. El estadístico DM, así como el p-valor asociado para los distintos modelos considerados se presenta en el cuadro 3.

**Cuadro 3.** Estadístico DM y p-valores asociados.

<b>Horizonte de predicción</b>	<b>1 período</b>	<b>2 períodos</b>	<b>5 períodos</b>
EGARCH	7.78E-10 (0.7868)	-7.48E-10 (0.7678)	-3.65E-10 (0.8841)
TARCH	9.79E-09 (0.5922)	-7.40E-10 (0.6757)	-1.79E-09 (0.3993)
PARCH	19.79E-09 (0.5922)	-7.40E-10 (0.6757)	-1.79E-09 (0.3993)

Fuente: *Elaboración propia.*

El cuadro 3 muestra como los resultados de predicción obtenidos por los distintos modelos no presentan diferencias significativas.

## **6. CONCLUSIONES.**

En este artículo se ha presentado una primera aproximación al papel de las asimetrías en el análisis del índice IGBM a partir de distintos modelos de la familia GARCH. Los resultados dentro del período muestral estudiado indican que todos los modelos asimétricos analizados mejoran el ajuste realizado por el proceso GARCH(1,1).

Los resultados de predicción fuera de la muestra recogen, sin embargo, que el modelo GARCH(1,1) es el que mejor se comporta en el análisis de los errores a un período por delante, mientras que los modelos asimétricos consiguen ligeras ganancias en los errores a dos y cinco períodos. En cualquier caso, el contraste de Diebold y Mariano muestra que las diferencias no son significativas.

No obstante, los resultados de este trabajo deben ser considerados como una primera aproximación. En versiones posteriores, se realizarán varios cambios. En primer lugar, el período muestral reservado para evaluar las predicciones es excesivamente corto (enero y parte de febrero de 2003), de acuerdo con los datos disponibles, por lo que en una futura versión del artículo se prevé ampliar los resultados a la totalidad de 2003 y 2004. En segundo lugar, el artículo se basa en la estimación de la volatilidad en función de la correcta especificación de la media condicional. Sin embargo, tal y como hacen Awartani y Corradi (2005), será preciso analizar la robustez de los

resultados ante especificaciones alternativas de la media condicional, lo que sobrepasaría los objetivos del presente trabajo.

## 7. BIBLIOGRAFÍA.

1. Andersen, T.G, and Bollerslev, T. (1998), “DM-Dollar Volatility: Intraday Activity Patterns, Macroeconomic Announcements and Longer-Run Dependencies. *Journal of Finance*, **53**, 2190-265.
2. Awartani, B.M.A. and Corradi, V. (2005), “Predicting the volatility of the S&P-500 stock index via GARCH models: the role of asymmetries”. *International Journal of Forecasting*, **21**, 167-183.
3. Bollerslev, T. (1986), “Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity”, *Journal of Econometrics*, **31**, 307-327.
4. Brooks, C. (2002): *Introductory econometrics for finance*, Cambridge University Press.
5. Diebold, F. X. and Mariano, R. S. (1995), “Comparing Predictive Accuracy,” *Journal of Business and Economic Statistics*, **13**, 253-263.
6. Glosten, L.R., Jagannathan, R. & Runkle, D.E. (1993). On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *Journal of Finance*, **48**, 1779-801.
7. Engle, R.F. (1982). Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of Variance of U.K. Inflation. *Econometrica*, **50**, 987-1007.
8. Nelson, D.B. (1991) Condicional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach, *Econometrica* **59**(2), 347-70.
9. Núñez, J.J. y Senra, E. (2003). “Tendencias actuales en la modelización de índices bursátiles”. Publicado en *Información económica y técnicas de análisis*

*en el siglo XXI. Homenaje a J.B. Pena* (Casas, J.M. y Pulido, A., coords.). Ed. INE, 243-254.

10. Schwert, W. (1989), "Stock Volatility and Crash of '87", *Review of Financial Studies*, **3**, 77-102.
11. Taylor, S. (1986), *Modelling Financial Time Series*, New York: John Wiley & Sons.
12. Zakoian, J.M. (1994), "Threshold Heteroskedastic Models", *Journal of Economic Dynamics and Control*, **18**, 931-944.